

Introducción

Podemos decir actualmente que el Análisis Funcional es la tendencia abstracta del Análisis, la cual comenzó a ser desarrollada por algunos matemáticos europeos en los años de las dos primeras décadas del pasado siglo XX. Entre esos matemáticos destacan Fredholm, Volterra, Hilbert, y Riesz. Inicialmente estos matemáticos resolvieron problemas de ecuaciones integrales, autovalores de operadores, y desarrollos ortogonales.

También uno de los principales pioneros en el desarrollo de esta rama de la Matemática, fue el polaco S. Banach el cual compaginó en su libro publicado en el año de 1932 y reeditado en 1987 con título “ THEORY OF LINEAR OPERATIONS ” [1] mucho de los principales resultados conocidos hasta ese tiempo.

Nuestro propósito fundamental al redactar este libro, es desarrollar algunos tópicos básicos del Análisis Funcional tratando digamos a un nivel intermedio la teoría de los espacios normados, la de los espacios de Banach, y también la de los operadores lineales acotados.

Nuestro texto se desarrolla a través de tres Capítulos. El primer Capítulo el cual llamamos “ Espacios Normados ” se ha dividido en cuatro Secciones. A nuestra primera Sección se la ha denominado Definiciones y Resultados Preliminares porque allí damos algunas de las nociones de uso más frecuente en el Análisis Funcional, como el de conjunto absorbente, balanceado y convexo; capsula convexa, norma, espacio normado y algunas propiedades de la norma. También se dan algunos conceptos topológicos, habiendo definido previamente la topología fuerte de un espacio normado.

En la segunda Sección se da inicialmente el concepto de sucesión en un espacio normado, para después pasar a caracterizar los elementos de la clausura de un subconjunto de un espacio normado como límites de sucesiones de elementos de este. También, introduciendo previamente el concepto de función continua de un espacio topológico (X, τ_1) en otro (Y, τ_2) se muestra, un Teorema de Continuidad Global, y después una consecuencia del mismo como lo es el Teorema de Conservación de Compacidad.

La Sección 1.3 contiene una buena lista de Ejercicios propuestos como Ejemplos y en cada uno de ellos hemos dado los detalles de la solución. Finalmente, la última Sección presenta una variedad de Ejercicios que el lector debe resolver [en donde en algunos de ellos se introducen nuevos conceptos].

En el segundo Capítulo trata sobre espacios de Banach. En la Sección 2.1 se demuestra las desigualdades clásicas de Holder, y de Holder - Minkowsky en la Sección 2.2 se da la noción de espacio de Banach dada por S. Banach. Entre otras Proposiciones y Resultado mostramos un Teorema de Caracterización para espacio de Banach. [Teorema 2.2.9].

En la Sección 2.3 damos algunos Ejemplos de espacios de Banach. Entre otros mostramos con respecto a una norma definida previamente la completitud de los espacios de sucesiones

$$l^p \ (p \geq 1); \quad c_0; \quad \text{y} \quad l_\infty.$$

También en nuestra Sección 2.4 además de definir espacio de Banach separable, damos una Demostración del Lema de Riesz, y en (2.5) presentamos nuestra lista de Ejercicios.

El tercer Capítulo trata sobre operadores lineales acotados en la primera Sección, se ha motivado el concepto de acotación de un operador lineal, de hecho de que toda transformación lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m es acotada. Introduciendo después, para un operador lineal T las nociones de acotación y continuidad se muestra en la Proposición 3.1.7 que:

$$T \text{ es acotado} \iff T \text{ es continuo.}$$

Ahora bien, definiendo los espacios $L(X, Y)$ y $B(X, Y)$ mostraremos en el Teorema 3.1.11 que $B(X, Y)$ es un espacio de Banach en la norma:

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}.$$

En la Sección 3.2 específicamente en el Teorema 3.2.6, se muestra que en “DIMENSION FINITA TODAS LAS NORMAS SON EQUIVALENTES”. También damos el importante concepto de operador cerrado.

La Sección 3.3 da una lista de Ejemplos de operadores lineales acotados. Entre otros, destacan el operador de Fredholm; el operador Shift [a la izquierda y a la derecha], y la proyección canónica. Mostramos como un Ejemplo también un Teorema de extensión de operadores; y dando la Definición de operador compacto se muestra que el operador de Fredholm lo es.

Al final en la Sección 3.4 presentamos nuestra lista de Ejercicios a resolverse.

Esperamos que este texto se de utilidad aquellos estudiantes que comienzan con el estudio de esta importante área de las Matemáticas.

Índice general

Introducción	1
1. Espacios Normados	7
1.1. Definiciones y Resultados Preliminares.	7
1.2. Continuidad	21
1.3. Ejemplos Resueltos	37
1.4. Comentario final del Capítulo 1	62
1.5. Ejercicios Propuestos.	63
2. Espacios de Banach	71
2.1. Desigualdades clásicas en Análisis Funcional.	71
2.2. Espacios de Banach. Teoría Básica. Ejemplos y ejercicios.	78
2.3. Algunos Ejemplos de Espacios de Banach.	98
2.4. Separabilidad de un espacio normado y Ejemplos. El Lema de Riesz.	115
2.5. Comentario final del Capítulo 2	119
2.6. Ejercicios Propuestos	120
3. Operadores Lineales Acotados	125
3.1. Noción de acotación de un operador lineal. El espacio de $B(X, Y)$	125
3.2. Normas Equivalentes. Noción de operador cerrado	141
3.3. Algunos ejemplos de operadores lineales acotados	153
3.4. Comentario final del Capítulo 3	165
3.5. Ejercicios Propuestos	166
Bibliografía	171

Capítulo 1

Espacios Normados

1.1. Definiciones y Resultados Preliminares.

Comenzaremos esta Sección recordando el concepto de espacio vectorial, por ser ésta una de las más importantes estructuras algebraicas que son objeto de estudio en el Análisis Funcional Lineal.

En lo que sigue, a menos que explícitamente se especifique lo contrario, el símbolo \mathbb{F} denotará el cuerpo de los números reales ó complejos.

Definición 1.1.1 *Sea X un conjunto no vacío (abstracto). Supóngase que en el conjunto $X \times X$ está definida una operación llamada “suma” y en $\mathbb{F} \times X$ otra operación denominada multiplicación por escalar, tal que si*

$(x, y) \in X \times X$ y $(\alpha, x) \in \mathbb{F} \times X$ el resultado de cada una de éstas operaciones sobre éstos elementos es otro elemento de X denotado por $x + y$ y αx respectivamente, y que además se verifican las siguientes propiedades:

$$(P_1) \quad x + y = y + x, \quad \forall x, y \in X \text{ [Propiedad Conmutativa].}$$

$$(P_2) \quad x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x, y, z \in X \text{ [Propiedad Asociativa].}$$

(P₃) *Existe un único elemento en X denotado por 0 y tal que*

$$x + 0 = 0 + x, \quad \forall x \in X.$$

Éste elemento se llama el elemento neutro para la suma.

(P₄) Para cada $x \in X$, existe un único elemento $-x \in X$ tal que:

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

El elemento $-x$ se llama el simétrico aditivo de $x \in X$

(P₅) $1x = x$, $\forall x \in X$, 1 es la identidad de \mathbb{F}

(P₆) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $x \in X$

(P₇) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $x \in X$

(P₈) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $\alpha \in \mathbb{F}$, $x, y \in X$.

Entonces, X se llama un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{F} . Los elementos de X se llaman vectores.

Observación 1.1.1 (a) Se supone que el lector de este libro está familiarizado con los hechos básicos de la teoría de espacios vectoriales. De todas formas recomendamos tener a la mano un libro de Álgebra Lineal [por ejemplo [7]] en el momento de leerlo.

(b) Las operaciones de suma y multiplicación por escalar de un espacio vectorial X inducen las funciones:

$$\varphi_1 : X \times X \longrightarrow X$$

y,

$$\varphi_2 : \mathbb{F} \times X \longrightarrow X$$

definidas por:

$$\varphi_1(x, y) = x + y$$

$$\varphi_2(\alpha, x) = \alpha x$$

respectivamente.

Definición 1.1.2 Sea X un espacio vectorial. Un subconjunto no vacío S de X se llama un subespacio vectorial de X si:

$$\alpha x + \beta y \in S \quad \forall x, y \in X, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{F}.$$

Así, si S es un subespacio vectorial de X , entonces, $0 \in S$.

Definición 1.1.3 Sean X un espacio vectorial, $x_0 \in X$ y $\lambda \in \mathbb{F}$ entonces, si A es un subconjunto no vacío de X , definimos:

(a) $x_0 + A := \{x_0 + a : a \in A\}$

(b) $x_0 - A := \{x_0 - a : a \in A\}$

(c) $\lambda A := \{\lambda a : a \in A\}$

Si B es otro subconjunto no vacío de X entonces:

(d) $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$

Definición 1.1.4 Un subconjunto A de un espacio vectorial X se dice:

(a) Convexo: Si el “segmento de recta” $\lambda x + (1 - \lambda)y$ queda contenida en A , $\forall x, y \in A$, $0 \leq \lambda \leq 1$, esto es:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in A, \quad \forall x, y \in A, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

(b) Balanceado: Si $\lambda A \subset A$, cuando $|\lambda| \leq 1$.

(c) Absorbente: Si para cada $x \in X$, existe un $\lambda > 0$ tal que $x \in \lambda A$.

Con el propósito de caracterizar los subconjuntos convexos de un espacio vectorial damos la siguiente Definición:

Definición 1.1.5 Sea X un espacio vectorial. Un $x \in X$ se dice una combinación convexa de los elementos x_1, x_2, \dots, x_n de X si existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ en \mathbb{R} con $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ y $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ tal que:

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

Proposición 1.1.6 Un subconjunto K de un espacio vectorial X es convexo si y sólo si cualquier combinación convexa de puntos de K es un punto de K .

Demostración.

(\Leftarrow) Sean $x, y \in K$, entonces, por la hipótesis el elemento

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y \in K,$$

para $0 \leq \lambda \leq 1$. Así, K es convexo.

(\Rightarrow) Supóngase que K es convexo y $S := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un número finito cualquiera de elementos de K .

Procederemos por inducción sobre n .

Si $n = 1$, es evidente.

Si $n = 2$, y $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, entonces, es claro que $0 \leq \lambda_1 \leq 1$ y $0 \leq \lambda_2 \leq 1$ y así

$$z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in K.$$

Supóngase que el resultado es cierto para n elementos x_1, x_2, \dots, x_n en K , esto es,

$$z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \in K, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

Sea $x_{n+1} \in K$. Veamos que:

$$r = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in K, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$$

Consideremos los casos siguientes:

Caso 1. Cuando $\lambda_{n+1} = 1$, entonces, $\lambda_i = 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$, y así, $r \in K$.

Caso 2. Cuando $0 \leq \lambda_{n+1} < 1$. Sea

$$\beta_i = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Entonces,

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} = 1$$

Luego, por la hipótesis de inducción:

$$\sum_{i=1}^n \beta_i x_i \in K$$

y ya que K es convexo, entonces,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + (1 - (1 - \lambda_{n+1})) x_{n+1} \in K$$

lo cual concluye la demostración. \square

A continuación introducimos el importante concepto de cápsula convexa.

Definición 1.1.7 Sea A un subconjunto no vacío de un espacio vectorial X . La cápsula convexa de A denotada por $\text{co}(A)$ es:

$$\text{co}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i : x_i \in X, \alpha_i \geq 0 \ i = 1, 2, \dots, n, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}$$

Es fácil verificar usando la caracterización dada en la Proposición anterior que $\text{co}(A)$ es un subconjunto convexo de X , y además es el convexo “más pequeño” de X que contiene a A , esto es,

$$\text{co}(A) := \bigcap_{\substack{A_\alpha \text{ convexo} \\ A_\alpha \supset A}} A_\alpha$$

Si A es un subconjunto no vacío de un espacio vectorial X es fácil verificar que el conjunto:

$$\text{sp}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i : \alpha_i \in \mathbb{F}, x_i \in A, i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

es un subespacio vectorial de A , y se llama el subespacio vectorial real generado por A . Note que $\text{co}(A) \subset \text{sp}(A)$.

A continuación se introduce el importante concepto de norma sobre un espacio vectorial.

Definición 1.1.8 Sea X un espacio vectorial. Una función,

$$\begin{aligned} \|\cdot\| &: X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

que verifique las siguientes propiedades:

$$(A1) \quad \|x\| \geq 0 \quad \text{y} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0.$$

$$(A2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \lambda \in \mathbb{F}, \quad x \in X$$

$$(A3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in X,$$

se llama una norma sobre X . Al par $(X, \|\cdot\|)$ se le llama un espacio normado.

La propiedad (A3) se llama la desigualdad triangular.

Toda norma verifica la importante desigualdad dada en la siguiente proposición.

Proposición 1.1.9 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Entonces,

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X \quad (1,1,11)$$

Demostración.

Recordemos que si $a > 0$, entonces:

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a.$$

Así,

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \iff -\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Expresando:

$$x = (x - y) + y, \quad \text{entonces} \quad \|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

$$\text{Luego,} \quad \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Expresando:

$y = (y - x) + x$, entonces $\|y\| \leq \|y - x\| + \|x\|$, luego
 $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$, esto es, $-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\|$, lo
 que concluye la demostración. \square

Con la finalidad de definir una topología en el espacio vectorial $(X, \|\cdot\|)$, recordaremos la definición siguiente:

Definición 1.1.10 Sea X un conjunto no vacío. Una función,

$$d : X \oplus X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto d(x, y)$$

se llama una métrica sobre X si verifica las siguientes propiedades:

$$(A1) \quad d(x, y) \geq 0 \quad y \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$(A2) \quad d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in X$$

$$(A3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad \forall x, y, z \in X. \quad (\text{Desigualdad triangular})$$

Al par (X, d) se le llama un espacio métrico.

Proposición 1.1.11 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. La función.

$$d : X \oplus X \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X$$

es una métrica sobre X .

Demostración.

Es fácil verificar (A1) y (A2). Por otra parte como,

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\|$$

$$\leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$$

$\forall x, y, z \in X$, obtenemos también que (A3) es cierta.

Así, todo espacio normado es un espacio métrico, con la métrica

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X.$$

□

Definición 1.1.12 Sea X un conjunto no vacío. Una colección τ de subconjuntos de X se llama una topología para X si se satisfacen las siguientes propiedades:

(A1) $\phi, X \in \tau$.

(A2) Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \tau$, donde I es un conjunto de índices de cardinalidad arbitraria, $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$.

(A3) Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \tau$, entonces $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$.

Al par (X, τ) se le llama un espacio topológico. Los elementos de la colección τ se llaman conjuntos abiertos.

Si (X, τ) es un espacio topológico, un subconjunto B de X se llama cerrado si su complemento $B^c = X \setminus B$ es abierto en X , esto es $B^c \in \tau$.

Definición 1.1.13 Sea (X, τ) un espacio topológico.

(a) Una vecindad de un $x \in X$ es un subconjunto G de X , que contiene algún abierto A que contiene a $\{x\}$, esto es,

$$x \in A \subset G$$

(b) La topología τ se dice Hausdorff (ó T_2) si dados $x, y \in X$, existen vecindades V_x de x y V_y de y tal que

$$V_x \cap V_y = \phi.$$

Definición 1.1.14 Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, y d la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|$. Sea $x_0 \in X$, y $r > 0$ entonces,

(a) La bola abierta de centro x_0 y radio r es:

$$B(x_0, r) := \left\{ x \in X : d(x, x_0) = \|x - x_0\| < r \right\}$$

(b) La bola cerrada de centro x_0 y radio r es:

$$\overline{B}(x_0, r) := \left\{ x \in X : d(x, x_0) = \|x - x_0\| \leq r \right\}$$

Definición 1.1.15 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Un subconjunto no vacío A de X se dice abierto si para cada $x \in A$ existe un $r_x > 0$ tal que:

$$B(x, r_x) \subset A.$$

El conjunto vacío ϕ lo consideramos como un abierto en X ya que inicialmente no existe ningún elemento en él que niegue nuestra definición.

Proposición 1.1.16 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Entonces,

- (a) X es un conjunto abierto.
- (b) Si $x_0 \in X$, y $r > 0$, entonces $B(x_0, r)$ es un conjunto abierto.
- (c) $\overline{B}(x_0, r)$ es un conjunto cerrado en X .

Demostración.

- (a) Evidente.
- (b) Sea $x_1 \in B(x_0, r)$. Tomemos $r_1 = r - d(x_0, x_1)$, entonces $r_1 > 0$ y si $z \in B(x_1, r_1)$ vamos a tener que:

$$\begin{aligned} d(z, x_0) &= \|z - x_0\| = \|z - x_1 + x_1 - x_0\| \\ &\leq \|z - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \\ &< r_1 + \|x_1 - x_0\| \\ &= r - d(x_0, x_1) + \|x_1 - x_0\| = r \end{aligned}$$

Por tanto, $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$ y así $B(x_0, r)$ es abierto en X .

(c) Para verificar que $\overline{B}(x_0, r)$ es un conjunto cerrado, mostraremos entonces que:

$$\overline{B}^c(x_0, r) := \left\{ z \in X : d(z, x_0) = \|z - x_0\| > r \right\}$$

es un conjunto abierto. En efecto, sea $z_0 \in \overline{B}^c(x_0, r)$ y tomemos $r_1 = d(x_0, z_0) - r > 0$. Afirmamos que $B(z_0, r_1) \subset \overline{B}^c(x_0, r)$. En efecto, sea $z \in B(z_0, r_1)$. Entonces,

$$\|z_0 - x_0\| = \|z_0 - z + z - x_0\| \leq \|z_0 - z\| + \|z - x_0\|,$$

como $\|z_0 - x_0\| = r_1 + r$, obtenemos:

$$r_1 + r \leq \|z_0 - z\| + \|z - x_0\| < r_1 + \|z - x_0\|$$

esto es, $\|z - x_0\| > r$, lo que concluye la demostración. \square

Proposición 1.1.17 Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y τ la siguiente colección de subconjuntos de X

$$\tau := \left\{ E \subset X : E \text{ es abierto en el sentido de la Definición 1.1.6} \right\}$$

Entonces τ es una topología para X y se llama la topología fuerte de X .

Demostración.

Debemos verificar los axiomas (A1), (A2) y (A3) de la Definición 1.1.12.

La propiedad (A1) es evidente. Verificaremos (A2). Sea $\{A_\alpha\} \subset \tau$.

Veamos que $\bigcup_{k \in I} A_k \in \tau$. En efecto, si $x \in \bigcup_{k \in I} A_k$, entonces

$x \in A_{k_0}$ para algún índice α_0 . Como A_{k_0} es abierto, existe un $r_{k_0} > 0$ tal que $B(x, r_{k_0}) \subset A_{k_0}$, y por tanto $B(x, r_{k_0}) \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Verificaremos ahora

(A3). Sea $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \tau$, y $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$; entonces $x \in A_i$, para $i = 1, 2, 3, \dots, n$,

y por tanto existe $\gamma_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ tal que $B(x, \gamma_i) \subset A_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.
Sea $\gamma = \min\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$, entonces $B(x, \gamma) \subset A_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$

y por tanto $B(x, \gamma) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$. □

Proposición 1.1.18 La topología τ dada la Proposición 1.1.18 es Hausdorff (ó T_2).

Demostración.

Sean $x, y \in X$, $x \neq y$, entonces $d(x, y) = \|x - y\| > 0$. Tomese

$$\gamma = \frac{\|x - y\|}{4}.$$

Afirmamos que $B(x, \gamma) \cap B(y, \gamma) = \phi$. En efecto, si en caso contrario $B(x, \gamma) \cap B(y, \gamma) \neq \phi$, existe un $z \in B(x, \gamma) \cap B(y, \gamma)$, luego

$$\|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| < \frac{\|x - y\|}{4} + \frac{\|x - y\|}{4}$$

lo cual es una contradicción. □

Daremos ahora las siguientes definiciones:

Definición 1.1.19 Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $A \subset X$, entonces,

(a) El interior de A denotado por $\text{int}(A)$ es:

$$\text{int}(A) := \left\{ x \in A : \text{existe un } \gamma > 0 \text{ tal que } B(x, \gamma) \subset A \right\}$$

(b) La frontera de A , denotada por ∂A es:

$$\partial A := \left\{ x \in X : \text{para cada } r > 0, B(x, r) \cap A \neq \phi, B(x, r) \cap A^c \neq \phi \right\}$$

(c) El exterior de A denotado por $\text{ext}(A)$ es:

$$\text{ext}(A) := \text{int}(A^c)$$

Definición 1.1.20 Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $A \subset X$. Un $x_0 \in X$ se llama un punto de acumulación de A si cada vecindad de x_0 contiene un punto de A diferente de x_0

Nota 1.1.21 La Definición 1.1.20 expresa que si V_{x_0} es cualquier vecindad de x_0 en $(X, \|\cdot\|)$, entonces:

$$\widehat{V}_{x_0} \cap A \neq \phi$$

donde $\widehat{V}_{x_0} := V_{x_0} \setminus \{x_0\}$. Ya que $B(x_0, r)$ es una vecindad de x_0 , para cada $r > 0$, entonces x_0 es un punto de acumulación de A si y sólo si

$$\widehat{B}(x_0, r) \cap A \neq \phi$$

donde también $\widehat{B}(x_0, r) := B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$

Denotamos por:

$$A' := \left\{ x \in X : x \text{ es un punto de acumulación de } A \right\}$$

Definición 1.1.22 Un subconjunto A de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se dice acotado si existe un $M > 0$ tal que:

$$\|x\| \leq M, \quad \forall x \in A.$$

Es claro que $B(x_0, r)$ y $\overline{B}(x_0, r)$ son subconjuntos acotados.

La siguiente Proposición nos permite caracterizar los subconjuntos cerrados en un espacio normado.

Proposición 1.1.23 Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $A \subset X$. Entonces,

$$A \text{ es cerrado} \iff A' \subset A.$$

Demostración.

(\Rightarrow) Supóngase que A es cerrado en $(X, \|\cdot\|)$ pero $A' \not\subset A$. Entonces, existe algún $x \in A'$ tal que $x \notin A$. Luego $x \in A^c$ y como A es cerrado, A^c es abierto, por tanto existe un $r > 0$ tal que:

$$B(x, r) \subset A^c.$$

Pero por otra parte, como $x \in A'$,

$$\widehat{B}(x, r) \cap A \neq \phi$$

se sigue entonces, que $A \cap A^c \neq \phi$ lo cual es una contradicción. Así, $A' \subset A$.

(\Leftarrow) Recíprocamente, sea $A' \subset A$ y $x \in A^c$. Entonces $x \notin A$ y así también por la hipótesis $x \notin A'$, luego existe un $r > 0$ tal que

$$\widehat{B}(x, r) \cap A = \phi$$

En consecuencia, $B(x, r) \subset A^c$, con lo cual concluimos que A^c es abierto, y así $(A^c)^c = A$ es cerrado. \square

Seguidamente damos la importante Definición de clausura de un subconjunto de un espacio normado.

Definición 1.1.24 Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $A \subset X$.

La clausura de A denotada por \overline{A} es el conjunto cerrado más pequeño de X que contiene a A , esto es, si:

\mathbb{F} es otro cerrado en $(X, \|\cdot\|)$ tal que $\mathbb{F} \supset A$, entonces $\mathbb{F} \supset \overline{A}$.

Es claro que $\overline{A} = \bigcap_{\substack{\mathbb{F}_\alpha \\ \mathbb{F}_\alpha \text{ cerrado} \\ \mathbb{F}_\alpha \supset A}} \mathbb{F}_\alpha$; y que A es cerrado si y sólo

si $\overline{A} = A$. Queremos ahora mostrar que $\overline{A} = A \cup A'$. Para esto mostraremos inicialmente lo siguiente:

Proposición 1.1.25 Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $A \subset X$. Entonces $A \cup A'$ es un conjunto cerrado.

Demostración.

Veamos que $(A \cup A')^c$ es un conjunto abierto. Sea entonces $x \in (A \cup A')^c = A^c \cap (A')^c$, luego $x \in A^c$ y $x \in (A')^c$, y así $x \notin A$ y $x \notin A'$. De la Definición de A' existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \cap A = \phi$ y así, $B(x, \epsilon) \subset A^c$. Afirmamos ahora que $B(x, \epsilon) \subset (A')^c$. En efecto, sea $y \in B(x, \epsilon)$. Como $B(x, \epsilon)$ es un conjunto abierto, existe un $r > 0$ tal que $B(y, r) \subset B(x, \epsilon)$. Ahora bien, como $B(x, \epsilon) \cap A = \phi$, también

$B(y, r) \cap A = \phi$, y por tanto $y \notin A'$, luego $y \in (A')^c$. Como y es arbitrario en $B(x, \epsilon)$ se concluye que $B(x, \epsilon) \subset (A')^c$, lo cual finaliza la demostración. \square

Proposición 1.1.26 Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $A \subset X$. Entonces

$$\overline{A} = A \cup A'$$

Demostración.

Tenemos que:

$$\overline{A} = A \cup A' \Leftrightarrow \overline{A} \subset A \cup A' \subset \overline{A}$$

Como $A \cup A'$ es cerrado por la proposición anterior y $A \cup A' \supset A$, se sigue que $A \cup A' \supset \overline{A}$. Por otra parte, si $x \in A \cup A'$, entonces $x \in A$ ó $x \in A'$. Si $x \in A$, también $x \in \overline{A}$, y si $x \in A'$ se tiene que

$$\widehat{B}(x, \epsilon) \cap A \neq \phi \quad \text{para cada } \epsilon > 0$$

y así

$$\widehat{B}(x, \epsilon) \cap \overline{A} \neq \phi \quad \text{para cada } \epsilon > 0$$

Esto es, $x \in (\overline{A})'$. Como \overline{A} es un conjunto cerrado se sigue de la Proposición 1.1.23 que $x \in \overline{A}$. \square

Hasta aquí la primera sección del Capítulo 1.

1.2. Continuidad

Esta sección contiene algunas caracterizaciones de función continua definida sobre un subconjunto de un espacio normado en otro. También mostraremos un importante Teorema sobre continuidad global. [Teorema 1.2.16]

Inicialmente comenzamos dando la siguiente Definición:

Definición 1.2.1 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Una sucesión en X es el rango de una función:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\longrightarrow X \\ n &\longmapsto f(n) = x_n \end{aligned}$$

x_n se llama el término n -ésimo de la sucesión. El rango lo denotamos por $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ y lo llamamos una sucesión en X . Si $\left\{n_k : k \in \mathbb{N}\right\}$ es un subconjunto de \mathbb{N} tal que $n_1 < n_2 < \dots$, entonces $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ se llama una subsucesión de la sucesión $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$

Definición 1.2.2 Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X . Decimos que $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente a un $x \in X$ si dado $\epsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x_n - x\| < \epsilon \quad \text{si} \quad n \geq n_0$$

En caso contrario se dice que $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ no es convergente (ó divergente).

Si $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente a $x \in X$, decimos también que x es el límite de x_n cuando $n \rightarrow \infty$ y escribimos,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ en la topología de la norma } \|\cdot\|$$

Es claro por el hecho de ser la topología inducida por la norma T_2 que si $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, su límite es único.

Proposición 1.2.3 Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente en X , entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada.

Demostración.

Veamos que existe un $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$ para $n = 1, 2, \dots$. Sea,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Entonces, dado $\varepsilon = 1$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x_n - x\| < 1 \quad \text{si} \quad n \geq n_0,$$

pero por la Proposición 1.1.10,

$$\left| \|x_n\| - \|x\| \right| \leq \|x_n - x\| < 1, \quad \text{si} \quad n \geq n_0$$

Luego,

$$-1 < \|x_n\| - \|x\| < 1 \quad \text{si} \quad n \geq n_0$$

esto es,

$$\|x_n\| < 1 + \|x\| \quad \text{si} \quad n \geq n_0.$$

Sea $M = \max \left\{ \|x_1\|, \|x_2\|, \dots, \|x_{n_0-1}\|, 1 + \|x\| \right\}$, entonces, es evidente que

$$\|x_n\| \leq M \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

y así, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada. □

La siguiente Proposición nos muestra una propiedad muy importante de la clausura de un conjunto: sus elementos son límites de sucesiones de elementos del conjunto, más específicamente:

Proposición 1.2.4 (Una Caracterización de \bar{A}) Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $A \subset X$. Entonces,

$$x \in \bar{A} \iff \text{existe una sucesión } \left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty} \subset A$$

tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Demostración.

(\Rightarrow) Sea $x \in \bar{A} = A \cup A'$ entonces, $x \in A$ ó $x \in A'$. Si $x \in A$ basta tomar $x_n = x$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, y así $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Por otra parte, si $x \in A'$ entonces A debe de ser un conjunto infinito. Entonces, dado $\epsilon = 1$ existe un $x_1 \in A$ tal que:

$$0 < \|x - x_1\| < 1$$

Sea $A_1 = A \setminus \{x_1\}$. Es claro que $A_1 \subset A$ y A_1 es infinito. Como $x \in A'$, también $x \in A'_1$ [¿Por qué?]. Así, dado $\epsilon = \frac{1}{2}$ existe un $x_2 \in A_1 \subset A$ ($x_2 \neq x_1$) tal que:

$$0 < \|x - x_2\| < \frac{1}{2}$$

Consideremos ahora $A_2 = A \setminus \{x_1, x_2\}$. Nuevamente, A_2 es infinito y también $x \in A'_2$. Luego, dado $\epsilon = \frac{1}{3}$ existe un $x_3 \in A_2$ tal que:

$$0 < \|x - x_3\| < \frac{1}{3}$$

Continuando este procedimiento obtenemos una sucesión de elementos $\left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ tal que:

$$0 < \|x - x_n\| < \frac{1}{n}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, se sigue entonces que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, lo cual finaliza nuestra demostración.

(\Leftarrow) Sea $\left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Entonces, si $\left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ consta de un número finito de términos solamente, entonces $x_n = x$ para $n \geq n_0$. Por tanto, $x \in A$, y así también $x \in \bar{A}$.

Si $\left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ consta de un número infinito de términos, entonces

$$\widehat{B}(x, \epsilon) \cap \left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty} \neq \phi \quad \text{para cada } \epsilon > 0,$$

y por tanto $x \in A'$ y en consecuencia $x \in \overline{A}$. □

Definición 1.2.5 Sean (X, \mathcal{T}_1) y (Y, \mathcal{T}_2) espacios topológicos, y $D \subseteq X$. Una función,

$$f : D \longrightarrow Y$$

se dice continua en un $x_0 \in D$, si dada una vecindad V de $f(x_0)$ en Y , existe una vecindad U de x_0 en X tal que si:

$$x \in U \cap D \implies f(x) \in V.$$

Proposición 1.2.6 Sean $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(Y, \|\cdot\|_2)$ espacios normados, $D \subseteq X$, y:

$$f : D \longrightarrow Y$$

una función. Las siguientes afirmaciones son mutuamente equivalentes:

- (1) f es continua en $x_0 \in D$.
- (2) Dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon \quad \text{si} \quad \|x - x_0\| < \delta$$

- (3) f es secuencialmente continua en $x_0 \in D$, esto es, si $\left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ tal que:

$$x_n \longrightarrow x$$

si $n \longrightarrow \infty$, entonces $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$ si $n \longrightarrow \infty$.

Demostración.

Sin perder generalidad podemos denotar las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ por $\|\cdot\|$ respectivamente.

(1) \Rightarrow (2) Sean $\epsilon > 0$ y,

$$V := B(f(x_0), \epsilon) := \left\{ y \in Y : \|y - f(x_0)\| < \epsilon \right\}$$

Entonces V es una vecindad de $f(x_0)$ en Y , luego por (1) existe una vecindad U de x_0 en X tal que si

$$x \in U \cap D \implies f(x) \in V$$

Ahora bien, como U es una vecindad de x_0 , existe un $\delta > 0$ tal que

$$B(x_0, \delta) \subset U,$$

luego,

$$B(x_0, \delta) \cap D \subset U \cap D$$

Por tanto, si $x \in B(x_0, \delta) \cap D$, entonces $x \in U \cap D$ y así, $f(x) \in V$, esto es,

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon \quad \text{si} \quad \|x - x_0\| < \delta.$$

(2) \Rightarrow (1) Sea V una vecindad de $f(x_0)$ en Y , entonces V contiene algún conjunto abierto que contiene a x . Así, para algún $\epsilon > 0$

$$B(f(x_0), \epsilon) \subset V$$

Por (2) existe un $\delta > 0$ tal que si

$$\|x - x_0\| < \delta, \quad \text{entonces} \quad \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon.$$

Tomando $U := B(x_0, \delta)$ se sigue por lo anterior que si $x \in U \cap D$, entonces $f(x) \in V$.

(2) \Rightarrow (3) Sean ϵ y δ el par de números positivos dados por la hipótesis (2), y $x_0 \in D$. Sea $\left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ tal que $x_n \rightarrow x_0$ si $n \rightarrow \infty$ entonces, para nuestro $\delta > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_0\| < \delta \quad \text{si} \quad n \geq n_0,$$

y en consecuencia por (1):

$$\|f(x_n) - f(x_0)\| < \epsilon \quad \text{si} \quad n \geq n_0,$$

esto es, f es secuencialmente continua en $x_0 \in D$.

(3) \Rightarrow (1) Supóngase que (3) es cierta, pero que f no es continua en $x_0 \in D$. Entonces, existe alguna vecindad V de $f(x_0)$ en Y tal que para cada vecindad U de x_0 en X existe un $x_0 \in U \cap D$ con $f(x_0) \notin V$. Sea,

$$U_n := \left\{ x \in X : \|x - x_0\| < \frac{1}{n} \right\}.$$

Entonces, $U_n := B(x_0, \frac{1}{n})$ y así, U_n es una vecindad de x_0 para $n = 1, 2, \dots$. Luego, existe un $x_n \in U_n$ tal que $f(x_n) \notin V$ para $n = 1, 2, \dots$, lo cual contradice (3). \square

Consideremos ahora X y Y espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo de escalares \mathbb{F} . Sea

$$X \oplus Y := \left\{ (x, y) : x \in X, y \in Y \right\}.$$

En este conjunto $X \oplus Y$ definimos las siguientes operaciones:

(O1) Suma: Si $(x_1, y_1) \in X \oplus Y$ y $(x_2, y_2) \in X \oplus Y$, entonces,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

(O2) Multiplicación por escalar: Si $\alpha \in \mathbb{F}$ y $(x, y) \in X \oplus Y$, entonces,

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Proposición 1.2.7 El conjunto $X \oplus Y$ tiene estructura de espacio vectorial sobre \mathbb{F} respecto de las operaciones (O1) y (O2).

Demostración.

Es evidente que (O1) y (O2) están bien definidas sobre $X \oplus Y$. Se deja como ejercicio verificar todas las propiedades de espacio vectorial. \square

Proposición 1.2.8 Sean $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(Y, \|\cdot\|_2)$ espacios normados. La función:

$$\|\cdot\| : X \oplus Y \longrightarrow [0, +\infty)$$

definida por:

$$\|(x, y)\| = \|x\|_1 + \|y\|_2$$

Es una norma sobre $X \oplus Y$. Así, $(X \oplus Y, \|\cdot\|)$ es un espacio normado.

Demostración.

Verificaremos que $\|\cdot\|$ cumple con todas las propiedades de una norma.

(P1) Es claro que $\|(x, y)\| \geq 0$, $\forall (x, y) \in X \oplus Y$. Además, si

$\|(x, y)\| = \|x\|_1 + \|y\|_2 = 0$ entonces $\|x\|_1 = 0$ y $\|y\|_2 = 0$ y así $x = 0$ y $y = 0$, por tanto $(x, y) = (0, 0)$ y recíprocamente.

(P2) En efecto,

$$\begin{aligned} \|\alpha(x, y)\| &= \|(\alpha x, \alpha y)\| = \|\alpha x\|_1 + \|\alpha y\|_2 \\ &= |\alpha| \|x\|_1 + |\alpha| \|y\|_2 \\ &= |\alpha| (\|x\|_1 + \|y\|_2) \\ &= |\alpha| \|(x, y)\| \quad (\alpha \in \mathbb{F}, (x, y) \in X \oplus Y) \end{aligned}$$

(P3) [Desigualdad triangular]

$$\begin{aligned} \|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\| &= \|(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\| \\ &= \|x_1 + x_2\|_1 + \|y_1 + y_2\|_2 \\ &\leq \|x_1\|_1 + \|x_2\|_1 + \|y_1\|_2 + \|y_2\|_2 \\ &= \|x_1\|_1 + \|y_1\|_2 + \|x_2\|_1 + \|y_2\|_2 \\ &= \|(x_1, y_1)\| + \|(x_2, y_2)\| \end{aligned}$$

$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \oplus Y$, lo cual concluye la prueba. \square

Tenemos ahora la importante Proposición:

Proposición 1.2.9 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Entonces, las funciones:

$$\varphi_1 : X \oplus X \rightarrow X \quad \text{definida por} \quad \varphi_1(x, y) = x + y$$

y,

$$\varphi_2 : \mathbb{F} \oplus X \rightarrow X \quad \text{definida por} \quad \varphi_2(\alpha, x) = \alpha x$$

son continuas sobre $X \oplus X$ y $\mathbb{F} \oplus X$ respectivamente.

Demostración.

Observemos inicialmente que cuando $Y = X$ la norma definida por la Proposición 1.2.7 de un elemento $(x, y) \in X \oplus X$ es:

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$$

y cuando $X = \mathbb{F}$ y $Y = X$ la norma de un elemento $(\alpha, x) \in \mathbb{F} \oplus X$ es:

$$\|(\alpha, x)\| = |\alpha| + \|x\|$$

Sea $(x_0, y_0) \in X \oplus X$. Veamos que dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\|\varphi_1(x, y) - \varphi_1(x_0, y_0)\| < \epsilon \quad \text{si} \quad \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \|\varphi_1(x, y) - \varphi_1(x_0, y_0)\| &= \|x + y - (x_0 + y_0)\| \\ &= \|x - x_0 + y - y_0\| \\ &\leq \|x - x_0\| + \|y - y_0\| < \delta + \delta = 2\delta = \epsilon \end{aligned}$$

Luego, basta tomar $\delta \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\|\varphi_2(\alpha, x) - \varphi_2(\alpha_0, x_0)\| &= \|\alpha x - \alpha_0 x_0\| \\
&= \|\alpha x - \alpha x_0 + \alpha x_0 - \alpha_0 x_0\| \\
&= \|\alpha(x - x_0) + (\alpha - \alpha_0)x_0\| \\
&\leq \|\alpha(x - x_0)\| + \|(\alpha - \alpha_0)x_0\| \\
&= |\alpha| \|x - x_0\| + |\alpha - \alpha_0| \|x_0\|
\end{aligned}$$

Restringiendo,

$$\|x - x_0\| < \delta \leq 1 \quad y \quad |\alpha - \alpha_0| < \delta \leq 1,$$

entonces, ya que:

$$\left| \|x\| - \|x_0\| \right| \leq \|x - x_0\| < \delta \leq 1, \quad y \quad \left| |\alpha| - |\alpha_0| \right| \leq |\alpha - \alpha_0| < \delta \leq 1$$

vamos a tener que $\|x\| < 1 + \|x_0\|$, y $|\alpha| < 1 + |\alpha_0|$, luego

$$\begin{aligned}
\|\varphi_2(\alpha, x) - \varphi_2(\alpha_0, x_0)\| &< (1 + |\alpha_0|)\|x - x_0\| + |\alpha - \alpha_0|(1 + \|x_0\|) \\
&< m\delta + m\delta = 2m\delta
\end{aligned}$$

donde $m = \max\{1 + |\alpha_0|, 1 + \|x_0\|\}$. Así, tomando $\delta \leq \min\{1, \frac{\epsilon}{2m}\}$ obtenemos que φ_2 es continua en (α_0, x_0) . \square

Recordemos que si (X, τ_1) y (Y, τ_2) son espacios topológicos, una función:

$$f : X \rightarrow Y$$

que es biyectiva (esto es, f es uno a uno y sobre) y bicontinua (bicontinua significa que f y su inversa f^{-1} son continuas) se llama un homeomorfismo, y en este caso X y Y se dicen homeomorfos.

Las operaciones de suma y multiplicación por escalar de un espacio vectorial que es además un espacio normado inducen dos homeomorfismos “naturales”, hecho que lo expresa la Proposición siguiente:

Proposición 1.2.10 Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, $a \in X$ y $\alpha \in \mathbb{F}$, ($\alpha \neq 0$). Entonces, las funciones:

$$T_a : X \longrightarrow X, \quad \text{definida por } T_a(x) = x + a$$

y

$$M_\alpha : X \longrightarrow X, \quad \text{definida por } M_\alpha(x) = \alpha x$$

son homeomorfismos. T_a se llama el operador de traslación y M_α el operador de multiplicación.

Demostración.

Dejamos como un ejercicio verificar la continuidad y biyectividad de T_a y M_α . El inverso de T_a es T_{-a} y el inverso de M_α es $M_{1/\alpha}$. Así, tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{T_a} & X \\
 M_\alpha^{-1} \uparrow & & \downarrow M_\alpha \\
 X & \xleftarrow{T_a^{-1}} & X
 \end{array}$$

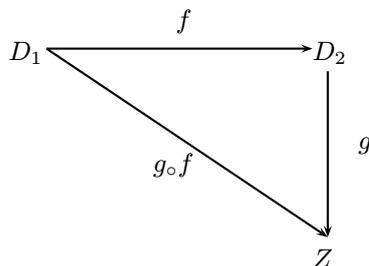
donde

$$T_a^{-1}(x) = T_{-a}(x) = x - a$$

y

$$M_\alpha^{-1}(x) = M_{1/\alpha}(x) = \frac{1}{\alpha}x, \quad (\alpha \neq 0).$$

Sean (X, τ_1) , (Y, τ_2) y (Z, τ_3) espacios topológicos, $T_2, D_1 \subseteq X$ y $D_2 \subseteq Y$. Consideremos el diagrama:



donde f es una función definida sobre D_1 tal que su rango $f(D_1) \subseteq D_2$ y g es una función definida sobre D_2 a valores en el espacio Z . Así, podemos construir la compuesta de g y f denotada por $g \circ f$ y definida como:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (x \in D_1).$$

Tenemos entonces la siguiente Proposición

Proposición 1.2.11 Si f es continua en un $x_0 \in D_1$ y g también lo es en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en x_0 .

Demostración.

Sea V una vecindad de $(g \circ f)(x_0)$ en Z , entonces como g es continua en $f(x_0)$ y $(g \circ f)(x_0) = g(f(x_0))$ existe una vecindad W de $f(x_0)$ en Y tal que si:

$$y \in W \cap D_2, \quad \text{entonces} \quad g(y) \in V.$$

También, como f es continua en x_0 , existe una vecindad U de x_0 en X tal que si:

$$x \in U \cap D_1, \quad \text{entonces} \quad f(x) \in W,$$

pero también $f(x) \in D_2$, así $f(x) \in W \cap D_2$ y en consecuencia $g(f(x)) \in V$, lo cual concluye la demostración.

Definición 1.2.12 Sean X y Y conjuntos no vacíos, $D \subseteq X$ y

$$f : D \longrightarrow Y$$

una función. Sea $H \subseteq Y$. La imagen inversa de H denotada por $f^{-1}(H)$ es:

$$f^{-1}(H) := \left\{ x \in D : f(x) \in H \right\}$$

Es claro de la Definición anterior que si $B \subseteq Y$,

$$D := f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B^c).$$

Proposición 1.2.13 Sean X y Y conjuntos no vacíos, $D \subseteq X$ y

$$f : D \longrightarrow Y$$

una función. Supóngase que dado $B \subset Y$ existe un $B_1 \subset X$ tal que:

$$B_1 \cap D := f^{-1}(B),$$

entonces,

$$B_1^c \cap D := f^{-1}(B^c)$$

Demostración.

Ya que

$$f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B^c) := D := D \cap B_1 \cup D \cap B_1^c$$

y por hipótesis tenemos que $B_1 \cap D := f^{-1}(B)$, se sigue que:

$$B_1^c \cap D := f^{-1}(B^c).$$

Ahora podemos mostrar el siguiente teorema:

Teorema 1.2.14 Sean (X, τ_1) y (Y, τ_2) espacios topológicos T_2 , y $D \subseteq X$. Sea

$$f : D \longrightarrow Y$$

una función. Las siguientes afirmaciones mutuamente equivalentes:

- (1) f es continua sobre D .
- (2) Dado $G \in \tau_2$, existe un $G_1 \in \tau_1$ tal que

$$G_1 \cap D := f^{-1}(G)$$

- (3) Dado un cerrado H en Y , existe un cerrado H_1 en X tal que:

$$H_1 \cap D := f^{-1}(H)$$

Demostración.

(1) \implies (2) Sea $G \in \tau_2$, esto es, G es abierto en Y . Si $f^{-1}(G) = \emptyset$, tomamos $G_1 = \emptyset$.

Por otra parte, si $f^{-1}(G) \neq \emptyset$, existe un $x_0 \in D$ tal que $f(x_0) \in G$ y como G es abierto en Y y f es continua en x_0 , existe U_{x_0} vecindad de x_0 en X tal que si:

$$x \in U_{x_0} \cap D, \quad \text{entonces} \quad f(x) \in G.$$

Sin perder generalidad podemos suponer que U_{x_0} es abierto en X . Repetamos éste procedimiento para cada $x \in f^{-1}(G)$, y sea

$$G_1 := \bigcup_{x \in f^{-1}(G)} U_x$$

entonces, G_1 es abierto en X y además:

$$\begin{aligned} G_1 \cap D &:= \left(\bigcup_{x \in f^{-1}(G)} U_x \right) \cap D \\ &:= \bigcup_{x \in f^{-1}(G)} (U_x \cap D) \\ &:= f^{-1}(G) \end{aligned}$$

lo cual finaliza la demostración.

(2) \implies (1) Sean $x_0 \in D$ y V una vecindad de $f(x_0)$ en Y . Entonces, existe un abierto G en Y tal que

$$f(x_0) \in G \subset V.$$

Por la hipótesis (2) existe un G_1 abierto en X tal que:

$$G_1 \cap D := f^{-1}(G),$$

y ya que $f(x_0) \in G$, entonces $x_0 \in f^{-1}(G) := G_1 \cap D$, luego, $x_0 \in G_1$.

Así, G_1 es vecindad de x_0 en X y si:

$$x \in G_1 \cap D, \quad \text{entonces} \quad f(x) \in G \subset V,$$

esto es, f es continua en $x_0 \in D$.

(2) \implies (3) Sea H cerrado en Y y tomemos $G := H^c$. Entonces, G es abierto en Y y así por la hipótesis (2) existe un abierto G_1 en X tal que:

$$G_1 \cap D := f^{-1}(G)$$

se sigue por la Proposición 1.2.13 que:

$$\begin{aligned} G_1^c \cap D &:= f^{-1}(G^c) \\ &:= f^{-1}(H) \end{aligned}$$

Tomando $H_1 := G_1^c$ obtenemos (3).

(3) \implies (2) Se deja como un ejercicio.

Corolario 1.2.15 Sean (X, τ_1) y (Y, τ_2) espacios topológicos T_2 , y

$$f : X \longrightarrow Y$$

una función. Entonces:

- (1) f es continua sobre $X \iff f^{-1}(G)$ es abierto en X para cada abierto G en Y .
- (2) f es continua sobre $X \iff f^{-1}(H)$ es cerrado en X para cada cerrado H en Y .

Demostración.

Tomar $D := X$ y usar el Teorema anterior.

Definición 1.2.16 Sean (X, τ) un espacio topológicos y $A \subset X$, [$A \neq \emptyset$]. Una colección $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de subconjuntos abiertos de X se llama cubrimiento de A si:

$$A \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

en donde I es un conjunto de índices de cardinalidad arbitraria.

Definición 1.2.17 Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$ [$A \neq \emptyset$]. Entonces, A se dice compacto si cada cubrimiento de A , contiene un subcubrimiento finito, esto es, si dado $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un cubrimiento de A , existe un número finito de los A_α , digamos

$$A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \dots, A_{\alpha_n}$$

tal que:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n A_{\alpha_i}.$$

El Teorema clásico de Heine - Borel expresa que un subconjunto no vacío de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) es compacto \iff es cerrado y acotado. La demostración de éste Teorema se propone en nuestra lista de ejercicios.

Teorema 1.2.18 Sean X y Y espacios normados. Sea

$$f : D \longrightarrow Y$$

una función continua, donde $D \subset X$ compacto. Entonces, $f(D)$ es compacto en Y .

Demostración.

Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un cubrimiento de $f(D)$ mostraremos que existe un número de los A_α digamos $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \dots, A_{\alpha_n}$ tal que:

$$f(D) \subset \bigcup_{i=1}^n A_{\alpha_i}.$$

En efecto, ya que A_α es abierto en Y , y $f : D \longrightarrow Y$ es continua, entonces de acuerdo al Teorema 1.2.14 existe un abierto B_α en X tal que:

$$B_\alpha \cap D = f^{-1}(A_\alpha).$$

Afirmamos ahora que la colección $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es un cubrimiento de D . Efectivamente, sea $x \in D$ entonces, $f(x) \in f(D) \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ luego, existe algún subíndice $\alpha_0 \in I$ tal que $f(x) \in A_{\alpha_0}$ y así $x \in f^{-1}(A_{\alpha_0}) = B_{\alpha_0} \cap D$, y en consecuencia $x \in B_{\alpha_0}$. Se sigue, que la colección $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$, donde

$B_\alpha \cap D = f^{-1}(A_\alpha)$ ($\alpha \in I$) es un cubrimiento de D , que por hipótesis es compacto, por tanto existe un número finito de los B_α , digamos $B_{\alpha_1}, B_{\alpha_2}, \dots, B_{\alpha_n}$ tal que $D \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\alpha_i}$. Veamos ahora que:

$$f(D) \subset \bigcup_{i=1}^n A_{\alpha_i} \quad \text{donde} \quad D \cap B_{\alpha_i} = f^{-1}(A_{\alpha_i}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

En efecto, sea $y \in f(D)$. Entonces, existe un α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) tal que

$$x \in B_{\alpha_i} \cap D = f^{-1}(A_{\alpha_i}).$$

Así, $y = f(x) \in A_{\alpha_i}$. Como y es arbitraria en $f(D)$ concluimos que:

$$f(D) \subset \bigcup_{i=1}^n A_{\alpha_i}$$

y por tanto, $f(D)$ es compacto.

Nota 1.2.19 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, $D \subset X$ compacto y

$$f : D \rightarrow \mathbb{C}$$

una función continua. De acuerdo al Teorema anterior $f(D)$ es compacto, luego por el Teorema clásico de Heine - Borel $f(D)$ es en particular acotado en \mathbb{C} . Por tanto, existe una constante $M > 0$ tal que:

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in D.$$

1.3. Ejemplos Resueltos

Esta sección contiene una importante lista de ejemplos resueltos que servirán de complemento para un mejor entendimiento de la teoría desarrollada en las Secciones 1.1 y 1.2. En algunos de estos ejemplos, cuando sea necesario, se introduce el concepto que nos ayudará a demostrar lo que se exige en el mismo.

Ejemplo 1.3.1 Sea

$$\mathbb{R}^n := \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

En \mathbb{R}^n definimos las siguientes operaciones:

(O1) Suma: Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, la suma de x y y denotada por $x + y$ se define como:

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \end{aligned}$$

(O2) Multiplicación por escalar: Si $\alpha \in \mathbb{F}$ y $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos:

$$\begin{aligned} \alpha x &= \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n). \end{aligned}$$

Es claro que (O1) y (O2) están bien definidas y el lector puede mostrar que se verifican todas las propiedades (A1), (A2), ..., (A8) de la Definición 1.1.1. Así, \mathbb{R}^n es un espacio vectorial sobre \mathbb{F} .

Ejemplo 1.3.2 Sea la función:

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty)$$

definida por:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces, $\|\cdot\|$ es una norma sobre \mathbb{R}^n . En efecto, verificaremos los axiomas (A1), (A2) y (A3) de la Definición 1.1.9.

(A1) Es claro que $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Por otra parte si:

$$\begin{aligned} \|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} = 0 &\implies |x_i| = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \\ &\implies x_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \\ &\implies x = 0, \end{aligned}$$

y recíprocamente.

(A2) Si $\alpha \in \mathbb{F}$, entonces:

$$\begin{aligned} \|\alpha x\| &= \left(\sum_{i=1}^n |\alpha x_i|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n |\alpha|^2 |x_i|^2 \right)^{1/2} \\ &= |\alpha| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \\ &= |\alpha| \|x\| \quad (x = x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

(A3) Para verificar la desigualdad triangular inicialmente verificaremos la siguiente desigualdad:

Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces:

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \|x\| \|y\|.$$

En efecto si $x = 0$ ó $y = 0$ la desigualdad es evidente.

Supóngase entonces que $x \neq 0$ y $y \neq 0$. Definamos la función:

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

por,

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^n (x_i t + y_i)^2 \quad (1.3.3).$$

Desarrollando el miembro a la derecha de (1.3.3) vamos a obtener que:

$$\begin{aligned}
 \varphi(t) &= \sum_{i=1}^n (x_i t + y_i)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 t^2 + 2x_i y_i t + y_i^2) \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) t^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) t + \sum_{i=1}^n y_i^2 \\
 &= \|x\|^2 t^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) t + \|y\|^2
 \end{aligned}$$

Así,

$$0 \leq \varphi(t) = \sum_{i=1}^n (x_i t + y_i)^2 = \|x\|^2 t^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) t + \|y\|^2,$$

entonces, la representación gráfica de $\varphi(t)$ es una parábola que está situada por arriba del eje de abscisas o interseca éste eje en un sólo punto.

Por tanto:

$$\Delta = \left(2 \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 - 4 \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$$

esto es,

$$\left(2 \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq 4 \|x\|^2 \|y\|^2$$

y así,

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \|x\| \|y\|$$

en consecuencia:

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2) \\
&= \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2 \\
&= \|x\|^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2 \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

extrayendo raíces cuadradas en ambos miembros obtenemos que:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^n)$$

\mathbb{R}^n con la norma euclidiana $\|\cdot\|_2$ que también es denotada por $\|\cdot\|$ es denotado por l_2^n . Así,

$$l_2^n := (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|).$$

Ejemplo 1.3.3 Sea la función:

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty)$$

definida por:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

entonces, $\|\cdot\|_1$ define una norma sobre \mathbb{R}^n verificaremos los Axiomas (A1), (A2) y (A3) de la Definición 1.1.9.

$$(A1) \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \geq 0 \quad \text{ya que } |x_i| \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Además, si,

$$\begin{aligned} \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = 0 &\implies |x_i| = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \\ &\implies x_i = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \\ &\implies x = 0 \end{aligned}$$

y recíprocamente

(A2) Si $\alpha \in \mathbb{F}$, vamos a tener que:

$$\begin{aligned} \|\alpha x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |\alpha x_i| = \sum_{i=1}^n |\alpha| |x_i| \\ &= |\alpha| \sum_{i=1}^n |x_i| \\ &= |\alpha| \|x\|_1 \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

(A3) [Desigualdad triangular]

$$\begin{aligned} \|x + y\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| \\ &= \|x\|_1 + \|y\|_1 \end{aligned}$$

para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Así, \mathbb{R}^n con la norma $\|\cdot\|_1$ es denotado por l_1^n . Por tanto,

$$l_1^n := (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1).$$

Ejemplo 1.3.4 Sea

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty)$$

definida como:

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n).$$

Verificaremos que $\|\cdot\|_\infty$ define una norma sobre \mathbb{R}^n . En efecto:

(A1) Es claro que si:

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 0 &\implies |x_i| = 0 \\ &\implies x_i = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \\ &\implies x = 0 \end{aligned}$$

y recíprocamente

(A2) Para $\alpha \in \mathbb{F}$,

$$\begin{aligned} \|\alpha x\|_\infty &= \sup_{1 \leq i \leq n} |\alpha x_i| = \sup_{1 \leq i \leq n} (|\alpha| |x_i|) \\ &= |\alpha| \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \\ &= |\alpha| \|x\|_\infty \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

(A3) [Desigualdad triangular]

$$\begin{aligned} \|x + y\|_\infty &= \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i + y_i| \leq \sup_{1 \leq i \leq n} (|x_i| + |y_i|) \\ &= \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| + \sup_{1 \leq i \leq n} |y_i| \\ &= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \end{aligned}$$

para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
Así, \mathbb{R}^n dotado de la norma $\|\cdot\|_\infty$ se denota por l_∞^n , esto es,

$$l_\infty^n := (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty).$$

Ejemplo 1.3.5 Sean X un espacio vectorial, $\|\cdot\|$ y $\|\!\| \cdot \!\|$ dos normas sobre X . Decimos que $\|\cdot\|$ y $\|\!\| \cdot \!\|$ son equivalentes si existen constantes $a > 0$ y $b > 0$, tales que:

$$a\|x\| \leq \|\!\|x\!\| \leq b\|x\| \quad (\forall x \in X).$$

Sea el conjunto:

$$\mathcal{N} := \left\{ \|\cdot\| : \|\cdot\| \text{ es una norma sobre } X \right\}.$$

Mostraremos que esta Definición de normas equivalentes induce una relación de equivalencia sobre \mathcal{N} y que es denotada por “ \sim ”; esto es, “ \sim ” es reflexiva, simétrica y transitiva.

- (a) “ \sim ” es reflexiva, lo cual es evidente tomamos $a = b = 1$
- (b) “ \sim ” es simétrica. En efecto, si $\|\cdot\| \in \mathcal{N}$ y $\|\!\| \cdot \!\| \in \mathcal{N}$, tales que $\|\cdot\| \sim \|\!\| \cdot \!\|$, entonces existen $a > 0$ y $b > 0$ tales que:

$$a\|x\| \leq \|\!\|x\!\| \leq b\|x\| \quad \forall x \in X.$$

De aquí, vamos a obtener que:

$$b^{-1}\|\!\|x\!\| \leq \|x\| \quad \forall x \in X$$

y también que:

$$\|x\| \leq a^{-1}\|\!\|x\!\| \quad \forall x \in X,$$

por tanto

$$b^{-1}\|\!\|x\!\| \leq \|x\| \leq a^{-1}\|\!\|x\!\| \quad \forall x \in X,$$

y así $\|\!\| \cdot \!\| \sim \|\cdot\|$.

- (c) Sean $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_3$ elementos de \mathcal{N} tales que $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_3$. Veamos que $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_3$. En efecto, ya que $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2 \implies$ existen $a_1 > 0$ y $b_1 > 0$ tales que:

$$a_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b_1\|x\|_1 \quad \forall x \in X$$

y $\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_3 \implies$ existen $a_2 > 0$ y $b_2 > 0$ tales que:

$$a_2\|x\|_2 \leq \|x\|_3 \leq b_2\|x\|_2 \quad \forall x \in X,$$

así, vamos a obtener que:

$$\|x\|_3 \leq b_2\|x\|_2 \leq b_1b_2\|x\|_1 \quad \forall x \in X,$$

y que:

$$a_1a_2\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_3 \quad \forall x \in X.$$

En consecuencia:

$$a_1a_2\|x\|_1 \leq \|x\|_3 \leq b_1b_2\|x\|_2 \quad \forall x \in X,$$

esto es, $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_3$ y concluye nuestra demostración.

Ejemplo 1.3.6 Las normas de los espacios l_1^n , l_2^n y l_∞^n son equivalentes, donde de los Ejemplos 1.3.2, 1.3.3 y 1.3.4 sabemos que:

$$l_1^n := (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1), \quad l_2^n := (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2), \quad l_\infty^n := (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$$

donde:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad y \quad \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Mostraremos que $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ y también que $\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_\infty$ luego por el Ejemplo 1.3.5 tendremos que $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_\infty$.

(1,3,7) $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$. En efecto, como:

$$|x_i|^2 \leq |x_i|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

entonces,

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \leq n\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

luego

$$\frac{1}{n} \|x\|_1 \leq \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Por otra parte como:

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 \leq (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|)^2$$

vamos a tener que:

$$\|x\| \leq \|x\|_1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

así,

$$\frac{1}{n} \|x\|_1 \leq \|x\| \leq \|x\|_1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(1,3,8) $\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_\infty$. Efectivamente,

$$\|x\|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 \leq n \|x\|_\infty^2$$

esto es,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\| \leq \|x\|_\infty, \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n).$$

También,

$$\|x\|_\infty^2 = \left(\sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \right)^2 = |x_{i_0}|^2 \leq |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 = \|x\|^2$$

luego,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

en consecuencia,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\| \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Ejemplo 1.3.7 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. De acuerdo a nuestra Definición 1.1.5 (a), la bola abierta de centro x_0 y radio $r > 0$ es:

$$B(x_0, r) := \left\{ x \in X : \|x - x_0\| < r \right\}$$

$B(x_0, r)$ es un conjunto convexo. En efecto, sean $x, y \in B(x_0, r)$ y $0 \leq \lambda \leq 1$. Entonces, ya que:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y - x_0 = \lambda(x - x_0) + (1 - \lambda)(y - x_0)$$

vamos a tener que

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1 - \lambda)y - x_0\| &= \|\lambda(x - x_0) + (1 - \lambda)(y - x_0)\| \\ &\leq |\lambda|\|x - x_0\| + |1 - \lambda|\|y - x_0\| \\ &< \lambda r + (1 - \lambda)r = r \end{aligned}$$

esto es, el “segmento de recta” $\lambda x + (1 - \lambda)y - x_0 \in B(x_0, r)$. Por tanto, $B(x_0, \varepsilon)$ es convexo.

Ejemplo 1.3.8 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $A \subset X$ convexo. Entonces, \bar{A} es también un subconjunto convexo de X . En efecto, sean $x, y \in \bar{A}$ y $0 \leq \lambda \leq 1$. Mostraremos que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \bar{A}$. Efectivamente, ya que $x, y \in \bar{A}$ por la Proposición 1.2.3 dado $\varepsilon > 0$ existen sucesiones $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ y $\left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ tales que:

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si} \quad n \geq n_1$$

y,

$$\|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si} \quad n \geq n_2.$$

Sea $n_0 = \text{máx}(n_1, n_2)$. Entonces, si $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \|\lambda x_n + (1 - \lambda)y_n - \lambda x - (1 - \lambda)y\| &= \|\lambda(x_n - x) + (1 - \lambda)(y_n - y)\| \\ &\leq \|\lambda(x_n - x)\| + \|(1 - \lambda)(y_n - y)\| \\ &= |\lambda|\|x_n - x\| + |1 - \lambda|\|y_n - y\| \\ &< \lambda\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + (1 - \lambda)\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

esto es, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \bar{A}$.

Así, en virtud del Ejemplo 1.3.7 y 1.3.8 concluimos que si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces $\bar{B}(x_0, \varepsilon)$ es un subconjunto cerrado y convexo de X .

Ejemplo 1.3.9 Dibujar en los espacios l_2^2 , l_1^2 y l_∞^2 la bola cerrada de centro $0 = (0, 0)$ y radio $r = 1$.

Solución

1,3,9(a) Tenemos que $l_2^2 := (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$. Así,

$$\begin{aligned}\bar{B}(0, 1) &:= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| \leq 1 \right\} \\ &:= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}\end{aligned}$$

y sabemos de la geometría analítica que la representación gráfica de éste conjunto es el que muestra la figura siguiente:

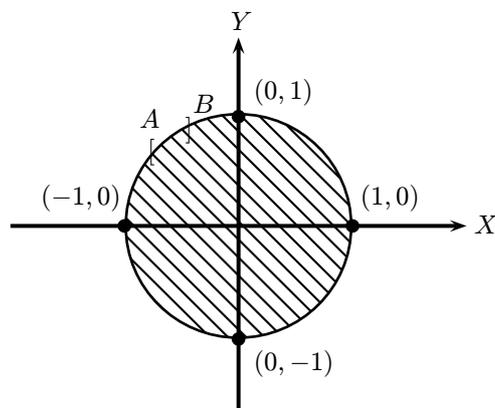


Fig 1,3,9 (a)

Note que la frontera de $\bar{B}(0, 1)$ no contiene ningún segmento de recta, como se observa en la Fig 1.3.9(a)

1,3,9(b) Ya que $l_1^2 := (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ entonces,

$$\begin{aligned}\overline{B}(0,1) &:= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_1 \leq 1 \right\} \\ &:= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1 \right\}\end{aligned}$$

cuya representación gráfica es la siguiente:

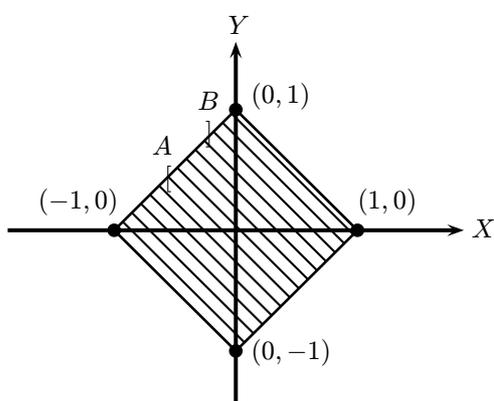


Fig 1,3,9 (b)

Observe de la Fig 1.3.9(b) que la frontera de $\overline{B}(0,1)$ si contiene segmentos de recta.

1,3,9(c) Ya que $l_\infty^2 := (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ vamos a obtener que:

$$\begin{aligned}\overline{B}(0,1) &:= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_\infty \leq 1 \right\} \\ &:= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sup\{|x|, |y|\} \leq 1 \right\} \\ &:= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \text{ y } |y| \leq 1 \right\}\end{aligned}$$

y cuya representación gráfica la muestra el dibujo siguiente:

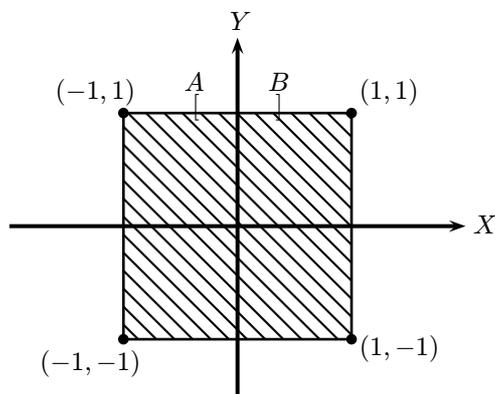


Fig 1,3,9 (c)

Note que la frontera de ésta bola también contiene segmento de recta.

Ejemplo 1.3.10 Sea

$$C([a, b]) := \left\{ f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \text{ es continua sobre } [a, b] \right\}.$$

Es claro que $C([a, b])$ es un conjunto no vacío. Definamos en $C([a, b])$ las siguientes operaciones:

(O1) Suma:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (x \in [a, b], \quad f, g \in C([a, b]))$$

(O2) Multiplicación por escalar:

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad (\alpha \in \mathbb{F}, \quad x \in [a, b], \quad f \in C([a, b]))$$

Entonces (O1) y (O2) están bien definidas y el lector puede verificar las Propiedades (A1), (A2), ..., (A8) de la Definición 1.1.1. Por tanto, $C([a, b])$ es un espacio vectorial.

De acuerdo a nuestra Nota 1.2.19 existe una constante $M > 0$ tal que:

$$|f(x)| \leq M \quad (\forall x \in [a, b])$$

Sea entonces la función:

$$\| \cdot \|_u : C([a, b]) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por:

$$\|f\|_u := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

es evidente ahora que:

$$0 \leq \|f\|_u < +\infty, \quad \text{para cada } f \in C([a, b]).$$

Así, $\|\cdot\|_u$ está bien definida sobre $C([a, b])$. Mostraremos también que $\|\cdot\|_u$ es una norma sobre $C([a, b])$. En efecto,

(A1)

$$\|f\|_u = \sup |f(x)| = 0 \iff |f(x)| = 0, \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\iff f = 0.$$

(A2) Si $\alpha \in \mathbb{F}$ y $f \in C([a, b])$, entonces:

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_u &= \sup_{x \in [a, b]} |(\alpha f)(x)| = \sup_{x \in [a, b]} |\alpha| |f(x)| \\ &= |\alpha| \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \\ &= |\alpha| \|f\|_u \end{aligned}$$

(A3) [Desigualdad triangular]. Sean $f, g \in C([a, b])$. Entonces, ya que:

$$\|f + g\|_u := \sup_{x \in [a, b]} |f(x) + g(x)|$$

dado $\varepsilon > 0$ existe un $x_0 \in [a, b]$ tal que:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_u &< |f(x_0) + g(x_0)| + \varepsilon \leq |f(x_0)| + |g(x_0)| + \varepsilon \\ &< \|f\|_u + \|g\|_u + \varepsilon \end{aligned}$$

como ε es arbitrario, obtenemos que:

$$\|f + g\|_u \leq \|f\|_u + \|g\|_u$$

Ejemplo 1.3.11 Consideremos la función:

$$\|\cdot\|_1 : C([a, b]) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| dx.$$

Entonces, ya que $f \in C([a, b])$ también $|f| \in C([a, b])$ donde:

$$|f|(x) = |f(x)|, \quad x \in [a, b].$$

Las propiedades que mencionaremos a continuación de la integral de Riemann permiten demostrar que $\|\cdot\|_1$ define también una norma sobre $C([a, b])$.

(a) Si $f \in C([a, b])$ y $f \geq 0$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

(b) Si $f \in C([a, b])$ y es no negativa sobre $[a, b]$ y si además

$$\int_a^b f(x) dx = 0,$$

entonces $f(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$.

(c) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

(d) Si $f, g \in C([a, b])$ y $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

(e) Si $f, g \in C([a, b])$ entonces

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Ejemplo 1.3.12 En el espacio $C([0, 1])$ las normas:

$$\|f\|_u := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

y

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)| dx$$

no son equivalentes. Efectivamente, si $\|\cdot\|_u$ y $\|\cdot\|_1$ fueran equivalentes deberían existir constantes $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$ tales que:

$$a_1 \|f\|_u \leq \|f\|_1 \quad \forall f \in C([a, b]) \quad (B)$$

y

$$\|f\|_1 \leq a_2 \|f\|_u \quad \forall f \in C([a, b]) \quad (A)$$

La desigualdad (A) siempre es cierta ya que $|f(x)| \leq \|f\|_u \quad \forall x \in [a, b]$, $f \in C([a, b])$ y entonces

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx \leq \int_0^1 \|f\|_u dx = \|f\|_u \quad \forall f \in C([a, b]).$$

Ahora bien (B) no siempre es cierta. En efecto, sean:

$$f_n(x) = \begin{cases} n - n^2 x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

entonces $f_n \in C([a, b])$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, y por otra parte:

$$\|f_n\|_u := \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| := \sup_{x \in [0, 1]} |n - n^2 x| = n$$

y

$$\begin{aligned}
 \|f_n\|_u &= \int_0^1 |f_n(x)| dx = \int_0^{\frac{1}{n}} (n - n^2 x) dx + \int_1^{\frac{1}{n}} 0 dx \\
 &= \int_0^{\frac{1}{n}} n dx - \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 x dx \\
 &= 1 - n^2 \left(\frac{1}{2n^2} \right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

para $n = 1, 2, \dots$. Por tanto, no existe ninguna constante $a_2 > 0$ tal que

$$a_2 n \leq \frac{1}{2} \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \dots$$

Ejemplo 1.3.13 Consideremos el espacio vectorial $C([0, 1])$ dotado de la norma $\|\cdot\|_u$. Sea,

$$M := \left\{ f \in C([0, 1]) : \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt \right\}.$$

Entonces, M es un subconjunto convexo y cerrado de $C([0, 1])$. En efecto:

- (a) M es convexo. Sean $f, g \in M$ y $0 \leq \alpha \leq 1$. Veamos que "el segmento de recta" $\alpha f + (1 - \alpha)g \in M$. Efectivamente:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{1}{2}} (\alpha f(t) + (1 - \alpha)g(t))dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 (\alpha f(t) + (1 - \alpha)g(t))dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \alpha f(t)dt + \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - \alpha)g(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 \alpha f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - \alpha)g(t)dt \\
&= \alpha \left(\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt \right) + (1 - \alpha) \left(\int_0^{\frac{1}{2}} g(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 g(t)dt \right) \\
&= \alpha(1) + (1 - \alpha)(1) = 1
\end{aligned}$$

Así, M es convexo.

(b) M es cerrado. Sea entonces, $\left\{ f_n \right\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ tal que

$$f_n \longrightarrow f \in C([0, 1]) \quad \text{si } n \longrightarrow \infty \quad \text{en } \|\cdot\|_u.$$

Veamos que $f \in M$. En efecto, como la convergencia es uniforme sobre $[0, 1]$ vamos a tener que:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f_n(t)dt \longrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt \quad \text{si } n \longrightarrow \infty$$

y

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f_n(t)dt \longrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt \quad \text{si } n \longrightarrow \infty$$

luego

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f_n(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f_n(t)dt \longrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt \quad \text{si } n \longrightarrow \infty$$

esto es,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} f_n(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f_n(t)dt \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \end{aligned}$$

Por tanto, $f \in M$ y así M es cerrado.

Ejemplo 1.3.14 Sea X un espacio vectorial. Un subconjunto no vacío K de X se llama un cono si:

$$\forall x \in K \text{ y } \lambda \geq 0 \quad \text{entonces} \quad \lambda x \in K.$$

Note que $0 \in K$ y este elemento se llama el vértice del cono.

Mostraremos que un cono K de X es convexo $\iff x+y \in K, \forall x, y \in K$.

En efecto:

- (a) (\implies) Supóngase que K es un cono que es además un subconjunto convexo de X . Entonces, por la convexidad de K :

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in K \quad \forall x, y \in K,$$

luego por ser K un cono obtenemos que:

$$x + y = 2 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \right) \in K.$$

- (b) (\impliedby) Sea K un cono de X tal que $x+y \in K, \forall x, y \in K$. Entonces, para $0 \leq \lambda \leq 1$:

$$\lambda x \in K \quad \forall x \in K$$

y

$$(1 - \lambda)y \in K \quad \forall y \in K.$$

Luego por nuestra hipótesis:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in K.$$

Ejemplo 1.3.15 Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, $A \subseteq X$ y

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

una función acotada [esto es, existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M, \forall x \in A$]. Sean $a \in A$ y $\delta > 0$. Definamos:

$$\Omega(a, f, \delta) = \sup \left\{ |f(x) - f(x')| : x, x' \in B(a, \delta) \cap A \right\}.$$

Como f es una función acotada se sigue que $\Omega(a, f, \delta)$ es un número finito, y es claro que si $0 < \delta_1 < \delta_2$ entonces,

$$0 \leq \Omega(a, f, \delta_1) \leq \Omega(a, f, \delta_2)$$

así, manteniendo a fijo y haciendo que $\delta \rightarrow 0^+$ va a existir

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \Omega(a, f, \delta).$$

El valor de éste límite lo llamaremos la oscilación de f en a y lo denotamos por $0(f, a)$. Así,

$$0(f, a) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \Omega(a, f, \delta)$$

Demostrar que si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada, entonces f es continua en un $a \in A \iff 0(f, a) = 0$. En efecto:

(a) (\implies) Sea f continua en $a \in A$ entonces, por la Proposición 1.2.5. Dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_0 > 0$ tal que:

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{si} \quad x \in B(a, \delta_0) \cap A$$

y

$$|f(x') - f(a)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{si} \quad x' \in B(a, \delta_0) \cap A$$

luego:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &= |f(x) - f(a) + f(a) - f(x')| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - f(x')| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Así,

$$\Omega(a, f, \delta_0) = \sup \left\{ |f(x) - f(x')| : x, x' \in B(a, \delta_0) \cap A \right\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

luego, como $\Omega(a, f, \delta)$ es creciente vamos a obtener que si:

$$0 < \delta < \delta_0$$

entonces,

$$\Omega(a, f, \delta) \leq \Omega(a, f, \delta_0) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

y en consecuencia:

$$0 \leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \Omega(a, f, \delta) < \varepsilon, \quad \text{para } \varepsilon > 0,$$

esto es,

$$0(f, a) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \Omega(a, f, \delta) < \varepsilon, \quad \text{para } \varepsilon > 0$$

por tanto:

$$0(f, a) = 0$$

(b) (\Leftarrow) Sea $0(f, a) = 0$. Entonces, de la definición de $0(f, a)$ dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_0 > 0$ tal que:

$$\Omega(a, f, \delta_0) = \sup \left\{ |f(x) - f(x')| : x, x' \in B(a, \delta_0) \cap A \right\} < \varepsilon$$

si $0 < \delta < \delta_0$, y en consecuencia:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad \|x - a\| < \delta_0$$

y así f es continua en $x = a$.

Ejemplo 1.3.16 Sean $I = [a, b]$ y $J = [c, d]$ intervalos cerrados de \mathbb{R} . Demostraremos que I y J son homeomorfos, esto es, existe una función

$$f : I \longrightarrow J$$

que es bicontinua y biyectiva [En este ejemplo consideramos a \mathbb{R} dotado de la métrica usual $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$]. En efecto, consideremos el siguiente gráfico:

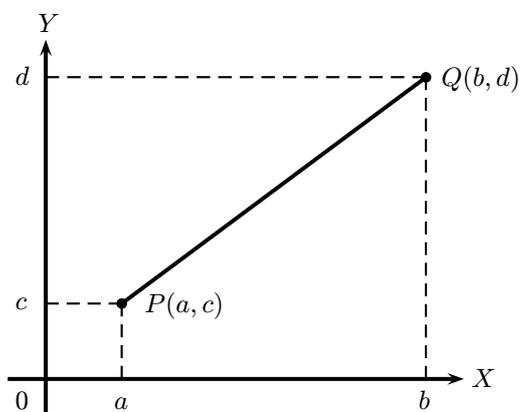


Fig 1,3,16 (a)

Observe que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(a, c)$ y $Q(b, d)$ es:

$$m = \frac{d - c}{b - a}.$$

Definamos ahora la función:

$$f : [a, b] \longrightarrow [c, d]$$

por:

$$\begin{aligned} f(x) &= c + m(x - a) \\ &= c + \frac{d - c}{b - a}(x - a) \end{aligned}$$

Es claro que $f \in C([a, b])$ y es además inyectiva por ser una función lineal.

Mostraremos ahora que $f([a, b]) := [c, d]$. En efecto, sea $y \in [c, d]$ entonces:

$$c \leq y \leq d$$

luego,

$$0 \leq y - c \leq d - c,$$

y ya que $\frac{1}{m} = \frac{b-a}{d-c} > 0$, entonces

$$0 \leq \frac{b-a}{d-c}(y-c) \leq \frac{b-a}{d-c}(d-c) = b-a,$$

así, también

$$a \leq a + \frac{b-a}{d-c}(y-c) \leq b$$

por tanto, $x = a + \frac{b-a}{d-c}(y-c) \in [a, b]$ y además:

$$\begin{aligned} f\left(a + \frac{b-a}{d-c}(y-c)\right) &= c + \frac{d-c}{b-a}\left(a + \frac{b-a}{d-c}(y-c) - a\right) \\ &= c + \frac{d-c}{b-a}\left(\frac{b-a}{d-c}\right)(y-c) \\ &= c + y - c \\ &= y. \end{aligned}$$

Así, f es también sobreyectiva y por tanto existe su inversa

$$f^{-1} : [c, d] \longrightarrow [a, b]$$

que es también una función lineal y por tanto continua. En consecuencia, $[a, b]$ y $[c, d]$ son homeomorfos.

Note que:

$$f = T_c \circ M_{\frac{d-c}{b-a}} \circ T_{-a}$$

donde T_c , $M_{\frac{d-c}{b-a}}$, T_{-a} son los operadores de translación y multiplicación definidos en la Proposición 1.2.10.

Ejemplo 1.3.17 Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, $x_0, y_0 \in X$ y $r > 0$. Entonces, $B(x_0, \varepsilon)$ y $B(y_0, \varepsilon)$ son conjunto homeomorfos. En efecto, consideremos la función:

$$f : B(x_0, \varepsilon) \longrightarrow B(y_0, \varepsilon)$$

definida por:

$$\begin{aligned} f(x) &= (T_{y_0} \circ M_{\frac{r}{\varepsilon}} \circ T_{-x_0})(x) \\ &= y_0 + \frac{r}{\varepsilon}(x - x_0). \end{aligned}$$

Es claro que f es una función continua por ser composición de funciones continuas y evidentemente es 1-1. Mostraremos a continuación que f es sobreyectiva, esto es,

$$f(B(x_0, \varepsilon)) := B(y_0, r)$$

o equivalentemente:

$$f(B(x_0, \varepsilon)) \subseteq B(y_0, r) \quad (A)$$

y

$$B(y_0, r) \subseteq f(B(x_0, \varepsilon)) \quad (B)$$

Efectivamente:

(A) Sea $z \in f(B(x_0, \varepsilon))$, entonces, existe un $x \in B(x_0, \varepsilon)$ tal que

$$z = f(x)$$

Como

$$f(x) = y_0 + \frac{r}{\varepsilon}(x - x_0),$$

entonces

$$\begin{aligned} \|f(x) - y_0\| &= \left\| \frac{r}{\varepsilon}(x - x_0) \right\| \\ &= \left| \frac{r}{\varepsilon} \right| \|x - x_0\| \\ &= \frac{r}{\varepsilon} \|x - x_0\| \\ &< \frac{r}{\varepsilon} \varepsilon = r \end{aligned}$$

esto es, $z = f(x) \in B(y_0, r)$.

(B) $B(y_0, r) \subseteq f(B(x_0, \varepsilon))$. Efectivamente, sea $z \in B(y_0, r)$. Veamos que existe un $x \in B(x_0, \varepsilon)$ tal que

$$f(x) = z.$$

esto es,

$$y_0 + \frac{r}{\varepsilon}(x - x_0) = z.$$

Al despejar x de ésta última ecuación obtenemos que:

$$x = x_0 + \frac{\varepsilon}{r}(z - y_0).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &= \left\| \frac{\varepsilon}{r}(z - y_0) \right\| \\ &= \left| \frac{\varepsilon}{r} \right| \|z - y_0\| \\ &= \frac{\varepsilon}{r} \|z - y_0\| \\ &< \frac{\varepsilon}{r} r = \varepsilon. \end{aligned}$$

Se sigue que: $x = x_0 + \frac{\varepsilon}{r}(z - y_0) \in B(x_0, \varepsilon)$. Por otra parte:

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(x_0 + \frac{\varepsilon}{r}(z - y_0)\right) \\ &= y_0 + \frac{r}{\varepsilon}\left(x_0 + \frac{\varepsilon}{r}(z - y_0) - x_0\right) \\ &= y_0 + z - y_0 \\ &= z \end{aligned}$$

por tanto f es sobreyectiva. Así, existe la inversa de f ,

$$f^{-1} : B(y_0, r) \longrightarrow B(x_0, \varepsilon)$$

definida por

$$f^{-1}(x) = x_0 + \frac{\varepsilon}{r}(z - y_0)$$

y es continua, y concluimos la demostración.

1.4. Comentario final del Capítulo 1

Para la Demostración de la Proposición 1.1.6 nos hemos ayudado de la dada en [10] de la Proposición 1 de la sección 1.5 del Tema 1. La de los Teoremas 1.2.14 y 1.2.18 hemos seguido las Pruebas de los Teoremas 22.1 y 22.5 del libro [2] de Análisis Matemático.

Puede consultar también el lector el buen texto de Matemáticas para la Economía [12], el cual en su Capítulo 1 muestra una lista de Ejercicios sobre conjuntos convexos.

Las nociones de función de variación acotada y, absolutamente continua usadas en nuestros Ejercicios 1.4.18 y 1.4.19 respectivamente, pueden consultarse en el Capítulo 1 de [11].

Queremos mencionar también que en el Capítulo 2 de [3] se muestra una numerosa lista de Ejemplos de espacios normados.

1.5. Ejercicios Propuestos.

Esta sección contiene una lista de ejercicios propuestos a resolverse con las nociones teóricas dadas en las Secciones 1.1 y 1.2. Cuando la solución del ejercicio requiera el uso de un nuevo concepto no dado en dichas Secciones, este será introducido en el enunciado del **ejercicio** mismo.

A continuación pues presentamos los ejercicios.

Ejercicios 1.5.1 Sean X un espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos de X . Demostrar que los conjuntos:

$$A + B, \quad A \times B, \quad A \cap B \quad \text{y} \quad tA \quad (t \in \mathbb{R}, t \neq 0)$$

son subconjunto convexos de X

Ejercicios 1.5.2 Sean X un espacio normado y A un subconjunto no vacío de X . Demostrar que $co(A)$ [ver la Definición 1.1.7] es un subconjunto convexo de X y además:

$$co(A) := \bigcap_{\substack{A_\alpha \text{ convexo} \\ A_\alpha \supset A}} A_\alpha \quad (\alpha \in I, I \text{ conjunto de índices})$$

¿Es $\overline{co}(A)$ también convexo?

Ejercicios 1.5.3 Calcular la cápsula convexa de los siguientes conjuntos:

(a) $A := (-2, 2) \cup (3, 4]$

(b) $A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \right\}$

(c) $A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -2x + 1 \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x \right\}$

(d) $A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9 \right\}$

(e) $A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + 2x - 1 \geq 0 \right\} \cap \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - 3x \geq 0 \right\}$

¿Cuál es en cada caso $\overline{\text{co}}(A)$?

Ejercicios 1.5.4 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Demostrar que $B(0, \varepsilon)$ y $\overline{B}(0, \varepsilon)$ son conjuntos absorbentes, balanceados y convexos [ver la Definición 1.1.4 y el ejercicio resuelto 1.3.7 y 1.3.9]

Ejercicios 1.5.5 ¿Es $B(x_0, \varepsilon)$ un conjunto absorbente?

Ejercicios 1.5.6 Sea X un espacio vectorial y A un subconjunto no vacío de X . Demostrar que el conjunto:

$$\bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A$$

es balanceado y se llama la cápsula balanceada de A .

Ejercicios 1.5.7 Sean X un espacio vectorial y K un subconjunto no vacío de X . Un elemento $x \in K$ se llama un punto extremal de K si:

$$x = \lambda y + (1 - \lambda)z.$$

Donde $0 < \lambda < 1$, $y, z \in X$, con $y \neq z$, entonces:

$$y \notin K \quad \text{ó} \quad z \notin K.$$

Dar un ejemplo justificando su respuesta de un conjunto K tal que:

- (a) No tenga puntos extremales
- (b) Tenga un número finito de puntos extremales
- (c) Tenga una infinidad de puntos extremales

Ejercicios 1.5.8 Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se dice estrictamente convexo si la frontera de la bola unitaria no contiene ningún segmento de recta, esto es, si $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \neq y$, entonces,

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| < 1 \quad \text{si} \quad 0 < \lambda < 1$$

[ver el Ejemplo 1.3.9].

Demostrar que $(X, \|\cdot\|)$ es estrictamente convexo $\iff \forall x, y \in X$, con $\|x\| = \|y\| = 1$, $(x \neq y)$, entonces $\|\frac{1}{2}(x + y)\| < 1$

Ejercicios 1.5.9 Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se dice estrictamente normado si:

$$x, y \in X, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0 \quad \text{con} \quad \|x + y\| = \|x\| + \|y\|,$$

entonces existe un $\alpha > 0$ tal que:

$$x = \alpha y.$$

Demostrar que un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es estrictamente normado $\iff (X, \|\cdot\|)$ es estrictamente convexo.

Sugerencia: $\left[(\iff) \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} = \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} - \frac{y}{\|y\|} + \frac{y}{\|x\|}, x, y \in X, x \neq 0, y \neq 0 \right]$

Ejercicios 1.5.10 Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se dice uniformemente convexo, si la bola cerrada unitaria de X es un conjunto uniformemente convexo, esto es,

dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x, y \in X$ con $\|x\| = \|y\| = 1$ y $\|x - y\| \geq \varepsilon$, entonces:

$$\left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| \leq 1 - \delta.$$

Demostrar que un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es uniformemente convexo \iff

para cada par de sucesiones $\left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ y $\left\{ y_n \right\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ con $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ y que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{2}(x_n + y_n) \right\| = 1$$

entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

Ejercicios 1.5.11 Demostrar que todo espacio normado uniformemente convexo es estrictamente convexo.

Ejercicios 1.5.12 Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas definidas sobre el mismo espacio vectorial X . Demostrar que:

(a) La expresión:

$$\|x\| = \|x\|_1 + \|x\|_2$$

es una norma sobre X .

(b) ¿Es $\|x\| = \|x\|_1 \|x\|_2$ una norma sobre X ?

Ejercicios 1.5.13 (a) Sea

$$C'([a, b]) := \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f'(x) \text{ existe y es continua sobre } [a, b] \right\}.$$

En $C'([a, b])$ definimos las siguientes operaciones:

(O1) Suma:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (x \in [a, b])$$

(O2) Multiplicación por escalar:

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad (\alpha \in K, x \in [a, b]).$$

Se puede verificar que respecto de (O1) y (O2) $C'([a, b])$ es un espacio vectorial sobre K . Demuestre que la expresión:

$$\|f\| = |f(a)| + \|f'\|_u$$

donde

$$\|f'\|_u = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$$

[ver Ejemplo 1.3.10], es una norma sobre $C'([a, b])$

(b) Demostrar que:

$$\|f\|_u \leq [1 + (b - a)] \|f\| \quad (f \in C'([a, b])).$$

Sugerencia: $\left[f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt \right]$

Ejercicios 1.5.14 Sea

$$X_0 := \left\{ f \in C'([a, b]) : \int_a^b f(x) dx = 0 \right\}$$

(a) Demostrar que la expresión:

$$\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$$

es una norma sobre el subespacio X_0 .

(b) ¿Es también $\|\cdot\|$ una norma sobre $C'([a, b])$?

Ejercicios 1.5.15 Sean $X = C([0, 1])$ y $f_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n$ para $n = 1, 2, \dots$
Se pide:

(a) Demostrar que $f_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$ en $\|\cdot\|_1$ de X . [Ver Ejemplo 1.3.11]

(b) Demostrar también que $f_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$ en $\|\cdot\|_u$ de X .

Ejercicios 1.5.16 Sea $X = C([0, 1])$ y $f_n(x) = x^n$ para $n = 1, 2, \dots$ Se pide:

(a) Demostrar que $f_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$ en $\|\cdot\|_1$.

(b) Demostrar también que $f_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$ en $\|\cdot\|_u$ de X .

Ejercicios 1.5.17 Sea $I = [a, b]$. Una partición de I es un subconjunto finito de puntos $P = \{t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$ tal que:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_n = b$$

y

$$\bigcup_{i=1}^n [t_{i-1}, t_i] = I.$$

Sea

$$\Pi := \left\{ P : P \text{ es una partición de } [a, b] \right\}.$$

Una función:

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

se dice que es de variación acotada sobre $[a, b]$ [en el sentido de Jordan [11]]

si:

$$V(f) := \sup_{\Pi} \sum_{i=1}^k |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \infty.$$

Denotemos por:

$$BV[a, b] := \left\{ f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ es de variación acotada sobre } [a, b] \right\}.$$

Entonces, respecto de las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar $BV[a, b]$ tiene estructura de espacio vectorial sobre K [$K = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}]. Definamos:

$$\| \cdot \|_{BV[a, b]} : BV[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

por:

$$\|f\|_{BV[a, b]} = |f(a)| + V(f).$$

Demostrar que $\| \cdot \|_{BV[a, b]}$ es una norma sobre $BV[a, b]$

Ejercicios 1.5.18 Una función:

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

se dice absolutamente continua si dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$\sum_{i=1}^n |f(c_i) - f(d_i)| < \varepsilon$ donde $\left\{ [c_i, d_i] \right\}_{i=1}^n$ es cualquier sucesión de intervalos no solapados en $[a, b]$ tal que $\sum_{i=1}^n |c_i - d_i| < \delta$

[solapados significa que cualesquiera de éstos dos intervalos tienen a

lo sumo un elemento en común

Se pide:

(a) Demostrar que toda función absolutamente continua es continua.

(b) Sea

$$AC([a, b]) := \left\{ f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ es absolutamente continua sobre } [a, b] \right\}$$

Demostrar que $AC([a, b])$ es un espacio vectorial sobre K respecto de las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar.

(c) Demostrar que $AC([a, b]) \subset BV[a, b]$.

(d) Dar un ejemplo de una función $f \in BV[a, b]$ tal que $f \notin AC([a, b])$.

Ejercicios 1.5.19 Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $x_0 \in X$. Demostrar que X y $B(x_0, \varepsilon)$ son conjuntos homeomorfos.

Ejercicios 1.5.20 ¿Es posible establecer un homeomorfismo entre el círculo:

$$A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

y la elipse:

$$B := \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : 4u^2 + 9v^2 = 1 \right\}.$$

Capítulo 2

Espacios de Banach

Introducción

2.1. Desigualdades clásicas en Análisis Funcional.

En esta sección mostraremos las desigualdades de Holder-Minkowski y Minkowski.

Para preparar la demostración de esas desigualdades previamente introducimos el concepto de conjugados armónicos y mostraremos un Lema previo

Definición 2.1.1 *Dos números reales p y q se dicen conjugados armónicos si:*

$$p > 1, \quad q > 1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Observe que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff (p-1)(q-1) = 1 \iff (p-1)q = p \iff (q-1)p = q.$$

Los conjugados armónicos, también se llaman exponentes conjugados [ó índices conjugados]

Lema 2.1.2 *Sean p y q conjugados armónicos; $a \geq 0$ y $b \geq 0$. Entonces,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

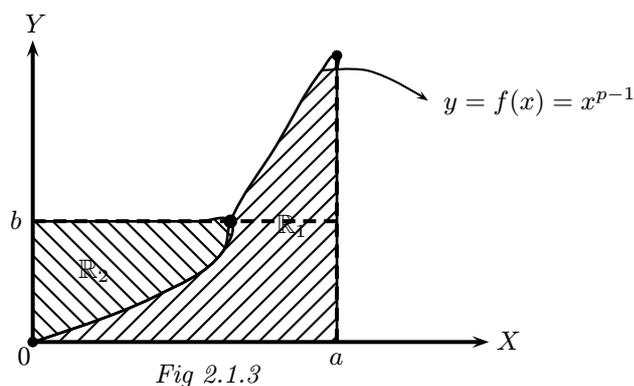
Demostración.

Caso 1.- Si $a = 0$ ó $b = 0$, la demostración es evidente.

Caso 2.- Cuando $a > 0$ y $b > 0$. Entonces, debe de cumplirse alguna de las siguientes afirmaciones:

$$a > b \quad \text{ó} \quad a < b \quad \text{ó} \quad a = b.$$

Consideremos la función potencial $f(x) = x^{p-1}$. La representación gráfica de esta función para $f \Big|_{[0,a]}$ y para $a > b$ es la que muestra la figura siguiente:



Observe de la Figura 2.1.3 que:

$$ab \leq A(R_1) + A(R_2).$$

Tenemos que:

$$A(R_1) = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{x^p}{p} \Big|_0^a = \frac{a^p}{p}.$$

Por otra parte, haciendo $x^{p-1} = y$, obtenemos que:

$$x = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{q-1}$$

por tanto,

$$A(R_2) = \int_0^a y^{q-1} dy = \frac{y^q}{q} \Big|_0^a = \frac{a^q}{q}.$$

En consecuencia,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Las demostraciones para los casos $a < b$ ó $a = b$ son semejantes y se dejan como ejercicio.

Como una consecuencia del lema anterior obtenemos la importante desigualdad de Holder-Minkowski.

Corolario 2.1.3 (Desigualdad de Holder-Minkowski) Sean p y q conjugados armónicos, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ y $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{F}^n$. Entonces,

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}$$

Demostración.

Caso 1.- Cuando $x = 0$ ó $y = 0$ se obtiene una igualdad evidente.

Caso 2.- Cuando $x \neq 0$, $y \neq 0$. Sean,

$$\alpha = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}, \quad \beta = \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q \right)^{1/q}$$

Entonces $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$. Sean

$$x_j' = \frac{x_j}{\alpha}, \quad y_j = \frac{y_j}{\beta} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Luego

$$|x_j'|^p = \frac{|x_j|^p}{\alpha^p} \quad |y_j'|^q = \frac{|y_j|^q}{\beta^q} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

y así,

$$\sum_{j=1}^n |x_j'|^p = \frac{\sum_{j=1}^n |x_j|^p}{\alpha^p} = \frac{\alpha^p}{\alpha^p} = 1$$

$$\sum_{j=1}^n |y_j'|^q = \frac{\sum_{j=1}^n |y_j|^q}{\beta^q} = \frac{\beta^q}{\beta^q} = 1$$

Ahora bien por el Lema 2.1.1, tomando $a = |x_j'|$ y $b = |y_j'|$ obtenemos que:

$$|x_j'| |y_j'| \leq \frac{|x_j'|^p}{p} + \frac{|y_j'|^q}{q}$$

y así,

$$\sum_{j=1}^n |x_j'| |y_j'| \leq \frac{\sum_{j=1}^n |x_j'|^p}{p} + \frac{\sum_{j=1}^n |y_j'|^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

en virtud de que p y q son conjugados armónicos. En consecuencia,

$$1 \geq \sum_{j=1}^n |x_j' y_j'| = \sum_{j=1}^n |x_j'| |y_j'| = \sum_{j=1}^n \left| \frac{x_j}{\alpha} \right| \left| \frac{y_j}{\beta} \right| = \sum_{j=1}^n \left| \frac{x_j y_j}{\alpha \beta} \right|$$

esto es,

$$\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \alpha \beta = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q \right)^{1/q}.$$

Ahora, tenemos el importante corolario:

Corolario 2.1.4 (Desigualdad de Minkowski) Sean $p > 1$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{F}^n$. Entonces

$$\left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p \right)^{1/p}$$

Demostración.

Sea $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces,

$$|x_j + y_j|^p = |x_j + y_j|^{p-1}|x_j + y_j| \leq |x_j + y_j|^{p-1}|x_j| + |x_j + y_j|^{p-1}|y_j|$$

y ahora aplicando la desigualdad de Holder-Minkowski para:

$$\begin{cases} a = |x_j| \\ b = |x_j + y_j|^{p-1} \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} a = |y_j| \\ b = |x_j + y_j|^{p-1} \end{cases}$$

Vamos a obtener que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p &\leq \sum_{j=1}^n |x_j||x_j + y_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^n |y_j||x_j + y_j|^{p-1} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{q(p-1)} \right)^{1/q} + \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{q(p-1)} \right)^{1/q} \end{aligned}$$

de donde se obtiene que:

$$\left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \right) \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{q(p-1)} \right)^{-1/q} \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p \right)^{1/p}$$

esto es,

$$\left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p \right)^{1/p} .$$

Proposición 2.1.5 Sea $p > 1$. La función

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n)$$

es una norma sobre \mathbb{F}^n , además:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

Demostración.

Es fácil verificar los Axiomas (A1) y (A2) de la Definición 1.1.9. La desigualdad triángular es la desigualdad de Minkowski mostrada anteriormente en el Corolario 2.1.4.

Mostraremos ahora que:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

Para esto recordaremos inicialmente que:

$$\text{si } |x| < 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$$

y,

$$\text{si } x > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{n}} = 1$$

y consideremos los siguientes casos:

Caso 1.- Cuando $x = (x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ donde

$$x_1 = x_2 = \dots = x_m = 1$$

y

$$|x_j| < 1, \quad j = m + 1, \dots, n.$$

Entonces, $\|x\|_\infty = 1$ y

$$\begin{aligned}
\|x\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_i|^p = |x_1|^p + \dots + |x_m|^p + |x_{m+1}|^p + \dots + |x_n|^p \\
&= \overbrace{1 + \dots + 1}^{m-\text{veces}} + |x_{m+1}|^p + \dots + |x_n|^p \\
&= m + \sum_{j=m+1}^n |x_j|^p
\end{aligned}$$

luego,

$$\|x\|_p = \left(m + \sum_{j=m+1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}$$

y así,

$$\begin{aligned}
\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left(m + \sum_{j=m+1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} \\
&= \lim_{p \rightarrow \infty} m^{\frac{1}{p}} = 1
\end{aligned}$$

esto es, $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = 1 = \|x\|_\infty$.

Caso 2.- Cuando $\|x\|_\infty \neq 1$. Definimos:

$$y = \frac{x}{\|x\|_\infty}$$

entonces $\|y\|_\infty = 1$, y así por el Caso 1:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|y\|_p = 1,$$

esto es,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|_p = 1 \implies \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

2.2. Espacios de Banach. Teoría Básica. Ejemplos y ejercicios.

En la teoría de espacios métricos un espacio métrico (X, d) se dice completo si cada sucesión $\left(x_n\right)_1^\infty \subset X$ tal que

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$$

es convergente a un $x \in X$. Ahora bien, sabemos que si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces X es un espacio métrico con la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|$ de X , esto es,

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in X).$$

En esta sección introducimos la noción de espacio de Banach. Previamente damos la siguiente Definición y mostramos una Proposición básica.

Definición 2.2.1 Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $\left(x_n\right)_1^\infty$ una sucesión en X . Decimos que $\left(x_n\right)_1^\infty$ es de Cauchy si:

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0$$

esto es, es dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$d(x_n, x_m) = \|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad \text{si} \quad m, n \geq n_0.$$

Proposición 2.2.2 Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $\left(x_n\right)_1^\infty$ una sucesión en X . Entonces,

- (a) Si $\left(x_n\right)_1^\infty$ es de Cauchy, entonces $\left(x_n\right)_1^\infty$ es acotada.
- (b) Si $\left(x_n\right)_1^\infty$ es de Cauchy y ésta sucesión contiene alguna subsucesión convergente, entonces $\left(x_n\right)_1^\infty$ es también convergente.

Demostración.

(a) Como $\left(x_n\right)_1^\infty$ es de Cauchy, dado $\varepsilon = 1$ existe un $n_1 = n_1(1) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left| \|x_n\| - \|x_m\| \right| \leq \|x_n - x_m\| < 1 \quad \text{si} \quad m, n \geq n_0,$$

luego

$$-1 < \|x_n\| - \|x_m\| < 1 \quad \text{si} \quad m, n \geq n_0,$$

entonces, tomando $m = n_0$, $n > n_0$ y

$M = \text{máx} \left\{ 1 + \|x_{n_0}\|, \|x_1\|, \|x_2\|, \dots, \|x_m\| \right\}$ se obtiene que:

$$\|x_n\| \leq M \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(b) Sea $\left(x_{n_k}\right)_1^\infty$ una subsucesión de la sucesión de Cauchy $\left(x_n\right)_1^\infty$ tal que

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x \quad \text{en la norma} \quad \|\cdot\| \quad \text{de} \quad X.$$

Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe un $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left\| x_{n_k} - x \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si} \quad n_k \geq k_1$$

Por otra parte como $\left(x_n\right)_1^\infty$ es de Cauchy dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si} \quad m, n \geq n_1$$

Sean $n_0 = \text{máx}(k_1, n_1)$, $n > n_0$ y $n_k > n_0$ entonces

$$\begin{aligned}
\|x_n - x\| &= \|x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x\| \\
&\leq \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Introduciremos ahora la importante noción de espacio de Banach.

Definición 2.2.3 Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se llama un espacio de Banach si cada sucesión de Cauchy en X es convergente a un elemento $x \in X$.

En este Capítulo estudiaremos algunos ejemplos de espacios de Banach, los cuales mencionamos en la siguiente lista:

- (a) Los espacios l_p^n ($p > 1$), l_1^n y l_∞^n .
- (b) Los espacios de funciones $C([a, b])$, $BV([a, b])$ y $C'([a, b])$.
- (c) Los espacios de sucesiones l^p ($p \geq 1$), l_∞ y c_0 .

Antes de estudiar la completitud de los mencionados espacios, mostraremos las siguientes Proposiciones:

Proposición 2.2.4 Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y Y un subespacio de X . Entonces,

- (a) Si Y es cerrado en X , entonces Y es también un espacio de Banach.
- (b) Si Y es un espacio de Banach, entonces Y es cerrado [en si mismo.]

Demostración.

(a) Sea $(x_n)_1^\infty$ una sucesión de Cauchy en Y . Entonces, $(x_n)_1^\infty$ es también de Cauchy en X . Como $(X, \|\cdot\|)$ es de Banach, existe un $x \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$ si $n \rightarrow \infty$ y como Y es cerrado concluimos que $x \in Y$. Así, $(Y, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

(b) Evidente.

Proposición 2.2.5 Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $\|\cdot\|_1$ otra norma sobre X tal que $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|$. [Ver el Ejemplo 1.3.5]. Entonces, $(X, \|\cdot\|_1)$ es también un espacio de Banach.

Demostración.

Sea $\left(x_n\right)_1^\infty$ una sucesión de Cauchy en X respecto de la norma $\|\cdot\|_1$. Entonces, como $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|$ existen constantes $a > 0$ y $b > 0$ tales que:

$$a\|x\|_1 \leq \|x\| \leq b\|x\|_1 \quad (\forall x \in X)$$

en particular vamos a tener que:

$$a\|x_n - x_m\|_1 \leq \|x_n - x_m\| \quad (B)$$

$$\|x_n - x_m\| \leq b\|x_n - x_m\|_1 \quad (A)$$

Se sigue de la desigualdad (A) que $\left(x_n\right)_1^\infty$ es de Cauchy respecto de la norma $\|\cdot\|$, y ya que $(X, \|\cdot\|)$ es completo existe un $x \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$ si $n \rightarrow \infty$.

De (B) se obtiene también que $x_n \rightarrow x$ si $n \rightarrow \infty$ en $\|\cdot\|_1$. Por tanto, $(X, \|\cdot\|_1)$ es un espacio de Banach.

Proposición 2.2.6 Sean $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(Y, \|\cdot\|_2)$ espacios de Banach. Entonces, el espacio normado $X \oplus Y$ es también un espacio de Banach [ver Proposición 1.2.7].

Demostración.

De acuerdo a la Proposición 1.2.7 la norma en $X \oplus Y$ es:

$$\|(x, y)\| = \|x\|_1 + \|y\|_2 \quad ((x, y) \in X \oplus Y).$$

Sea entonces, $\left(x_n, y_n\right)_1^\infty$ una sucesión de Cauchy en $X \oplus Y$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\begin{aligned} \|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\| &= \|(x_n - x_m, y_n - y_m)\| \\ &= \|x_n - x_m\|_1 + \|y_n - y_m\|_2 < \varepsilon \end{aligned}$$

si $n, m \geq n_0$. De aquí, es claro que:

$$\|x_n - x_m\|_1 < \varepsilon \quad y \quad \|y_n - y_m\|_2 < \varepsilon$$

si $n, m \geq n_0$. Se sigue entonces que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de Cauchy en $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(Y, \|\cdot\|_2)$ respectivamente. Como $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(Y, \|\cdot\|_2)$ son completos, existe un $x \in X$ y $y \in Y$ tal que:

$$x_n \longrightarrow x \quad \text{si} \quad n \longrightarrow \infty$$

y,

$$y_n \longrightarrow y \quad \text{si} \quad n \longrightarrow \infty$$

Así, $(x, y) \in X \oplus Y$ y es fácil verificar que:

$$(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y) \quad \text{si} \quad n \longrightarrow \infty$$

en $(X \oplus Y, \|\cdot\|)$. Así, $(X \oplus Y, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

Con el propósito de establecer una caracterización para los espacios de Banach, introducimos las siguientes definiciones:

Definición 2.2.7 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Una expresión del tipo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

se llama una serie formal en X . También diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente en $(X, \|\cdot\|)$ si la sucesión de sumas parciales

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

es convergente en X .

Definición 2.2.8 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie en X . Decimos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es absolutamente convergente si:

2.2. ESPACIOS DE BANACH. TEORÍA BÁSICA. EJEMPLOS Y EJERCICIOS.83

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty.$$

Tenemos entonces la siguiente caracterización para los espacios de Banach.

Teorema 2.2.9 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Entonces, $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach \iff cada serie absolutamente convergente es convergente.

Demostración.

\implies) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie de X absolutamente convergente. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{n=k+1}^m \|x_n\| < \varepsilon \quad \text{si} \quad m > k \geq k_0.$$

Así, para $m > k \geq k_0$ vamos a tener que:

$$\begin{aligned} \|s_k - s_m\| &= \left\| \sum_{n=1}^k x_n - \sum_{k=1}^m x_k \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=k+1}^m x_n \right\| \\ &\leq \sum_{n=k+1}^m \|x_n\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego, la sucesión de sumas parciales de la serie formal $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es de Cauchy en $(X, \|\cdot\|)$ que es completo, por tanto ésta es convergente.

\impliedby) Supóngase que cada serie formal de X que es absolutamente convergente es convergente. Sea $S := \left(x_n\right)_1^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X . Se sigue entonces que:

Dado $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe un $x_{n_1} \in S$ tal que:

$$\|x_{n_1} - x_l\| < \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad l \geq n_1.$$

Sea $S_1 := S \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{n_1}\}$. Entonces, dado $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$ existe un $x_{n_2} \in S_1$ y así $n_2 > n_1$ tal que:

$$\|x_{n_2} - x_l\| < \frac{1}{2^2} \quad \text{si} \quad l \geq n_2.$$

Continuando este procedimiento, obtenemos una subsucesión $(x_{n_k})_1^\infty$ de $S := (x_n)_1^\infty$ tal que:

$$\|x_{n_k} - x_l\| < \frac{1}{2^k} \quad \text{si} \quad l \geq k$$

en donde l se identifica con n_l y k es fijo, con $k = 1, 2, 3, \dots$

Definamos ahora:

$$y_k = x_{n_k} - x_{n_{k-1}} \quad \text{donde} \quad x_{n_0} = 0.$$

Es evidente que:

$$x_{n_k} = \sum_{i=1}^k y_i$$

y así, por la construcción anterior:

$$\|y_k\| = \|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| < \frac{1}{2^{k-1}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Luego,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} < \infty,$$

se sigue de aquí que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ es absolutamente convergente, luego por

la hipótesis $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ es convergente, esto es, la subsucesión $(x_{n_k})_1^\infty$ de la

2.2. ESPACIOS DE BANACH. TEORÍA BÁSICA. EJEMPLOS Y EJERCICIOS.85

sucesión $S = \left(x_n\right)_1^\infty$ es convergente y luego por la Proposición 2.2.2(b) $\left(x_n\right)_1^\infty$ es también convergente y ésto finaliza la demostración.

Ahora, nuestro próximo objetivo es construir un cierto espacio de Banach de uso frecuente en el Análisis Funcional: el espacio cociente. Para esto, inicialmente recordaremos la siguiente Definición:

Definición 2.2.10 Sea X un conjunto no vacío. Una relación entre los elementos de X , denotada con el símbolo “ \sim ” se llama una relación de equivalencia sobre X si verifica las siguientes propiedades:

- (P1) $x \sim x, x \in X$ [Reflexiva]
- (P2) Si $x \sim y$ entonces $y \sim x$ [Simétrica]
- (P3) Si $x \sim y, y \sim z$ entonces $x \sim z$ [Transitiva]

[La noción de relación de equivalencia ya fué usada para la solución del Ejercicio 1.3.5]

Así si “ \sim ” es una relación de equivalencia sobre X y $x \in X$, entonces la clase de equivalencia de $x \in X$, denotada por $[x]$ es:

$$[x] := \left\{ y \in X : x \sim y \right\}$$

y el conjunto cociente de X determinado por ésta relación de equivalencia “ \sim ” y denotado por X/\sim es:

$$X/\sim := \left\{ [x] : x \in X \right\}.$$

Observe que X/\sim es una subcolección de $\mathcal{P}(X)$.

Ahora bien, sean X un espacio vectorial y M un subespacio (no necesariamente cerrado) de X . Definamos:

$$x \sim y \iff x - y \in M, \quad (x, y \in X).$$

Entonces, es fácil verificar que “ \sim ” es una relación de equivalencia sobre X . Note que en este caso, la clase de equivalencia de un $x \in X$, es:

$$[x] := x + M.$$

El conjunto cociente determinado por ésta relación de equivalencia es denotado por: X/M .

Definiremos en X/M las siguientes operaciones:

(O1) Suma:

$$[x] + [y] = [x + y] \quad (x, y \in X)$$

(O2) Multiplicación por escalar:

$$\alpha[x] = [\alpha x] \quad (\alpha \in \mathbb{F}, x \in X)$$

Mostraremos a continuación que (O1) y (O2) están bien definidas.

En efecto:

(O1) Supóngase que:

$$[x] = [x'] \quad y, \quad [y] = [y']$$

esto es,

$$x + M = x' + M$$

y,

$$y + M = y' + M$$

entonces,

$$x + y + M = x' + y' + M.$$

Efectivamente, como $x' \in [x]$ y $y' \in [y]$ entonces:

$$x' = x + m_1 \quad (m_1 \in M)$$

$$y' = y + m_2 \quad (m_2 \in M),$$

2.2. ESPACIOS DE BANACH. TEORÍA BÁSICA. EJEMPLOS Y EJERCICIOS.87

luego

$$\begin{aligned}x' + y' + M &= x + m_1 + y + m_2 + M \\ &= x + y + m_1 + m_2 + M \\ &= x + y + M\end{aligned}$$

Así, $[x + y] = [x' + y']$.

(O2) Supóngase que:

$$\alpha[x'] = \alpha[x].$$

Entonces,

$$\alpha(x' + M) = \alpha(x + M)$$

Luego, $\alpha x' \in \alpha[x]$ entonces,

$$\alpha x' = \alpha(x + m_1) \quad (m_1 \in M)$$

Así,

$$\begin{aligned}\alpha x' + M &= \alpha(x + m_1) + M \\ &= \alpha x + \alpha m_1 + M \\ &= \alpha x + M\end{aligned}$$

esto es, $[\alpha x'] = [\alpha x]$

y por tanto (O2) está también bien definida.

A continuación tenemos la siguiente Proposición y los detalles de la demostración los dejamos al lector.

Proposición 2.2.11 Sean X un espacio vectorial y M un subespacio de X . El conjunto cociente X/M es un espacio vectorial respecto a las operaciones (O1) y (O2). El elemento neutro para la adición (O1) es todo el subespacio M ya que:

$$[0] := M \quad (0 \in M).$$

Cuando además X es un espacio normado y M es un subespacio cerrado de X obtenemos el siguiente:

Teorema 2.2.12 Sean $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado y M un subespacio cerrado de X . Entonces, la expresión:

$$\left\| [x] \right\| := \inf_{m \in M} \|x + m\| \quad (x \in X) \quad 2.2.10$$

define una norma sobre el espacio cociente X/M .

Demostración.

Es claro que que la ecuación 2.2.10 está bien definida sobre X/M y que además,

$$0 \leq \|x + M\| \leq \|x\| \quad (x \in X)$$

esto es,

$$\|x + M\| = \left\| [x] \right\| \in [0, \|x\|].$$

A continuación mostraremos que 2.2.10 satisface las propiedades de una norma. En efecto:

(A1)(\implies) Si $\left\| [x] \right\| = 0$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe un $m_0 \in M$ tal que:

$$\|x + m\| = \|x - (-m)\| < \varepsilon$$

esto es,

$$B(x, \varepsilon) \cap M \neq \phi$$

también

$$\widehat{B}(x, \varepsilon) \cap M \neq \phi$$

2.2. ESPACIOS DE BANACH. TEORÍA BÁSICA. EJEMPLOS Y EJERCICIOS.89

luego, ya que ε es arbitrario vamos a tener que $x \in M'$. Por otra parte, como M es cerrado $x \in M$. (ver la Proposición 1.1.23). Por tanto,

$$[x] = x + M = M = [0].$$

(\Leftarrow) Si $[x] = [0]$, entonces $x \in [0] = M$ y por tanto $-x \in M$. Así,

$$\| [x] \| = \inf_{m \in M} \| x + m \| \leq \| x + (-x) \| = \| 0 \| = 0$$

y en consecuencia $\| [x] \| = 0$.

(A2) Consideremos los siguientes casos:

Caso 1: Cuando $\lambda = 0$. Entonces,

$$\| 0[x] \| = \| [0x] \| = \| [0] \| = 0 = 0 \| [x] \|.$$

Caso 2: Sea $\lambda \neq 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} \| \lambda(x + M) \| &= \| \lambda x + M \| = \inf_{m \in M} \| \lambda x + m \| \\ &= \inf_{m \in M} \left\| \lambda \left(x + \frac{m}{\lambda} \right) \right\| \\ &= \inf_{m' \in M} \left\| \lambda(x + m') \right\| \\ &= \inf_{m' \in M} |\lambda| \| x + m' \| \\ &= |\lambda| \inf_{m' \in M} \| x + m' \| \\ &= |\lambda| \| x + M \| \end{aligned}$$

Por tanto, $\| \lambda(x + M) \| = |\lambda| \| x + M \|$ ($\lambda \in \mathbb{F}$, $x \in X$)

(A3) [Desigualdad triangular]. Mostraremos que:

$$\| [x] + [y] \| \leq \| x \| + \| y \| \quad (x, y \in X).$$

Como $[x] + [y] := [x + y]$, basta demostrar que:

$$\left\| [x + y] \right\| \leq \left\| [x] \right\| + \left\| [y] \right\|,$$

o equivalentemente que:

$$\left\| [x + y] \right\| \leq \left\| [x] \right\| + \left\| [y] \right\| + \varepsilon \quad \text{para } \varepsilon > 0$$

arbitrario.

En efecto, de la Definición de $\left\| [\cdot] \right\|$ vamos a tener que dado $\varepsilon > 0$ existen $m_1, m_2 \in M$ tales que:

$$\|x + m_1\| < \left\| [x] \right\| + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|y + m_2\| < \left\| [y] \right\| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Luego

$$\|x + m_1\| + \|y + m_2\| < \left\| [x] \right\| + \left\| [y] \right\| + \varepsilon$$

Pero como,

$$\|x + m_1\| + \|y + m_2\| \geq \left\| x + y + m_1 + m_2 \right\|$$

Haciendo $m = m_1 + m_2 \in M$ obtenemos que:

$$\left\| x + y + m \right\| \leq \|x + m_1\| + \|y + m_2\| < \left\| [x] \right\| + \left\| [y] \right\| + \varepsilon$$

y en consecuencia,

$$\left\| [x + y] \right\| < \left\| [x] \right\| + \left\| [y] \right\| + \varepsilon$$

para $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por tanto,

$$\left\| [x + y] \right\| \leq \left\| [x] \right\| + \left\| [y] \right\|.$$

2.2. ESPACIOS DE BANACH. TEORÍA BÁSICA. EJEMPLOS Y EJERCICIOS.91

Para el caso cuando $X = \mathbb{R}^2$ dotado de la norma Euclidiana y,

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$$

entonces, la clase de equivalencia de un elemento $z = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, es el que muestra en la Figura siguiente:

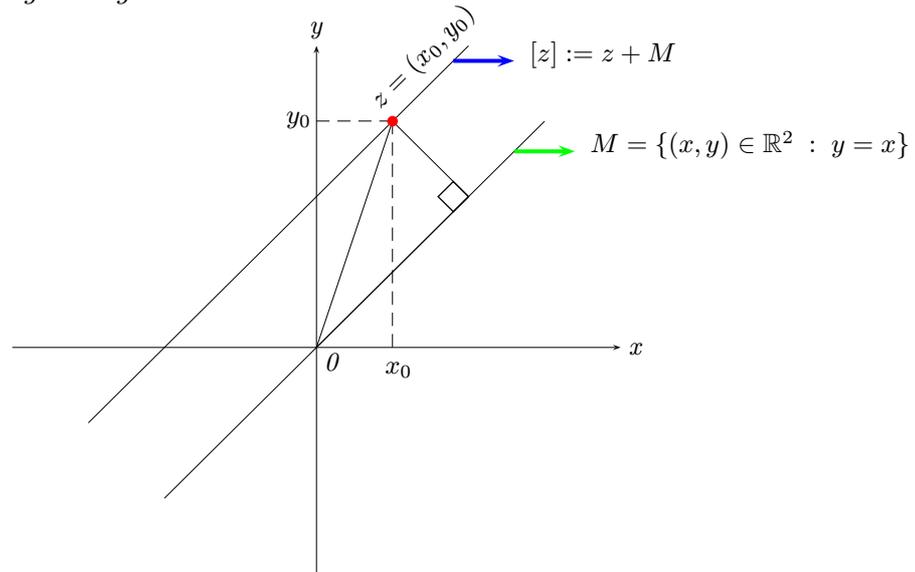


Figura 2.2.1

Note también de la Figura 2.2.1 que:

$$\|[z]\| = \inf_{m \in M} \|z + m\| = d(z, M),$$

donde $d(z, M)$ es la distancia de $z = (x_0, y_0)$ a la recta $y = x$.

A continuación enunciamos y mostramos el importante:

Teorema 2.2.13 Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y M subespacio cerrado de X . Entonces, el espacio cociente $\widehat{X} = X/M$ es un espacio de Banach con la norma:

$$\|[x]\| = \inf_{m \in M} \|x + m\| \quad (x \in X, [x] := x + M)$$

Demostración.

Sea $\left\{ [x_n] \right\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X/M . Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left\| [x_n] - [x_m] \right\| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n, m \geq n_0,$$

de aquí existe una subsucesión $\left\{ [x_{n_k}] \right\}_{k=1}^{\infty}$ de $\left\{ [x_n] \right\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\left\| [x_{n_k}] - [x_{n_{k+1}}] \right\| < \frac{1}{2^k} \quad \text{para} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Haciendo $y_k = x_{n_k}$ vamos a tener que,

$$\left\| [y_k] - [y_{k+1}] \right\| < \frac{1}{2^k} \quad \text{para} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Como

$$[y_k] - [y_{k+1}] = y_k + M - (y_{k+1} + M),$$

entonces en particular, para $k = 1$,

$$\|y_1 - y_2 + M\| < \frac{1}{2},$$

luego de la Definición de $\|[\cdot]\|$ en el espacio cociente X/M existe un elemento digamos $m_2 \in M$ tal que:

$$\|y_1 - y_2 + m_2\| < \frac{1}{2}$$

esto es,

$$\|y_1 - (y_2 - m_2)\| < \frac{1}{2}.$$

Sea $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2 - m_2$ entonces,

$$\|z_1 - z_2\| < \frac{1}{2}.$$

2.2. ESPACIOS DE BANACH. TEORÍA BÁSICA. EJEMPLOS Y EJERCICIOS.93

También, para $k = 2$

$$\|y_2 - y_3 + M\| < \frac{1}{2^2},$$

por tanto, existe un $m_3' \in M$ tal que

$$\|y_2 - y_3 + m_3'\| < \frac{1}{2^2}$$

esto es,

$$\|z_2 + m_2 - y_3 + m_3'\| < \frac{1}{2^2}.$$

Haciendo $z_3 = y_3 - m_3$ donde $m_3 = m_2 + m_3' \in M$ obtenemos que:

$$\|z_2 - z_3\| < \frac{1}{2^2}.$$

Continuando éste procedimiento, obtenemos una sucesión $\left\{z_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ tal que

$$\|z_n - z_{n+1}\| < \frac{1}{2^n} \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

donde

$$z_n = y_n - m_n$$

$$z_{n+1} = y_{n+1} - m_{n+1}$$

$m_n, m_{n+1} \in M$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \|z_n - z_{n+p}\| &= \|z_n - z_{k+1} + z_{n+1} - z_{n+2} + \dots + z_{n+p-1} - z_{n+p}\| \\ &\leq \|z_n - z_{n+1}\| + \|z_{n+1} - z_{n+2}\| + \dots + \|z_{n+p-1} - z_{n+p}\| \\ &< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p-1}} < \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

se sigue entonces que $\left\{z_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $(X, \|\cdot\|)$ que es de Banach, por tanto existe un $z \in X$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \quad \text{en la norma } \|\cdot\| \text{ de } X.$$

Ahora bien, como:

$$\|z + M - (z_n + M)\| = \|z - z_n + M\| \leq \|z - z_n\| \rightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty$$

se sigue que

$$z_n + M \rightarrow z + M \quad \text{si } n \rightarrow \infty \text{ en } X/M$$

Por otra parte, como $z_n = y_n - m_n$ ($m_n \in M$) vamos a tener también que

$$y_n + M \rightarrow z + M \quad \text{si } n \rightarrow \infty \text{ en } X/M.$$

Como $y_n = x_{k_n}$

[aunque inicialmente $y_k = x_{n_k}$ no se pierde generalidad usando ahora ésta notación]

se tiene también que:

$$x_{k_n} + M \rightarrow z + M \quad \text{si } n \rightarrow \infty \text{ en } X/M$$

Así,

$$x_{n_k} + M \rightarrow z + M \quad \text{si } k \rightarrow \infty \text{ en } X/M,$$

en conclusión, $\left\{[x_n]\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en X/M que contiene una subsucesión convergente en X/M . Por tanto,

$$x_n + M \rightarrow z + M \quad \text{en } X/M \text{ si } n \rightarrow \infty$$

lo cual concluye la demostración.

En la demostración del Teorema anterior ¿ En donde se usa la hipótesis que M es cerrado?

El siguiente resultado solamente algebraico nos da la dimensión del espacio cociente X/M cuando $\dim X < \infty$.

2.2. ESPACIOS DE BANACH. TEORÍA BÁSICA. EJEMPLOS Y EJERCICIOS.95

Proposición 2.2.14 Sea X un espacio vectorial con $\dim X = n$ y, M un subespacio de X con $\dim M = m$. Entonces,

$$\dim X/M = n - m$$

Demostración.

Sea

$$B_M := \{l_1, l_2, \dots, l_m\}$$

una base de M y, extendámosla a una base de B_X , esto es,

$$B_X := \{l_1, l_2, \dots, l_m, l_{m+1}, \dots, l_n\}.$$

Afirmación 1. Una base para el espacio cociente X/M es:

$$B_{X/M} := \{[l_{m+1}], [l_{m+2}], \dots, [l_n]\}.$$

En efecto, supóngase inicialmente que:

$$\alpha_{m+1}[l_{m+1}] + \alpha_{m+2}[l_{m+2}] + \dots + \alpha_n[l_n] = [0] = M \quad (2.2.12)$$

Mostraremos que $\alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \dots = \alpha_n = 0$.

Efectivamente, por (2.2.12) vamos a obtener que:

$$\alpha_{m+1}l_{m+1} + \alpha_{m+2}l_{m+2} + \dots + \alpha_n l_n \in M,$$

y así, existen escalares no todos nulos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ en \mathbb{F} tal que:

$$\alpha_{m+1}l_{m+1} + \alpha_{m+2}l_{m+2} + \dots + \alpha_n l_n = \sum_{i=1}^m \alpha_i l_i$$

ó también,

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i l_i - \sum_{i=m+1}^n \alpha_i l_i = 0$$

esto es,

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i l_i + \left(\sum_{i=m+1}^n -\alpha_i l_i \right) = 0$$

Haciendo:

$$\beta_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } 1 \leq i \leq m \\ -\alpha_i & \text{si } m+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

obtenemos que:

$$\sum_{i=1}^n \beta_i l_i = 0$$

y en consecuencia

[ya que $B_X := \{l_1, l_2, \dots, l_m, \dots, l_n\}$ es una base de X ,

$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$ y así en particular

$$\alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \dots = \alpha_n = 0.$$

Sea ahora $[x] \in X/M$ ($x \in X$). Entonces,

$$x = x' + m \quad (x' \in X, m \in M)$$

Luego, $x - x' \in M$. Por tanto,

$$[x] = [x'].$$

Ahora bien, al tener que $x = x' + m$, obtenemos que:

$$\begin{aligned} x = x' + m &= \sum_{i=1}^n \alpha_i l_i + m \\ &= \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i l_i + m \right) + \sum_{i=m+1}^n \alpha_i l_i \end{aligned}$$

Luego,

2.2. ESPACIOS DE BANACH. TEORÍA BÁSICA. EJEMPLOS Y EJERCICIOS.97

$$[x] = \left[\sum_{i=1}^m \alpha_i l_i + m \right] + \left[\sum_{i=m+1}^n \alpha_i l_i \right]$$

como $\sum_{i=1}^m \alpha_i l_i + m \in M$, entonces $\left[\sum_{i=1}^m \alpha_i l_i + m \right] = [0]$, y en consecuencia

$$[x] = \left[\sum_{i=1}^m \alpha_i l_i + m \right] + \left[\sum_{i=m+1}^n \alpha_i l_i \right]$$

$$= [0] + \left[\sum_{i=m+1}^n \alpha_i l_i \right]$$

$$= \left[\sum_{i=m+1}^n \alpha_i l_i \right] = \sum_{i=m+1}^n \alpha_i [l_i].$$

2.3. Algunos Ejemplos de Espacios de Banach.

En esta Sección daremos algunos ejemplos de espacios de Banach que son de uso frecuente en el Análisis Funcional.

Los ejemplos de espacios de Banach que estudiaremos van a ser del tipo:

- (a) Espacios de Banach de dimensión finita.
- (b) Espacios de Banach de sucesiones.
- (c) Espacios de Banach de funciones.

Suponemos que para el desarrollo de la presente Sección el lector está familiarizado con el hecho fundamental del Análisis de que el conjunto de los números reales es un espacio de Banach con la métrica inducida por el valor absoluto. Comenzaremos pues con nuestros Ejemplos:

Ejemplo 2.3.1 Sea $p > 1$. Sabemos de la Proposición 2.1.5 que la expresión:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \left(x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n \right)$$

define una norma sobre \mathbb{F}^n . Mostraremos a continuación que \mathbb{F}^n es un espacio de Banach dotado de ésta norma. En efecto, sea $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_p)$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe un $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x_k - x_m\|_p < \varepsilon \quad \text{si} \quad k, m \geq n_0.$$

Sean

$$x_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$$

$$x_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$$

entonces,

$$\|x_k - x_m\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i^{(k)} - x_i^{(m)}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon \quad \text{si} \quad k, m \geq n_0$$

de ésta desigualdad se sigue que:

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon \quad \text{si} \quad k, m \geq n_0 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Se sigue que $(x_i^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy en K , para $i = 1, 2, \dots, n$ y, ya que $(K, |\cdot|)$ es completo, ésta sucesión $(x_i^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ es convergente a un $x_i \in K$, $i = 1, 2, \dots, n$. Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Entonces, $x \in K^n$. Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$ existe un $k_i \in \mathbb{N}$ $i = 1, 2, \dots, n$ tal que:

$$|x_1^{(k)} - x_1| < \frac{\varepsilon}{n^p} \quad \text{si} \quad k \geq k_1$$

$$|x_2^{(k)} - x_2| < \frac{\varepsilon}{n^p} \quad \text{si} \quad k \geq k_2$$

.....

$$|x_n^{(k)} - x_n| < \frac{\varepsilon}{n^p} \quad \text{si} \quad k \geq k_n$$

Sea $k_0 = \max\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$. Entonces, para $k \geq k_0$ vamos a obtener que:

$$\|x_k - x\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i^{(k)} - x_i|^p < n \left(\frac{\varepsilon^p}{n} \right) = \varepsilon^p \quad \text{si} \quad k \geq k_0$$

lo cual muestra que $(K^n, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach.

Al par $(K^n, \|\cdot\|_p)$ se denota por l_p^n . Así,

$$l_p^n = (K^n, \|\cdot\|_p).$$

Ejemplo 2.3.2 En nuestro Ejemplo 1.3.4 hemos demostrado que la expresión

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \left(x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \right)$$

define una norma sobre \mathbb{R}^n . También $\|\cdot\|_\infty$ define una norma sobre \mathbb{C}^n . Mostraremos entonces que $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

En efecto, sea $\left(x_k\right)_{k=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe un $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x_k - x_m\|_\infty < \varepsilon \quad \text{si} \quad k, m \geq n_0.$$

Como en nuestro Ejemplo anterior:

$$x_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$$

$$x_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$$

y

$$x_k - x_m = (x_1^{(k)} - x_1^{(m)}, x_2^{(k)} - x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(k)} - x_n^{(m)}),$$

luego

$$\|x_k - x_m\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon \quad \text{si} \quad k, m \geq n_0$$

se sigue de ésta desigualdad que:

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon \quad \text{si} \quad k, m \geq n_0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Así, $\left(x_i^{(m)}\right)_{m=1}^\infty$ es de Cauchy para $i = 1, 2, \dots, n$ en $(K^n, |\cdot|)$, el cual es completo. Por tanto, existe $x_i \in K$ tal que:

$$x_i = \lim_{m \rightarrow \infty} x_i^{(m)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Entonces, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ y, tomando $k \geq n_0$ y haciendo que $m \rightarrow \infty$ vamos a tener que:

$$|x_i^{(k)} - x_i| \leq \varepsilon \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

en consecuencia

$$\|x_k - x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i| \leq \varepsilon \quad \text{si} \quad k \geq n_0.$$

Al par $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_\infty)$ se le denota por l_∞^n . Así,

$$l_\infty^n = (\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_\infty).$$

Observe que cuando $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ tenemos como casos particulares los espacios dados en los Ejemplos 1.3.2 y 1.3.4.

A continuación mostraremos nuestros Ejemplos de espacios de Banach de sucesiones.

Ejemplo 2.3.3 Sea $p \geq 1$. Definamos el conjunto:

$$l^p := \left\{ \left(x_n \right)_{n=1}^\infty : x_n \in \mathbb{F} \text{ y } \sum_{i=1}^\infty |x_i|^p < \infty \right\}.$$

En l^p y en $\mathbb{F} \oplus l^p$ definimos las siguientes operaciones:

(O1) Dados $\left(x_n \right)_{n=1}^\infty \in l^p$ y $\left(y_n \right)_{n=1}^\infty \in l^p$:

$$\left(x_n \right)_{n=1}^\infty + \left(y_n \right)_{n=1}^\infty = \left(x_n + y_n \right)_{n=1}^\infty$$

(O2) Dados $\alpha \in \mathbb{F}$ y $\left(x_n \right)_{n=1}^\infty \in l^p$:

$$\alpha \left(x_n \right)_{n=1}^\infty = \left(\alpha x_n \right)_{n=1}^\infty.$$

Es claro que (O2) está bien definida en $\mathbb{F} \oplus l^p$. Por otra parte, ya que:

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ahora bien, de nuestra hipótesis dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x_n - x_m\|_p^p = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^p < \varepsilon^p \quad \text{si} \quad m, n \geq n_0$$

luego,

$$|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^p < \varepsilon^p \quad \text{si} \quad m, n \geq n_0, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

se sigue de ésta última desigualdad, que la sucesión $\left\{x_j^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en \mathbb{F} , para $j = 1, 2, 3, \dots$. Como $(\mathbb{F}, |\cdot|)$ es completo, existe un único $z_j \in \mathbb{F}$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_j^{(n)} = z_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Sea $x := \left\{z_j\right\}_{j=1}^{\infty}$

Afirmación 1: $x := \left\{z_j\right\}_{j=1}^{\infty} \in l^p$. En efecto, ya que nuestra sucesión inicial $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, entonces por la Proposición 2.2.2(a) es acotada. Así, existe un $M > 0$ tal que:

$$\|x_n\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n)}|^p \right)^{1/p} \leq M \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{j=1}^k |x_j^{(n)}|^p \right)^{1/p} \leq \|x_n\|_p \leq M$$

y ahora haciendo que $n \rightarrow \infty$ obtenemos que:

$$\left(\sum_{j=1}^k |z_j|^p \right)^{1/p} \leq M$$

y en consecuencia como k es arbitrario

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |z_j|^p \right)^{1/p} \leq M$$

esto es, $x := \left\{ z_j \right\}_{j=1}^{\infty} \in l^p$.

Afirmación 2: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ en $\|\cdot\|_p$. En efecto, usando nuevamente el hecho de que $\left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy:

$$\|x_n - x_m\|_p^p = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^p < \varepsilon^p \quad \text{si} \quad m, n \geq n_0$$

Luego, en particular

$$\sum_{j=1}^k |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^p < \varepsilon^p \quad \text{si} \quad m, n \geq n_0, \quad k \in \mathbb{N} \text{ fijo}$$

Así, manteniendo n fijo, pero con $n \geq n_0$ y haciendo que $m \rightarrow \infty$ vamos a tener que:

$$\sum_{j=1}^k |x_j^{(n)} - z_j|^p < \varepsilon^p, \quad k \in \mathbb{N} \text{ fijo}$$

Por tanto ahora haciendo que $k \rightarrow \infty$ se obtiene que

$$\|x_n - x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n)} - z_j|^p \right)^{1/p} < \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geq n_0$$

lo cual finaliza la Demostración.

Ejemplo 2.3.4 Sea el conjunto:

$$l_{\infty} := \left\{ \left(x_n \right)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{F}, \text{ y } \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}$$

Es fácil verificar que éste conjunto es un espacio vectorial sobre \mathbb{F} respecto de las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar para sucesiones. Además, la expresión

$$\left\| \left(x_n \right)_{n=1}^{\infty} \right\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

define una norma sobre l_{∞} . Mostraremos a continuación que l_{∞} dotado de ésta norma es un espacio de Banach. En efecto, sea $\left\{ x_k \right\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en l_{∞} . Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x_k - x_m\|_{\infty} < \varepsilon \quad \text{si} \quad k, m \geq n_0$$

como

$$x_k := \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}, \dots \right)$$

$$x_m := \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}, \dots \right)$$

entonces, con k y m fijos,

$$x_k - x_m = \left(x_j^{(k)} - x_j^{(m)} \right)_{j=1}^{\infty}$$

y por tanto,

$$\|x_k - x_m\|_{\infty} = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j^{(k)} - x_j^{(m)}| < \varepsilon \quad \text{si} \quad k, m \geq n_0$$

y en consecuencia

$$|x_j^{(k)} - x_j^{(m)}| < \varepsilon \quad \text{si} \quad k, m \geq n_0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.3.5)$$

se sigue de ésta última desigualdad que la sucesión $\left(x_j^{(k)} \right)_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy en \mathbb{F} para $j = 1, 2, 3, \dots$ y ya que $(\mathbb{F}, |\cdot|)$ es completo, existe un $x_j \in \mathbb{F}$ tal que:

$$x_j = \lim_{k \rightarrow \infty} x_j^{(k)} \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.3.6)$$

sea $x := \left(x_j \right)_{j=1}^{\infty}$.

Afirmación 1: $x := \left(x_j \right)_{j=1}^{\infty} \in l_{\infty}$. En efecto, tomando $m = n_0$ en (2.3.5) vamos a tener que:

$$|x_j^{(k)} - x_j^{(n_0)}| < \varepsilon \quad \text{si} \quad k \geq n_0, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

y ahora haciendo que $k \rightarrow \infty$ y usando (2.3.6) obtenemos que:

$$|x_j - x_j^{(n_0)}| < \varepsilon \quad \text{para} \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Ahora bien, como $x_{n_0} := \left(x_1^{(n_0)}, x_2^{(n_0)}, \dots \right) \in l_{\infty}$, entonces

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j^{(n_0)}| < \infty$$

y ya que

$$|x_j| \leq |x_j - x_j^{(n_0)}| + |x_j^{(n_0)}| \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

entonces

$$\begin{aligned} \|x\|_{\infty} &= \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j - x_j^{(n_0)}| + \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j^{(n_0)}| \\ &< \infty \end{aligned}$$

Afirmación 2: $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x$ en $\|\cdot\|_{\infty}$. En efecto, de (2.3.5) y (2.3.6) se obtiene que:

$$|x_j - x_j^{(m)}| < \varepsilon \quad \text{donde} \quad m \geq n_0 \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Luego

$$\|x - x_m\|_{\infty} = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j - x_j^{(m)}| < \varepsilon \quad m \geq n_0$$

lo cual finaliza la Demostración.

Ejemplo 2.3.5 Sea

$$c := \left\{ \left(x_n \right)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{F} \text{ y existe } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right\}.$$

Entonces, c es un espacio vectorial sobre \mathbb{F} respecto de las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar. Además, ya que toda sucesión convergente es acotada se sigue que c es un subespacio vectorial de l_{∞} .

Afirmación: $(c, \|\cdot\|_{\infty})$ es un espacio de Banach. Para mostrar esta afirmación basta demostrar que c es cerrado en l_{∞} . [ver Proposición 2.2.4 (a)].

Sea, entonces $\left(x_n \right)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en c tal que $x_n \rightarrow x \in l_{\infty}$ si $n \rightarrow \infty$ en $\|\cdot\|_{\infty}$. Mostraremos que $x \in c$. Sean

$$x_1 := \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_i^{(1)}, \dots \right) \in c$$

$$x_2 := \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_i^{(2)}, \dots \right) \in c$$

.....

$$x_n := \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_i^{(n)}, \dots \right) \in c$$

.....

$$x := \left(y_1, y_2, \dots, y_i, \dots \right) \in l_{\infty}$$

Afirmación 1: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^{(n)} = y_i \quad i = 1, 2, 3, \dots$

En efecto, como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x_n - x\|_{\infty} = \sup_{i \in \mathbb{N}} \left| x_i^{(n)} - y_i \right| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geq n_0$$

en consecuencia

$$\left| x_i^{(n)} - y_i \right| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geq n_0 \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

lo cual muestra nuestra Afirmación 1.

Afirmación 2: Sea $L_n = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i^{(n)}$. La sucesión de límites $\left(L_n \right)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $(\mathbb{F}, |\cdot|)$. En efecto, como $\left(x_n \right)_{n=1}^{\infty}$ es convergente en l_{∞} , entonces ésta es de Cauchy en l_{∞} , por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\|_{\infty} = \sup_{i \in \mathbb{N}} \left| x_i^{(n)} - x_i^{(m)} \right| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n, m \geq n_1$$

y en consecuencia

$$\left| x_i^{(n)} - x_i^{(m)} \right| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n, m \geq n_1, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

y así también cuando $i \rightarrow \infty$ vamos a obtener que:

$$\left| L_n - L_m \right| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n, m \geq n_1$$

y en consecuencia por la completitud de $(\mathbb{F}, |\cdot|)$ existe un único $L \in \mathbb{F}$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = L.$$

Afirmación 3: $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = L$ [esto mostrará que

$$x := \left(y_i \right)_{i=1}^{\infty} \in c \text{ y completa la Demostración}].$$

En efecto, como $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = L$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|L_n - L| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{si} \quad n \geq n_1$$

Por otra parte, usando nuevamente el hecho de que:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_n = x$$

en $\|\cdot\|_\infty$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x_n - x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i^{(n)} - y_i| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{si} \quad n \geq n_2$$

y en consecuencia

$$|x_i^{(n)} - y_i| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{si} \quad n \geq n_2, \quad i = 1, 2, \dots$$

Tomando entonces $n_0 = \max(n_1, n_2)$ vamos a obtener al fijar éste n_0 que:

$$|L_{n_0} - L| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad |x_i^{(n_0)} - y_i| < \frac{\varepsilon}{3} \quad i = 1, 2, \dots$$

También, ya que $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i^{(n)} = L_n$ para $n = 1, 2, \dots$, entonces

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i^{(n_0)} = L_{n_0} \left[\Rightarrow \left| x_i^{(n_0)} - L_{n_0} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{si} \quad i \geq i_0 \right]$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |y_i - L| &\leq |y_i - x_i^{(n_0)}| + |x_i^{(n_0)} - L_{n_0}| + |L_{n_0} - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \text{si} \quad i \geq i_0 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.6 Sea

$$c_0 := \left\{ \left(x_n \right)_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{F} \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \right\}.$$

Entonces, c_0 es un espacio vectorial respecto de las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar. La expresión:

$$\left\| \left(x_n \right)_{n=1}^{\infty} \right\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

define también una norma sobre c_0 .

Afirmación: $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach. En efecto, para ésto basta demostrar que $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ es cerrado en l_∞ . En efecto, si $\left(x_n \right)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ tal que $x_n \rightarrow x := (y_1, y_2, \dots) \in l_\infty$ si $n \rightarrow \infty$ en $\|\cdot\|_\infty$, entonces, siguiendo

un proceso semejante a el dado en la Demostración del Ejemplo (1.3.7) vamos a ver que $L_n = 0$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ y así:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 0$$

Luego, por la Afirmación 3:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = 0$$

y en consecuencia $x := \left(y_i \right)_{i=1}^{\infty} \in c_0$.

Ejemplo 2.3.7 $(C([a, b]), \|\cdot\|_u)$ es un espacio de Banach [ver el Ejemplo (1.3.10) para recordar la Definición del espacio $C([a, b])$ y de la norma $\|\cdot\|_u$].

En efecto, sea $\left(f_n \right)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $C([a, b])$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|f_n - f_m\|_u = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad m, n \geq n_0.$$

Se sigue de ésta desigualdad que:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad m, n \geq n_0 \quad \forall x \in [a, b] \quad (1)$$

y por tanto la sucesión $\left\{ f_n(x) \right\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente de Cauchy en $(\mathbb{F}, |\cdot|)$.

Sea

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Por la unicidad del límite f es evidentemente una función definida sobre el intervalo $[a, b]$ a valores en \mathbb{F} .

Afirmación 1: $f_n \rightarrow f$ si $n \rightarrow \infty$ en $\|\cdot\|_u$. En efecto, tomando $n \geq n_0$ y haciendo que $m \rightarrow \infty$ de (1) se obtiene que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Luego,

$$\|f_n - f\|_u = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geq n_0$$

Afirmación 2: $f \in C([a, b])$. En efecto, sea $x_0 \in [a, b]$. Como $f_{n_0} \in C([a, b])$, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\left| f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

Por otra parte como:

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)$$

entonces,

$$\begin{aligned} \left| f(x) - f(x_0) \right| &\leq \left| f(x) - f_{n_0}(x) \right| + \left| f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) \right| + \left| f_{n_0}(x_0) - f(x_0) \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

si $0 < |x - x_0| < \delta$, lo cual concluye la Demostración.

Ejemplo 2.3.8 $(BV([a, b]), \|\cdot\|_{BV})$ es un espacio de Banach [ver el Ejercicio (1.4.18) para recordar la Definición del espacio $BV([a, b])$]. En efecto, tenemos inicialmente que si $f \in BV([a, b])$ entonces,

$$\|f\|_{BV} = |f(a)| + V(f),$$

donde,

$$V(f) = \sup_{\Pi} \sum_{i=1}^k |f(t_i) - f(t_{i-1})|.$$

Sea entonces, $\left\{ f_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $BV([a, b])$. Sin perder generalidad podemos suponer que $f_n(a) = 0$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ [¿Por qué?] Así, dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\begin{aligned}
\|f_n - f_m\|_{BV} &= \left| (f_n - f_m)(a) \right| + V(f_n - f_m) \\
&= V(f_n - f_m) \\
&= \sup_{\Pi} \sum_{i=1}^k |(f_n - f_m)(t_i) - (f_n - f_m)(t_{i-1})| \\
&< \varepsilon \quad \text{si} \quad m, n \geq n_0
\end{aligned}$$

como $P_0 = \{a, x, b\}$ ($a < x < b$) es una partición de $[a, b]$ y además

$$\begin{aligned}
\left| (f_n - f_m)(b) - (f_n - f_m)(a) \right| &\leq \left| (f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(a) \right| + \\
&\quad + \left| (f_n - f_m)(b) - (f_n - f_m)(x) \right| \\
&< \varepsilon \quad \text{si} \quad m, n \geq n_0
\end{aligned}$$

vamos a tener entonces que $\left(f_n(x) \right)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión uniformemente de Cauchy $\forall x \in [a, b]$ en $(\mathbb{F}, |\cdot|)$ que es completo. Sea

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Tomando ahora $n \geq n_0$ y haciendo que $m \rightarrow \infty$ en (2.3.11) obtenemos que:

$$\|f_n - f_m\|_{BV} = \sup_{\Pi} \sum_{i=1}^k |(f_n - f)(t_i) - (f_n - f)(t_{i-1})| < \varepsilon$$

y así $f_n \rightarrow f$ si $n \rightarrow \infty$ en $\|\cdot\|_{BV}$

Por otra parte, como $\|f_{n_0}\|_{BV} \leq M < \infty$ para algún $M > 0$, entonces,

$$\|f\|_{BV} \leq \|f - f_{n_0}\|_{BV} + \|f_{n_0}\|_{BV} < \varepsilon + M < \infty$$

y en consecuencia $f \in BV([a, b])$.

Ejemplo 2.3.9 En nuestro Ejercicio (1.4.14) hemos definido el espacio $C'([a, b])$. El lector puede mostrar que la expresión

$$\|f\|' = \|f\|_u + \|f'\|_u \quad (f \in C'([a, b]))$$

define también una norma sobre $C'([a, b])$

Afirmación: $(C'([a, b]), \|\cdot\|')$ es un espacio de Banach. Efectivamente, sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $C'([a, b])$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|' &= \|f_n - f_m\|_u + \|(f_n - f_m)'\|_u \\ &= \|f_n - f_m\|_u + \|f_n' - f_m'\|_u \\ &< \varepsilon \quad \text{si} \quad m, n \geq n_0 \end{aligned}$$

en consecuencia,

$$\|f_n - f_m\|_u < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si} \quad m, n \geq n_0$$

y

$$\|f_n' - f_m'\|_u < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si} \quad m, n \geq n_0.$$

Se sigue de cada una de éstas desigualdades que las sucesiones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de Cauchy en $C([a, b])$ que es completo. Así, existen funciones $f \in C([a, b])$ y $g \in C([a, b])$ tales que:

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{si} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{uniformemente sobre } [a, b]$$

y

$$f_n' \longrightarrow g \quad \text{si} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{uniformemente sobre } [a, b].$$

Se sigue entonces del Teorema 4 - 8 en [13] que f es derivable sobre $[a, b]$ y además

$$g = f'$$

Por tanto, $f \in C'([a, b])$ y ésto culmina la Demostración.

2.4. Separabilidad de un espacio normado y Ejemplos. El Lema de Riesz.

En *Análisis Funcional* la noción de separabilidad de un espacio normado tiene su motivación en esa propiedad que presenta el conjunto de los Números Reales de que cada elemento de éste conjunto es el límite de una sucesión de números racionales. Aquí en esta Sección, se introduce ésta noción y se muestra que $(l^p, \|\cdot\|_p)$ ($1 \leq p < \infty$) es separable y también que $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ no lo es. También se muestra el Lema de Riesz.

Definición 2.4.1 Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se dice separable si existe un subconjunto A de X tal que:

(a) A es numerable.

(b) A es denso en X $\left[\text{esto es, dado } \varepsilon > 0 \text{ y } x \in X \text{ existe un } a \in A \text{ tal que } 0 < \|x - a\| < \varepsilon \right]$.

En nuestro Ejemplo (2.3.3) se mostró que $(l^p, \|\cdot\|_p)$ ($1 \leq p < \infty$) es un espacio de Banach. En el siguiente Ejemplo se muestra la separabilidad de $(l^p, \|\cdot\|_p)$.

Ejemplo 2.4.2 $(l^p, \|\cdot\|_p)$ es separable ($1 \leq p < \infty$). En efecto, mostraremos la existencia de un subconjunto D en l^p que es numerable y denso en l^p sea entonces $x = \left(x_n\right)_{n=1}^{\infty} \in l^p$. Decimos que éste $x \in l^p$ es del tipo racional si

$x_n \in \mathbb{Q}$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ $\left[\text{para el caso en que } x_n \in \mathbb{C}, \text{ entonces } x_n = a_n + ib_n \text{ donde } a_n \in \mathbb{Q} \text{ y } b_n \in \mathbb{Q} \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \right]$. Si además $x_n \neq 0$ para un número finito de subíndices n decimos que $x = \left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ es del tipo racional finito y lo denotamos por (TRF) sea,

$$D := \left\{ x = \left(x_n\right)_{n=1}^{\infty} \in l^p : x \text{ es (TRF)} \right\}.$$

Es claro que D es numerable [¿Por qué?] mostraremos a continuación que D es denso en l^p . En efecto, sea $x = \left(x_n\right)_{n=1}^{\infty} \in l^p$ y $\varepsilon > 0$ entonces, de la

Definición de l^p , $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$. Por tanto, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Sea $y = \left(y_k\right)_{k=1}^{\infty} \in D$ tal que:

$$|y_k - x_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt[p]{2n_0}} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n_0$$

y además

$$y_k = 0 \quad \text{si } k \geq n_0 + 1.$$

Luego

$$\|x - y\|_p^p = \sum_{k=1}^{n_0} |x_k - y_k|^p + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |x_k|^p < n_0 \left(\frac{\varepsilon^p}{2n_0}\right) + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p$$

y en consecuencia

$$\|x - y\|_p < \varepsilon$$

por tanto, D es denso en l^p .

Para nuestro próximo Ejemplo necesitamos usar el siguiente resultado de la Teoría de Conjuntos: la colección $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es no numerable, esto es,

$$\text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0} = \mathcal{N}.$$

Ejemplo 2.4.3 $(l_{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ no es separable. Supóngase lo contrario, esto es, $(l_{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ es separable. Sea entonces, D un subconjunto de l_{∞} que es numerable y denso en l_{∞} . Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tal que $F_1 \neq F_2$ entonces, $\mathcal{X}_{F_1} \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ y $\mathcal{X}_{F_2} \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ donde

$$\mathcal{B}(\mathbb{N}) := \left\{ f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es una función acotada} \right\}.$$

Éste $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ es un espacio vectorial respecto de las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar y la expresión:

$$\|f\|_u = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f(n)|$$

define una norma sobre $\mathcal{B}(\mathbb{N})$.

Además,

$$\|\mathcal{X}_{F_1} - \mathcal{X}_{F_2}\|_u \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \mathcal{X}_{F_1}(n) - \mathcal{X}_{F_2}(n) \right| = 1 \text{ si } n \in F_1 \setminus F_2 \text{ ó } n \in F_2 \setminus F_1.$$

Ahora bien, sea $F \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Entonces $\left(\mathcal{X}_F(n) \right)_{n=1}^{\infty} \in l_{\infty}$. Por otra parte, como \mathbb{Q} es denso en l_{∞} , existe una sucesión $\left(d_F(n) \right)_{n=1}^{\infty} \in D$ tal que:

$$\|\mathcal{X}_F - d_F\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \mathcal{X}_F(n) - d_F(n) \right| < \frac{1}{4},$$

en consecuencia $\|d_{F_1} - d_{F_2}\| \geq \frac{1}{4}$. En efecto, si $\|d_{F_1} - d_{F_2}\|_{\infty} < \frac{1}{4}$

vamos a tener que:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{X}_{F_1} - \mathcal{X}_{F_2}\|_u &= \|\mathcal{X}_{F_1} - d_{F_1} + d_{F_1} - d_{F_2} + d_{F_2} - \mathcal{X}_{F_2}\|_u \\ &\leq \|\mathcal{X}_{F_1} - d_{F_1}\|_u + \|d_{F_1} - d_{F_2}\|_u + \|d_{F_2} - \mathcal{X}_{F_2}\|_u \\ &< \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1 \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. En efecto, significaría que la transformación

$$\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow D$$

definida por $\varphi(F) = d_F$ es 1-1, lo cual contradice la no numerabilidad de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

A continuación mostraremos el importante Lema de Riesz.

Lema 2.4.4 (de Riesz) Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y, M un subespacio vectorial cerrado de X tal que $M \neq \{0\}$. Sea $0 < \theta < 1$. Entonces, existe un $x_\theta \in S(0, 1)$ tal que:

$$\|x - x_\theta\| \geq \theta \quad \forall x \in M.$$

Demostración.

Sea $x_1 \in X \setminus M$. Entonces,

$$d = d(x_1, M) = \inf_{m \in M} \|x_1 - m\| > 0$$

ya que M es un subconjunto propio y cerrado del espacio métrico X . Por otra parte como $0 < \theta < 1$, entonces

$$\theta d < d$$

y así,

$$d < \frac{d}{\theta}$$

en consecuencia, existe un $m_1 \in M$ tal que:

$$d < \|x_1 - m_1\| < \frac{d}{\theta}.$$

Sea $x_\theta = \frac{x_1 - m_1}{\|x_1 - m_1\|}$. Es claro que, $\|x_\theta\| = 1$ y así $x_\theta \in S(0, 1)$. En consecuencia, si $m \in M$ vamos a tener que,

$$\begin{aligned} \|x_\theta - m\| &= \left\| \frac{x_1 - m_1}{\|x_1 - m_1\|} - m \right\| = \frac{1}{\|x_1 - m_1\|} \left\| x_1 - m_1 - m \|x_1 - m_1\| \right\| \\ &= \frac{1}{\|x_1 - m_1\|} \left\| x_1 - \overbrace{m_1 + m \|x_1 - m_1\|}^{\in M} \right\| \\ &\geq \frac{\theta}{d} d = \theta \end{aligned}$$

Por tanto

$$d(x_\theta, M) = \inf_{m \in M} \|x_\theta - m\| \geq \theta.$$

2.5. Comentario final del Capítulo 2

La literatura actual sobre la teoría de espacios de Banach es bastante extensa. El texto [1] mencionado en nuestra Introducción, es un material de gran utilidad al estudiante que comienza y desea además continuar con el estudio de ésta teoría.

En el Capítulo 1 de [8] se muestra una buena lista de Ejemplos de espacios de Banach con su respectivas Demostraciones.

La Demostración de Lema de Riesz fue tomada de [6] Capítulo 1.

La noción de espacio normado separable puede verse también en [8] Capítulo 1.

2.6. Ejercicios Propuestos

Ejercicios 2.6.1 Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, con $x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$. Sean

$$A(x) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$G(x) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}$$

Mostrar que:

$$G(x) \leq A(x).$$

Esta expresión se llama la Desigualdad Media Aritmética - Geométrica.

Ejercicios 2.6.2 Sean X un espacio vectorial y $D \subset X$ convexo y no vacío. Decimos que una función

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

es:

(a) Convexa si:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad \forall x, y \in D, \quad t \in [0, 1]$$

(b) Estrictamente convexa si:

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y) \quad \forall x, y \in D, \quad \text{con } x \neq y, \quad t \in [0, 1]$$

(c) f es cóncava si:

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y) \quad \forall x, y \in D, \quad t \in [0, 1]$$

(d) f es estrictamente cóncava si:

$$f(tx+(1-t)y) > tf(x)+(1-t)f(y) \quad \forall x, y \in D, \text{ con } x \neq y, t \in [0, 1]$$

Demostrar que:

(e) f es convexa $\iff -f$ es cóncava.

(f) f es estrictamente convexa $\iff -f$ es estrictamente cóncava.

(g) Si f es convexa y $c \geq 0$ entonces cf es convexa.

(h) Si f es estrictamente convexa y $c > 0$ entonces cf es estrictamente convexa.

(i) Si f es cóncava y $c \geq 0$ entonces cf es cóncava.

(j) Si f es estrictamente cóncava y $c > 0$ entonces cf es estrictamente cóncava.

Ejercicios 2.6.3 Sean $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ $i = 1, 2, \dots, m$, funciones convexas. Demostrar que la función:

$$g : D \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$g(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x) \quad (x \in D)$$

es convexa.

Ejercicios 2.6.4 Demostrar que cualquier combinación lineal no negativa de funciones convexas es una función convexa.

Ejercicios 2.6.5 Demostrar que la función:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$f(x, y) = |x| + |y|$$

es convexa.

Ejercicios 2.6.6 Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función cóncava.

Demostrar que:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right)$$

donde $x_i \in D$, $i = 1, 2, \dots, n$ y $\alpha_i \in (0, 1)$ tal que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

Ejercicios 2.6.7 Usando el Ejercicio (2.5.6) demostrar la Desigualdad Logarítmica de Jensen:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \log a_i \leq \log\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} a_i\right)$$

donde $a_i \in (0, +\infty)$ $i = 1, 2, \dots, n$.

Ejercicios 2.6.8 Demostrar la Desigualdad Media Aritmética - Geométrica usando la Desigualdad Logarítmica de Jensen.

Ejercicios 2.6.9 Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que:

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\| \leq \frac{1}{2} \|x_{n+1} - x_n\| \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

Demostrar que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $(X, \|\cdot\|)$.

Ejercicios 2.6.10 Sea $C([-1, 1])$ dotado de la norma:

$$\|f\|_2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt$$

Demostrar que $(C([-1, 1]), \|\cdot\|_2)$ no es un espacio de Banach

Sugerencia: Considere la sucesión:

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ nt & \text{si } 0 < t < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Ejercicios 2.6.11 Demostrar que un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es completo $\iff \overline{B}(0, 1)$ es completa.

Ejercicios 2.6.12 Sean

$$(a) \quad X_1 := \left\{ f \in C([-1, 1]) : f(0) = 0 \right\}$$

$$(b) \quad X_2 := \left\{ f \in C([-1, 1]) : \int_0^1 f(x) dx = 0 \right\}$$

Demostrar que X_1 y X_2 son subespacios cerrados de $(C([0, 1]), \|\cdot\|_u)$.

Ejercicios 2.6.13 Sean $(C([0, 1]), \|\cdot\|_u)$ y $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $[0, 1]$.

Sea la expresión:

$$\|f\| = \|f\|_u + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n |f(t_n)|^2, \quad f \in C([0, 1])$$

Demostrar que:

(a) $\|\cdot\|$ es una norma sobre $C([0, 1])$

(b) $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

Ejercicios 2.6.14 Demostrar que la expresión:

$$\|x\|' = 2 \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right| + \sum_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) |x_n|$$

donde $x := \left(x_n\right)_{n=1}^{\infty} \in l_1$ define una norma sobre l_1 ¿Es $(l_1, \|\cdot\|')$ un espacio de Banach.

Ejercicios 2.6.15 Sea $x := \left(\frac{n}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty} \in l_1$. Hallar $\|x\|'$.

Sugerencia: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$ y así $x := \left(\frac{n}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty} \in l_1$.

Ejercicios 2.6.16 Demostrar que la expresión:

$$\|x\|' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x_n|$$

es una norma sobre c_0 . ¿Es $(c_0, \|\cdot\|')$ un espacios de Banach?

Ejercicios 2.6.17 ¿Son de acuerdo al Teorema (2.2.10) $c|c_0$ y $l_{\infty}|c$ espacios de Banach?

Ejercicios 2.6.18 En el espacio cociente l_{∞}/c hallar:

$$\left\| [(-1, 1, -1, 1, \dots)] \right\|.$$

Ejercicios 2.6.19 Demostrar que $(c, \|\cdot\|_{\infty})$ y $(c_0, \|\cdot\|_{\infty})$ son separables.

Ejercicios 2.6.20 Demostrar que $(C([a, b]), \|\cdot\|_u)$ es separable.

Sugerencia: Usar el Teorema de Stone-Weirstrass.

Ejercicios 2.6.21 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Una sucesión

$\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty} \subset X$ se llama una Base de Schauder de X , si para cada $x \in X$ existe una única sucesión $\left(\alpha_n\right)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ tal que:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \quad \text{en la norma } \|\cdot\|.$$

Demostrar que todo espacio de Banach con una base de Schauder es separable.

Capítulo 3

Operadores Lineales Acotados

3.1. Noción de acotación de un operador lineal. El espacio de $B(X, Y)$

Con el propósito de motivar la noción de operador lineal acotado recordamos previamente algunos hechos del álgebra lineal matricial

Definición 3.1.1 Sean X y Y espacios vectoriales $\left[\text{sobre el mismo cuerpo de escalares } \mathbb{F} \right]$. Una función

$$T : X \longrightarrow Y$$

se llama una transformación lineal si:

(P1) Es aditiva, esto es:

$$T(x + y) = T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in X$$

(P2) Es homogénea, esto es:

$$T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad \alpha \in \mathbb{F}, \quad x \in X$$

Observemos de (P1) y (P2) que $T : X \longrightarrow Y$ es lineal \iff

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \quad x, y \in X$$

Definición 3.1.2 Un arreglo de elementos de \mathbb{F} de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se llama una matriz de orden $m \times n$ [esto es, m filas y n columnas] y se denota por: $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Sea

$$M_{m \times n} := \left\{ A = (a_{ij})_{m \times n} : A \text{ es una matriz de orden } m \times n \right\}.$$

Se sabe que éste conjunto $M_{m \times n}$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{F} respecto de las operaciones usuales de suma de matrices y, multiplicación por escalar. Además, si $A \in M_{m \times n}$ la función:

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

definida por

$$T(x) = Ax$$

donde Ax representa el producto de la matriz A con el vector $x := (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ escrito como un vector columna, esto es,

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Es una transformación lineal.

A continuación tenemos el importante Teorema:

Teorema 3.1.3 [**Representación Matricial De Una Transformación Lineal**]

Sea

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

una transformación lineal. Entonces, existe una única matriz que denotamos por $A(T) \in M_{m \times n}$ tal que:

$$A(T) := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

donde los elementos c_{ij} han de determinarse y, tal que

$$T(x) = A(T)x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Demostración.

Existencia. Sea $\mathcal{B} := \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base canónica de \mathbb{R}^n . Llamemos

$$T(e_1) := w_1 := (c_{11}, c_{21}, \dots, c_{m1})$$

$$T(e_2) := w_2 := (c_{12}, c_{22}, \dots, c_{m2})$$

... ..

$$T(e_n) := w_n := (c_{1n}, c_{2n}, \dots, c_{mn}).$$

Sea $A(T)$ la matriz de orden $m \times n$ cuyas columnas son w_1, w_2, \dots, w_n . Note que w_j escrito como una matriz columna es:

$$w_j := \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Luego,

$$A(T)e_j := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} := w_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Así, si $x \in \mathbb{R}^n$ con $x := (x_1, x_2, \dots, x_n)$ entonces,

$$\begin{aligned}
 T(x) &:= T\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) := \sum_{j=1}^n T(x_j e_j) := \sum_{j=1}^n x_j T(e_j) \\
 &:= \sum_{j=1}^n x_j w_j \\
 &:= \sum_{j=1}^n x_j A(T) e_j \\
 &:= \sum_{j=1}^n A(T) x_j e_j \\
 &:= A(T) \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) \\
 &:= A(T)x
 \end{aligned}$$

Unicidad. Sea $B(T)$ otra matriz tal que

$$T(x) := B(T)x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Por la existencia de $A(T)$ vamos a tener que:

$$T(x) := A(T)x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

y en consecuencia

$$(B(T) - A(T))x := 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Sea $C(T) := B(T) - A(T)$, entonces

$$C(T)x := 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

en particular tomando $x := e_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), obtenemos que

$$C(T)e_i := 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

por tanto la i -ésima columna de $C(T)$ es el vector cero y, en conclusión:

$$C(T) := 0 \quad \left([\Rightarrow B(T) := A(T)] \right).$$

Sabemos del Ejemplo (1.2.3) que si $x := (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $y := (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces,

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \|x\| \|y\|.$$

Ésta desigualdad conocida como la desigualdad de Cauchy - Schwarz será usada para la Demostración de la siguiente:

Proposición 3.1.4 Sea

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

una transformación lineal. Entonces, existe una constante $M > 0$ tal que

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Demostración.

Sea $A(T) = (c_{ij})_{m \times n}$ la matriz única dada por el Teorema (3.1.3) tal que:

$$T(x) := A(T)x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Sean $x := (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $T(x) = y := (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$.

Entonces, al calcular el producto matricial $A(T)x$ vamos a obtener que:

3.1. NOCIÓN DE ACOTACIÓN DE UN OPERADOR LINEAL. EL ESPACIO DE $B(X, Y)$ 131

$$\begin{aligned}
 y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = \sum_{j=1}^n c_{1j}x_j \\
 y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n = \sum_{j=1}^n c_{2j}x_j \\
 \dots &\dots \dots && \dots \dots \dots \\
 y_m &= c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \dots + c_{mn}x_n = \sum_{j=1}^n c_{mj}x_j.
 \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\left| y_i \right|^2 = \left| \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j \right|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n c_{ij}^2 \right) \|x\|^2 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^m |y_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^2 \right) \|x\|^2$$

esto es,

$$\|T(x)\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^2 \right) \|x\|^2$$

y así,

$$\|T(x)\| \leq M \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

donde:

$$M = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^2}.$$

Tenemos así, la importante *Definición*:

Definición 3.1.5 Sean $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(Y, \|\cdot\|_2)$ espacios normados. Una transformación lineal

$$T : X \longrightarrow Y$$

se dice acotada si existe un $M > 0$ tal que:

$$\|T(x)\|_2 \leq M\|x\|_1, \quad \forall x \in X.$$

En lo sucesivo una transformación lineal será referida como un operador lineal y, una transformación lineal acotada como un operador lineal acotado. En lo que sigue también sin perder generalidad, las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ de X y Y respectivamente serán denotadas por $\|\cdot\|$.

Definición 3.1.6 Sean X y Y espacios normados. Un operador lineal

$$T : X \longrightarrow Y$$

se dice continuo en un $x_0 \in X$ si dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon \quad \text{si} \quad \|x - x_0\| < \delta$$

Proposición 3.1.7 Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Las siguientes afirmaciones son mutuamente equivalentes:

- (1) T es un operador lineal acotado.
- (2) T es continuo sobre X .
- (3) T es continuo en el elemento $0 \in X$.
- (4) T es continuo en algún $x_0 \in X$.

Demostración.

(1) \Rightarrow (2) Sean T un operador lineal acotado y, $x_0 \in X$, x_0 arbitrario. Veamos que dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon \quad \text{si} \quad \|x - x_0\| < \delta$$

En efecto, como T es un operador lineal acotado vamos a tener que:

$$\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| \leq M\|x - x_0\| < M\delta < \varepsilon$$

3.1. NOCIÓN DE ACOTACIÓN DE UN OPERADOR LINEAL. EL ESPACIO DE $B(X, Y)$ 133

y así podemos tomar $\delta \leq \frac{\varepsilon}{M}$ $\left[T(0) = 0 \text{ por ser } T \text{ lineal} \right]$.

(2) \Rightarrow (1) Sea T continuo sobre X . Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$T(B(0, \delta)) \subseteq B(T(0), \varepsilon) := B(0, \varepsilon).$$

Sea $x \in X$, $x \neq 0$. Entonces, el elemento:

$$y = \frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|} \in B(0, \delta)$$

y en consecuencia por la continuidad de T en 0 vamos a tener que:

$$\left\| T \left(\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| < \varepsilon$$

y por tanto

$$\|T(x)\| < \frac{2\varepsilon}{\delta} \|x\|,$$

tomando $M = \frac{2\varepsilon}{\delta}$ concluimos que:

$$\|T(x)\| \leq M \|x\|, \quad \forall x \in X$$

(2) \Rightarrow (3) Es evidente.

(3) \Rightarrow (2) Sea $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Como T es continuo en el $0 \in X$, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\|T(x)\| < \varepsilon \quad \text{si} \quad \|x\| < \delta$$

así, si $\|x - x_0\| < \delta$, entonces $\|x - x_0 - 0\| < \delta$, y por tanto,

$$\|T(x - x_0) - T(0)\| = \|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon.$$

(3) \Rightarrow (4) Es evidente.

(4) \Rightarrow (3) Veamos que dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\|T(y)\| < \varepsilon \quad \text{si} \quad \|y\| < \delta$$

En efecto, como T es continuo en algún $x_0 \in X$ ($x_0 \neq 0$) dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon \quad \text{si} \quad \|x - x_0\| < \delta$$

esto es,

$$\|T(x - x_0) - T(0)\| < \varepsilon \quad \text{si} \quad \|x - x_0 - 0\| < \delta.$$

Sea $y = x - x_0$. Entonces, vamos a obtener que:

$$\|T(y)\| < \varepsilon \quad \text{si} \quad \|y\| < \delta$$

[La función $f : B(x_0, \delta) \rightarrow B(0, \delta)$ definida por $f(x) = x - x_0$ es un homeomorfismo].

A continuación definimos los conjuntos $L(X, Y)$ y $B(X, Y)$.

Definición 3.1.8 Sean X y Y espacios normados. El conjunto $L(X, Y)$ es:

$$L(X, Y) := \left\{ T : X \rightarrow Y \mid T \text{ es un operador lineal} \right\}$$

y $B(X, Y)$ es:

$$B(X, Y) := \left\{ T : X \rightarrow Y \mid T \text{ es un operador lineal acotado} \right\}.$$

Ahora bien, en $L(X, Y)$ [y por tanto también en $B(X, Y)$] definimos las siguientes operaciones:

(01) Suma:

$$(T + S)(x) = T(x) + S(x), \quad x \in X$$

(02) Multiplicación por escalar:

$$(\alpha T)(x) = \alpha T(x), \quad \alpha \in \mathbb{F}, \quad x \in X$$

3.1. NOCIÓN DE ACOTACIÓN DE UN OPERADOR LINEAL. EL ESPACIO DE $B(X, Y)$ 135

Mostraremos a continuación que (01) y (02) están bien definidos en $L(X, Y)$
[suponiendo inicialmente que $L(X, Y) \neq \phi$]

$$\begin{aligned} (01) \quad (T + S)(x + y) &= T(x + y) + S(x + y) \\ &= T(x) + T(y) + S(x) + S(y) \\ &= (T + S)(x) + (T + S)(y), \quad \forall x, y \in X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (T + S)(\alpha x) &= T(\alpha x) + S(\alpha x) \\ &= \alpha T(x) + \alpha S(x) \\ &= \alpha(T(x) + S(x)), \quad \alpha \in \mathbb{F} \quad x \in X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (02) \quad (\alpha T)(x + y) &= \alpha T(x + y) \\ &= \alpha(T(x) + T(y)) \\ &= (\alpha T)(x) + (\alpha T)(y), \quad \alpha \in \mathbb{F} \quad x, y \in X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha T)(\beta x) &= \alpha T(\beta x) = (\alpha\beta)T(x) = (\beta\alpha)T(x) \\ &= \beta(\alpha T)(x) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \quad x \in X. \end{aligned}$$

Además, ya que T y S son operadores lineales acotados:

$$\begin{aligned} \|(T + S)(x)\| &= \|T(x) + S(x)\| \leq \|T(x)\| + \|S(x)\| \\ &\leq M_1\|x\| + M_2\|x\| = (M_1 + M_2)\|x\|, \quad x \in X \end{aligned}$$

y

$$\|(\alpha T)(x)\| = \|\alpha T(x)\| = |\alpha| \|T(x)\| \leq |\alpha| M \|T(x)\|, \quad x \in X,$$

tenemos así, la Proposición:

Proposición 3.1.9 Los conjuntos $L(X, Y)$ y $B(X, Y)$ son espacios vectoriales respecto de las operaciones (01) y (02).

Demostración.

Se deja como un Ejercicio

Proposición 3.1.10 La función:

$$\|\cdot\|_u : B(X, Y) \longrightarrow [0, \infty)$$

definida por:

$$\|T\|_u = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

es una norma.

Demostración.

Observemos inicialmente que como $T \in B(X, Y)$ existe un $M > 0$ tal que:

$$\|T(x)\| \leq M \|x\|, \quad \forall x \in X$$

Así, si $x \neq 0$,

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq M$$

por tanto,

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq M < \infty$$

y éste supremo lo denotamos por $\|T\|_u$.

El lector puede verificar los Axiomas (A1) y (A2) de la norma. Verificaremos la desigualdad triangular. Para esto, basta verificar que:

$$\|T + S\|_u < \|T\|_u + \|S\|_u + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

En efecto, como:

$$\|T + S\|_u = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x) + S(x)\|}{\|x\|}$$

entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe un $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$ tal que:

$$\|T + S\|_u < \frac{\|T(x_0) + S(x_0)\|}{\|x_0\|} + \varepsilon,$$

luego,

$$\begin{aligned} \|T + S\|_u < \frac{\|T(x_0) + S(x_0)\|}{\|x_0\|} + \varepsilon &\leq \frac{\|T(x_0)\|}{\|x_0\|} + \frac{\|S(x_0)\|}{\|x_0\|} + \varepsilon \\ &< \|T\|_u + \|S\|_u + \varepsilon \end{aligned}$$

en consecuencia:

$$\|T + S\|_u \leq \|T\|_u + \|S\|_u, \quad \forall S, T \in L(X, Y)$$

Teorema 3.1.11 Sean X un espacio normado y Y un espacio de Banach. Entonces, $(B(X, Y), \|\cdot\|_u)$ es un espacio de Banach.

Demostración.

Sea $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(B(X, Y), \|\cdot\|_u)$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|T_n - T_m\|_u = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T_n(x) - T_m(x)\|}{\|x\|} < \varepsilon \quad \text{si } m, n \geq n_0$$

Luego,

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \varepsilon \|x\| \quad \text{si } m, n \geq n_0 \quad \forall x \in X.$$

Se sigue de ésta última desigualdad que $\left(T_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en Y para cada $x \in X$ que es completo y, por tanto ésta sucesión es convergente.

Sea

$$T : X \longrightarrow Y$$

definida por:

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) \quad (x \in X).$$

Es fácil verificar que T es una transformación lineal. Afirmamos que T es acotada. En efecto, como $\left(T_n\right)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $(B(X, Y), \|\cdot\|_u)$ es acotada, esto es, existe un $M > 0$ tal que:

$$\|T_n\|_u \leq M \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

en consecuencia,

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x)\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_u \|x\| \\ &\leq M \|x\| \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

Así, $T \in B(X, Y)$. Por otra parte, haciendo que $m \rightarrow \infty$ y tomando $n \geq n_0$ vamos a tener que:

$$\|T_n(x) - T(x)\| \leq \varepsilon \|x\|, \quad \forall x \in X,$$

luego, si $x \neq 0$:

$$\frac{\|T_n(x) - T(x)\|}{\|x\|} \leq \varepsilon$$

y por tanto:

$$\|T_n - T\|_u = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T_n(x) - T(x)\|}{\|x\|} \leq \varepsilon \quad \text{si } n \geq n_0.$$

3.1. NOCIÓN DE ACOTACIÓN DE UN OPERADOR LINEAL. EL ESPACIO DE $B(X, Y)$ 139

Culminaremos esta Sección dando una Definición y después estableceremos una Observación

Definición 3.1.12 Sea $T \in L(X, Y)$. Entonces,

(a) El núcleo de T denotado por $N(T)$ es:

$$N(T) := \left\{ x \in X : T(x) = 0 \right\}.$$

Obsérvese que si además T es acotado, entonces $N(T)$ es cerrado en X [inicialmente la linealidad de T , garantiza que $N(T)$ es un subespacio vectorial de X]. [Ver también Corolario 1.2.15(b) y la Proposición 3.1.7]

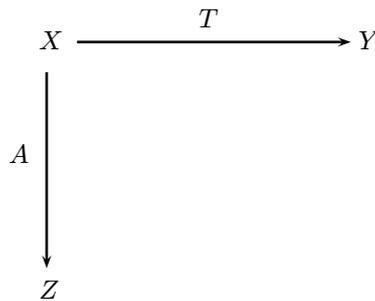
(b) El Rango ó la imagen denotado por $R(T)$ es:

$$R(T) := \left\{ y \in Y : y = T(x), x \in X \right\}$$

esto es, $R(T) = T(X)$

Observación 3.1.1

(a) Sean X, Y, Z espacios normados. Un diagrama del tipo siguiente:



donde T y A son operadores lineales acotados, son de utilidad en la Teoría de optimización y permiten resolver ciertos problemas de minimización. El lector interesado en ésto puede consultar el trabajo [9]

(b) El lector puede verificar como un Ejercicio que:

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\| = 1} \|T(x)\|$$

y éste valor común es el que hemos denotado por $\|T\|_u$. En lo que sigue la norma $\|\cdot\|_u$ de un operador lineal T será denotada por $\|T\|$.

(c) Si $Y = \mathbb{F}$ [$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}], entonces el operador lineal acotado:

$$T : X \longrightarrow \mathbb{F}$$

se llama un funcional lineal acotado y es designado generalmente con la letra f

(d) El espacio de Banach $B(X, \mathbb{F})$ es denotado por X^* y se llama el dual topológico de X . Así,

$$X^* := \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{F}, f \text{ es un funcional lineal acotado} \right\}.$$

Uno de los Teoremas más importantes del Análisis Funcional el Teorema de Hanh - Banach [a demostrarse mas adelante] afirma que si X es un espacio normado $X \neq \{0\}$ y $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, entonces existe un $f \in X^*$ tal que:

$$\|f\| = 1 \quad y \quad f(x_0) = \|x_0\|.$$

Como una consecuencia del Teorema de Hanh - Banach obtenemos que: si $X \neq 0 \Rightarrow X^* \neq \{0\}$.

3.2. Normas Equivalentes. Noción de operador cerrado

En esta Sección se mostrará un resultado bastante importante en Análisis Funcional: el que expresa que en un espacio normado de dimensión finita dos normas cualesquiera definidas sobre él son equivalentes.

También se introducirá la noción de operador cerrado, el cual es esencial para la Demostración de un Teorema que mostraremos más adelante: El Teorema del Grafo cerrado.

Comenzaremos nuestra Sección recordando la siguiente Definición:

Definición 3.2.1 Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Un subconjunto no vacío A de X se llama secuencialmente compacto si toda sucesión de puntos de A contiene una subsucesión convergente a un elemento de A .

la Demostración de los siguientes Teoremas pueden consultarse en []

Teorema 3.2.2 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Entonces, un subconjunto A de X es compacto \iff es secuencialmente compacto

Teorema 3.2.3 Sean $(X, \|\cdot\|)$ y $(Y, \|\cdot\|)$ espacios normados. Sean $D \subset X$ compacto y:

$$f : D \longrightarrow Y$$

una función continua. Entonces, existen puntos $x_1, x_2 \in D$ tales que:

$$\|f(x_1)\| = \sup_{x \in D} \|f(x)\|$$

y

$$\|f(x_2)\| = \inf_{x \in D} \|f(x)\|.$$

Tenemos ahora la siguiente Proposición:

Proposición 3.2.4 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado con $\dim X < \infty$. Entonces, existen una norma:

$$\|\cdot\|_1 : X \longrightarrow [0, \infty)$$

y una constante $M > 0$ tal que:

$$\|x - y\| \leq M\|x - y\|_1 \quad \forall x, y \in X \quad (3.2.5)$$

Demostración.

Sean $B := \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base (algébrica) de X y $x \in X$. Entonces, existen escalares $\lambda_i \in \mathbb{F}$ $i = 1, 2, \dots, n$ tal que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Definamos:

$$\|\cdot\|_1 : X \longrightarrow [0, \infty)$$

por

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|.$$

Es claro que $\|\cdot\|_1$ esta bien definida y satisface los Axiomas (A_1) y (A_2) de la Definición de norma. Por otra parte, si y es otro elemento de X , entonces $y = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$ luego,

$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i + \beta_i| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| + \sum_{i=1}^n |\beta_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1 \quad \forall x, y \in X$$

También:

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \left\| \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \beta_i) e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i - \beta_i| \|e_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|x - y\|_1 \|e_i\| \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\| \right) \|x - y\|_1 \quad \forall x, y \in X \end{aligned}$$

Tomando, $M = \sum_{i=1}^n \|e_i\| > 0$ obtenemos nuestra desigualdad (3.2.6)

3.2. NORMAS EQUIVALENTES. NOCIÓN DE OPERADOR CERRADO 143

Proposición 3.2.5 Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $\|\cdot\|_1$ la norma dada por la Proposición anterior. El conjunto,

$$S_1 := \left\{ x \in X : \|x\|_1 = 1 \right\}$$

es secuencialmente compacto

Demostración.

Sea $(x_k)_{k=1}^\infty$ una sucesión de puntos de S_1 . Mostraremos que ésta contiene una subsucesión $(x_{k_j})_{j=1}^\infty$ que es convergente en $\|\cdot\|_1$ a un $x \in S_1$. En efecto, como $x_k \in S_1$, entonces

$$x_k = \sum_{i=1}^n \alpha_k^{(i)} e_i \quad \text{donde} \quad \sum_{i=1}^n |\alpha_k^{(i)}| = 1 \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Ahora bien, consideremos el siguiente “esquema”:

$$\begin{array}{cccccc}
 \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \\
 \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(2)} & \dots & \dots & \alpha_1^{(n)} & \\
 \alpha_2^{(1)} & \alpha_2^{(2)} & \dots & \dots & \alpha_2^{(n)} & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 \alpha_k^{(1)} & \alpha_k^{(2)} & \dots & \dots & \alpha_k^{(n)} & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots &
 \end{array} \tag{3.2.6}$$

Entonces, como $|\alpha_k^{(i)}| < 1 \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, 3, \dots$
se sigue entonces que cada sucesión columna $\left[\begin{array}{l} \text{las indicamos en nuestro esquema} \\ (3.2.6) \text{ con una } \downarrow \end{array} \right]$

$$\left(\alpha_k^{(1)}\right)_{k=1}^{\infty}, \left(\alpha_k^{(2)}\right)_{k=1}^{\infty}, \dots, \left(\alpha_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}$$

es acotada, luego por el Teorema de Bolzano - Weirstrass cada una de estas contiene una subsucesión:

$$\left(\alpha_{k_j}^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

que se convergente a un $\beta_i \in \mathbb{F}$ $i = 1, 2, \dots, n$. Sea $x = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$.

Entonces, $x \in X$ y además

$$\|x_{k_j} - x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\alpha_{k_j}^{(i)} - \beta_i| \longrightarrow 0 \quad \text{si } j \longrightarrow \infty$$

así, $x_{k_j} \longrightarrow x$ si $j \longrightarrow \infty$ en $\|\cdot\|_1$. Por otra parte:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\beta_i| &= \sum_{i=1}^n \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \alpha_{k_j}^{(i)} \right| \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left| \alpha_{k_j}^{(i)} \right| \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} 1 = 1 \end{aligned}$$

lo cual muestra que $x \in S_1$ y culmina la Demostración.

Teorema 3.2.6 En un espacio vectorial X con $\dim X < \infty$ todas las normas son equivalentes.

Demostración.

Sean $\|\cdot\|$ una norma definida sobre X y, $\|\cdot\|_1$ la norma sobre X dada por la Proposición 3.2.4. Consideremos $\|\cdot\| \Big|_{S_1}$. Ya que la norma $\|\cdot\|$ es

$\|\cdot\|_1$ - continua $\left[\text{ver la Proposición 3.2.4} \right]$ y S_1 es compacto, entonces por el Teorema 3.2.3 existen $x_1, x_2 \in S_1$ tales que:

3.2. NORMAS EQUIVALENTES. NOCIÓN DE OPERADOR CERRADO 145

$$\|x_1\| = \sup_{x \in S_1} \|x\| > 0 \quad y \quad \|x_2\| = \inf_{x \in S_2} \|x\| > 0$$

y en consecuencia

$$\|x_1\| \leq \|x\| \leq \|x_2\|, \quad \forall x \in S_1.$$

Ahora bien, si $x \in X$, $x \neq 0$ entonces $\frac{x}{\|x\|_1} \in S_1$, por tanto:

$$\|x_1\| \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \leq \|x_2\|,$$

luego

$$\|x_2\| \|x\|_1 \leq \|x\| \leq \|x_2\| \|x\|_1 \quad \forall x \in X$$

tomando $a = \|x_2\| > 0$ y $b = \|x_2\| > 0$ obtenemos que $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$. Por otra parte si $\|\cdot\|$ es otra norma definida sobre X , entonces por el procedimiento anterior $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$ y, así por el Ejercicio 1.3.5.

$$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|$$

y culmina la Demostración.

Proposición 3.2.7 Sean X y Y espacios normados con $\dim X < \infty$. Entonces,

$$L(X, Y) := B(X, Y)$$

Demostración.

Sea $B := \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de X y $x \in X$. Entonces,

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{F}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Sea $T \in L(X, Y)$. Por la linealidad de T vamos a tener que:

$$\begin{aligned} T(x) &= T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n T(\alpha_i e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i T(e_i). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i T(e_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|\alpha_i T(e_i)\| \\ &= \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \|T(e_i)\|. \end{aligned}$$

Sea $M = \max_{i=1,2,\dots,n} \|T(e_i)\|$. Es claro que:

$$\|T(x)\| \leq M \sum_{i=1}^n |\alpha_i| = M \|x\|_1 \quad \forall x \in X$$

y así, en virtud del Teorema anterior

$$\|T(x)\| \leq M \|x\| \quad \forall x \in X,$$

y por tanto $T \in B(X, Y)$.

Sean X y Y espacios vectoriales y, $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. El inverso de T [supuesta su existencia] es el operador lineal

$$T^{-1} : Y \rightarrow X$$

definido por

$$x = T^{-1}(y) \iff y = T(x).$$

La siguiente Proposición establece una caracterización para la continuidad de T^{-1}

Proposición 3.2.8 Sean X y Y espacios normados y, $T \in B(X, Y)$ tal que T es inyectivo [esto es, $T(x_1) = T(x_2) \iff x_1 = x_2$]. Entonces, el operador lineal

3.2. NORMAS EQUIVALENTES. NOCIÓN DE OPERADOR CERRADO 147

$T^{-1} : T(X) \longrightarrow Y$ es acotado \iff existe un $k > 0$ tal que

$$\|T(x)\| \geq k\|x\|, \quad \forall x \in X$$

Demostración.

Observemos inicialmente que la inyectividad de T garantiza la existencia del “inverso” $T^{-1} : T(X) \longrightarrow X$ y es también un operador lineal.

\Rightarrow) Supóngase que T^{-1} es un operador lineal acotado. Entonces, existe un $k_1' > 0$ tal que:

$$\|T^{-1}(y)\| \leq k_1'\|y\|, \quad \forall y \in T(X).$$

Luego, existe un $x \in X$ tal que $y = T(x)$. Por tanto,

$$\|T^{-1}T(x)\| \leq k_1'\|T(x)\|$$

esto es,

$$\|x\| \leq k_1'\|T(x)\|$$

y así también,

$$\|T(x)\| \geq \frac{1}{k_1'}\|x\|$$

tomando $k = \frac{1}{k_1'}$ obtenemos que:

$$\|T(x)\| \geq k\|x\|, \quad \forall x \in X$$

\Leftarrow) Recíprocamente, si $\|T(x)\| \geq k\|x\|$ para algún $k > 0$ y $\forall x \in X$, entonces, llamando $y = T(x)$ vamos a tener que $x = T^{-1}(y)$ y por tanto

$$\|y\| \geq k\|T^{-1}(y)\|$$

esto es,

$$\|T^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{k}\|y\|, \quad \forall y \in T(X)$$

y en consecuencia $T^{-1} \in B(Y, X)$.

Introduciremos ahora la noción de operador cerrado.

Definición 3.2.9 Sean X y Y espacios normados y, D un subespacio vectorial de X . Un operador lineal

$$T : D \longrightarrow Y$$

se llama cerrado si $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty} \subset D$ tal que

$$x_n \rightarrow x \in X \quad \text{si} \quad n \rightarrow \infty$$

y,

$$T(x_n) \rightarrow y \quad \text{si} \quad n \rightarrow \infty$$

entonces $x \in D$ y, $y = T(x)$.

Un operador lineal que es cerrado se llama un operador cerrado. Es obvio que si $D := X$ y, $T : X \longrightarrow Y$ es un operador lineal acotado entonces T es cerrado. El recíproco no siempre es cierto. En efecto, para mostrar un Ejemplo [que lo daremos como una Proposición] que ilustra ésta Afirmación, mencionaremos un Teorema que es demostrado usualmente en los cursos de Análisis Real.

El Teorema dice lo siguiente:

Teorema 3.2.10 Sean $I = [a, b]$, $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones y, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Supóngase que:

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{si} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{puntualmente sobre } I.$$

Supóngase también que f_n es derivable sobre $I \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y que además

$$f_n' \longrightarrow g \quad \text{si} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{uniformemente sobre } I$$

donde $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función. Entonces, f es derivable sobre I y además:

$$f' = g.$$

Note que el Teorema (3.2.10) fue usado en la solución de nuestro Ejemplo (2.3.9).

Recordemos también que $C([a, b])$ es un espacio de Banach con la norma uniforme:

3.2. NORMAS EQUIVALENTES. NOCIÓN DE OPERADOR CERRADO 149

$$\|f\|_u = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

y que

$$C'([a, b]) := \left\{ f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f' \text{ existe y es continua sobre } [a, b] \right\}$$

es un espacio vectorial. Tomando $\|\cdot\|_u \Big|_{C'([a,b])}$, éste se convierte en un espacio normado. El lector puede verificar que $(C'([a, b]), \|\cdot\|_u)$ no es necesariamente cerrado en $C([a, b])$. Tenemos ahora nuestra Proposición:

Proposición 3.2.11 El operador lineal:

$$T : C'([0, 1]) \longrightarrow C([0, 1])$$

definido por

$$T(f) = f'$$

es cerrado, pero no es acotado [f' representa la función derivada de f].

Demostración.

Verificaremos inicialmente que T es cerrado. En efecto, sea

$$\left(f_n \right)_{n=1}^{\infty} \subset C'([0, 1]) \text{ tal que:}$$

$$f_n \rightarrow f \in C([0, 1]) \quad \text{si } n \rightarrow \infty \text{ en } \|\cdot\|_u$$

y

$$T(f_n) = f_n' \rightarrow g \in C([0, 1]) \quad \text{si } n \rightarrow \infty \text{ en } \|\cdot\|_u$$

Debemos ver que $f' \in C'([0, 1])$ y que $T(f) = g$. En efecto, de acuerdo al Teorema (3.2.10) f es derivable sobre $[0, 1]$ y además:

$$f' = g.$$

Por otra parte, como la convergencia es uniforme y, las f_n' son continuas, se sigue que f' es continua y así $f \in C'([0, 1])$. Así, hemos demostrado $f \in C'([0, 1])$ y $T(f) = g$. Lo cual muestra que T es cerrado.

Veamos ahora que T no es acotado. Para verificar esto, consideraremos la sucesión $\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty} \subset C'([0, 1])$ donde:

$$f_n(t) = t^n.$$

Entonces, de la Definición de T vamos a tener que,

$$T(f_n)(t) = f_n'(t) = nt^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}, t \in [0, 1]).$$

Luego,

$$\|T\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|T(f)\|_u}{\|f\|_u} \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} n = \infty$$

lo cual muestra que T no es acotado.

De los cursos básicos de Cálculo sabemos que si $D \subseteq \mathbb{R}$ y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es una función $[y = f(x)]$ el grafo de f denotado por $G(f)$ es el conjunto:

$$G(f) := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D, y = f(x) \right\}$$

el cual puede dibujarse usando técnicas del Cálculo Diferencial. Éste hecho nos motiva la siguiente Definición:

Definición 3.2.12 Sean X y Y espacios normados y D un subespacio vectorial de X . Sea

$$T : X \rightarrow Y$$

un operador lineal. El grafo de T denotado por $G(T)$ es:

$$G(T) := \left\{ (x, y) \in X \oplus Y : x \in D, y = T(x) \right\}.$$

Es claro por la linealidad de T , que el elemento $(0, 0) \in G(T)$. Restringiendo las operaciones de espacio vectorial de $X \oplus Y$ sobre $G(T)$, éste toma estructura de espacio vectorial. Así, al restringir la norma de $X \oplus Y$ sobre $G(T)$,

3.2. NORMAS EQUIVALENTES. NOCIÓN DE OPERADOR CERRADO 151

también se transforma en un espacio normado [La norma que estamos considerando en $X \oplus Y$ es:

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|, \quad (x, y) \in X \oplus Y].$$

Sabemos por la Proposición (2.2.6) que si X y Y son espacios de Banach, entonces $X \oplus Y$ es también un espacio de Banach con la norma

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

Por tanto, si $G(T)$ es cerrado en $X \oplus Y$, él es también un espacio de Banach.

Teorema 3.2.13 Sean X y Y espacios normados y, D un subespacio vectorial de X . Sea

$$T : D \longrightarrow Y$$

un operador lineal. Entonces

$$G(T) \text{ es cerrado} \iff T \text{ es un operador cerrado}$$

Demostración.

\Rightarrow) Sea $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty} \subset D$ tal que:

$$x_n \longrightarrow x \in X \quad y \quad T(x_n) \longrightarrow y \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

Mostraremos que $x \in D$ y, $y = T(x)$. En efecto, de nuestra hipótesis:

$$\begin{aligned} \|(x_n, T(x_n)) - (x, y)\| &= \|(x_n - x, T(x_n) - y)\| \\ &= \|x_n - x\| + \|T(x_n) - y\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{si } n \geq n_0 \end{aligned}$$

así,

$$(x_n, T(x_n)) \longrightarrow (x, y) \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

Como $(x_n, T(x_n)) \in G(T)$ y $G(T)$ es cerrado, entonces $(x, y) \in G(T)$. Por tanto, $x \in D$ y $y = T(x)$.

$$\Leftrightarrow \text{Sea } \left\{ (x_n, y_n) \right\}_{n=1}^{\infty} \subset G(T) \text{ tal que:}$$

$$(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y) \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

Entonces, por la norma considerada en $X \oplus Y$ vamos a tener que:

$$x_n \longrightarrow x \in X \quad \text{si } n \rightarrow \infty$$

y,

$$y_n = T(x_n) \longrightarrow y \quad \text{si } n \rightarrow \infty$$

Como T es un operador cerrado, vamos a tener que $x \in D$ y además $y = T(x)$. Por tanto, $(x, y) \in G(T)$ y así $G(T)$ es cerrado en $X \oplus Y$.

3.3. Algunos ejemplos de operadores lineales acotados

Esta Sección contiene algunos Ejemplos de operadores lineales acotados. Entre otros, mencionaremos el operador de Fredholm, la proyección canónica y el operador Shift.

También se da la noción de operador compacto y, un Teorema de extensión de operadores.

Para tratar nuestro primer Ejemplo que será el operador de Fredholm, damos inicialmente la siguiente Definición:

Definición 3.3.1 Una función continua:

$$k : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$M(b - a) < 1$$

donde

$$M = \sup_{(x,y) \in [a,b] \times [a,b]} k(x, y)$$

se llama una función con un núcleo aceptable de Fredholm.

Ejemplo 3.3.2 Sea $K : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con un núcleo aceptable de Fredholm. Sea

$$K : C([a, b]) \longrightarrow C([a, b]),$$

el operador lineal, definido como:

$$K(x)(s) = \int_a^b k(s, t)x(t)dt \quad (x \in C[a, b]).$$

Éste K se llama el operador de Fredholm.

Observemos inicialmente que $K(x)$ define una función continua definida sobre $[a, b]$ [El lector puede verificar fácilmente la linealidad y homogeneidad

de K]. En efecto, sean $s \in [a, b]$ y $\left(s_n\right)_{n=1}^{\infty} \subset [a, b]$ tal que $s_n \rightarrow s$ si $n \rightarrow \infty$. Entonces, ya que f es una función continua sobre $[a, b] \times [a, b]$, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$|k(x, y) - k(x', y')| < \varepsilon \quad \text{si} \quad \|(x, y) - (x', y')\| < \delta.$$

Ahora bien, como $s_n \rightarrow s$ si $n \rightarrow \infty$ para nuestro $\delta > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|s_n - s| < \delta \quad \text{si} \quad n \geq n_0.$$

Por otra parte como:

$$\|(s_n, t) - (s, t)\| = \|(s_n - s, 0)\| = |s_n - s| < \delta \quad \text{si} \quad n \geq n_0$$

entonces,

$$|k(s_n, t) - k(s, t)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)\|x\|_u} \quad (x \neq 0)$$

en consecuencia,

$$\begin{aligned} |K(x)(s_n) - K(x)(s)| &= \left| \int_a^b k(s_n, t)x(t)dt - \int_a^b k(s, t)x(t)dt \right| \\ &= \left| \int_a^b (k(s_n, t) - k(s, t))x(t)dt \right| \\ &\leq \int_a^b |k(s_n, t) - k(s, t)| |x(t)| dt \\ &\leq \|x\|_u \int_a^b |k(s_n, t) - k(s, t)| dt \\ &< \|x\|_u \frac{\varepsilon}{(b-a)\|x\|_u} (b-a) = \varepsilon \end{aligned}$$

si $n \geq n_0$, lo cual muestra la continuidad de $K(x)$.

3.3. ALGUNOS EJEMPLOS DE OPERADORES LINEALES ACOTADOS 155

Por otra parte

$$\begin{aligned}
 \|K(x)\|_u &= \sup_{s \in [a,b]} |K(x)(s)| = \sup_{s \in [a,b]} \left| \int_a^b k(s,t) x(t) dt \right| \\
 &\leq \sup_{s \in [a,b]} \int_a^b |k(s,t)| |x(t)| dt \\
 &\leq M(b-a) \|x\|_u \quad (x \in C([a,b])) \quad [M(b-a) < 1] \\
 &< \|x\|_u \quad \forall x \in C([a,b])
 \end{aligned}$$

lo cual muestra que K es un operador lineal acotado y que

$$\|K\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|K(x)\|_u}{\|x\|_u} < \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|_u}{\|x\|_u} = 1.$$

Ejemplo 3.3.3 Sea

$$K : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$$

el operador de Fredholm. La transformación

$$K^n : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$$

definida por:

$$K^n(x) = K^{n-1}(K(x)), \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1$$

es también un operador de Fredholm.

Basta demostrarlo para $k = 2$ y luego usar inducción sobre n . [si $n = 1$, convenimos que $K^0 = I$, donde I denota la identidad de $C([a,b])$ en $C([a,b])$]. En efecto,

$$\begin{aligned}
K^2(x+y) &= K(K(x+y)) = K(K(x) + K(y)) \\
&= K(K(x)) + K(K(y)) \\
&= K^2(x) + K^2(y)
\end{aligned}$$

y ,

$$\begin{aligned}
K^2(\alpha x) &= K(K(\alpha x)) = K(\alpha K(x)) \\
&= \alpha K(K(x)) \\
&= \alpha K^2(x), \quad \forall x, y \in C([a, b]), \quad \alpha \in \mathbb{F}.
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
K^2(x)(s) &= K(K(x))(s) = \int_a^b k(s, t) K(x)(t) dt \\
&= \int_a^b k(s, t) x_1(t) dt
\end{aligned}$$

donde $x_1(t) = K(x)(t)$. Así, K^2 es un operador de Fredholm.

Ejemplo 3.3.4 Sea

$$K : C([a, b]) \longrightarrow C([a, b]),$$

el operador de Fredholm. Entonces, $I - K$ donde I denota el operador identidad de $C([a, b])$ en $C([a, b])$ es un operador lineal acotado. Ahora bien, nos planteamos la siguiente pregunta:

Dada una función $y \in C([a, b])$, ¿ Existe alguna función $x \in C([a, b])$ tal que:

$$(I - K)(x) = y?.$$

Observe que

$$(I - K)(x) = y \iff x(s) - \int_a^b k(s, t)x(t)dt = y(s).$$

La ecuación

$$(I - K)(x) = y$$

se llama la ecuación integral de Fredholm. Existe una única solución para dicha ecuación y es la función

$$x = \left(\sum_{n=0}^{\infty} K^n \right) (y) \quad [k^0 = I]$$

donde la serie $\sum_{n=0}^{\infty} K^n$ define un operador lineal acotado de $C([a, b])$ en $C([a, b])$.

Ejemplo 3.3.5 Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y M un subespacio cerrado de X . Sabemos por el Teorema (1.2.13) que el espacio cociente $\hat{X} = X/M$ es un espacio de Banach con la norma:

$$\|[x]\| = \inf_{m \in M} \|x + m\| \quad (x \in X, [x] := x + M).$$

Sea la transformación

$$\Pi : X \longrightarrow X/M$$

definida por:

$$\Pi(x) = [x].$$

Se puede verificar fácilmente que Π es un operador lineal. Además,

$$\|\Pi(x)\| = \|[x]\| = \inf_{m \in M} \|x + m\| \leq \|x\| \quad \forall x \in X,$$

lo cual muestra que Π es acotado.

Al operador lineal acotado Π también se le llama la proyección canónica.

Ejemplo 3.3.6 Sea $p \geq 1$. De acuerdo a nuestro Ejemplo (2.3.3) sabemos que l^p es un espacio de Banach con la norma

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

Sea $p = 2$, y consideremos el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} l^2 & \xrightarrow{S_d} & l^2 \\ & \downarrow S_i & \\ & l^2 & \end{array}$$

donde S_d y S_i son transformaciones definidas de la manera siguiente: Si $(x_1, x_2, \dots) \in l^2$ entonces,

$$S_d((x_1, x_2, x_3, \dots)) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

y,

$$S_i((x_1, x_2, x_3, \dots)) = (x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Es fácil verificar que S_d y S_i son operadores lineales. Además

$$\|S_d((x_1, x_2, x_3, \dots))\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \left\| \left(x_n \right)_{n=1}^{\infty} \right\|_2^2$$

esto es,

$$\|S_d(x)\|_2 = \|x\|_2, \quad \forall x = \left(x_n \right)_{n=1}^{\infty} \in l^2.$$

Así, S_d es un operador lineal acotado y $\|S_d\| = 1$

También:

$$\|S_i((x_1, x_2, x_3, \dots))\|_2^2 = \sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$$

luego,

$$\|S_i(x)\|_2 \leq \|x\|_2, \quad \forall x = \left(x_n\right)_{n=1}^{\infty} \in l^2.$$

Se puede verificar también que:

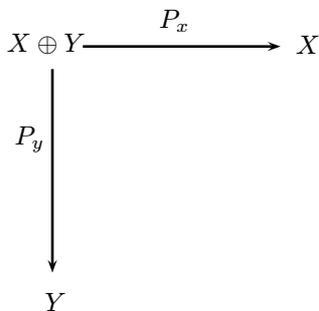
$$\|S_i\| = 1.$$

Estos operadores S_d y S_i son llamados el operador Shift a la derecha y el operador Shift a la izquierda respectivamente

Ejemplo 3.3.7 Sean X y Y espacios de Banach. Sabemos por la Proposición (2.2.6) que $X \oplus Y$ es también un espacio de Banach con la norma:

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|, \quad \left((x, y) \in X \oplus Y\right).$$

Ahora bien, consideremos el diagrama:



donde P_x y P_y son transformaciones definidas como:

$$P_x((x, y)) = x$$

y

$$P_y((x, y)) = y$$

Es fácil verificar que P_x y P_y son operadores lineales. Además,

$$\|P_x((x, y))\| = \|x\| \leq \|x\| + \|y\| = \|(x, y)\|$$

$$\|P_y((x, y))\| = \|y\| \leq \|y\| + \|x\| = \|(x, y)\|$$

Por tanto, P_x y P_y son operadores lineales acotados y:

$$\|P_x\| \leq 1$$

$$\|P_y\| \leq 1$$

Note que:

$$P_x((x, y)) + P_y((x, y)) = x + y$$

Ejemplo 3.3.8 Sea $a = t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ una partición del intervalo $I = [a, b]$. Sea T la transformación siguiente:

$$T : C([a, b]) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$T(f) = (f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_n)).$$

Es claro que T es un operador lineal y:

$$\|T(f)\|^2 = \sum_{i=1}^n |f(t_i)|^2.$$

Por otra parte, como $|f(t_i)| \leq \|f\|_u$, $i = 1, 2, \dots, n$, entonces

$$\|T(f)\|^2 \leq n\|f\|_u^2 \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \text{ fijo}$$

$\forall f \in C([a, b])$. Así, T es un operador lineal acotado y:

$$\|T\| \leq \sqrt{n}$$

Ejemplo 3.3.9 [un Teorema de extensión para operadores lineales acotados]

Sean V un espacio normado, W un espacio de Banach y, V_0 un subespacio vectorial de V . Sea

3.3. ALGUNOS EJEMPLOS DE OPERADORES LINEALES ACOTADOS 161

$$T_0 : V_0 \longrightarrow W$$

un operador lineal acotado. Entonces, existe un único operador lineal acotado

$$T : \overline{V_0} \longrightarrow W$$

tal que:

$$T|_{V_0} = T_0$$

y así T es una extensión de T_0 a $\overline{V_0}$. Además

$$\|T\|_{\overline{V_0}} = \|T_0\|_{V_0}$$

donde $\|T\|_{\overline{V_0}}$ y $\|T_0\|_{V_0}$ son las normas de los operadores T y T_0 calculadas respecto de las bolas unitarias de $\overline{V_0}$ y V_0 respectivamente. En lo que sigue estas normas las denotaremos por $\|T\|$ y $\|T_0\|$

Demostración.

- (a) ***Existencia*** Sea $x \in \overline{V_0}$. Entonces, existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset V_0$ tal que $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$. Ahora bien, ya que T_0 es acotado vamos a tener que:

$$\|T_0(x_n) - T_0(x_m)\| = \|T_0(x_n - x_m)\| \leq \|T_0\| \|x_n - x_m\| \rightarrow 0$$

si $n, m \rightarrow \infty$ $\left[\|x_n - x_m\| \rightarrow 0 \text{ si } n, m \rightarrow \infty \text{ ya que } (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ es convergente} \right]$

así, la sucesión $(T_0(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en W que por hipótesis es un espacio de Banach y por tanto, es convergente a un único elemento de W . Definamos una transformación

$$T : \overline{V_0} \longrightarrow W$$

por

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_0(x_n)$$

Notemos que $T(x)$ es independiente de la sucesión elegida en V_0 que converja a x . En efecto, sea $\left(y_n\right)_{n=1}^{\infty}$ otra sucesión en V_0 tal que $y_n \rightarrow x$ si $n \rightarrow \infty$. Entonces $x_n - y_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$ y en consecuencia por la continuidad de T_0 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_0(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_0(y_n).$$

Es fácil verificar la linealidad de T y que $T|_{V_0} = T_0$ [¿Por qué?]

b) **Unicidad** Sea

$$S : \overline{V_0} \rightarrow W$$

otro operador lineal acotado tal que:

$$S|_{V_0} = T_0$$

Afirmamos que $S = T$. En efecto, sea $x \in \overline{V_0}$ y $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty} \subset V_0$ tal que $x_n \rightarrow x$ si $n \rightarrow \infty$. Entonces, por la continuidad de S y de la Definición de T obtenemos que:

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_0(x_n) = T(x)$$

por tanto $S = T$.

Mostraremos ahora que:

$$\|T\| = \|T_0\|$$

En efecto, recordemos inicialmente que:

3.3. ALGUNOS EJEMPLOS DE OPERADORES LINEALES ACOTADOS 163

$$\|T_0\| = \sup_{\substack{x \in V_0 \\ x \neq 0}} \frac{\|T_0(x)\|}{\|x\|}$$

y

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \overline{V_0} \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

Ahora bien, es claro que $\|T_0\| \leq \|T\|$. Por otra parte, si $x \in \overline{V_0}$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset V_0$ tal que $x_n \rightarrow x$ si $n \rightarrow \infty$, entonces

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_0(x_n)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T_0(x_n) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_0(x_n)\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_0\| \|x_n\| \end{aligned}$$

y en consecuencia, como $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$ obtenemos que:

$$\|T(x)\| \leq \|T_0\| \|x\|$$

esto es,

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \overline{V_0} \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq \|T_0\|$$

Ejemplo 3.3.10 [Noción de operador compacto]
Sean X y Y espacios normados. Un operador lineal

$$T : X \longrightarrow Y$$

se dice compacto, si para cada sucesión acotada $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty} \subset X$ la sucesión de imágenes $\left(T(x_n)\right)_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión convergente. Un operador lineal que es compacto se llama un operador compacto.

A continuación mostraremos que el operador de Fredholm:

$$K : C([a, b]) \longrightarrow C([a, b])$$

donde

$$K(x)(s) = \int_a^b k(s, t)x(t)dt$$

es un operador compacto. [Ver el Ejemplo 3.3.10]. En efecto, sea $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty} \subset C([a, b])$ tal que:

$$\|x_n\|_u \leq M \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Mostraremos que la sucesión de imágenes $\left(K(x_n)\right)_{n=1}^{\infty}$ tiene las siguientes propiedades:

(P1) Es uniformemente acotada, esto es, existe una constante $C > 0$ tal que:

$$\|K(x_n)\|_u \leq C \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(P2) Es equicontinua, esto es, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$|K(x_n)(s) - K(x_n)(s')| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |s - s'| < \delta \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

y así en consecuencia por el Teorema de Ascoli - Arzela quedará demostrado que $\left(K(x_n)\right)_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión convergente.

Verificaremos entonces (P1) y (P2)

(P1) Como K es acotado,

$$\|K(x_n)\| \leq \|K\| \|x_n\|_u \leq \|K\| M < \infty \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

(P2) Como $k(s, t)$ es una función uniformemente continua, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$|k(s, t) - k(s', t)| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \quad \text{si } |s - s'| < \delta$$

Luego:

$$\begin{aligned} \left| K(x_n)(s) - K(x_n)(s') \right| &= \left| \int_a^b k(s, t)x_n(t)dt - \int_a^b k(s', t)x_n(t)dt \right| \\ &= \left| \int_a^b (k(s, t) - k(s', t))x_n(t)dt \right| \\ &\leq \int_a^b |k(s, t) - k(s', t)||x_n(t)|dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{M(b-a)} M(b-a) = \varepsilon \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

3.4. Comentario final del Capítulo 3

Podemos decir que [1] es de mucha utilidad para comenzar el estudio con sus orígenes y aplicaciones de la teoría de Operadores Lineales Acotados.

Para la Demostración de la identidad

$$L(X, Y) := B(X, Y) \quad (\text{Proposición 3.2.7})$$

Hemos seguido a la dada en [8] de su Proposición 14 y mostrada en el Capítulo 1.

La noción de Operador de Fredholm fué tomada de [4] en el Capítulo 3.

El concepto de Operador Compacto se tomó de [5] en el Capítulo 3.

3.5. Ejercicios Propuestos

Esta Sección contiene una lista de Ejercicios que permiten complementar la Teoría desarrollada anteriormente. Cuando la solución del Ejercicio requiera el uso de un concepto [no dado en la Teoría desarrollada en las Secciones previas] el mismo será dado en el Ejercicio.

Presentamos a continuación nuestros Ejercicios.

Ejercicios 3.5.1 Sea $T \in B(X, Y)$. Demostrar que si:

$$M(T) := \inf \left\{ M : \|T(x)\| \leq M \|x\|, \forall x \in X \right\}$$

entonces,

$$M(T) = \|T\|$$

Ejercicios 3.5.2 Sea $T \in B(X, Y)$. Demostrar lo afirmado en la Observación 3.1.11(b), esto es,

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$$

Ejercicios 3.5.3 Sea $A = (a_{i,j})_{m \times n} \in M_{m \times n}$. Demostrar que la función:

$$\|\cdot\| : M_{m \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por:

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n,m} |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2}$$

es una norma sobre $M_{m \times n}$

Ejercicios 3.5.4 Sea $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Demostrar que

$$\|T\| \leq \|A(T)\|$$

Ejercicios 3.5.5 Dar un Ejemplo de un $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tal que:

$$\|T\| < \|A(T)\|$$

[**Sugerencia:** Considere el operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donde

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Interpretar geométicamente el operador T .]

Ejercicios 3.5.6 Sea $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Demostrar que:

$$T \text{ es 1-1} \iff N(T) = \{0\}$$

Ejercicios 3.5.7 Sean X y Y espacios normados tales que:

$$\dim X = \infty \quad \text{y} \quad Y \neq \{0\}.$$

Demostrar que existe un operador lineal $T : X \rightarrow Y$ que no es acotado

Ejercicios 3.5.8 Verificar que las siguientes transformaciones definen operadores lineales acotados. Estimar $\|T\|$

a) $T : M_{m \times n} \rightarrow M_{m \times n} \quad T(A) = A^t B$

donde A^t denota la transpuesta de la matriz A y, B es una matriz fija en $M_{m \times n}$.

b) $T : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R} \quad T(f) = \int_0^1 f(t) dt$

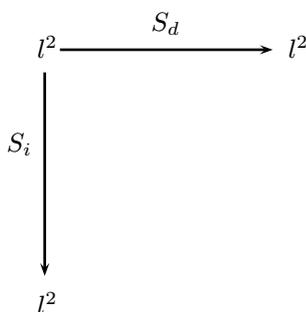
c) $T : C'([0, 1]) \rightarrow C([0, 1]) \quad T(f)(x) = xf'(x)$ donde $x \in [0, 1]$,
 x fijo

$$d) \quad T : l^1 \longrightarrow l^2 \quad T\left(\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}\right) = \left(\frac{1}{2^n} \sqrt{|x_n|}\right)_{n=1}^{\infty}$$

$$e) \quad T : l^1 \longrightarrow c_0 \quad T\left(\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}\right) = \left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$$

$$f) \quad T : C([0, 1]) \longrightarrow c_0 \quad T(f) = \left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right)_{n=1}^{\infty}$$

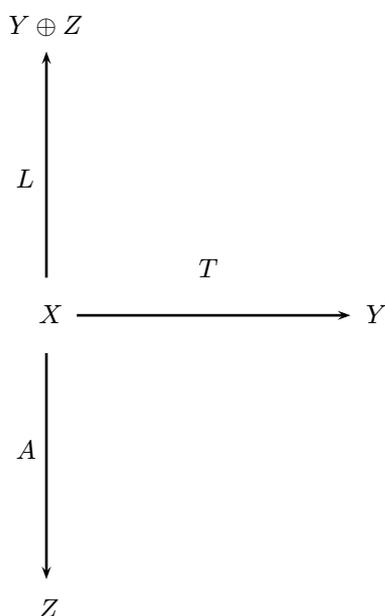
Ejercicios 3.5.9 Considere el diagrama:



donde S_d y S_i son operadores lineales acotados dados en el Ejemplo 3.3.6. Demostrar que:

- S_d es 1-1 pero no es sobre.
- S_i es sobre pero no es 1-1.
- $S_i \circ S_d = I$.
- $S_d \circ S_i \neq I$.
- ¿Cuál es $N(S_d \circ S_i)$?
- ¿Cuál es el núcleo de S_i ?

Ejercicios 3.5.10 Sean X, Y y Z espacios normados. Considere el diagrama



donde $T \in B(X, Y)$, $A \in B(X, Z)$ y, $Y \oplus Z$ es el espacio normado definido en la Proposición 1.2.8. El operador lineal L está definido como:

$$L(x) = \begin{pmatrix} T(x) \\ A(x) \end{pmatrix}, \quad x \in X.$$

Demostrar que:

a) $L \in B(X, Y \oplus Z)$ y que además

$$\|L\| \leq \|T\| + \|A\|$$

b) L es 1-1 $\iff N(T) \cap N(A) = \{0\}$

Ejercicios 3.5.11 Dos espacios normados X y Y , se dicen isomorfos si existe un operador $T \in B(X, Y)$ que es biyectivo y que además $T^{-1} \in B(X, Y)$.

Demostrar que si X y Y son isomorfos con X siendo además un espacio de Banach, entonces Y es también un espacio de Banach.

Ejercicios 3.5.12 Dos espacios normados X y Y se dicen isométricamente isomorfos si existe un operador lineal $T : X \rightarrow Y$ tal que:

$$T(X) = Y \quad \text{y además} \quad \|T(x)\| = \|x\|, \quad \forall x \in X$$

Mostrar que si X y Y son isométricamente isomorfos entonces son isomorfos.

Ejercicios 3.5.13 ¿Se preserva siempre la separabilidad de un espacio de Banach a través de un isomorfismo isométrico?

Ejercicios 3.5.14 Consideremos el espacio vectorial \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) dotado de la norma usual Y . Sea:

$$M := \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}.$$

Mostrar que M es un subespacio cerrado de \mathbb{R}^n , construir espacio cociente \mathbb{R}^n/M y hallar $\|[(1, 1, 1, \dots, 1)]\|$

Ejercicios 3.5.15 Resolver las siguientes ecuaciones integrales:

$$a) \quad \frac{5s}{6} = x(s) - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} s t x(t) dt$$

$$b) \quad s = x(s) - \int_0^s (t-s)x(t) dt$$

Ejercicios 3.5.16 Sean X y Y espacios normados y:

$$K(X, Y) := \left\{ T : X \rightarrow Y, T \text{ es un operador compacto} \right\}.$$

Mostrar que:

a) $K(X, Y)$ es un subespacio vectorial cerrado de $B(X, Y)$.

b) Si Y es un espacio de Banach, ¿es $K(X, Y)$ un espacio de Banach?

Ejercicios 3.5.17 Sean S un operador compacto y T un operador lineal acotado. Supóngase que las composiciones $S \circ T$ y $T \circ S$ están bien definidas. Mostrar que ambas composiciones definen operadores compactos.

Bibliografía

Bibliografía

- [1] Banach, S. **Theory of Linear Operations**, English translation by F. Jellet, London, United Kingdom, 1987.
- [2] Bartle, Robert. **The elements of Real Analysis** second edition. John Wiley and sons. 1976
- [3] Bollobás, Béla. **Linear Analysis An Introductory Course**. Cambridge University Press. 1990.
- [4] Davis, Martin. **A first course in Functional Analysis**. Gordon and Breach. 1966.
- [5] De Vito, Carl L. **Functional Analysis and Linear Operator Theory**. Addison - Wesley publishing company. 1990
- [6] Diestel, Joseph. **Sequences and Series In Banach Spaces**. Springer - Verlag. New York, Inc. 1984
- [7] Grossman, Staley I. **Álgebra Lineal con Aplicaciones**. Mc. Graw - Hill. Interamericana de México S.A. 1992
- [8] Habala, Pert; Hájek, Pert; Zizler, Václav. **Introduction to Banach Spaces**. matfypress, vydavatelství Matematicko - fyzikální fakulty univerzity Karlovy. 1996
- [9] León M. Luis R. **Minimización en Espacio de Hilbert y Espacios de Banach**. Trabajo de Ascenso. Mérida - Venezuela. 2000
- [10] Mazon Ruíz, José M. **Cálculo Diferencial. Teoría y Problemas**. Mc Graw - Hill. Interamericana de España S.A. 1997

- [11] Merentes, N. y Rivas, S. **El Operador de Composición en Espacios de Funciones con algún tipo de Variación Acotada.** Escuela Venezolana de Matemáticas, Asociación Matemática Venezolana. Centros de Estudios Avanzados - I.V.I.C. Caracas. 1996
- [12] Pérez-Grasa, Isabel; Minguillón C., Esperanza; Jarne J., Gloria. **Matemáticas para la Economía. Programación matemática y sistemas dinámicos.** Mc Graw - Hill. Iberoamericana de España S.A.U. 2001
- [13] White, A.J. **Real Analysis an introduction.** Addison - Wesley publishing company, Inc. 1968