FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Suponga una población cuyo modelo de crecimiento está dado por $P(t)=4e^{0.02t}$ millones a partir del año 2000. Si quisiéramos saber cuándo la población tendrá 5 millones de habitantes, debemos plantear la ecuación

$$5=4e^{0.02t}$$

y obtener el valor de t que satisface esta ecuación. Para resolverla deberemos usar el proceso inverso de la exponencial el cual es el logaritmo.

La función logarítmica en base a es la función inversa de la función exponencial en base a. Es claro, viendo la gráfica de la función exponencial, que ella tiene inversa. Esta función inversa tiene una notación propia: $\log_a$. Los valores de esta función vienen dados por $\log_a(x)$.

Del concepto de función inversa, sabemos que $y=f^{-1}(x)$ si y sólo si $x=f(y)$. Puntualicemos entonces la definición de logaritmo

Definición.- Sea $a>0,\ a\neq 1$. El logaritmo de x con base a se define como

$$y=\log_a(x) \text{ si y sólo si } a^y=x,$$

siempre y cuando $x>0$.

Observaciones:

1.- Conviene recordar siempre al $\log_a(x)$ como **el exponente** al que hay que elevar la base para que se produzca el número x. Por ejemplo $3^2=9$, entonces 2 es el logaritmo de 9 en base 3:

$$\log_3 9=2.$$

2.-Los logaritmos en base 10 son conocidos como logaritmos decimales, En este caso se suprime el subíndice en la notación, esto es: $\log_{10}(x)=\log(x)$. En el caso que la base sea el número e, el logaritmo se escribe como $\ln(x)$ para representar el logaritmo en base e de x y se lo llama logaritmo natural de x

3.- El logaritmo sólo está definido para los números estrictamente positivos. El dominio de la función logarítmica $y=\log_a(x)$ es el conjunto $(0,\infty)$. Recuerde que el rango de la función exponencial es $(0,\infty)$.

4.- $y=\log_a(x)$ es conocida como la forma logarítmica y $a^y=x$ la forma exponencial. En ocasiones es útil pasar de la forma exponencial a la logarítmica y viceversa.

5.- De la propia definición, si sustituimos y en la expresión exponencial obtenemos que

$$a^{\log_a x}=x$$

Si ahora sustituimos x en la expresión logarítmica resulta que

$$y=\log_a(a^y)$$

Ejemplo 1.- Convertir las siguientes formas exponenciales en logarítmicas

a) $2^5=32$; **b)** $10^3=1000$; **c)** $e^0=1$

Solución: Hay que tener siempre en mente que el logaritmo es el exponente.

a) El exponente es 5, por tanto es el logaritmo, así: $5=\log_2 32$

b) En este caso 3 es el exponente, por tanto el logaritmo, así: $3=\log 1000$

En este caso la base se suprime por ser decimal.

c) 0 es el exponente y la base es e, por tanto usamos la notación ln para representar el logaritmo en base e : $0=\ln 1$

Ejemplo 2.- Convertir las siguientes formas logarítmicas en exponenciales

a) $\log_{16} 4 = 1/2$; **b)** $\log_3 \frac{1}{3} = -1$ **c)** $\log(0.001) = -3$

Solución: Las respuestas están dadas en la siguiente tabla.

Forma Logarítmica	Forma exponencial
$\log_{16} 4 = 1/2$	$16^{1/2} = 4$
$\log_3 \frac{1}{3} = -1$	$3^{-1} = \frac{1}{3}$
$\log(0.001) = -3$	$10^{-3} = 0.001$

Ejercicio de desarrollo: Convertir las siguientes formas exponenciales en logarítmicas:

a) $\frac{1}{64} = 4^{-3} \equiv$ **b)** $\sqrt[3]{8} = 2 \equiv$

Convertir las siguientes formas logarítmicas en exponenciales

a) $\log_2 \frac{1}{2} = -2$ **b)** $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

Sin aplicar calculadoras, ni propiedades, salvo la propia definición y tanteo podemos calcular algunos logaritmos.

Ejemplo 3.- Calcular los siguientes logaritmos:

a) $\log_2(8)$; **b)** $\log(0.01)$ y **c)** $\ln(\sqrt{e})$

Solución: a) La base es 2, para conseguir $\log_2(8)$ debemos pensar en un exponente y tal que $2^y = 8$, como $2^3 = 8$, entonces $3 = \log_2(8)$;

b) Tenemos en este caso que la base es 10, recuerde que el logaritmo es el exponente y tal que $10^y = 0.01$, el cual se satisface con y=-2. Así $-2 = \log(0.01)$.

c) En este caso la base es e, se quiere conseguir y tal que $y = \ln(\sqrt{e})$. Se lleva a la forma exponencial: $e^y = \sqrt{e}$, esto es $e^y = e^{1/2}$, de aquí que $\ln(\sqrt{e}) = 1/2$.

Algunas ecuaciones exponenciales se pueden resolver pasándola a su forma logarítmica y algunas logarítmicas se resuelven pasándolas a su forma exponencial. Veamos las siguientes ecuaciones:

Ejemplo 4.- Resolver las siguientes ecuaciones

a) $2^{1-3y} = 5$; **b)** $e^{2x} = 8$ **c)** $\log_2(x-1) = 3$; **d)** $\log_x(27) = 3$

Solución: a) y b) las pasamos a su forma logarítmica para resolverlas

a) $1 - 3y = \log_2 5$**.** Esto es una ecuación lineal en y la cual resolvemos

$-3y = \log_2 5 - 1 \Rightarrow y = \dfrac{1-\log_2 5}{3}$

b) $2x = \ln 8$. De nuevo es una ecuación lineal en *x,* en la cual despejamos la variable: $x = \dfrac{\ln 8}{2}$;

c) y d) las pasamos a su forma exponencial

c) $2^3 = x - 1 \Rightarrow x = 9$; **d)** $x^3 = 27$. Está es una ecuación cúbica: $x = \sqrt[3]{27} = 3$

Ejercicio de desarrollo: Resolver las siguientes ecuaciones

a) $\log_5(x+10) = 2$ **b)** $e^{\sqrt{x^2-1}} = 6$

Volvemos al problema que nos planteamos al comienzo de la sección.

Ejemplo 5.- Suponga una población cuyo modelo de crecimiento está dado por $P(t) = 4e^{0.02t}$ millones a partir del año 2000.¿Cuándo la población tendrá 5 millones de habitantes?

Solución: Debemos plantear la ecuación

$$5 = 4e^{0.02t}$$

Antes de pasar a su forma logarítmica, dejamos sola la exponencial:

$$\frac{5}{4} = e^{0.02t}$$

Pasamos ahora la ecuación a su forma logarítmica para resolverla:

$$0.02t = \ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$t = \frac{\ln\frac{5}{4}}{0.02};$$

Usando una calculadora, obtenemos que

$$t \approx 11.16$$

Concluimos que aproximadamente en el año 2011, la población tendrá 5 millones de habitantes.

EJERCICIOS

1) Pase a la forma logarítmica las siguientes:

1.1) $10^{-4} = 0{,}0001$; **1.2)** $2^{-4} = \dfrac{1}{16}$; **1.3)** $(16)^{1/2} = 4$;

1.4) $3^4 = 81$; **1.5)** $e^{-1} = \dfrac{1}{e}$; **1.6)** $10^3 = 1000$

2)Pase a la forma exponencial

2.1) $\log_2 64 = 6$; **2.2)** $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$; **2.3)** $\log(\frac{1}{\sqrt[3]{100}}) = -\frac{2}{3}$;

2.4) $\log_5 \frac{1}{25} = -2$; **2.5)** $\ln \frac{1}{\sqrt[5]{e}} = -\frac{1}{5}$; **2.6)** $\log(10000) = 4$

3) Resuelva las siguientes ecuaciones:

3.1) $\ln(x-1) = 1$; **3.2)** $\log(x+3) - 2 = 0$; **3.3)** $\log_2(2x) = -3$;

3.4) $e^{-3x+1} = 4$; **3.5)** $2 \cdot 4^{x+1} = 1$; **3.6)** $2^{\sqrt{x}} = 8$;

3.7) $2^{x^2} = 8$

4) Calcular los siguientes logaritmos sin usar calculadora:

4.1) $\log(100)$; **4.2)** $\log_4(4)$; **4.3)** $\ln(\frac{1}{e})$; **4.4))** $\log(0.001)$;

4.5)) $\log_2(\sqrt[3]{4})$ **4.6)** $\ln(e^0)$; **4.7)** $\log_{16}(4)$; **4.8)** $\log_3(\frac{1}{\sqrt{27}})$

APLICACIONES CIENCIAS SOCIALES

1) La población de un país *P(t)* en millones de habitantes, *t* años después de 1990, esta modelada por $P(t) = P_0 e^{0.02t}$ ¿Cuándo se duplicará la población? (Resp. $t = \frac{\ln(2)}{0.02} \approx 34.6$. En el año 2024).

2) La población de un país *P(t)* en millones de habitantes, *t* años después de 1999, esta modelada por $P(t) = 22e^{0.04t}$ ¿Cuándo la población llegará a los 35 millones de habitantes? Suponga que el modelo permanece en el tiempo. (Resp. En el 2010).

APLICACIONES DE ECONOMÍA

1) Un economista predice que el poder de compra *P(t)*, de una unidad monetaria a los *t* años a partir de hoy, será de $P(t)=(0.95)^t$. ¿Cuándo ese poder de compra será la mitad de lo que es hoy? (Resp. Dentro de 13.5 años).

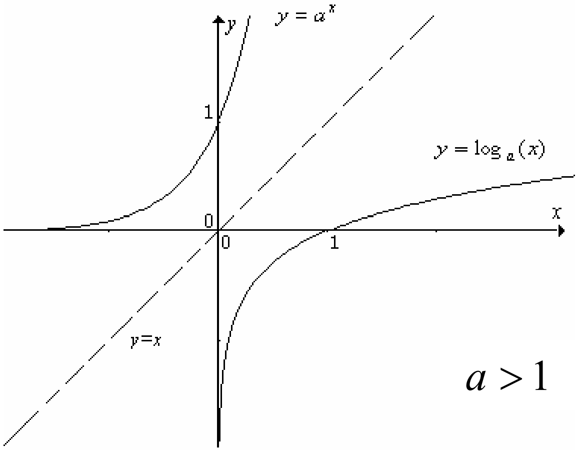
2) Una cantidad de 150 UM es invertida a un interés compuesto anual del 5%. ¿Cuánto tiempo tardará la inversión en valer 200 UM? (Resp. Tardará 5 años con aproximadamente 11 meses).

Resp: 1.1) -4=log(0.0001); **1.2)** $-4 = \log_2(1/16)$; **1.3)** $\log_{16}4=1/2$; **1.4)** $4 = \log_3(81)$; **1.5)**ln(1/e)=-1; **1.6)** $3 = \log(1000)$ **2.1)** $2^6=64$; **2.2)** $3^{1/2} = \sqrt{2}$; **2.3)** $10^{-2/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{100}}$; **2.4)** $5^{-2} = 1/25$; **2.5)** $e^{-1/5} = \frac{1}{\sqrt[5]{e}}$; **2.6)** $10^4 = 10000$; **3.1)** e+1; **3.2)**97; **3.3)** 1/16; **3.4)** $\frac{1-\ln 4}{3}$; **3.5)** -3/2; **3.6)** 9; **3.7)** $\pm\sqrt{3}$;

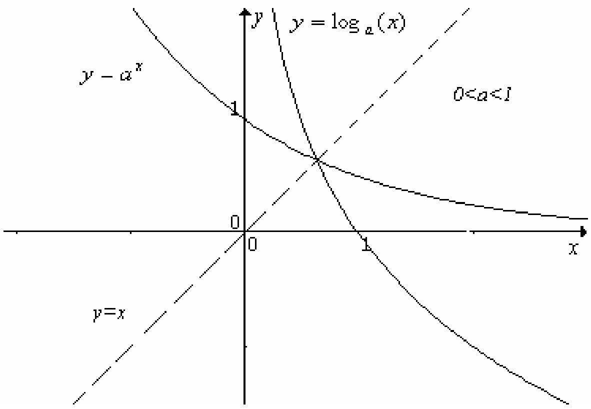
4.1) *2*; **4.2)** 1; **4.3)** -1; **4.4)** -3; **4.5)** $\frac{2}{3}$; **4.6)** 1; **4.7)** $\frac{1}{2}$; **4.8)** $-\frac{3}{2}$

GRÁFICAS DE FUNCIONES LORGARITMICAS

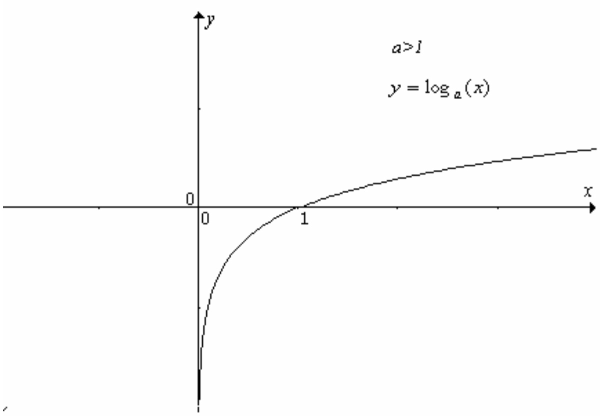
Por ser $y = \log_a(x)$ la función inversa de $y = a^x$, usamos la técnica de obtención de la gráfica de f^{-1} a partir de la de *f* por medio de la reflexión en torno a la recta *y*=*x*, como muestra la siguiente figura, para *a*>*1*:



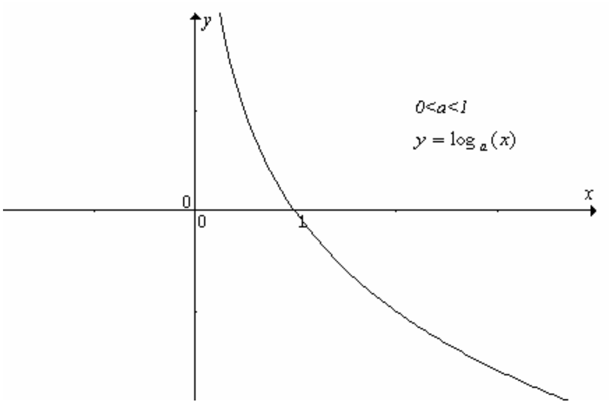
Para 0<*a*<1 tenemos



En resumen, las formas generales de las gráficas del logaritmo son dos, dependiendo si la base es mayor o menor que 1. A continuación presentamos cada una con su reporte.

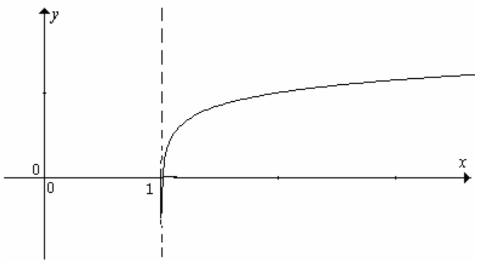


Reporte de la gráfica de la función, $y = \log_a(x)$ con *a*>1:
1) El dominio es el conjunto de los reales positivos. El rango es el conjunto de todos los números reales
2) La intercepción con el eje *x* es el punto (1,0)
3) La función crece de izquierda a derecha.
4) La recta *x*=0 (el eje *y*) es una asíntota vertical, esto quiere decir que la gráfica de la función se acerca cada vez más a esta recta.



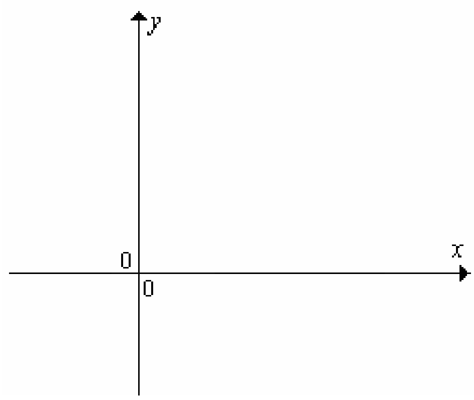
Reporte de la gráfica de la función $y = \log_a(x)$, con 0<*a*<1:
1) El dominio es el conjunto de los reales positivos. El rango es el conjunto de todos los reales.
2) La intercepción con el eje *x* es el punto (1,0)
3) La función decrece de izquierda a derecha.
4) La recta *x*=0 (el eje y) es una asíntota vertical, esto quiere decir que la gráfica de la función se acerca cada vez más a esta recta cuando *x* se acerca a 0.

Ejemplo 1.- Graficar la función $y = \log(x-1)+2$, haga un reporte de la gráfica.
Solución: Para calcular la intercepción con el eje *x* se plantea la ecuación $0 = \log(x-1)+2$, a fin de solucionar esta ecuación dejamos el logaritmo en un solo lado de la ecuación $\log(x-1) = -2$
Esta última la pasamos a su forma exponencial $10^{-2} = x-1$, de aquí $x = 1+10^{-2}$



Reporte de la gráfica de la función, $y = \log(x-1)+2$
1) Dom*f*=(1, ∞). El rango es el conjunto de todos los números reales
2) La intercepción con el eje *x* es el punto $(1+10^{-2}$,0)
3) La función crece de izquierda a derecha.
4) La recta *x*=1, es una asíntota vertical, esto quiere decir que la gráfica de la función se acerca cada vez más a esta recta.

Ejercicio de desarrollo.- Graficar la función $y = \log(x+0.5)+1$, haga un reporte de la gráfica.



Reporte de la gráfica de la función,
1) Dom*f*= _____ . El rango __________
2) La intercepción con el eje *x* es el punto

3) La función ______ de izquierda a derecha.
4) La recta _____, es una asíntota ________, esto quiere decir que la gráfica de la función se acerca cada vez más a esta recta.

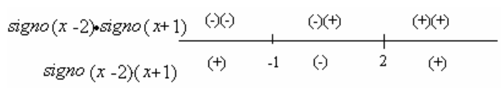
En la función logarítmica dada arriba pudimos calcular el dominio a partir de la gráfica, pero no siempre lo podremos hacer cuando hay un logaritmo en la función y no conocemos la gráfica. El siguiente ejemplo ilustra como calcular dominio de funciones en donde aparece un logaritmo

Ejemplo 2.- Calcular el dominio de las siguientes funciones **a)** $y = \log(x^2 - x - 2)$
b) $y = \sqrt{x}\log(x-1)$
Solución:
a) Para calcular el dominio de $y = \log(x^2 - x - 2)$ sólo debemos plantear y resolver la desigualdad cuadrática $x^2 - x - 2 > 0$.Para ello factorizamos y hacemos un estudio de signo de los factores

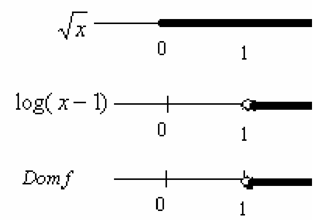
$$(x-2)(x+1) > 0$$

Recuerde que los pares de paréntesis arriba de la recta real lleva el signo de los factores en el intervalo definido por las raíces, y el paréntesis de abajo lleva el signo del producto de signos en el intervalo respectivo. De la figura vemos entonces que la solución de la desigualdad planteada es:

Dom f=(-∞,-1)U(2, ∞)



b) Para calcular el dominio de esta función debemos plantear la parte común del dominio de $\sqrt{x}$ y del dominio de $\log(x-1)$.Esto es la intersección de los dos dominios. El dominio de y=$\sqrt{x}$ esta dado por $[0, \infty)$. Para el dominio de $\log(x-1)$ debemos plantear la desigualdad $x - 1 > 0$, cuya solución es $x > 1$.



Así el dominio de f es el intervalo $(1, \infty)$ por ser la parte común entre los dominios de los dos factores.

Ejercicio de desarrollo .- Calcular el dominio de la siguiente función $y = \dfrac{\log(x^2 - 2x)}{x}$

EJERCICIOS

1) Bosqueje la gráfica de las siguientes funciones. Realice un reporte de la gráfica

1.1) $y = \log(x-2)$; **1.2)** $y = \log_{1/2}(x+3)$;

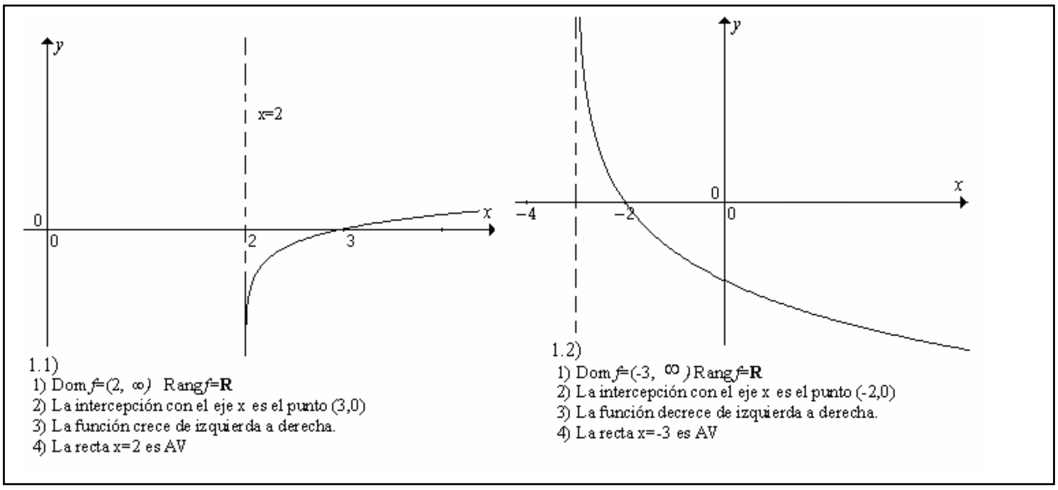
1.3) $y = -\log(x) + 1$; **1.4)** $y = \log_2(x-2) - 3$

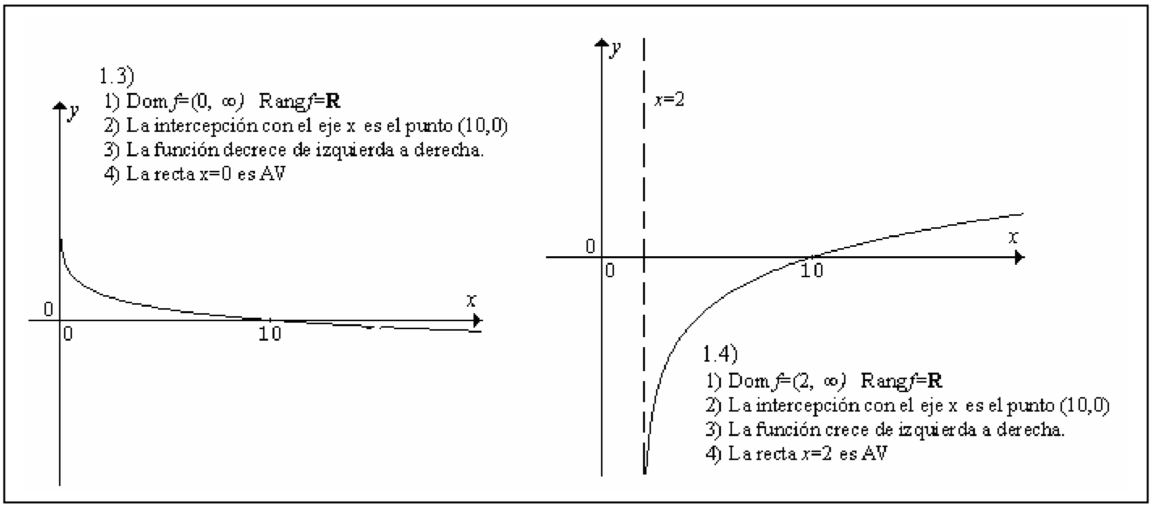
2) Encuentre el dominio de las siguientes funciones:

2.1) $f(x) = \log(x^2 - 9)$; **2.2)** $f(x) = \dfrac{x}{\log(x-3)}$; **2.3)** $f(x) = \sqrt{1-x}\,\log(x+2)$;

2.4) $y = \dfrac{\ln(x+1)}{x^3 - 5x^2 + 6x}$; **2.5)** $g(x) = \dfrac{1}{x+1} - \log(x+1)$; **2.6)** $h(x) = \sqrt{x}\,\ln(x^2 - x - 6)$;

2.7) $f(x) = \dfrac{1}{\log(x+1)}$





Respuestas:

2.1) $(-\infty,-3) \cup (3,\infty)$; **2.2)** $(3,4) \cup (4,\infty)$; **2.3)** (-2,1]; **2.4)** $(-1,0) \cup (0,2) \cup (2,3) \cup (3,\infty)$

2.5) $(-1,1) \cup (1,\infty)$; **2.6)** $(3,\infty)$; **2.7)** $(-1,0) \cup (0,\infty)$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

En esta sección se estudiarán las propiedades de los logaritmos. Como los logaritmos son los exponentes, las propiedades se establecen en base a las propiedades de los exponentes.
Por ejemplo, si $x = \log_a m$ y $y = \log_a n$ entonces $a^x = m$ y $a^y = n$, de donde

$$mn = a^x a^y = a^{x+y}$$

De aquí tenemos, volviendo esta forma $mn = a^{x+y}$ a su forma logarítmica, que $\log_a(mn) = x + y$,
sustituyendo finalmente establecemos nuestra primera propiedad

$$\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n.$$

En el siguiente recuadro remarcamos ésta y otras propiedades de logaritmos de uso frecuente

1.- $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$
2.- $\log_a(\frac{m}{n}) = \log_a m - \log_a n$
3.- $\log_a(m^c) = c\log_a m$
4.- $\log_a(a) = 1$
5.- $\log_a(1) = 0$

Dado que las formas de estas propiedades no son usuales, los estudiantes suelen cometer muchos errores en ellas. Uno muy frecuente es decir que el logaritmo de la suma (diferencia) es la suma (diferencia) de los logaritmos, lo cual es falso.
Esto es

$$\log_a(m+n) \neq \log_a m + \log_a n \quad \text{o bien} \quad \log_a(m-n) \neq \log_a m - \log_a n$$

Una correcta lectura de estas igualdades pueden ayudar a no cometer estos y otros errores muy comunes. Por ejemplo las propiedades las podemos leer como:

1.- $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$: *El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos.*

2.- $\log_a(\frac{m}{n}) = \log_a m - \log_a n$: *El logaritmo de un cociente es la diferencia de los logaritmos.*

3.- $\log_a(m^c) = c\log_a m$: *El logaritmo de una potencia es el exponente por el logaritmo del número.*

4.- $\log_a(a) = 1$: *El logaritmo de la base es* 1.

5.- $\log_a(1) = 0$: *El logaritmo de* 1 *en cualquier base es 0.*

Observe que en la propiedad 2 se refiere al logaritmo de un cociente, esto es estamos evaluando el logaritmo en un número expresado como cociente: $\frac{m}{n}$. El logaritmo de un cociente no es el cociente de los logaritmos: $\log_a(\frac{m}{n}) \neq \frac{\log_a(m)}{\log_a(n)}$.

Para los logaritmos de una suma, $\log_a(m+n)$, y una diferencia, $\log_a(m-n)$, no hay propiedades generales.

De nuevo estas propiedades son fáciles de demostrar al pasar las formas logarítmicas en exponenciales. Por ejemplo la propiedad 4: $\log_a(a)=1 \Leftrightarrow a^1 = a$.

Los siguientes ejercicios serán de utilidad más adelante. Por medio de las propiedades se pide reescribir una expresión con logaritmos:

Ejemplo 1.- Expresar $\log(x\sqrt{x})$ en términos de $\log(x)$

Solución: Tal como está expresado $\log(x\sqrt{x})$ lo podemos interpretar como el logaritmo de un producto y entonces aplicar la propiedad 1. Pero alternativamente podemos rescribir $(x\sqrt{x}) = x^{3/2}$ y aplicar la propiedad 3:

$$\log(x\sqrt{x}) = \log(x^{3/2}) = \frac{3}{2}\log(x).$$

Ejemplo 2.- Expresar $\log(\frac{x^3\sqrt{x+1}}{x-2})$ en términos de $\log(x), \log(x+1)$ y $\log(x-2)$

Solución: La forma de resolver este tipo de ejercicio es analizando cual es la última operación que se realiza en la expresión que se le toma logaritmo. En este caso es un cociente, por tanto se aplica la propiedad 2 del cociente:

$$\log(\frac{x^3\sqrt{x+1}}{x-2}) = \log(x^3\sqrt{x+1)} - \log(x-2).$$

El primer término del lado derecho es un producto, por tanto aplicamos la propiedad 1 del producto

$$= \log(x^3) + \log(\sqrt{x+1)} - \log(x-2)$$

El primer término ahora es una potencia, por tanto aplicamos esta regla. El segundo que es un radical Lo expresamos como una potencia y también le aplicamos esta propiedad

$$= 3\log(x\ \ ) + \frac{1}{2}\log(x+1) - \log(x-2)$$

Ejercicio de desarrollo: Expresar $\ln\left(\frac{(x+3)^2}{\sqrt{x(x+2)}}\right)$ en términos de $\ln(x), \ln(x+2)$ y $\ln(x+3)$

ECUACIONES LOGARITMICAS Y EXPONENCIALES

Las propiedades de los logaritmos permiten solucionar algunas ecuaciones logarítmicas. Básicamente tendremos dos tipos de formas y deberemos llevar la ecuación planteada a una de estas dos formas a través de las propiedades de los logaritmos:

Forma 1: $\log_a(g(x)) = c$. La recomendación para resolverla es llevarla a la forma exponencial.

Forma 2: $\log_a(g(x)) = \log_a(f(x))$. Para resolverla usamos el hecho que la función logarítmica es biunívoca entonces esta expresión ocurre si y sólo si $g(x) = f(x)$, **la cual es la que resolveremos.**

Comentarios:
1) Al llevar una ecuación a la forma 1 o 2 podríamos estar agregando solución, así que debemos siempre verificar que las soluciones satisfacen la ecuación original.
2) La forma 1 o 2 también se resuelven elevando ambos miembros en base *a*.

Veamos los siguientes ejemplos donde debemos llevar la ecuación que se nos presente a una de estas dos formas usando las propiedades de los logaritmos.

Ejemplo 1.- Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:
a) $\log(3x+1) - \log(x) - 1 = 0$; **b)** $2\log(x) = \log(x+1) + \log(x+2)$
Solución:
a) Esta ecuación la llevamos a la **forma 1:**

$$\log(3x+1) - \log(x) = 1$$

$$\log\left(\frac{3x+1}{x}\right) = 1$$

Ahora la llevamos a su forma exponencial

$$10 = \frac{3x+1}{x}$$

Esta es una ecuación racional, multiplicamos ambos lados por *x* y así obtenemos una ecuación lineal:

$$10x = 3x + 1$$

Cuya la solución es: $x = \frac{1}{7}$.

Esta solución debe ser verificada en la ecuación racional pues puede ser una solución añadida. En la ecuación logarítmica original, se debe sustituir la solución en cada expresión logarítmica para verificar que cada expresión a la que se le toma logaritmo sea mayor que cero. El lector puede verificar que cumple con la ecuación racional y que $3x+1>0$ con $x = \frac{1}{7}$.

b) Esta ecuación la llevamos a la **forma 2**: $\log_a(g(x)) = \log_a(f(x))$. Para ello en el lado izquierdo usamos la regla de la potencia y en el lado derecho la propiedad de la suma:

$$2\log(x) = \log(x+1) + \log(x+2)$$

$$\log(x^2) = \log\big((x+1)(x+2)\big)$$

Entonces

$$x^2 = (x+1)(x+2),$$

Ahora resolvemos esta ecuación:

$$x^2 = x^2 + 3x + 2$$
$$3x + 2 = 0$$
$$x = \frac{-2}{3}:$$

Esta solución la sustituimos en la ecuación original para verificar que estemos aplicando logaritmos a números positivos:

$2\log(\frac{-2}{3}) = \log(-\frac{2}{3}+1) + \log(-\frac{2}{3}+2)$. Como $\log(\frac{-2}{3})$ no esta definido, entonces $x = \frac{-2}{3}$ no es solución. En conclusión esta ecuación no tiene solución.

Ejercicio de desarrollo: Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\ln(x+1) = \ln(2x+1) - \ln(x-1)$ **b)** $1 - \log(3x+1) = \log(x-2)$

Si **una ecuación exponencial** puede ser expresada de **forma** $a^{g(x)} = c \cdot k^{f(x)}$, entonces para resolverla aplicamos logaritmos a ambos lados con la idea que los exponentes pasen multiplicando

$$\log_b(a^{g(x)}) = g(x)\log_b(a);$$
$$\log_b(c \cdot k^{f(x)}) = \log_b(c) + \log_b(k^{f(x)}) = \log_b(c) + f(x)\log_b(k)$$

Si estamos interesados en la solución numérica, podemos emplear o bien el logaritmo decimal o el neperiano. Si $k = a^r$, se puede aplicar logaritmos en base *a* para tener una solución exacta.

Ejemplo 2.- Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $5^{x^2-1} = 5 \cdot 2^{x^2-3}$ **b)** $2^{x^2+1} = 2 \cdot 4^{x-4}$

Solución:

a) Tomamos logaritmo decimal en ambos lados:

$\log(5^{x^2-1}) = \log(5 \cdot 2^{x^2-3})$ y aplicamos propiedades del logaritmo

$$(x^2-1)\log(5) = \log(5) + \log(2^{x^2-3})$$

$$(x^2-1)\log(5) = \log(5) + (x^2-3)\log(2)$$

Se distribuye el logaritmo

Se agrupan los términos en x^2 en el lado izquierdo y en el derecho las constantes

$x^2\log(5)-x^2\log(2)=\log(5)-3\log(2)+\log(5)$

Se saca factor común x^2 y se despeja

$x^2(\log(5)-\log(2))=2\log(5)-3\log(2)$

$x^2=\dfrac{2\log(5)-3\log(2)}{\log(5)-\log(2)}$;

$x=\pm\sqrt{\dfrac{2\log(5)-3\log(2)}{\log(5)-\log(2)}}\approx 1.11$. Puede confirma que $x=\pm\sqrt{\dfrac{\log(\frac{25}{9})}{\log(\frac{5}{2})}}$

b) Para resolver $2^{x^2+1}=2\cdot 4^{x+2}$, primero expresamos 4 como potencias de 2

$2^{x^2+1}=2\cdot(2^2)^{x+2}$

$2^{x^2+1}=2\cdot 2^{2(x+2)}$. Aplicamos logaritmo en base 2 a ambos lados de la ecuación

$\log_2(2^{x^2+1})=\log_2(2\cdot 2^{2(x+2)})$.

$(x^2+1)\log_2(2)=\log_2(2)+\log_2(2^{2(x+2)})$

$(x^2+2)=1+(2x+4)\log_2(2\ \ )$

$x^2+1=(2x+4)$

$x^2-2x-3=0$

Las soluciones son $x=3$ y $x=-1$.

Ejercicio de desarrollo: Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $8^{x^2+1}=2^{3-2x}$ **b)** $5^{x+1}=4\cdot 2^{3-2x}$

FORMULA DE CAMBIO DE BASE

Si tenemos un número expresado como logaritmo de una base y queremos expresarlo en otra base usamos la fórmula

$$\boxed{\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

que permite hacer este cambio de base.

Demostración: Supongamos $y = \log_a(x)$, llevamos esta forma a su forma exponencial

$$x = a^y$$

Tomando logaritmo en base b a ambos lados, tenemos

$$\log_b x = \log_b a^y$$

Al aplicar la propiedad de la potencia y despejar y obtenemos

$$\log_b x = y \log_b a$$

$$\boxed{y = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

Finalmente sustituimos y por su valor para alcanzar la igualdad.

En particular, las fórmulas de cambio de base a la decimal y a la logarítmica viene expresada por las siguientes

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Ejemplo 1.- Expresar los siguientes logaritmos en base 10: a) $\log_2(10)$ **b)** $\ln(x)$

Solución: Aplicamos la fórmula de cambio de base en ambos casos:

a) $\log_2(10) = \dfrac{\log 10}{\log 2} = \dfrac{1}{\log 2}$. **b)** $\ln(x) = \dfrac{\log x}{\log e}$

APLICACIONES A LA ECONOMÍA

Ejemplo 1.- Si se invierte 5000UM a un interés compuesto continuamente de 8% anual y otro capital de 4000UM se invierte en un bono de mayor riesgo pero con un interés compuesto continuamente de 10% ¿Cuándo se tendrá la misma cantidad de dinero en las cuentas

Solución: En la primera inversión como el interés es compuesto continuamente al 8%, el monto acumulado está dado por

$$A_t = 5000 \cdot e^{0.08t}$$

En la segunda inversión el monto acumulado será de

$$B_t = 4000 \cdot e^{0.1t}$$

Se tendrá el mismo capital en ambas cuentas cuando

$$A_t = B_t$$

$$5000 \cdot e^{0.08t} = 4000 \cdot e^{0.1t}.$$

Esto es una ecuación exponencial, lo llevamos a la forma $a^{g(x)} = c \cdot a^{f(x)}$ y tomamos logaritmos neperianos a ambos lados

$$e^{0.08t} = \frac{4}{5} \cdot e^{0.1t}$$

$$\ln(e^{0.08t}) = \ln(\frac{4}{5} \cdot e^{0.1t})$$

$$0.08t \ln(e) = \ln(\frac{4}{5}) + 0.1t \ln(e)$$

$$0.08t = \ln(\frac{4}{5}) + 0.1t$$

$$t = -\frac{\ln(\frac{4}{5})}{0.02} \approx 11.57 \text{ años}$$

Ejemplo 2.- Si se invirtió 1000UM a una tasa compuesta anual de *r*% y se duplicó al cabo de 6 años ¿Cuál fue la tasa de interés?
Solución: En 6 años el capital final a la tasa del *r*% compuesto anualmente es 2000. Al usar la fórmula $A = P(1+\frac{r}{n})^{nx}$, con *n*=1, *x*=6 y *P*=1000 tenemos:

$$2000 = 1000(1+r)^6$$

$$2 = (1+r)^6$$

Se toma raíz sexta a ambos lados de la ecuación

$$\sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{(1+r)^6}$$

$$r = \sqrt[6]{2} - 1 \approx 0.12$$

Ejemplo 3.- La alcaldía está promoviendo el desarrollo de la zona con ciertos incentivos y con ello se espera que en los próximos años crezca un 8% anual. ¿Cuánto tiempo tardará la población en triplicarse, si sigue esta política?
Solución:

En este problema se aplica la fórmula $P(t) = P_0(1+r)^t$.

En este caso $r = 0.08$. Aquí P_0 no lo dan, pero esta información no hace falta para resolver el problema. Simplemente queremos conoce *t* tal que $P(t) = 3P_0$

La ecuación a plantear entonces es: $3P_0 = P_0(1.08)^t$, la cual es equivalente a

$$3 = (1.08)^t$$

Es una ecuación exponencial, tomamos logaritmos naturales a ambos lados (se pido tomar también el decimal)

$$\ln 3 = \ln(1.08)^t$$

$$\ln 3 = t\ln(1.08)$$

$$t = \frac{\ln 3}{\ln(1.08)} \approx 14.2$$

Tardará 14 años aproximadamente en duplicarse.
Observación.- Esta cantidad de años es independiente de la población inicial.

APLICACIONES A LAS CIENCIAS NATURALES

Ejemplo 1 .- La presión atmosférica, en milibares, para *h* kilómetros sobre el nivel del mar está dada aproximadamente por

$$P(h) = 1013e^{-0.13h}$$

¿A qué altura la presión atmosférica será la mitad de la presión sobre el nivel del mar?

Solución: En este caso nos preguntan *h* tal que $P(h) = \frac{P(0)}{2}$. La presión sobre el nivel del mar es $P_0 = 1013$. Así que la ecuación a resolver es:

$$\frac{1013}{2} = 1013e^{-0.13h}$$

Tomando logaritmos, tenemos

$$-\ln(2) = -0.13h$$

$$h = 5.28 \text{ km.}$$

La altura cuya presión corresponde a la mitad sobre el nivel del mar es 5280metros.

ESCALA DE RICHTER

Existen diversas escalas para medir la intensidad de los terremotos. La medida apropiada debería ser la energía liberada. Sin embargo esta medida se escapa de la noción intuitiva del desastre. El terremoto de mayor intensidad ha liberado una energía aproximada $2x10^{17}$ joules, esto es exorbitantemente grande comparado con un ligero movimiento. Se ha convenido en estandarizar la energía por $E_0 = 10^{4.4}$ joules, que corresponde a la energía liberada por un leve movimiento. Más específicamente la magnitud M en la escala de Richter se define como:

$$M = \frac{2}{3}\log(\frac{E}{E_0})$$

Ejemplo 1.- ¿Cuál fue la magnitud en la escala de Richter del terremoto más intenso?

Solución: $M = \frac{2}{3}\log(\frac{2x10^{17}}{10^{4.4}})$

$= \frac{2}{3}\log(2x10^{12.6}) = \frac{2}{3}(\log 2 + \log 10^{12.6}) = \frac{2}{3}(0.301 + 12.6)$

=8.6

Ejemplo 2.- Si la energía liberada por un terremoto es 1000 veces la de otro terremoto ¿Cómo se pueden comparar las lecturas en la escala de Richter?

Solución: $E_1 = 1000E_2$. Calculemos M_1 como función de M_2.

$$M_1 = \frac{2}{3}\log(\frac{1000E_2}{E_0})$$

$$M_1 = \frac{2}{3}(\log(\frac{E_2}{E_0}) + \log(10^3))$$

$$M_1 = \frac{2}{3}\log(\frac{E_2}{E_0}) + \frac{2}{3}\cdot 3\log(10)$$
$$M_1 = M_2 + 2.$$

Así el terremoto de mayor intensidad mide 2 puntos más en la escala de Richter.

ESTIMACION DE LA EDAD

El carbono 14 se mantiene constante en los tejidos de los seres vivos. Una vez que el organismo muere empieza a disminuir su presencia de acuerdo a la siguiente ley:

$$C(t) = C_0 e^{-kt},$$

donde k=0.000121. y C_0 es la cantidad inicial del carbono 14 al momento de morir.

Observación: Gracias a que la cantidad de carbono 12 permanece en el organismo aún después de miles de años muerto y que las plantas fijan el carbono 14 y 12 en la misma proporción que está en el aire se puede predecir la cantidad inicial de carbono 14, asumiendo que la composición del aire ha permanecido en el tiempo.

Ejemplo 1 .- Si se ha encontrado un fósil que ha perdido la mitad de su Carbono 14. Calcule la edad del fósil.

Solución: Recuerde que C_0 es la cantidad de carbono 14 en el momento de morir. Se debe conseguir t tal que $C(t) = \frac{C_0}{2}$, que es la mitad del carbono 14 inicial. Se sustituye la fórmula del decaimiento del carbono 14:

$$\frac{C_0}{2} = C_0 e^{-kt}$$

Simplificando

$$\frac{1}{2} = e^{-kt}$$

Tomando logaritmos y despejando tenemos

$$-\ln 2 = -kt$$
$$t = 5728.48 \text{ años.}$$

Este tiempo es lo que se conoce como la vida media del C14.

EJERCICIOS

1) Expresar $\log(\frac{x^2-1}{x^2})$ en términos de $\log(x), \log(x-1)$ y $\log(x+1)$

2) Expresar $\ln(2x(x-1)\sqrt{(x+3)})$ en términos de $\ln(x), \ln(x-1)$ y $\ln(x+3)$

3) Expresar $\log(\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x(x+2)}})$ en términos de $\log(x), \log(x-1)$ y $\log(x+2)$

4) Expresar $\ln(x\sqrt{\frac{(x+1)}{(x-2)}})$ en términos de $\ln(x), \ln(x+1)$ y $\ln(x-2)$.

5) Resolver las siguientes ecuaciones

5.1) $\log(x+3)+\log(x)-1=0$; **5.2)** $\log(x)+\log(x+3)=2\log(x+2)$;

5.3) $\log(x\ \ )=\log(x+4)-\log(x+1)$; **5.4)** $\log(\sqrt{x})=\log(x-2)$;

5.5) $2=\log(20x+10)-\log(x+2)$; **5.6)** $5^{x^2}=25^{x+4}$;

5.7) $7^{2x}=5^{3x-1}$; **5.8)** $2\log(x-2)=4$;

5.9) $e^{\ln(1-x)}=2x$; **5.10)** $\ln x=2+\ln(1-x)$;

5.11) $\ln(x^2-1)=0$; ***5.12)** $(\ln x)^2-\ln x=0$

(***Sugerencia:** Use el método de factorización para resolver ecuaciones**)**

6) Expresar los siguientes logaritmos en base 10:

6.1) $\log_3(100)$; **6.2)** $\ln(\sqrt{5})$.

Expresar los siguientes logaritmos en base e:

6.3) $\log(12)$; **6.4)** $\log_2(\sqrt{e})$

7) Demuestre que $y=\log_2(x-1)$ es la función inversa de $y=2^x+1$. Dibuje ambas en el mismo sistema de coordenadas.

PROBLEMAS DE CRECIMIENTO POBLACIONAL

1) La población de un país *P(t)* en millones de habitantes, *t* años después de 1990, esta modelada por $P(t)=P_0e^{0.02t}$ ¿Cuándo se duplicará la población? (Resp. $t=\dfrac{\ln(2)}{0.02}\approx 34.6$. En el año 2024)

La población de un país *P(t)* en millones de habitantes, *t* años después de 1999, está modelada por $P(t)=22e^{0.04t}$ ¿Cuándo la población llegará a los 35 millones de habitantes? Suponga que el modelo permanece en el tiempo (Resp. En el 2010)

2) En una zona del país existen dos poblaciones, A y B, con 200.000 y 250.000 habitantes respectivamente. La población A crece a un ritmo de 3.5% anual y la B a 3% anual. ¿En cuánto tiempo la población A llegaría a ser igual a la población B, si se mantienen constantes los ritmos de crecimiento? Resp. 46 años

3) La densidad de la población a x km del centro de la ciudad está dada por $D(x)=Ae^{-kx}$. Si la densidad de la población es 10.000personas/km^2 y la densidad a 5km. es de 7000 personas, halle completamente la función. b) ¿Cuál será la densidad a 8km de distancia del centro?

4) En el modelos de crecimiento poblacional dado por

$$P_n=P_0(1+r)^n$$

donde P_n es el tamaño de la población dentro de *n,* P_0 la .población inicial y *r* la tasa de crecimiento anual, despeje *r* en función de P_n, P_0 y *n*

PROBLEMAS ECONOMIA

1) Hace un año se depositó 1500 UM a un interés constante compuesto mensualmente, si al cabo de un año el monto total era de 1655UM. ¿Cuál es la tasa de interés? (9.87%)

2) Se está promocionando una inversión al 8% compuesto anualmente por tiempo indefinido. ¿Cuánto dinero debería invertirse para que al cabo de 5 años el monto total de la inversión sea de 3000UM (2041,75UM)

3) Calcule la tasa de interés compuesto capitalizable trimestralmente equivalente a una tasa anual del 7%.

4) Calcule la tasa efectiva de una inversión del 6% compuesto semestralmente.

5) Un capital de 150.000 UM fue depositada hace 15 años a un interés compuesto anualmente de rx100%. Si en los actuales momentos tiene 355.000. ¿A qué interés fue depositada el capital, si suponemos que la tasa se mantuvo constante todos estos años? Resp 5.91%

6) Alicia quiere hacer un viaje dentro de 5 años que le costará 6.000 UM. ¿Cuánto debería invertir a un interés compuesto anual del 7% para tener la cantidad suficiente para el momento del viaje? Resp. 4083,5UM

7) La ecuación A=P(1.08)^t da el valor A, al final de t años de una inversión de P UM compuesta anualmente a una tasa de interés de 8%. ¿Cuántos años tomará para que una inversión se duplique? Dé su respuesta al año más cercano. Resp. 9 años

8) La función de demanda de un producto está dada por $p = \dfrac{50}{\ln(q+1)}$. ¿Cuántos artículos serán demandados a un precio de 10UM.? (Resp $e^5 - 1 \approx 147$)

9) La función de demanda de un artículo está dada por $p = 150e^{-0.002q}$. ¿Cuántos artículos serán demandados a un precio de 10UM.? (Resp. $\dfrac{\ln 15}{0.002} \approx 1354$ artículos)

10) El poder adquisitivo de una cantidad inicial P_0 decae según el modelo $P = P_0 e^{-006t}$, donde t está medidos en años. ¿Cuánto tiempo tardará en depreciarse ese capital en la mitad? (Resp. $\dfrac{\ln 2}{0.06} \approx 11.55$ años)

PROBLEMAS DE CIENCIAS NATURALES

1) El crecimiento de los árboles en ocasiones es modelado usando el modelo logístico. Suponga que cierta variedad sigue el siguiente modelo, $h(t) = \dfrac{50}{1 + 210e^{-0.3t}}$ donde $h(t)$ es la altura en metros después de t años de sembrado. ¿Qué altura tendrá a los 10 años de sembrado? ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que su altura sea de 25 metros) (9.6; 17.8 años)

2) El yodo radioactivo tiene una ley de decrecimiento exponencial con un tiempo de vida de 20.9 h. Si a una persona se inyecta yodo 133 y tiene una tiroides sana ella absorbe todo el iodo **a)** Después de 24 horas de haberse inyectado yodo a una persona sana ¿Qué porcentaje de yodo 133 debería encontrarse en la tiroides? **b)** Si al paciente se le detectó el 43% de yodo 133 inyectado. ¿Qué porcentaje queda en el cuerpo? (45%, 2%)

3) El terremoto de San Francisco liberó una energía aproximada de 5.96x10^{16}joules. ¿Cuál fue su magnitud en la escala de Richter? (8.25)

4) El mayor terremoto registrado hasta ahora fue de 8.6 en la escala de Richter. Si un terremoto es de 7.5 en la escala de Richter. ¿Cuántas veces más intenso es este terremoto con respecto a uno de 7.5? (Sugerencia: Calcule la energía liberada por ambos terremotos y haga el cociente entre ellas.

5) La presión atmosférica, en milibares, para *h* kilómetros sobre el nivel del mar está dada aproximadamente por $P(h)=1013e^{-0.13h}$ .Si la presión del aire fuera de un avión que está volando es de 700mb ¿A qué altura está volando? (2.84km)

6) El porcentaje de árboles en una plantación frutal que se ha infectado por una enfermedad está dada por

$$P(t)=\frac{100}{1+20e^{-0.05t}}$$

donde *t* es el número de días, medido a partir del momento en que se descubrió el contagio. ¿Cuántos días tardará en infectarse el 80% de la plantación? ($t=\frac{\ln(80)}{0.05}\approx 87.6$ días).

Respuestas:

1) log(x-1)+log(x+1)-2log$x$; **2)** $\ln 2+\ln x+\ln(x-1)+1/3\ln(x+3)$;

3) $\frac{1}{2}[3\log(x-1)-\log x-\log(x+2)]$; **4)** $\ln x+1/2(\ln(x-1)-\ln(x-2))$

5.1)2, (-5 no es solución);

5.2) -4 no es solución; **5.3)** 2 (-2 no es solución); **5.4)**4; **5.5)** -19/8 no es solución;

5.6) -2;4; **5.7)** $\frac{-\ln 5}{\ln\frac{7^2}{5^3}}\approx 1.71$; **5.8)** 4(0 no es solución) **5.9**) 1/3 ; **5.10)** $\frac{e^2}{1+e^2}$;

5.11) $\pm\sqrt{2}$; 11.- 25ln(35/22) ≈ 11.6; **5.12)** 1,e

6.1) $\frac{2}{\log 3}$; **6.2)** $\frac{\log\sqrt{5}}{\log e}$; **6.3)** $\frac{\ln 12}{\ln 10}$; **6.4)** $\frac{1}{\ln 4}$