# LA DERIVADA

Nuestro mundo es cambiante. Las variaciones de una cantidad inciden en que otras cantidades cambien. Si se decide aumentar el precio de un artículo la utilidad de la empresa ya no será la misma, probablemente la demanda disminuya y la cantidad de materia solicitada cambiará. Si se aumenta la temperatura de un gas contenido en un recipiente hermético la presión del gas sobre las paredes del recipiente aumenta. Si aumentamos nuestro consumo diario de azucares probablemente aumente la insulina en sangre.

El cálculo diferencial trata del estudio del cambio de una cantidad cuando otra cantidad que está relacionada con la primera varía.

## CONCEPTO

### TASA DE CAMBIO PROMEDIO

En una relación lineal entre dos variables: $y = mx + b$, sabemos que la pendiente $m$ es la razón de cambio entre las variables $y$ y $x$. La razón de cambio es constante si la relación entre las variables es lineal. El problema empieza a complicarse cuando pensamos en relaciones entre las variables que no son lineales.

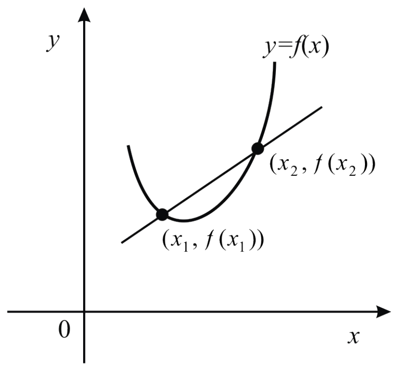
Normalmente se piensa que una de las variables es función de la otra. Esto es $y = f(x)$. Normalmente habrá puntos de la gráfica de la función donde suben más que en otros puntos y otros incluso bajan.

Una manera de medir la relación entre los cambios de dos variables relacionadas es a través de la tasa o razón de cambio promedio.

**Definición.-** Sea $f$ definida en un intervalo conteniendo los puntos $x_1$ y $x_2$. Se define la tasa de cambio promedio de la función $y = f(x)$ desde $x = x_1$ a $x = x_2$ como

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Observe que esta tasa de cambio promedio no es otra cosa que la pendiente de la recta que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ llamada la recta secante a la gráfica de $f$ que pasa por los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$.



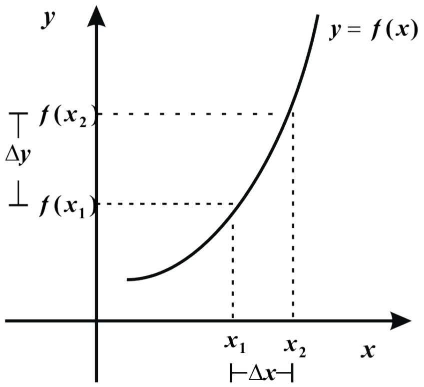

**Si denotamos** $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ como el cambio en $y$ y $\Delta x = x_2 - x_1$ el cambio en $x$, entonces la tasa de cambio puede ser escrita como $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

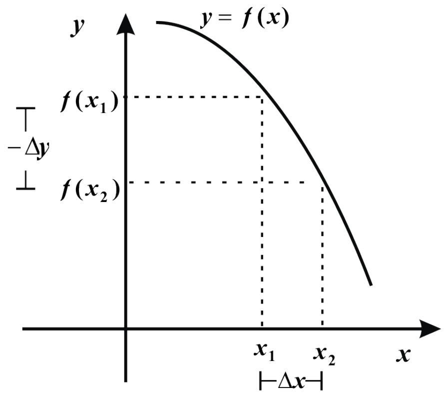
**Observaciones:**

**1)** Cuando el cambio en $y$, $\Delta y$, es positivo se habla del incremento de $y$

**2)** La tasa de cambio promedio es un cociente de cambios ó un cociente de diferencia.

**3)** **La tasa** de cambio promedio es conocida también como **la razón** de cambio promedio. La tasa de cambio puede ser positiva y esto corresponde cuando el cambio en $y$ es positivo al pasar de un punto $x_1$ a un punto $x_2\,(x_1 < x_2)$ o puede ser negativo y esto corresponde al caso en que $y$ disminuye o decrece.




**Ejemplo 1.-** El tamaño de una población está modelada por

$$P(t) = 5000 + 500t - 50t^2$$

donde $t$ es el número de años después del 2001. Calcule la razón de cambio promedio de **a)** $t = 2$ a $t = 4$. **b)** $t = 2$ a $t = 3$ y **c)** $t = 2$ a $t = 2\frac{1}{2}$.

**Solución:**

**a)** La razón de cambio promedio de $t = 2$ a $t = 4$ viene dada por

$$\frac{P(4) - P(2)}{4 - 2} = \frac{5000 + 500\cdot 4 - 50\cdot 16 - (5000 + 500\cdot 2 - 50\cdot 4)}{4 - 2} = \frac{400}{2} = 200\,\text{hab/año}$$

**b)** La razón de cambio promedio de $t = 2$ a $t = 3$ viene dada por

$$\frac{P(3) - P(2)}{3 - 2} = \frac{5000 + 500\cdot 3 - 50\cdot 9 - (5000 + 500\cdot 2 - 50\cdot 4)}{3 - 2} = 250\,\text{hab/año}$$

**c)** La razón de cambio promedio de $t = 2$ a $t = 2\frac{1}{2}$ viene dada por

$$\frac{P(2\frac{1}{2}) - P(2)}{2\frac{1}{2} - 2} = \frac{5000 + 500\cdot 2{,}5 - 50\cdot (2.5)^2 - (5000 + 500\cdot 2 - 50\cdot 4)}{2{,}5 - 2} = \frac{137.5}{0.5} = 275$$

Observe que entre el lapso de tiempo de $t = 2$ a $t = 4$ el crecimiento promedio de la población fue de 200 hab/año. Este es un crecimiento promedio porque efectivamente en la primera parte de este periodo el crecimiento promedio de la población fue mayor: de 250 habitantes por año, con lo cual deducimos que en la segunda parte el crecimiento debió de ser menor a 200.

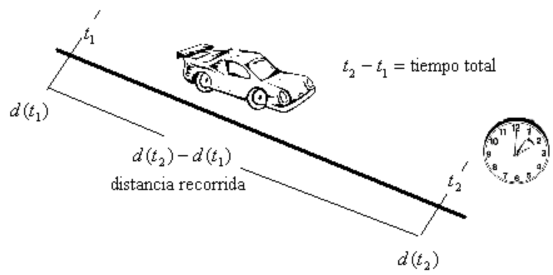
En el primer semestre del año $t = 2$ el crecimiento era de 275 habitantes por año. Así que todo parece indicar que en el lapso de $t = 2$ a $t = 4$, la población aumentaba más rápidamente al comienzo que al final. En este ejemplo estamos hablando en algún sentido de la velocidad. El concepto físico de velocidad está estrechamente ligado con el concepto de tasa de cambio promedio y de derivada.

# VELOCIDAD PROMEDIO Y VELOCIDAD INSTANTANEA

Desarrollaremos estos dos conceptos para entender mejor los conceptos de razón de cambio promedio y razón de cambio instantáneo.

Suponga que un objeto parte de un punto siguiendo un movimiento rectilíneo. Sea $y = d(t)$ la función desplazamiento hasta el momento *t*, esta función es conocida también como la función posición. El incremento: $d(t_2) - d(t_1)$ es la distancia recorrida por el objeto desde el tiempo $t_1$ hasta el tiempo $t_2$ y la razón de cambio promedio desde $t_1$ hasta el tiempo $t_2$ está dada por

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo total}}$$




Esta es la velocidad promedio en el lapso de tiempo desde $t_1$ hasta el tiempo $t_2$.

**Ejemplo 2.-** Suponga que el desplazamiento de un móvil hasta el tiempo *t* está dado por la ecuación $d(t) = 64 + 4t^2$ metros, donde *t* está medido en segundos. Determinar la velocidad promedio durante los tiempos de **a)** $t = 2$ a $t = 4$. **b)** $t = 2$ a $t = 3$ y **c)** $t = 2$ a $t = 2\frac{1}{2}$.

**Solución**:

**a)** La velocidad promedio durante el tiempo de $t = 2$ a $t = 4$ viene dada por

$$\frac{d(4) - d(2)}{4 - 2} = \frac{64 + 4 \cdot 16 - (64 + 4 \cdot 4)}{4 - 2} = 24 \text{ m/seg}$$

**b)** La velocidad promedio durante el tiempo de $t = 2$ a $t = 3$ viene dada por

$$\frac{d(3) - d(2)}{3 - 2} = \frac{64 + 4 \cdot 9 - (64 + 4 \cdot 4)}{3 - 2} = 20 \text{ m./seg.}$$

**c)** La velocidad promedio durante el tiempo de $t = 2$ a $t = 2\frac{1}{2}$ viene dada por

$$\frac{d(2\frac{1}{2}) - d(2)}{2\frac{1}{2} - 2} = \frac{64 + 4 \cdot (2.5)^2 - (64 + 4 \cdot 4)}{2{,}5 - 2} = 18 \text{ m./seg.}$$

De nuevo observamos que en el lapso de tiempo de 2 a 4 la velocidad promedio es de 24m./seg. Sin embargo en la primera parte de este tiempo iba en promedio más despacio: 20m./seg. Esto nos indica que la velocidad no se mantiene constante como efectivamente ocurre cuando vamos en un automóvil. Se quisiera tener una mejor idea de lo que está ocurriendo cerca de 2, por eso nos aproximamos más a 2 tomando la velocidad promedio de $t = 2$ a $t = 2\frac{1}{2}$. Deberíamos cada vez aproximarnos más a 2 para tener una mejor idea de lo que está ocurriendo con la velocidad en ese instante.

En términos generales estamos interesados en "la velocidad" en el instante *c,* la que marca el velocímetro en ese instante. Denotaremos como *c+h* un tiempo próximo a *c*, entonces *h* será un valor próximo a 0. La velocidad promedio en el lapso de tiempo entre *c* y *c+h* será entonces

$$\frac{d(c + h) - d(c)}{(c + h) - (c)} = \frac{d(c + h) - d(c)}{h}$$

Esta velocidad está cercana a la velocidad instantánea (o simplemente velocidad) en el tiempo *c* definida por:

$$v_t = \lim_{h \to 0} \frac{d(c + h) - d(c)}{h}$$

Este límite si existe es llamado también la derivada de $d(x)$ en el instante *c*.

**Ejemplo 3.-** Suponga que el desplazamiento de un móvil hasta el tiempo *t* está dado por la ecuación $d(t) = 64 + 4t^2$ metros, donde *t* está medido en minutos. Determinar la velocidad en el tiempo *t*=2.

**Solución:**

$$v_t = \lim_{h\to 0}\frac{d(2+h)-d(2)}{h}$$ Evaluamos la función *d* en 2+*h* y en 2.

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(64+4(2+h)^2)-(64+4\cdot 2^2)}{h}$$ Se desarrolla el producto notable

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(64+4(4+4h+h^2)-(64+16)}{h}$$ Se distribuye el 4 y el signo menos. Luego se simplifica

$$= \lim_{h\to 0}\frac{16h+4h^2}{h}$$ Se factoriza, sacando *h* de factor común

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(16+4h)}{h} = 16 \text{ metros/min.}$$ Se simplificó y luego se evalúo en *h*=0

De nuevo reiteramos que la velocidad instantánea en el momento *c* es el límite de la velocidad promedio en un intervalo que va a *c*

# CONCEPTO DE DERIVADA

**Derivada de una función.-** La derivada de una función $f(x)$ con respecto a *x* en el punto *c* se define como:

$$f'(c) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

siempre y cuando el límite exista.

**Observaciones:**

**1)** Como $c+h$ representa un punto cercano a *c*, entonces podemos escribir alternativa la derivada como $f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$

Esta última escritura de la derivada nos permite interpretarla como la razón de cambio instantánea en el punto *c*, obtenida a través del límite de la razón de cambio promedio para intervalos que llegan a *c*.

**2)** A efectos de cálculo es preferible trabajar con la forma $f'(c) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$

Si la función tiene derivada en cada punto *x* de un intervalo contenido en el dominio entonces la función se dice diferenciable o derivable en el intervalo y $f'(x)$ denota la función derivada.

Algunos libros prefieren usar la notación $\Delta x$ en vez de *h*, quedando escrita la función derivada como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

**Observación.-** Siempre que planteamos este límite para funciones continuas nos da una indeterminación $0/0$, así que se harán manipulaciones algebraicas según las recomendaciones para cada caso.

**Ejemplo 4.-** Calcule la derivada de $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$

**Solución:** Se plantea la definición de derivada para *x* variable

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Se evalúa la función en $f(x+h)$ y se sustituye $f(x)$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2}{(x+h)+1}-\dfrac{2}{x+1}}{h}$$

Se realiza la suma algebraíca de fracciones

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2(x+1)-2(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)}}{h}$$

Se aplica la propiedad distributiva y se simplifica

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{-2h}{(x+h+1)(x+1)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}-\frac{2h}{h(x+h+1)(x+1)}=-\frac{2}{(x+1)^2}$$

Observe que cuando se simplifica el factor *h* del numerador con el denominador la indeterminación desaparece.

**Ejercicio de desarrollo:** Encuentre la derivada de $f(x)=\dfrac{x}{1+2x}$ en $x=1$

# LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

El cociente $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ es la razón de cambio promedio en el intervalo entre *c* y *c+h*.

El límite: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ es entonces la razón de cambio instantáneo o simplemente la razón de cambio de *f* con respecto a *x* cuando *x=c*. Así pues la derivada se interpreta también como la razón de cambio instantánea.

En ocasiones nos referimos a la tasa de cambio como la razón de cambio.

**Ejemplo 5.-** El tamaño de una población está modelada por

$$P(t)=5000+500t-50t^2$$

donde $t$ es el número de años después del 2001. Calcule la tasa de crecimiento instantáneo en *t*=2.

**Solución:**

$$tasa_{t=2}=P'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{P(2+h)-P(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{5000+500(2+h)-50(2+h)^2}^{P(2+h)}-\overbrace{(5000+500\cdot 2-50\cdot 4)}^{P(2)}}{h}$$ Desarrollamos y simplificamos

$$= \lim_{h\to 0}\frac{500h-50(4+4h+h^2)+50\cdot 4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{300h-50h^2}{h} = = \lim_{h\to \infty}\frac{h(300-50h)}{h}$$ Se factoriza sacando *h* de factor común.

$$= \lim_{h\to 0}(300-50h) = 300 \text{ habitantes/año}$$

Este es un ejemplo de interés para un geógrafo. En diversas partes de las ciencias sociales, naturales y económicas se emplea el concepto de derivada a través de distintas terminologías: tasas de cambio o rapidez. Un meteorólogo puede estar interesado en la rapidez de cambio de la presión atmosférica con respecto a la altura. Un geólogo le puede interesar la rapidez con que cambia la temperatura en cierta roca fundida. En economía se habla de ingreso, costo y utilidad marginal para referirse a la tasa de cambio de estas magnitudes.

## NOTACIONES

La derivada de $y = f(x)$ con respecto a *x* se la denota también por $\frac{d}{dx}(y)$, $\frac{df}{dx}$, $\frac{d}{dx}(f)$, $y'$.

$\frac{dy}{dx}$ es un solo símbolo que ayuda a recordar que es el límite de cociente de diferencias o una razón de cambio de *y* con respecto a *x*.

$\frac{df}{dx}$ es conocida como la notación de Leizbniz.

Para indicar la derivada en un punto particular, por ejemplo *c*, se usan las siguientes notaciones:

$$f'(c)\ ;\ \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=c};\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c}$$

Si por ejemplo $f(x) = x^2 - 2x$, es decir conocemos una fórmula para *f* entonces las siguientes notaciones se usan:

$$\frac{d}{dx}(x^2-2x);\ (x^2-2x)'$$

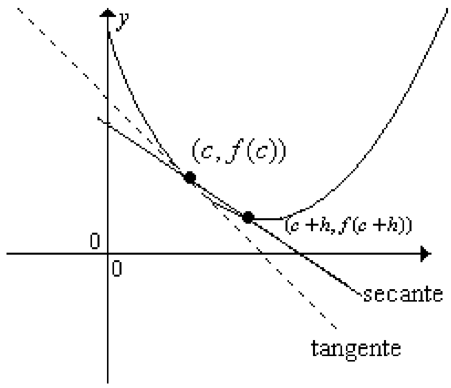
**Ejercicio de desarrollo** Para la función $y = x - x^2$ Calcule:
**a)** La razón de cambio promedio de $x$=2 a $x$=2.05; **b)** La razón de cambio instantánea en $x$=2

## OTRA INTERPRETACION DE LA DERIVADA:
## DE LA RECTA SECANTE A LA RECTA TANGENTE.

Recordemos que la tasa de cambio promedio de $t$=$c$ a $t$=$c$+$h$ es la pendiente de la recta secante a la curva en los puntos $(c, f(c))$ y $(c+h, f(c+h))$. Si $c$+$h$ está muy cerca de *c,* (esto ocurre cuando *h* está muy cerca de 0), la recta secante pasa casi rasante a la gráfica de la función en el punto $(c, f(c))$. Si $h \to 0$ intuitivamente la recta limite es la recta tangente a la curva en el punto $(c, f(c))$ y la pendiente de esta recta es

$$m_{tag} = \lim_{h\to 0} m_{\sec}(c, c+h)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c)$$




En conclusión:

*La derivada en un punto x=c es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto* $(c, f(c))$.

**Ejemplo 6.- a)** Calcule la derivada de la función $f(x) = 2\sqrt{x+1}+3$.
**b)** Use este resultado para calcular la pendiente de la recta tangente a la curva cuando $x$=1
**Solución: a)** Calculamos primero la función derivada usando la definición:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Al sustituir una expresión por otra considere encerrarla entre paréntesis. Observe como se colocará entre paréntesis las expresiones $x+h$ (no hace falta) y $2\sqrt{x+1}+3$, pues ellas sustituyen a $x$ y $f(x)$ respectivamente.

Cuando hay indeterminación en un límite de esta naturaleza se tiene que considerar usar el truco de la conjugada, pero tiene que existir dos términos. Primero simplificamos el numerador.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sqrt{(x+h)+1}+3-(2\sqrt{x+1}+3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sqrt{(x+h)+1}+3-2\sqrt{x+1}-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sqrt{(x+h)+1}-2\sqrt{x+1}}{h}\cdot 1.$$

Ahora podemos usar la conjugada

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sqrt{(x+h)+1}-2\sqrt{x+1}}{h}\cdot \frac{2\sqrt{(x+h)+1}+2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{(x+h)+1}+2\sqrt{x+1}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2\sqrt{(x+h)+1})^2-(2\sqrt{x+1})^2}{h(2\sqrt{(x+h)+1}+2\sqrt{x+1})} = \lim_{h\to 0} \frac{4(x+h+1)-4(x+1)}{2h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4h}{2h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2}{(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})}$$

Se evalúa el límite

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

**b)** La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $x$=1 es: $f'(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Ejercicio de desarrollo.-** Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{x}{2x+1}$ en $x$=1.

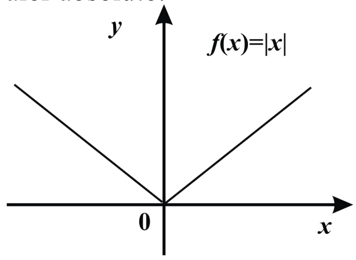
# FUNCIONES NO DERIVABLES

Existen funciones que no son derivables en algún punto $x_0$. En esta sección pretendemos mostrar algunas situaciones en que la derivada puede no existir.

**1) Si la gráfica de la función tiene un punto anguloso entonces la función no es derivable en ese punto.**

La función $f(x)=|x|$ no es derivable en 0. Observe que la pendiente de la recta tangente por la derecha es ella misma y vale 1 y por la izquierda la pendiente de la recta tangente vale -1. Para establecerlo de una manera más formal nos valemos de la definición analítica del valor absoluto.

$$|x|=\begin{cases} x & si\ x\geq 0 \\ -x & si\ x<0 \end{cases}$$



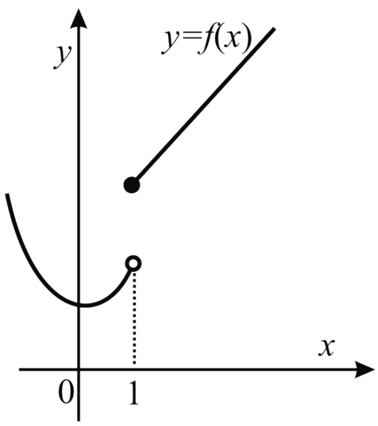

Calculamos entonces los límites laterales:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

Como $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\neq\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ entonces $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ no existe.

Observe que esta función es continua en 0. Así que continuidad no implica que la función sea derivable.




**2)** Sin embargo, si **una función no es continua en un punto *c* entonces no es derivable en ese punto**.

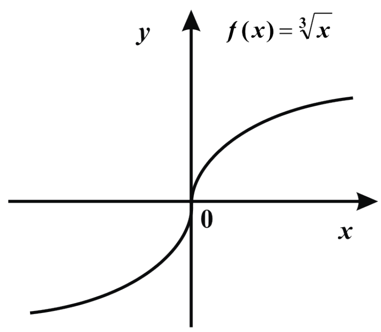
Por ejemplo para la función $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & si\ x<1 \\ x+2 & si\ x\geq 1 \end{cases}$ tenemos que

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=1$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^2+1-(1+2)}{h}=+\infty\ .$$

Como los límites laterales son distintos entonces el límite no existe y por tanto no existe la derivada

Observe que no tiene recta tangente en ese punto.




**3) La recta tangente en el punto es vertical**

La función $f(x)=\sqrt[3]{x}$ no tiene derivada en 0.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{1/3}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{2/3}}=\infty\ .$$

Como el límite no existe entonces no es derivable. Este caso lo podemos expresar diciendo que la recta tangente a la curva en 0 es vertical.

## EJERCICIOS

**1)** Para la función $y = 2t^2 - 1$ calcule

**a)** La razón de cambio promedio de $t$=0 a $t$=2
**b)** Para estos valores de $t$ ¿cuál es el incremento de $y$?
**c)** La razón de cambio instantánea en $t$=1

**2)** Para la función $y = \sqrt{1+2t}$ calcule

**a)** La razón de cambio promedio de $t$=1 a $t$=1.1.
**b)** Para estos valores de $t$ ¿cuál es el incremento de $y$?
**c)** La razón de cambio instantánea en $t$=1

**3)** El tamaño de una población está modelada por

$$P(t) = 70000 + 80t^2$$

donde $t$ es el número de años después del 2001. **a)** ¿Cuál es el incremento de la población desde el tiempo $t$=3 a $t$=3.1? **b)** Calcule la tasa de cambio promedio desde $t$=3 a $t$=3.1
**c)** Calcule la tasa de crecimiento instantáneo en $t$=3.

**4)** Emplee la definición de la derivada para encontrar

**4.1)** $f'(2)$ si $f(x) = 4 - x$; **4.2)** $\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=0}$ si $F(x) = x^2 - 2x$; **4.3)** $g'(3)$ si $g(t) = t^2 - t$; **4.4)** $\frac{dy}{dx}$ si $y = \frac{2}{x^2} - 1$; **4.5)** $\frac{d}{dx}(2 - \frac{x}{4})$; **4.6)** $\frac{d}{dx}(x^2 - 2x - 1)$
**4.7)** $\frac{dC}{dq}$ si $C(q) = q^2 + 3q - 3$;**4.8)** $f'(x)$ si $f(x) = \sqrt{x+3} - 2$; **4.9)** $g'(x)$ si $g(x) = \frac{2}{4-x}$;
**4.10)** $f'(x)$ si $f(x) = e$; **4.11)** $g'(x)$ si $g(x) = 2\sqrt{1-x}$; **4.12)** $\frac{d}{dx}(1 - \frac{2}{4-x})$

**Respuestas: 1) a)** 4 ; **b)** 8 ;**c)** 4; **2) a)** 0.568; **b)** 0.0568; **c)** 0.5773; **3) a)**48.80; **b)** 488; **c)**480; **4.1)** -1; **4.2)** -2**; 4.3)** 5; **4.4)** $-\frac{4}{x^3}$ **; 4.5)** $\frac{d}{dx}(2 - \frac{x}{4}) = -\frac{1}{4}$**; 4.6)** $2x - 2$ **; 4.7)** $\frac{dC}{dq} = 2q + 3$**; 4.8)** $\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$ **4.9)** $= \frac{2}{(4-x)^2}$ **; 4.10)** 0; **4.11)** $-\frac{1}{\sqrt{1-x}}$; **4.12)** $-\frac{2}{(4-x)^2}$

**5)** Encuentre la pendiente de la curva $y = 2 - 3x^2$ en el punto (1,-1). Use la definición de derivada.
**Respuesta:** $m$=-6
**6)** Encuentre la pendiente de la curva $f(x) = \sqrt{3-x}$ en el punto (2,1). Use la definición de derivada.
**Respuesta:** $m$=-1/2
**7)** Calcule la derivada de la función $f(x) = \frac{1}{2x+1}$. Use este resultado para calcular la pendiente de la recta tangente a la curva cuando $x$=1.**Respuesta:** $f'(x) = -\frac{2}{(2x+1)^2}$ ; $m$=-2/9
**8)** Calcule las derivadas de las funciones $f(x) = x^2$ y $f(x) = x^2 + 3$. Grafique ambas funciones y de una argumentación geométrica porque ambas funciones tienen la misma derivada.
**9)** Un móvil se desplaza a lo largo del eje $x$, la función $f$ dada por $f(t) = 16 - t^2$ metros da la localización del objeto en el instante $t$, donde $t$ está medido en minutos. Determinar la velocidad en el tiempo $t$=3. Interprete el resultado. **Respuesta:** -6 metros/min.

# REGLAS DE DERIVACION

El cálculo de las derivadas por definición, como se ha hecho hasta ahora, es un proceso tedioso y repetitivo. En esta sección se darán reglas básicas que permitirán encontrar las derivadas de una manera más rápida.

**1) REGLA DE LA CONSTANTE:** Si $f$ es una función constante, esto es $f(x)=c$, entonces

$$f'(x)=0$$

(*La derivada de una constante es 0*)

Este resultado es claro desde un punto de vista geométrico, la gráfica de la función constante es una recta horizontal, la pendiente es 0.

**Ejemplo 1.-**

**a)** $\frac{d}{dx}(5)=0$

**b)** Si $f(x)=\ln 3$, entonces $f'(x)=0$

**c)** Sea $g(x)=\sqrt{2}$ para calcular $g'(4)$ primero observamos que $g'(x)=0$ y al evaluar $g'$ en 4 obtenemos que $g'(4)=0$.

Podemos verificar, usando la definición de derivada, que

- Si $f(x)=x^2$ entonces $f'(x)=2x$.

- Si $f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}$ entonces $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}x^{-1/2}$.

-Si $f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$ entonces $f'(x)=-\frac{1}{x^2}=-1\cdot x^{-2}$.

Como el lector observará existe una tendencia la cuál está descrita en la siguiente regla clave para la derivación

**2) REGLA DE LA POTENCIA:** Si $f(x)=x^r$, donde $r$ es un número real distinto de 0, entonces

$$f'(x)=rx^{r-1}$$

Veamos el siguiente ejemplo que ilustra las aplicaciones de la regla de la potencia en las diversas notaciones.

**Ejemplo 2.-**

**a)** $\frac{d}{dx}(x^3)=3x^2$

**b)** Si $f(x)=x^{10}$, entonces $f'(x)=10x^9$

**c)** Si $g(x)=x$, entonces $g'(x)=1\cdot x^0$. Así $g'(x)=1$

Efectivamente la función $g(x)=x$ es una recta cuya pendiente es 1

**d)** $(x^{3/2})'=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

En muchas ocasiones es conveniente reescribir algunas funciones para derivar más fácilmente.

Reescritura

**a) Funciones con radicales**. Las funciones con radicales se reescriben con exponente fraccionario

**Ejemplo a de reescritura:** Si $f(x)=\sqrt[3]{x^5}$ , entonces se reescribe como $f(x)=x^{5/3}$. A esta última forma de escribir $f$ se le aplica la regla de la potencia $f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}=\frac{5}{3}x^{2/3}=\frac{5\sqrt[3]{x^2}}{3}$.

**3) REGLA DEL FACTOR CONSTANTE:** Si $f$ es una función derivable en $x$ y $c$ una constante entonces $cf$ es derivable y

$$(cf(x))'=cf'(x).$$

En notación de Leibniz

$$\frac{d}{dx}(cf(x))=c\frac{d}{dx}(f(x))$$

*El factor constante sale fuera de la derivación.*

**Ejemplo 3.-** Encuentre la derivada de $f(x)=5\cdot\sqrt[3]{x^2}$

**Solución:** Reescribimos $f(x)=5\cdot x^{2/3}$. Entonces

$$f'(x)=(5x^{2/3})'=5(x^{2/3})'$$
$$=5\cdot\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{10}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$$

Reescritura

**b) Funciones fraccionarias con denominador constante. :** $\frac{rg(x)}{k}=\frac{r}{k}g(x)$, $r$ y $k$ constantes.

**Ejemplo b:** Si $h(x)=\frac{2\sqrt{x}}{3}$, entonces se reescribe como $h(x)=\frac{2}{3}x^{1/2}$, la cuál se deriva usando primero la regla del factor constante y luego la regla de la potencia

$$\frac{d}{dx}(\frac{2}{3}x^{1/2})=\frac{2}{3}\frac{d}{dx}(x^{1/2}) \qquad \text{Así}$$

$$\frac{d}{dx}(h(x))=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{3\sqrt{x}}$$

Reescritura

**c) Funciones fraccionaria con numerador constante:** $\frac{r}{kg(x)}=\frac{r}{k}\frac{1}{g(x)}=\frac{r}{k}(g(x))^{-1}$, donde $r$ y $k$ son constantes

**Ejemplo c:** Si $h(x)=\frac{2}{3x^9}$, entonces se reescribe como $h(x)=\frac{2}{3}x^{-9}$, la cuál es la que se deriva usando primero la regla del factor constante y luego la regla de la potencia

$$h'(x)=(\frac{2}{3}x^{-9})'=\frac{2}{3}(x^{-9})'$$

$$h'(x)=\frac{2}{3}(-9)x^{-10}=-6\cdot x^{-10}=-\frac{6}{x^{10}}.$$

**Ejercicio de desarrollo:** Encuentre la derivada de $f(x)=\frac{\sqrt{2x}}{2}$, reescribiendo la función previamente.

(Recomendación: use la propiedad de la raíz de un producto, reescriba, aplique entonces la propiedad del factor constante y luego la regla de la potencia.)

**4) REGLAS DE LA SUMA Y DE LA RESTA:** Sean $f$ y g funciones derivables en $x$, entonces $f+g$ y $f-g$ también lo son y

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$$
$$((f-g)'(x)=f'(x)-g'(x).$$

*La derivada de una suma es la suma de las derivadas.*
*La derivada de una diferencia es la diferencia de las derivadas.*

**Demostración:** Para demostrar esta propiedad de las derivadas planteamos la derivada de la función $(f+g)(x)$ por definición, manipulamos usando propiedades de límite y algebraicas para llegar que es la suma de las derivadas:

$$(f+g)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h})=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}$$ Se distribuyó el signo

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h}$$ Se reordenó la suma

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$$ Se descompuso como suma de fracciones con igual denominador

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$ Se uso la propiedad del límite de una suma

$$=f'(x)+g'(x)$$ Se aplicó la definición de la derivada de *f* y *g*.

Esta regla puede ampliarse a la suma o diferencia de un número finito de funciones. En notación de Leizbniz podemos escribir que:

$$\frac{d}{dx}((f_1\pm f_2\pm\cdots\pm f_n)(x))=\frac{d}{dx}(f_1(x))\pm\frac{d}{dx}(f_2(x))\pm\cdots\pm\frac{d}{dx}(f_n(x))$$

**Ejemplo 4.-** Encuentre las derivadas de las siguientes funciones

**a)** $h(z)=\sqrt{z}+\frac{4z^2}{3}$; **b)** $g(x)=\frac{4}{x^4}-\sqrt{3}+3x$

**Solución:** **a)** Reescribimos $h(z)=z^{1/2}+\frac{4}{3}z^2$. Esta última reescritura se deriva aplicando primero la propiedad de la suma. Así

$$h'(z)=\left(z^{1/2}+\frac{4}{3}z^2\right)'=(z^{1/2})'+(\frac{4}{3}z^2)'.$$

Al primer término aplicamos la regla de la potencia y al segundo la regla del factor constante.

$$=\frac{1}{2}z^{-1/2}+\frac{4}{3}(z^2)'$$ Aplicamos al segundo término la regla de la potencia

$$=\frac{1}{2\sqrt{z}}+\frac{8}{3}z$$

**b)** Reescribimos primero antes de derivar $g(x)=4x^{-4}-\sqrt{3}+3x$. Ahora aplicamos la propiedad de la suma y diferencia.

$$g'(x)=\left(4x^{-4}-\sqrt{3}+3x\right)'$$
$$=(4x^{-4})'-(\sqrt{3})'+(3x)'$$
$$=4(x^{-4})'-0+3(x)'$$
$$=-16x^{-5}+3$$

Al primer y tercer término se aplica la regla del factor constante y al segundo la regla de la constante. No se suelen reescribir las constantes.

La última igualdad se obtuvo al aplicar la regla de la potencia a los términos en derivación

*Reescribir para derivar:*

Reescritura

**d) Un cociente donde el denominador consta de un solo término en $x^r$.**

$$\frac{a_1x^{r_1}+\cdots+a_nx^{r_n}}{cx^k}=\frac{a_1x^{r_1}}{cx^k}+\cdots+\frac{a_nx^{r_n}}{cx^k}=\frac{a_1}{c}x^{r_1-k}+\cdots+\frac{a_n}{c}x^{r_n-k},\ \ r_i,k \text{ constantes}$$

**Ejemplo d:** Si $g(x)=\dfrac{3x^5-2x^2-x}{3x^2}$, entonces se reescribe como una suma : $g(x)=\dfrac{3x^5}{3x^2}-\dfrac{2x^2}{3x^2}-\dfrac{x}{3x^2}$, la cuál se sigue simplificando para que quede expresado de tal manera que posteriormente se use las reglas del factor constante y el de la potencia. De esta forma obtenemos que $g$ puede ser expresado como:

$$g(x)=x^3-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}x^{-1}$$

Ahora podemos derivar con facilidad usando primero la regla de la suma

$$g'(x)=\left(x^3-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}x^{-1}\right)'.$$
$$=(x^3)'-(\frac{2}{3})'-(\frac{1}{3}x^{-1})'$$
$$=3x^2-\frac{1}{3}(-1)x^{-2}$$

Reescritura

**e) Un Producto se transforma en una suma al usar la propiedad distributiva.**

**Ejemplo e**: $g(x)=\sqrt{x}(3x-4\sqrt{x}-1)$. Esta función posteriormente puede interpretarse como un producto, pero conviene para derivar reescribir usando la propiedad distributiva, transformándose entonces en una suma.

$$g(x)=x^{1/2}(3x-4\sqrt{x}-1)$$
$$=3x\cdot x^{1/2}-4x-x^{1/2}$$
$$g(x)=3x^{3/2}-4x-x^{1/2}.$$

Esta última forma de reescribir $g$ es la que derivamos, aplicando la propiedad de la suma primero, luego del factor constante y de la potencia después. De esta manera

$$g'(x)=(3x^{3/2}-4x-x^{1/2})'$$
$$=(3x^{3/2})'-(4x)'-(x^{1/2})'$$

$$= 3(x^{3/2})' - 4(x)' - \frac{1}{2}x^{-1/2}.$$ Derivamos los términos que se indican

$$= \frac{9}{2}x^{1/2} - 4 - \frac{1}{2x^{1/2}}$$

Podemos dejar de esta forma la derivada pero también podemos sacar $\frac{1}{2x^{1/2}}$ de factor común para expresar la derivada como

$$g'(x) = \frac{x^{-1/2}}{2}(9x - 8x^{1/2} - 1)$$

**Ejercicio de desarrollo:** Encuentre las derivadas de las siguientes funciones, reescribiendolas previamente.

**a)** $f(x) = x^3(\sqrt{x} - 3x)$ **b)** $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{3\sqrt{x}}$

**Ejemplo 5.-** Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 2x^2 + 1$ en **a)** $x = -1$, **b)** $x = 0$ y **c)** $x = 1$. Grafique la curva $y = 2x^2 + 1$ y las rectas tangentes en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

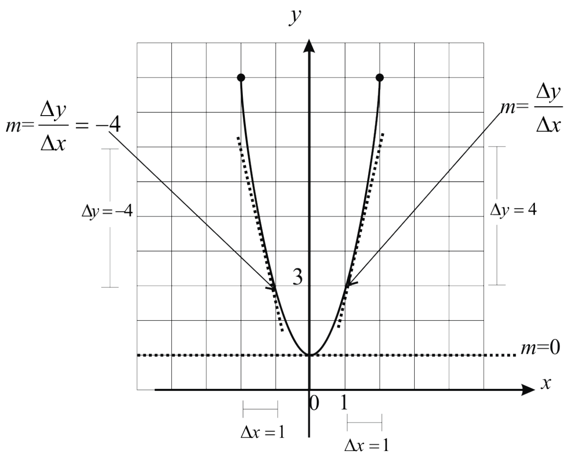
**Solución.-** Para calcular la pendiente de la recta tangente se debe primero encontrar la derivada

$$f'(x) = 4x$$

**a)** En $x = -1$, la pendiente es $f'(-1) = 4(-1) = -4$

**b)** En $x = 0$, la pendiente es $f'(0) = 4(0) = 0$

**c)** En $x = 1$, la pendiente es $f'(1) = 4(1) = 4$




Una manera de obtener la ecuación de una recta es usar la ecuación punto-pendiente:

$$(y - y_0) = m(x - x_0).$$

Para ello necesitamos un punto $(x_0, y_0)$ por el cual pasa la recta y la pendiente $m$ de la misma.

Si se necesita determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ cuando $x = x_0$ entonces el punto es $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$.

Es claro que la pendiente es $m = f(x_0)$

**Ejemplo 6.-** Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 3}{3}$ en $x = 2$.

**Solución.-**

- Se determina completamente el punto $(x_0, y_0)$

Para determinar completamente el punto sobre la gráfica evaluamos la función en $x = 2$.

$$f(2)=\frac{2^3-3\cdot 2+3}{3}=\frac{5}{3}$$

Enfatizamos ahora que queremos la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(2,\frac{5}{3})$.

- Se determina la pendiente de la recta tangente.

Para calcular la pendiente de la recta tangente se debe primero encontrar la derivada y luego evaluar esta derivada en $x=2$.

Antes de derivar consideramos reescribir la función. Efectivamente la función se puede reescribir como:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+1$$

la cual es la que derivamos usando primero la regla de la suma.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\frac{1}{3}x^3)'-(x)'+(1)' \\ &= \frac{1}{3}(x^3)'-1 \end{aligned}$$

obteniendo

$$f'(x)=x^2-1$$

Al evaluar esta última en 2 tenemos

Recuerde evaluar para obtener la pendiente

$$m=f'(2)=4-1=3.$$

- Se determina la ecuación de la recta tangente, usando la forma punto-pendiente

$(y-y_0)=m(x-x_0)$ Se sustituye los valores

$(y-\frac{5}{3})=3\cdot(x-2)$ Simplificando y manipulando obtenemos una ecuación general de la recta

$3y-9x+13=0$.

**Ejemplo 7.-** Encuentre los puntos sobre la gráfica de $f(x)=x^3-3x^2-9x$ tales que la recta tangente es horizontal.

**Solución.-** Recordemos que una recta horizontal tiene pendiente 0. Entonces como la derivada evaluada en $x$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f$ en dicho punto, debemos ubicar los valores de $x$ donde la derivada se hace 0. Planteamos entonces la ecuación $f'(x)=0$ y la resolvemos.

Derivamos primero

$$f'(x)=3x^2-6x-9.$$

Ahora se plantea

$$3x^2-6x-9=0.$$

Esto es una ecuación cuadrática cuyas soluciones son $x=3$ y $x=-1$. Evaluamos estos puntos en la función para así obtener los puntos sobre la gráfica en que las rectas tangentes son 0.

$$f(3)=3^3-3(3)^2-3\cdot 9=-27$$

$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2-9\cdot(-1)=-5$$

Se concluye que (3,-27) y (-1,-5) son los puntos sobre la gráfica donde la recta tangente a la curva en dichos puntos son horizontales.

# RAZON DE CAMBIO PORCENTUAL

La razón de cambio nos da una medida de cómo cambia una magnitud frente a otra. Pero este cambio depende de la situación en que estemos. No es lo mismo que en un año una población cambie en 100.000 habitantes si la población es de 10.000.000 que si es de 500.000. La razón de cambio porcentual para una cantidad $C$ permite calibrar mejor estas situaciones, la cual es definida por:

$$\text{Razón de cambio porcentual de } C(x) = 100\,\frac{\text{Razón de cambio de } C}{C} = 100\,\frac{C'(x)}{C(x)}$$

El cambio porcentual para la población de 10.000.000 es de 1%. El cambio porcentual para la población de 500.000 es de 20%.

La razón de cambio porcentual es conocida también como la tasa de cambio porcentual. Cuando sabemos que hay crecimiento hablamos de razón (tasa) de crecimiento porcentual de la cantidad. La cantidad $\frac{C'(x)}{C(x)}$ también es usada para comparar la razón de cambio de una cantidad con respecto a ella misma, $\frac{C'(x)}{C(x)}$ es conocida como la razón de cambio relativo y toma valores entre -1 y 1.

**Ejemplo 1.-** El PIB de cierto país es aproximado por la función $N(t) = t^2 + 4t + 150$ mil millones de UM *t* años después del 2003. **a)** Estime la razón de cambio al comienzo del 2005;
**b)** Estime la razón de cambio porcentual del PIB al comienzo del 2005

**Solución:**

**a)** Como han pasado 2 años después del 2003 se tiene que calcular $N'(2)$. Primero se calcula la función derivada

$$N'(t) = \left(t^2 + 4t + 150\right)' = 2t + 4$$

La razón de cambio para comienzos del 2005 es $N'(2) = 2\cdot 2 + 4 = 8$ mil millones de UM por año.

**b)** La razón de cambio porcentual para el 2005 es estimada en

$$100\frac{N'(2)}{N(2)} = 100\frac{8}{162} = 4.93\% \text{ por año.}$$

## EJERCICIOS

**1)** Encuentre la derivada de las siguientes funciones:

**1.1)** $f(x) = x^7$; **1.2)** $f(x) = 9x^2$; **1.3)** $f(x) = \sqrt{5}$;

**1.4)** $g(w) = \sqrt{5}w$; **1.5)** $f(x) = \ln(2)x^2$; **1.6)** $f(x) = \frac{1}{3}x^2$;

**1.7)** $f(x) = \frac{x^2}{3}$; **1.8)** $y = -x^2 + 2x$; **1.9)** $h(w) = w^9 - 3w^3 + e^2$;

**1.10)** $y = 108(x^2 + 1167)$; **1.11)** $f(x) = \frac{5}{2}(4 - x^2)$; **1.12)** $f(x) = \frac{5(4 - x^2)}{2}$;

**1.13)** $f(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2}$; **1.14)** $h(s) = s^{3/4} - 3s^{-1/3}$; **1.15)** $f(x) = \frac{4}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$;

**1.16)** $f(x) = \sqrt{2}x^{-3}$; **1.17)** $C(q) = \frac{4}{5q}$; **1.18)** $C(q) = \frac{q^3}{5} - \frac{5}{q^3}$;

**1.19)** $f(x)=\sqrt{2}x-\sqrt{2x}$ ; **1.20)** $f(x)=\dfrac{2}{3\sqrt{x}}$ ; **1.21)** $f(x)=x\cdot\sqrt[4]{x}$ ;

**1.22)** $f(s)=s^2(3s)^2$ ; **1.23)** $f(s)=s^2 3s^2$ ; **1.24)** $f(x)=x(4-5x-x^3)$ ;

**1.25)** $f(s)=s^{\frac{2}{3}}(s^2-2s)$ ; **1.26)** $f(x)=\dfrac{x-x^2}{x^3}$ ; **1.27)** $f(x)=\dfrac{x(3-x^2)}{2\sqrt{x}}$

**Respuestas**: **1.1)** $7x^6$ ; **1.2)** $18x$ ; **1.3)**0; **1.4)** $\sqrt{5}$ ; **1.5)** 2*x*ln2; **1.6)** $\dfrac{2}{3}x$ ; **1.7)** $\dfrac{2x}{3}$ ; **1.8)** $-2x+2$ ;

**1.9)** $9w^2(w^6-1)$ ; **1.10)** $216x$ ; **1.11)**-5*x*; **1.12)** $-5x$ ; **1.13)** $x^3(x^2+2)$ ; **1.14)** $\dfrac{3}{4}s^{-1/4}+s^{-4/3}$ ;

**1.15)** $-\dfrac{8}{9\cdot\sqrt[3]{x^5}}$ ; **1.16)** $-3\sqrt{2}x^{-4}$ ; **1.17)** $-\dfrac{4}{5q^2}$ ; **1.18)** $\dfrac{3q^2}{5}+\dfrac{15}{q^4}$ ; **1.19)** $\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}$ ; **1.20)** $-\dfrac{1}{3\sqrt{x^3}}$ ; **1.21)** (5/4)$\sqrt[4]{x}$ ; **1.22)** $36s^3$ ; **1.23)**12s$^3$; **1.24)** $4-10x-4x^3$ ;

**1.25)** $\dfrac{2s^{2/3}}{3}(4s-5)$ ; **1.26)** $\dfrac{x-2}{x^3}$ ; **1.27)** $\dfrac{3-5x^2}{4\sqrt{x}}$

**2)** Para cada una de las siguientes curvas encuentre la pendiente de la recta tangente en $x$=1. Graficar la curva y la recta tangente en $x$=1

**a)** $y=-x^3-4$ ; $x$=1; **b)** $y=2\sqrt{x}-3$ .

**3)** Encuentre la recta tangente a la curva en el punto dado

**3.1)** $y=2x^3-6x+1$ ; $x$=-1; **3.2)** $y=2x^3-4x+1$ ; $x$=-1; **3.3)** $y=\dfrac{\sqrt{x}-x^2}{x}$ ; $x$=4

**4)** Para cada una de las siguientes funciones encuentre los puntos en los cuales la recta tangente a la gráfica de la función en esos puntos es horizontal.

**4.1)** $F(x)=x^2-4x$ ; **4.2)** $G(x)=x^3-x^2$ ; **4.3*)** $H(x)=x^4-8x+1$ ; **4.4*)** $K(x)=x^4-x^2$

(* la ecuación que se plantea se resuelve por Ruffini o factorizando directamente por productos notables)

**5*)** Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $F(x)=x^4+8x-2$ que es paralela a la recta $y=4x+1$.

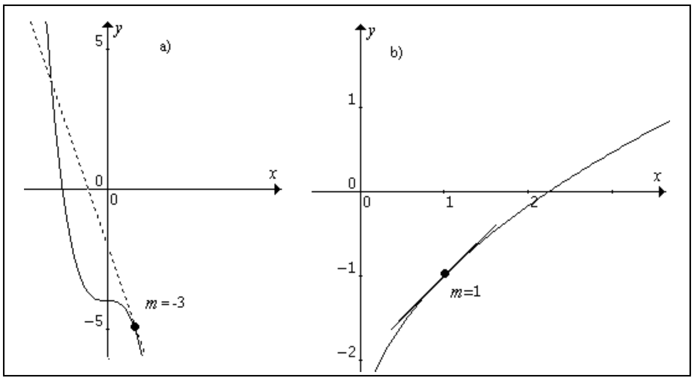
(* plantear $F'(x)=4$, (¿por qué?) consiga la solución $x_0$ de la ecuación, forme la recta con pendiente $F'(x_0)=4$ y que pasa por el punto $(x_0, F(x_0))$, justifique el procedimiento)

**6*)** Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $F(x)=x^3-6x-1$ que es paralela a la recta $2y+6x+1=0$.

(* Imite el ejercicio anterior, puede existir más de una solución)

**7*)** Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $F(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{3}$ que es paralela a la recta $2y+6x+1=0$.

**Respuestas: 2)**




**3.1)** $y = 0$ **3.2)** $y = 2x + 5$ ; **3.3)** $-\frac{17}{16}x + \frac{3}{4}$

**4.1)**(2,-4) ; **4.2)** $(\frac{2}{3}, -\frac{4}{27})$ ,(0,0); **4.3)**

$(\sqrt[3]{2}, -6\cdot\sqrt[3]{2})$ ; **4.4)** $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{4})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{4})$
y (0,0)

**5)** $y + 9 = 4(x + 1)$ ; **6)** $y + 4 = -3(x - 1)$ ;
$y - 6 = -3(x + 1)$ ; **7)** No existe

**PROBLEMAS EN CIENCIAS SOCIALES**

**1)** Se proyecta que dentro de *x* meses, la población de cierto pueblo será de $P(x) = 2x + 4x^{3/2} + 5000$

**a)** ¿A qué razón cambiará la población respecto al tiempo dentro de 9 meses? **b)** ¿A qué razón porcentual cambiará la población respecto al tiempo dentro de 9 meses?
**Respuesta: a)** 20 personas por mes, **b)** 0.39%

**PROBLEMAS EN ECONOMÍA**

**1)** El PIB de un país $t$ años después del 1 de enero del 2001 es aproximado por $N(t) = t^2 + 8t + 170$ mil millones de UM. **a)** Estime la tasa de cambio al comienzo del 2007 **b)** Estime la tasa de cambio porcentual del PIB al comienzo del 2007 **Respuesta: a)** 20 miles de millones por año, **b)** 7.87%

**2)** Las ganancias trimestrales de la compañía EME depende de la cantidad *x* (en miles de UM) invertida en publicidad dada por la siguiente relación.

$$P(x) = \frac{-1}{x^2} + 7x + 30 \text{ miles de UM}$$

¿Cuál es la razón de cambio de las ganancias trimestrales si se invierten 100000 UM en publicidad?
**Respuesta:** 3499/500 miles de UM

**3)** Un nuevo artículo ha sido introducido al mercado. Se espera que la demanda del artículo sea de $q = 300 + 0.5t + 0.05t^{3/2}$ unidades al cabo de t meses. ¿A qué razón porcentual cambiará la demanda mensual dentro de 9 meses? **Respuesta:** 0.23 %

**4)** Se ha decidido establecer el precio de la gasolina por mes de acuerdo a la siguiente formula $p = 15 + 0.3t + 0.08t^{3/2}$ UM contados a partir del próximo mes. ¿A qué razón porcentual cambiará el precio de la gasolina un mes después de implementado el plan tarifario? ¿4 meses después? ¿9 meses?
**Respuesta:** 2.73%; 3.2%; 3.32%

# ANÁLISIS MARGINAL

En economía el concepto marginal se refiere al cambio instantáneo de una cantidad con respecto a otra. Esto es la derivada de una cantidad con respecto a otra. Daremos a continuación el concepto y la interpretación de varias cantidades marginales de uso frecuente en economía.

## COSTO MARGINAL

Sea $C(q)$ el costo total de producir $q$ unidades de un determinado artículo. Aún cuando en la mayoría de los casos $q$ es un número entero, en la teoría y en la práctica es conveniente considerar el dominio de $C$ un intervalo de **R**. En economía se está interesado como los costos cambian cuando hay incrementos en la producción. La derivada puede ayudar a analizar estos cambios de una manera rápida.

La derivada del costo total, $C'(q)$, se llama costo marginal

$$\text{Costo marginal}=C'(q)$$

En general se interpreta el costo marginal , $C'(q)$, como el costo aproximado de producir la unidad $q+1$. Veamos la justificación.

Recuerde que el costo de las primeras $q+1$ es $C(q+1)$. Así que

$$\text{El costo exacto de la unidad } q+1 = C(q+1)-C(q)$$

$$=\frac{C(q+1)-C(q)}{1}$$

Esta última expresión es una aproximación de la derivada

$$C'(q)\approx\frac{C(q+h)-C(q)}{h}$$

con $h=1$

Así pues

$$C'(q)\approx \text{costo de producir la unidad adicional } q+1$$

Veamos los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 1.-** La función de costo total por producir y vender q artículos está dada por:
$C(q)=0.001q^2+1.1q+30$ en UM.

**a)** Encuentre la función de costo marginal.
**b)** Encuentre el costo marginal en $q=40$
**c)** Interprete sus resultados.

**Solución:**

**a)** Para conseguir la función de costo marginal derivamos la función de costo total.

$$C'(q)=(0.001q^2+1.1q+30)'$$

$$C'(q)=(0.001q^2)+(1.1q)'+(30)'$$

$$C'(q)=0.002q+1.1\text{UM}$$

**b)** El costo marginal en $q=40$ está dado por
$C'(40)=0.002\cdot 40+1.1=1.18$ UM

**c)** El costo de producir la unidad 41 es aproximadamente 1.18 UM

El lector debe darse cuenta lo tedioso que hubiese sido calcular el costo de la unidad 41 de una manera exacta. En el siguiente ejemplo haremos el cálculo aproximado y exacto pero antes recordemos el siguiente concepto.

Si $C(q)$ es el costo total de producir $q$ artículos, el costo promedio por artículo se define como

$$\overline{C}(q)=\frac{C(q)}{q}$$

En el ejemplo anterior el costo promedio por artículo está dado por

$$\overline{C}(q)=\frac{0.001q^2+1.1q+30}{q}$$

$$=0.001q+1.1+30\frac{1}{q}$$

El lector puede verificar que $\overline{C}(40)=1.89$, lo cual representa el costo de cada artículo en promedio cuando se producen 40 artículos. Este valor es muy distinto al costo marginal en 40 que representa aproximadamente el costo de producir la unidad 41. Podemos ver entonces que el costo promedio y el costo marginal son dos conceptos distintos pero relacionados. Usando los dos conceptos, podemos decir en nuestro ejemplo que los primeros 40 artículos cuestan 1.89UM en promedio y fabricar uno más le costaría tan sólo 1.18UM.

**Ejemplo 2.-** La función de costo promedio de un producto está dada por $\overline{C}(q)=0.1q+120+\frac{22000}{q}$

**a)** Encuentre la función de costo marginal.
**b)** Encuentre el costo marginal cuando $q=40$ y cuando $q=60$
**c)** Encuentre el costo de producir la unidad 41.
**d)** Interprete los resultados
**Solución:**
Recuerde que el costo marginal es la derivada del costo total. Así que debemos conseguir la función de costo total primero despejándola en la ecuación $\overline{C}(q)=\frac{C(q)}{q}$

$$C(q)=q\cdot\overline{C}(q)$$

$$C(q)=q\cdot(0.1q+120+\frac{22000}{q})$$

Se distribuye a fin de obtener una expresión más sencilla para derivar

$$C(q)=0.1q^2+120q+q\frac{22000}{q}$$

$$C(q)=0.1q^2+120q+22000$$

**a)** Derivamos la función costo total recién obtenida

$$C'(q)=(0.1q^2)'+(120q)'+(22000)'$$

$$C'(q)=0.2q+120$$

**b)** El costo marginal cuando $q=40$ está dado por

$$C'(40)=0.2\cdot 40+120=128$$

El costo marginal cuando $q=60$ está dado por

$$C'(60)=0.2\cdot 60+120=132$$

**c)** Recordemos que el costo exacto de la unidad $q+1$ es igual a $C(q+1)-C(q)$. Así

El costo exacto de la unidad 41 $= C(41) - C(40)$

$C(41) = 0.1 \cdot 41^2 + 120 \cdot 41 + 22000$

$C(40) = 0.1 \cdot 40^2 + 120 \cdot 40 + 22000$

$C(41) - C(40) = 0.1(41^2 - 40^2) + 120 = 128.1$ UM

**d)** $C'(40) = 128$ se interpreta como el costo aproximado de producir la unidad 41. Efectivamente este costo está bastante cercano al costo exacto de la unidad 41 que es 128.1.

$C'(60) = 132$ es el costo aproximado de producir la unidad 61 si se decide aumentar la producción de 60 a 61 unidades. También podemos decir que los costos totales aumentarían aproximadamente en 132UM si se decide fabricar una unidad adicional

**Comentarios.-** El costo de la unidad adicional depende del nivel de producción.
Algunos autores prefieren interpretar $C'(q)$ como el aumento aproximado en los costos si se decide aumentar la producción en una unidad. ¿Por qué?

# INGRESO Y UTILIDAD MARGINAL

Podemos hacer un análisis similar para la función ingreso y utilidad total.

Sea $I(q)$ la función ingreso total por producir y vender $q$ productos. El ingreso marginal se define como la derivada del ingreso total:

$$\text{Ingreso marginal}=I'(q)$$

y se suele interpretar como el ingreso por producir y vender la unidad adicional $q+1$ cuando el nivel de producción es $q$.

**Ejemplo 3.-** La ecuación de demanda de un artículo está dada por $p = \frac{1}{5}(40 - q)$. Encuentre la función ingreso marginal
**Solución:** Tenemos que conseguir la función de ingreso. Recuerde que $I(q) = pq$
Así

$$I(q) = \frac{1}{5}(40 - q)q$$

Reescribimos antes de derivar, distribuyendo solo la variable

$$I(q) = \frac{1}{5}(40q - q^2)$$

Derivamos, usando primero la regla del factor constante

$$I'(q) = \frac{1}{5}(40q - q^2)'$$

Podemos ver finalmente, usando la regla de la diferencia que el ingreso marginal está dado por

$$I'(q) = \frac{1}{5}(40 - 2q)$$

**Recordemos:**

Sea $U(q)$ la función utilidad total por producir y vender $q$ productos. Recuerde que la utilidad es la diferencia entre el ingreso y el costo, esto es

$$U(q) = I(q) - C(q)$$

La utilidad marginal se define como la derivada de la utilidad total:

Utilidad marginal=$U'(q)$

y se suele interpretar como la utilidad por producir y vender una unidad adicional cuando el nivel de producción está en $q$.

**Ejemplo 4.-** Un comerciante estima que su ingreso mensual por la venta de un artículo sea $I(q)=30q-0.02q^2$, para $0\leq q\leq 1500$. Si el costo de adquisición es de 10UM por cada artículo.

- **a)** Encuentre la función de utilidad marginal
- **b)** ¿Cuál es el nivel de adquisición y venta en que la utilidad marginal es 0?
- **c)** Interprete el resultado anterior.

**Solución:**

**a)** La función de utilidad marginal es la derivada de la función utilidad total. Debemos conseguir primero $U(q)$ mediante la relación

$$U(q)=I(q)-C(q)$$

La función costo total está dada por

$$C(q)=10\cdot q$$

De esta manera

$$U(q)=(30q-0.02q^2)-(10q)$$

Simplificando se obtiene

$$U(q)=20q-0.02q^2$$

La utilidad marginal es la derivada de $U(q)$

$$U'(q)=(20q)'-(0.02q^2)$$

$$=20-0.04q.$$

**b**) Para calcular el nivel en que la utilidad marginal es 0 debemos plantear

$$U'(q)=0$$

$$20-0.04q=0$$

Resolviendo, obtenemos

$$q=500$$

El nivel de adquisición y ventas en que la utilidad marginal es 0 es 500 artículos.

**c)** Esto se puede interpretar como: La utilidad dejada por la adquisición y venta de una unidad por encima de 500 es aproximadamente 0. La negociación de una unidad extra en este nivel de comercialización no aportaría ganancia ni perdida al negocio.

## PROPENSION MARGINAL AL AHORRO Y AL CONSUMO.

Pensemos primero estos conceptos a nivel de un individuo. Si una persona tiene un ingreso mensual variable de *I,* una cantidad *C* la consume en bienes y servicios y otra *S* la ahorra. Es decir $I=C+S$. Es claro que los porcentajes de lo que ahorra y lo que consume depende del nivel de ingreso. Es probable que un individuo cuando reciba muy poco prácticamente lo gaste todo y en cambio si recibe una gran cantidad ahorre una parte. Así pues podemos pensar que el consume *C* es una función del ingreso.

Podemos extrapolar estos conceptos a nivel de una nación. Sea *I* el ingreso nacional disponible (en miles de millones de UM) .

La función de consumo nacional, $C(I)$, es la cantidad de dinero del ingreso que se consume

La función de consumo nacional, $S(I)$, es la cantidad de dinero del ingreso que se ahorra.

**Definición.-** Se llama propensión (o tendencia) marginal al consumo a la derivada de *C* con respecto a *I*:

$C'(I)=\dfrac{dC}{dI}$ =propensión (o tendencia) marginal al consumo

La propensión (tendencia) marginal al ahorro se la define como la derivada de *S* con respecto a *I*:

$S(I)=\dfrac{dS}{dI}$ = propensión (o tendencia) marginal al ahorro.

Podemos ver que a nivel del ingreso nacional la relación $I=C(I)+S(I)$ se cumple. Al derivar ambos lados queda

$$\frac{dI}{dI}=\frac{dC}{dI}+\frac{dS}{dI}$$

$$1=\frac{dC}{dI}+\frac{dS}{dI}$$

Así que las dos propensiones marginales suman 1. Frente a un pequeño incremento de ingreso nacional, podemos interpretar las propensiones marginales como las proporciones de ese incremento que se ahorran o se consume.

**Ejemplo 5.-** Suponga que la función de consumo de un país está dado por $C(I)=\dfrac{I}{3}+\dfrac{4\sqrt{I}}{5}+7$ donde *I* y *C* vienen dadas en miles de millones de UM

**a)** Encuentre las propensiones marginales al consumo y al ahorro cuando el ingreso nacional es de 9 mil millones de UM.

**b)** Interprete sus resultados

**Solución:**

**a)** Se calcula la propensión marginal al consumo.

$$\frac{dC}{dI}=C'(I)=(\frac{I}{3})'+(\frac{4\sqrt{I}}{5})'+(7)'$$

$$=\frac{1}{3}(I)'+\frac{4}{5}(I^{1/2})'+(7)'$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}I^{-1/2})$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{5\sqrt{I}}$$

Para calcular la propensión marginal al ahorro nos valemos de la formula

$$1=\frac{dC}{dI}+\frac{dS}{dI}$$

$$\frac{dS}{dI}=1-\frac{dC}{dI}$$

Se procede ahora a evaluar las propensiones marginales en $I=9$

$$\left.\frac{dC}{dI}\right|_{I=9}=C'(9)=\frac{1}{3}+\frac{2}{5\sqrt{9}}=\frac{1}{3}+\frac{2}{15}=\frac{7}{15}$$

$$\frac{dS}{dI}=1-\frac{dC}{dI}=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$$

**b)** Para un nivel de ingreso nacional de 9 mil millones de UM, si hay un aumento en un millardo de unidades monetarias, aproximadamente el 46.6% ($\frac{7}{15}\cdot 100$) de ese aumento se consume y el 53.3% se ahorra. Es decir 466,6 millones se consumen y 533,3 millones se ahorran aproximadamente.

**PROBLEMAS DE ANÁLISIS MARGINAL**

**1)** Sea $C(q) = \frac{q^2}{5} + \frac{20}{q} + 450$ el costo total por producir $q$ artículos. **a)** Encuentre la función de costo marginal. **b)** ¿Cuál es el costo marginal para $q = 10$ ? **c)** Interprete sus resultados.

**Respuesta: a)** $C(q) = \frac{2q}{5} - \frac{20}{q^2}$ ; **b)** 3.8UM.

**2)** Si $C = -0.1q^2 + 2q + 850$ representa el costo total de producir q unidades de un producto. **a)** Encuentre la función de costo marginal. **b)** ¿Cuál es el costo marginal para $q = 3$ ? **c)** ¿Cuál es el costo real por producir la unidad 4? **Respuesta: a)** $c'(q) = -0.2q + 2$; **b)** $c'(3) = 1.4$ ; **c)** $c(4) - c(3) = 1.3$

**3)** Si $\bar{c}(q) = 2 + \frac{300}{q}$ es la función costo promedio de producir q unidades de un producto. **a)** Encuentre la función de costo marginal. **b)** ¿Cuál es el costo marginal para q=30? **c)** Interprete sus resultados. **Respuesta:** **a)** $c'(q) = 2$; **b)** $c'(30) = 2$

**4)** La función de ingreso total viene dada por $I = 2q(20 - 0.2q)$. **a)** Encuentre la función de ingreso marginal; **b)** El ingreso marginal para $q = 10$; **c)** el ingreso marginal para $q$=20; **d)** Interprete sus resultados. **Respuesta: a)** $I'(q) = 40 - 0.8q$ **; b)** 32UM**; c)** 24UM

**5)** Si la ecuación de demanda es $p = 500 - q^{2/3}$, calcule el ingreso marginal.

**Respuesta** $I'(q) = 500 - \frac{5}{3}q^{\frac{2}{3}}$

**6)** El costo total de un fabricante es $C(q) = 0.1q^3 - 0.5q^2 + 500q + 200$ UM, donde $q$ es el número de unidades producidas.

- **a)** Utilice el análisis marginal para estimar el costo de fabricación de la cuarta unidad
- **b)** Calcule el costo real de fabricar la cuarta unidad. **Respuesta: a)** 499,7; **b)**500,2

**7)** El ingreso total mensual de un fabricante es $I(q) = 240q + 0.05q^2$ UM cuando produce y se venden $q$ unidades al mes. En la actualidad, el fabricante produce 80 unidades mensuales y planea aumentar la producción en una unidad.

- **a)** Utilice el análisis marginal para estimar el ingreso adicional que generará la producción y venta de la unidad 81.
- **b)** Utilice la función ingreso para calcular el ingreso adicional real que generará la producción y venta de la unidad 81. **Respuesta: a)** 248; **b)** 248.05

**8)** La ecuación de demanda de un artículo es $p = 200 - \frac{q}{4}$.**a)** Determinar la función de ingreso marginal **b)** El ingreso marginal cuando $q = 20$ **c)** ¿Cuál es el ingreso real por vender la unidad 21? **Respuestas: a)** $p = 200 - \frac{q}{2}$ **b)** 190UM; **c)** 189.75UM

**9)** La ecuación de demanda de un tipo de reloj es $\sqrt[3]{q}+20p=800$ .**a)** Determinar la función de ingreso marginal. **b)** Si la función de costo total por la producción de $q$ relojes es $C(q)=\frac{\sqrt[3]{q}}{2}+10$, calcule la utilidad marginal. **Respuestas: a)** $40-\frac{\sqrt[3]{q}}{15}$; **b)** $40-\frac{\sqrt[3]{q}}{15}-\frac{1}{6\sqrt[3]{q^2}}$

**10)** La ecuación de demanda de un producto es $q^2+100q+1000p=8000$. **a)** Determinar la función de ingreso marginal. **b)** Si la función costo total por la producción de $q$ productos es $C(q)=500+\frac{5q^2}{100}$, calcule la utilidad marginal. **Respuestas: a)** $8-0.2q-0.003q^2$; **b)** $8-0.3q-0.003q^2$

**11)** La función de consumo de cierta nación está dada por $C(I)=\frac{I}{2}-\frac{8\sqrt{I}}{3}+4$ UM. Encuentre la propensión marginal al consumo y al ahorro cuando I= 36 UM. Interprete sus resultados.
**Respuesta**: 5/18; 13/18

**12)** La producción semanal de una fabrica depende del número de obreros $x$ en la planta y está dada por $P(x)=-2x^2+1600x$. Si la fabrica cuenta en este momento con 30 obreros, **a)** use derivadas para estimar el cambio de la producción si se contrata un obrero más **b)** Haga el calculo exacto.
**Respuesta: a)** 1480; **b)** 1478 unidades

**13)** La ecuación de demanda de un producto está dada por $45p+\sqrt{q^3}=7000$ Si la función de costo está dada por $C(q)=45+\sqrt{q^3}$ . **a)** Calcule la utilidad marginal cuando se producen y se venden 100 unidades. **b)** Interprete sus resultados. **Respuesta: a)** 85UM

**14)** Un kiosco de comida rápida prepara hamburguesas a un costo de 2UM cada una. Las hamburguesas se han vendido a 5UM cada uno y a ese precio, los consumidores han comprado 4000 al mes. El dueño planea incrementar el precio de las hamburguesas y estima que por cada UM de aumento en el precio se venderán 200 hamburguesas menos. Calcule la utilidad marginal en función del número de hamburguesas vendidas, suponiendo que la ecuación de demanda es lineal. **Respuesta:** $-\frac{q}{100}+23$

**15)** Un distribuidor vende 5000 lavadoras al mes si el precio es de 40UM cada una y estima que por cada incremento de 5UM las ventas bajarán en 300 lavadoras. Si el costo de adquisición de cada lavadora es de 25UM. Suponga que la ecuación de demanda es lineal. Calcule la función utilidad marginal en función del número de lavadoras adicionales a las 5000. **Respuesta:** $23000-3000q$

**16*)** Se estima que un gimnasio tiene 500 clientes cuando la cuota es de 30UM y si sube el precio a 40 el número de clientes se reduce a 450. Suponga que existe una relación lineal entre el número de clientes y la cuota mensual. **a)** Determine la función de ingreso. **b)** Determine el ingreso marginal.
**Respuestas: a)** $I=-\frac{1}{5}q^2+130q$; **b)** $I'=-\frac{2}{5}q+130$

**17*)** El calendario ecológico es vendido a 20UM., a ese precio se compran 25.000 ejemplares. Se ha estimado que si el precio aumenta a 30UM se venderán 15.000 unidades. El costo de producción de $q$ unidades está dado por $C(q)=500+5q$. Suponiendo que hay una relación lineal entre el precio y la demanda de calendarios. **a)** Encuentre la utilidad marginal. **b)** Calcule la demanda $q_0$ para la cual la utilidad marginal es cero. **c)** Calcule el precio $p_0$ para esta demanda. **d)** Calcule la utilidad en $p_0-1$, $p_0$ y $p_0+1$ (*para calcular la ecuación de demanda use la ecuación pto-pendiente, calculando previamente la pendiente)

**Respuestas: a)** $U'=-\frac{q}{500}+40$; **b)** $q_0=20.000$; **c)** $p_0=25$; **d)** $U(24)=459.42$ , $U(25)=499.38$, $U(26)=539.32$ UM

# REGLAS DEL PRODUCTO Y DEL COCIENTE

La función $h(x)=(3x^2+4x+1)(\sqrt{x}+1)$ la podemos derivar usando las ideas de la sección pasada, podemos reescribir la función aplicando la propiedad distributiva y luego sumar términos semejantes. Sin embargo, tal como está se puede interpretar como el producto de dos funciones $f(x)=3x^2+4x+1$ y $g(x)=\sqrt{x}+1$ y para derivar se usa entonces la regla del producto que a continuación se enuncia.

**Regla del producto:** Sean $f$ y g funciones derivables en *x*, entonces $f\cdot g$ también es derivable en *x* y

$$((f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

*La derivada de un productote dos funciones es la derivada de la primera por la segunda sin derivar más la primera por la derivada de la segunda*

Al final de esta sección daremos de prueba de esta regla.

**Ejemplo 1.-** Encuentre la derivada de la siguiente función $h(x)=(3x^2+4x+1)(\sqrt{x}+1)$

**Solución:** Aplicamos la regla del producto a la función $h(x)=(3x^2+4x+1)(\sqrt{x}+1)$, interpretando a $h$ como el producto de las funciones $f(x)=3x^2+4x+1$ y $g(x)=\sqrt{x}+1$. Así

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \\ &= (3x^2+4x+1)'(\sqrt{x}+1)+(3x^2+4x+1)(\sqrt{x}+1)' \\ &= (6x+4)(\sqrt{x}+1)+(3x^2+4x+1)\frac{1}{2}x^{-1/2} \end{aligned}$$

Observe que se deja la derivada indicada y se deriva en la siguiente línea

Aplicando la propiedad distributiva y agrupando términos semejantes tenemos

$$h'(x)=\frac{15}{2}x^{3/2}+6x+6x^{1/2}+4+\frac{1}{2}x^{-1/2}.$$

**Ejercicio de desarrollo:** Encuentre las derivadas de las siguientes funciones

**a)** $h(x)=3(x^2-3x-3)$;

**b)** $f(x)=(x-\sqrt{x}+1)(x^2-3x-3)$

La demostración de la regla del producto se hace al final de esta sección. Otra regla que vamos a necesitar es la derivada de un cociente que a continuación presentamos

**Regla del Cociente:** Sean $f$ y g funciones derivables en $x$ y $g(x)\neq 0$, entonces $f/g$ es derivable en $x$ y

$$(\frac{f}{g})'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

La regla de cociente es un poco más complicada que las anteriores. Pero observe como al escribirla se a puesto cierta semejanza con la regla del producto, excepto el signo menos en el numerador y que contiene un denominador igual al denominador de la función a derivar al cuadrado.

**Ejemplo 2.-** Encuentre la derivada de la función $h(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{x^3-1}$

**Solución:** Aplicamos la regla del cociente interpretando a $h$ como el cociente de la función $f(x)=x^2+4x+1$ entre $g(x)=x^3-1$. Así

$$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

La derivada la calculamos en varios pasos dejando indicada algunas derivaciones para analizarla y derivarla en las líneas siguientes.

$$=\frac{(x^2+4x+1)'(x^3-1)-(x^2+4x+1)(x^3-1)'}{(x^3-1)^2}$$

En ambas derivadas se aplica la propiedad de la suma y de la potencia

$$=\frac{(2x+4)(x^3-1)-(x^2+4x+1)3x^2}{(x^3-1)^2}$$

Se aplica la propiedad distributiva. En el segundo termino distribuimos el $3x^2$. Observe la necesidad de mantener el paréntesis.

$$=\frac{2x^4+4x^3-2x-4-(3x^4+12x^3+3x^2)}{(x^3-1)^2}$$

Se distribuye el menos.

$$=\frac{2x^4+4x^3-2x-4-3x^4-12x^3-3x^2}{(x^3-1)^2}$$

Agrupando términos semejantes finalmente obtenemos:

$$h'(x)=\frac{-x^4-8x^3-3x^2-2x-4}{(x^3-1)^2}$$

**Ejercicio de desarrollo:** Encuentre la derivada de

**a)** $f(x)=\dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}}$; **b)** $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x}+1}{5}$

**Comentario:** Le recordamos que en este último ejercicio es conveniente reescribir la función como: $f(x)=\dfrac{1}{5}(x-\sqrt{x}+1)$ para luego aplicar la regla del factor constante. Resulta más largo aplicar la regla del cociente. Más adelante se presentarán las formas $f(x)=\dfrac{k}{f(x)}$ que conviene escribirlas como $f(x)=k(f(x))^{-1}$ para emplear otra regla distinta a la regla del cociente, la cual resulta más laboriosa.

**Ejemplo 3.-** Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y=(20-3x)(x^2-3x-1)$ en el punto donde $x$=4

**Solución :**

- Se determina completamente el punto sobre la gráfica evaluando la función en $x = 4$.

  $y(4) = (20 - 3\cdot 4)(4^2 - 3\cdot 4 - 1) = 8\cdot 3 = 24$

Remarcamos que queremos la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(4,24)$.

- Para determinar la pendiente se calcula $y'$ y luego se evalúa en $x$=4
  Usamos la regla del producto para conseguir la derivada

  $y' = (20 - 3x)'(x^2 - 3x - 1) + (20 - 3x)(x^2 - 3x - 1)'$

  $y' = -3(x^2 - 3x - 1) + (20 - 3x)(2x - 3)$

Podemos simplificar este resultado, pero preferimos evaluar de una vez

$y'(4) = -3(4^2 - 3\cdot 4 - 1) + (20 - 3\cdot 4)(2\cdot 4 - 3)$

$y'(4) = 31$

Esto es $m_{tag} = 31$.

- Finalmente para calcular la recta tangente usamos la ecuación punto pendiente

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

$$(y - 24) = 31\cdot(x - 4)$$

Llevándolo a la forma pendiente-ordenada en origen tenemos que la recta tangente en el punto $(4,24)$ es:

$$y = 31x - 100$$

**APLICACIONES**

**Ejemplo 1.-** El gobierno va implementar unas medidas para disminuir el porcentaje de desempleo en el país. Él prevee que el impacto de sus medidas se verá reflejado en el siguiente modelo

$$P(t) = \frac{0.15t^2 - 0.2t + 0.17}{t^2 + 1.1}\cdot 100$$

donde $P$ es el porcentaje de desempleados en el tiempo $t$, medidos en años.

**a)** Encuentre la función que modela la tasa de cambio instantáneo del porcentaje de desocupados una vez que se apliquen las medidas.

**b)** Estime la tasa de cambio instantáneo a los 3 meses, 6 meses, 1 año y 2 años.

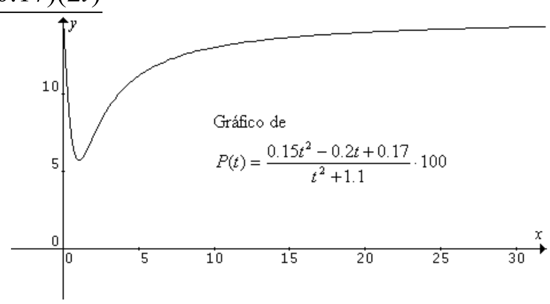
**Solución :**

La tasa de cambio instantáneo no es otra cosa que la primera derivada. Así que la calculamos usando la regla del cociente previamente sacamos 100 fuera de la derivada

$$P'(t) = 100\left(\frac{0.15t^2 - 0.2t + 0.17}{t^2 + 1.1}\right)'$$

$$P'(t) = 100\frac{(0.3t - 0.2)(t^2 + 1.1) - (0.15t^2 - 0.2t + 0.17)(2t)}{(t^2 + 1.1)^2}$$

$$P'(t) = 100\frac{0.2t^2 - 0.01t - 0.22}{(t^2 + 1.1)^2}$$




Para medir la tasa de cambio a los tres meses, evaluamos en $t = 1/4$ la primera derivada:

$$P'(0.25) = 100\frac{0.2(0.25)^2 - 0.01\cdot\frac{1}{4} - 0.22}{((0.25)^2 + 1.1)^2} = -15{,}8\%$$

$$P'(0.5) = 100\frac{0.2(0.5)^2 - 0.01\cdot\frac{1}{2} - 0.22}{((0.5)^2 + 1.1)^2} = -9{,}602\%$$

$$P'(1) = 100\frac{0.2(1)^2 - 0.01\cdot 1 - 0.22}{((1)^2 + 1.1)^2} = -0{,}68\%$$

$$P'(2) = 100\frac{0.2(2)^2 - 0.01\cdot 2 - 0.22}{((2)^2 + 1.1)^2} = 2.15\%$$

## EJERCICIOS

**1)** Derive las siguientes funciones

**1.1)** $f(x) = (4 - x^2)(x+1)$; **1.2)** $f(x) = 4 - x^2(x+1)$;

**1.3)** $f(s) = (s^2+1)(3s^2 - 3s)$; **1.4)** $f(x) = (2x-1)(4-5x-x^3)$;

**1.5)** $h(s) = \sqrt{2s}(s^2 + 2\sqrt{s} - 1)$; **1.6)** $f(x) = 3(\sqrt{x} - 3)(4 - x)$;

**1.7)** $f(x) = (x-1)(x-2)(2-x^2)$; **1.8)** $C(q) = \dfrac{4-q}{5q}$;

**1.9)** $C(q) = \dfrac{4-q}{q^2-1}$; **1.10)** $C(q) = \dfrac{q^3-1}{q^2-2q+1}$;

**1.11)** $f(t) = \dfrac{2t^2+3t-1}{\sqrt[3]{t}}$; **1.12)** $f(x) = \dfrac{2}{3\sqrt{x}}$;

**1.13)** $f(x) = x^3\cdot 3\sqrt[3]{x}$; **1.14)** $f(s) = \dfrac{s^2+5s+6}{s^2+4s+4}$;

**1.15)** $f(s) = s^{2/3}(s^2 - 2s)$; **1.16)** $f(x) = \dfrac{x-x^2}{x-1} + \dfrac{1-x}{2x-4} - \dfrac{1}{3x}$;

**1.17)** $f(x) = \dfrac{x(3-x^2)}{3\sqrt{x}}$; **1.18)** $f(x) = \dfrac{(x-1)(3-x^2)}{3(1-x)}$;

**2) a)** Utilice la regla del cociente para derivar la función $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^3}$

**b)** Reescriba la función como $f(x) = x^{-3}(2x-3)$ y derívela como un producto.

**c)** Rescriba la función como $f(x) = 2x^{-2} - 3x^{-3}$ y derívela como una suma.

**d)** Demuestre que todas las respuestas son iguales.

**3) a)** Utilice la regla del cociente para derivar la función $f(x) = \dfrac{x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$

**b)** Reescriba la función como un producto y derívela usando la regla del producto.

**c)** Reescriba la función como una suma y derívela usando la regla de la suma. (no use la regla del cociente ni del producto)

**d)** Demuestre que todas las respuestas son iguales.

**4)** Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = (x^3 - 3x)(x^2 - \sqrt{x})$ en el punto donde $x$=4.

**5)** Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{2x-1}{1-3x}$ en el punto donde $x = -1$.

**6*)** Encuentre los puntos en los cuales la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$ es horizontal.

**Respuestas:** **1.1)** $-3x^2-2x+4$; **1.2)** $-3x^2-2x$; **1.3)** $12s^3-9s^2+6s-3$ ; **1.4)** $13-20x+3x^2-8x^3$; **1.5)** $\frac{5\sqrt{2}}{2}s\sqrt{s}+2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{s}}$; **1.6)** $3(\frac{2}{\sqrt{x}}+3-\frac{3\sqrt{x}}{2})$; **1.7)** $-4x^3+9x^2-6$ ; **1.8)** $-\frac{4}{5q^2}$; **1.9)** $\frac{q^2-8q+1}{(q^2-1)^2}$; **1.10)** $\frac{q^2-2q-2}{q^2-2q+1}$; **1.11)** $\frac{10t^2+6t+1}{3\sqrt[3]{t^4}}$; **1.12)** $-\frac{1}{3\sqrt{x^3}}$; **1.13)** $(1+1/33)\sqrt[33]{x}$; **1.14)** $-\frac{1}{s^2+4s+4}$;

**1.15)** $s^{2/3}(8/3s-10/3)$; **1.16)** $-1+\frac{2}{(2x-4)^2}+\frac{1}{3x^2}$; **1.17)** $\frac{3-5x^2}{6\sqrt{x}}$; **3)** $\frac{x-1}{2\sqrt{x^3}}$;

**4)** $y-728=1033(x-4)$; **5)** $y=-\frac{1}{16}x-\frac{13}{16}$); **6)** (1,2)

**PROBLEMAS EN ECONOMÍA**

**1)** Encuentre la función ingreso marginal cuando $I=2q(30-0.1q)$. Encuentre el ingreso marginal para $q$=10. Interprete sus resultados. **Respuesta:** $I'=60-0.4q$; I'(10)=56

**2)** $p=\frac{q+750}{q+50}$ representa la ecuación de demanda para cierto artículo donde $p$ denota el precio por unidad cuando se demanda q unidades. Encuentre la función de ingreso marginal.

**Respuesta**: $I'=\frac{q^2+100q+37500}{(q+50)^2}$)

**3)** El Producto Nacional Bruto de cierto país crece con el tiempo de acuerdo con PNB(t)= $t^2+4t+20$. La población al tiempo t es P(t)= $0.1t^2+t+2$ (millones de habitantes). Calcule la razón de cambio del ingreso per capita en el instante t=10. (El ingreso per capita se define como $f(x)=\frac{PNB(t)}{P(t)}$ el Producto Nacional Bruto dividido entre el tamaño de la población.) **Respuesta:** 0.099

**4)** Se espera que la venta de un nuevo equipo de sonido siga el siguiente comportamiento con respecto al número de meses luego que se ha lanzado al mercado $S(t)=\frac{10t}{t^2+30}$ miles de equipos al mes.

**a)** Encuentre la razón de cambio instantánea de las ventas a los 3 meses.
**b)** Encuentre la razón de cambio instantánea de las ventas a los 6 meses.
**c)** Encuentre la razón de cambio instantánea de las ventas a los 9 meses.
**d)** Interprete sus resultados.

**Respuesta:** **a)** 0.1381x1000; **b)**-13.8; **c)** -41.4; **d)** A los diez meses se venderán aproximadamente 41 equipos menos que en el mes anterior.

**5)** La ecuación de demanda de cierto artículo es $q=\frac{250-p}{p}$. Determinar la razón de cambio de la demanda con respecto al precio. **a)** Calcule esta razón de cambio para $p$=5. **b)** Interprete sus resultados. (**Respuesta: a)** $-25$, **b)** Si el precio aumenta en 1UM, es decir cuando pasa a 6UM, entonces la demanda disminuye en aproximadamente 25 unidades)

**6)** Las ventas de un artículo $V$ depende de la inversión $x$ que se haga en publicidad mediante la relación $V(x)=100-\frac{30}{x+5}$, donde $x$ está expresado en miles de UM y $V$ en miles de unidades. **a)** Encuentre la razón de cambio promedio de las ventas con respecto a la inversión en publicidad cuando $x=5$; **b)** Interprete sus resultados. **c*)** Su interpretación se basa en hacer una estimación, haga el calculo exacto. **Respuesta: a)**300 unidades, **b)** Si la inversión aumenta en un 1000 UM, es decir ahora se gasta $x$=6 UM en publicidad, las ventas aumenta en 300 unidades aproximadamente; **c)** 272,7

**7)** Sea $C(I)=\dfrac{\sqrt{I^3}+I+\sqrt{I}+6}{\sqrt{I}+2}$ la función de consumo de cierto país, donde $I$ y $C$ vienen dadas en miles de millones de UM.. Encuentre la propensión marginal al consumo y al ahorro cuando el ingreso es de 16 miles de millones de UM. Interprete su resultado. **Respuesta** 0.868; Para un nivel de ingreso nacional de 16 mil millones de UM, si hay un incremento del ingreso de la nación de mil millones de unidades monetarias, aproximadamente el 86.8% de ese aumento se consume y el resto se ahorra)

**8)** Sea $S(I)=\dfrac{I+2\sqrt{I^3}+6}{I+10}$ la función de ahorro de cierto país. **a)** Encuentre la propensión marginal al consumo y al ahorro cuando $I=100$. **b)** Interprete sus resultados. **Respuesta:** $C'(100)=0.89$; $S(100)=0.11$

**9)** El ingreso total por la venta de $q$ artículos está dada por $I(q)=\dfrac{3q^2+3.5q}{q+1}$. Encuentre el ingreso marginal cuando se venden 30 artículos. **b)** Interprete sus resultados. **Respuesta:** 3 UM

**10)** En ciertos terrenos se estima que si se plantan 100 matas de mangos por hectárea se obtendrá un valor de la cosecha por árbol de 500 UM en su edad adulta. Se estima que por cada árbol que se siembre de más hará que el valor promedio por árbol disminuya en 4 UM. Determine la función de ingreso marginal en función del número de árboles adicionales sembrados después de 100.
**Respuesta:** $-8q+100$

**Demostración de la Regla del Producto:** Planteamos la derivada de la función $(f\cdot g)(x)$ por definición:

$$(f\cdot g)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-(f(x)g(x))}{h} \qquad \text{Se suma y resta } f(x)g(x+h)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \qquad \text{Límite de una suma}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h} \qquad \text{Se reescribe}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(g(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\left(f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) \qquad \text{Límite del producto}$$

$$=\lim_{h\to 0}g(x+h)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \qquad \text{Se usa definición de derivada}$$

$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

# REGLA DE LA CADENA

Hasta ahora funciones como $h(x) = \sqrt{x^2+1}$ no tenemos una regla para derivarla: no es una suma, producto o cociente.

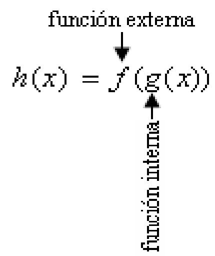
La regla de la cadena es usada para derivar funciones compuesta. La función $h(x) = \sqrt{x^2+1}$ la interpretamos como una composición. Si definimos $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 1$, entonces

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

> **Regla de la cadena**
> **Teorema.-** Sean $f$ y $g$ dos funciones tales que $f$ es diferenciable en $g(x)$ y $g$ es diferenciable en $x$, entonces $h = (f \circ g)$ es diferenciable en $x$ y
> $$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

La forma de decir la regla de la cadena en la práctica es:

*La derivada de una composición es la derivada de la función externa, f, evaluada en la interna por la derivada de la interna.*




En la notación de Leibniz si consideramos $u = g(x)$, la regla de la cadena queda expresada como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

**Ejemplo 1.-** Encuentre la derivada de $h(x) = (2x^3+1)^{33}$

**Solución:** Se define la función interna como $u = g(x) = 2x^3 + 1$ y la externa como $f(u) = u^{33}$. Entonces $h(x) = (f \circ g)(x)$ y

$$\frac{du}{dx} = g'(x) = 6x^2 \qquad \text{y} \qquad f'(u) = 33u^{32}$$

Aplicando la regla de la cadena se obtiene

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= f'(2x^3+1) \cdot 6x^2 \\ &= 33(2x^3+1)^{32} \cdot 6x^2 \\ &= 198x^2(x^3+1)^{32} \end{aligned}$$

Funciones como la del ejemplo anterior o como $h(x) = \sqrt{x^2+1}$ son de la forma $(g(x))^r$, en este último caso con $r = 1/2$. Para derivar esta forma podemos usar directamente la siguiente:

> **REGLA DE LA POTENCIA GENERALIZADA:**
> $$\left((g(x))^r\right)' = r(g(x))^{r-1} g'(x)$$

**Demostración:** Si definimos la externa como $f(u)=u^r$ y simplemente $u=g(x)$. Entonces $h(x)=(f\circ g)(x)$ y

$$\frac{du}{dx}=g'(x) \quad \text{y} \quad f'(u)=ru^{r-1}$$

Aplicando la regla de la cadena se obtiene

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(g(x))\cdot g'(x) \\ &= r\left(g(x)\right)^{r-1}\cdot g'(x) \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.-** Encuentre la derivada de las siguientes funciones: **a)** $h(x)=\sqrt{x^2+1}$ **b)** $f(x)=\dfrac{2}{x^2+3x}$

**Solución:**

**a)** Reescribimos $h(x)=(x^2+1)^{1/2}$ y aplicamos la regla de la cadena generalizada con $r=1/2$:

$$h'(x)=r((g(x))^{r-1}\cdot g'(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}-1}(2x)$$

$$h'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

**c)** Reescribimos $f(x)=2(x^2+3x)^{-1}$ y aplicamos la regla del factor constante

$$f'(x)=\left(2(x^2+3x)^{-1}\right)'$$

$$=2\left((x^2+3x)^{-1}\right)'$$

A la parte que queda por derivar se le aplica la regla de la potencia generalizada $=2r(g(x))^{r-1}\cdot g'(x)$ con $r=-1$ y $g(x)=(x^2+3x)$

$$=2(-1)(x^2+3x)^{-2}(x^2+3x)'$$

$$=2(-1)(x^2+3x)^{-2}(2x+3)$$

$$=-\frac{2(2x+3)}{(x^2+3x)^2}$$

**Comentario**. En este último ejemplo se reescribió $f(x)=\dfrac{2}{x^2+3x}$ como $f(x)=2(x^2+3x)^{-1}$. Este procedimiento resulta útil si el numerador es numérico, pero en el caso que contenga la variable es preferible considerarlo como un cociente.

**Ejemplo 3.-** Encuentre la derivada de las siguientes funciones

**a)** $y=\left(\dfrac{2x+3}{3x+5}\right)^3$; **b)** $f(x)=(3x+5)^4(x^2+2)^2$.

**Solución:**

**a)** La función $y=\left(\dfrac{2x+3}{3x+5}\right)^3$ es de la forma $(g(x))^r$. Así que aplicamos la regla de la potencia generalizada.

$$y'=r(g(x)^{r-1}\cdot g'(x)$$

$$y'=3\left(\frac{2x+3}{3x+5}\right)^2\cdot\left(\frac{2x+3}{3x+5}\right)'$$

La parte que queda por derivar es un cociente

$$y' = 3\left(\frac{2x+3}{3x+5}\right)^2 \cdot \frac{2(3x+5)-3(2x+3)}{(3x+5)^2}$$

$$y' = 3\left(\frac{2x+3}{3x+5}\right)^2 \cdot \frac{6x+10-6x-9}{(3x+5)^2}$$

$$y' = 3\left(\frac{2x+3}{3x+5}\right)^2 \cdot \frac{1}{(3x+5)^2}$$ Aplicando propiedades de exponentes podemos expresar la derivada como

$$y' = \frac{3(2x+3)^2}{(3x+5)^4}$$

**c)** La función $f(x) = (3x+5)^4(x^2+2)^2$ es un producto, para derivar aplicamos entonces la regla del producto:

$$f'(x) = \left((3x+5)^4\right)'(x^2+2)^2 + (3x+5)^4\left((x^2+2)^2\right)'.$$

Las partes a derivar tienen la forma $(g(x))^r$, así que usamos la regla de la potencia generalizada:

$$f'(x) = 4(3x+5)^3(3x+5)'(x^2+2)^2 + (3x+5)^4 2(x^2+2)(x^2+2)'$$
$$= 4(3x+5)^3 3(x^2+2)^2 + (3x+5)^4 2(x^2+2)2x.$$

En vez de desarrollar las potencias, multiplicar y agrupar términos semejantes, se va a presentar el resultado factorizado, esto será conveniente posteriormente para conseguir las raíces de la primera derivada. Para factorizar sacamos factor común: $4(3x+5)^3(x^2+2)$. Así

$$f'(x) = 4(3x+5)^3(x^2+2)\left(3(x^2+2) + x(3x+5)\right)$$ Se distribuye el 3 y $x$

$$= 4(3x+5)^3(x^2+2)\left(3x^2+6+3x^2+5x\right)$$ Se agrupan términos semejantes

$$= 4(3x+5)^3(x^2+2)\left(6x^2+5x+6\right)$$

**Ejercicio de desarrollo** Encuentre la derivada de las siguientes funciones:

**a)** $y = \left((3x^2+1)\sqrt{x+1}\right)^3$ ; **b)** $f(x) = \dfrac{(3x^2+1)^4}{(2x-1)}$; **c)** $f(x) = \dfrac{4}{3x+1}$

**La regla de la cadena también es usada en la siguiente forma:**

En ocasiones tenemos una variable $y$ que depende de una variable $u$ y $u$ a su vez es función de la variable $x$. Es claro que $y$ es una función de $x$ al realizar la composición. Se quiere conseguir $\dfrac{dy}{dx}$ sin realizar la composición de funciones, sino a través de la regla de la cadena:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.}$$

**Ejemplo 4.-** Sean $y = \sqrt{3u+1}$ y $u = x^2 + x$. Encontrar $\dfrac{dy}{dx}$

**Solución:** Usando la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2\sqrt{2u+1}}\cdot(2x+1).$$ Sustituyen $u$ por $x^2 + x$ obtenemos finalmente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2\sqrt{2(x^2+x)+1}}\cdot(2x+1)$$

**APLICACION**

**Ejemplo 1.-** Un estudio ambiental revela que el nivel medio de monóxido de carbono será aproximadamente de $c(p) = \sqrt{0.5p+17}$ partes por millón cuando la población es de $p$ miles de habitantes. Se ha modelado que la población de la comunidad será de $p(t) = 100 - \dfrac{3}{t+2}$, donde $t$ es medido en años ¿A qué razón cambiará el nivel de monóxido de carbono respecto al tiempo dentro de 4 años?

**Solución:** Se pide $\dfrac{dc}{dt}$ en $t$=4. Calculamos la derivada usando la regla de la cadena para este caso, observe que $c$ es función de $p$ y $p$ de $t$, así:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{dc}{dp}\cdot\frac{dp}{dt}$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{0.5}{2\sqrt{0.5p+17}}\cdot\frac{3}{(t+2)^2}.$$

Calculamos $\left.\dfrac{dc}{dt}\right|_{t=4}$ usando la formula anterior. Para ello debemos determinar el valor de $p$ cuando $t$=4

$$p(4) = 100 - \frac{3}{4+2} = 100 - \frac{1}{2} = 99{,}5.$$

De esta manera

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=4} = \frac{0.5}{2\sqrt{0.5(99.5)+17}}\cdot\frac{3}{(4+2)^2}$$

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=4} = 0.00255$$ partes por millón por año.

**Ejercicio de desarrollo.-** Para cada una de las siguientes funciones indique los pasos que usted haría para conseguir la derivada.

**Ejemplo:** $f(x) = 2\sqrt{x^2+1}$. Se reescribe la raíz. El 2 sale afuera de la derivación por la regla del factor constante. Se aplica la regla de la potencia generalizada $(x^2+1)^{1/2}$. La derivada interna se deriva como una suma

**a)** $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{5x + x^2}$; **b)** $f(z) = \sqrt[5]{4} - \sqrt[5]{1-z}$; **c)** $h(x) = \sqrt{x}(x^2-1)^2 - \sqrt{2}(x-1)^2$;

**d)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x}}{\sqrt{x^3}}$ ; **e)** $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$ ; **f)** $f(x)=\sqrt{(2x-1)^3(x+3)}$ ;

**g)** $y=\dfrac{\sqrt{2(x+3)}}{5}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ ; **h)** $h(x)=\dfrac{(2x-1)^5}{(1-x)^5}$ ; **i)** $f(t)=\left(\dfrac{2t-1}{1-t}\right)^5$ ;

**j)** $y=\dfrac{(2x-1)^2}{5x+1}$ ; **k)** $g(t)=\sqrt[3]{\dfrac{(t+3)^2}{2t+1}}$ ; **l)** $y=\dfrac{\sqrt{(2x-1)^2}}{5x+1}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}}+2\dfrac{(3x-1)^4}{5}$

## EJERCICIOS

**1)** Derive las siguientes funciones

**1.1)** $y=(4x-1)^6$; **1.2)** $f(x)=(4-x^2)^4$; **1.3)** $f(x)=(3x-x^2)^4$;

**1.4)** $y=4(1+3x-3x^2)^2$; **1.5)** $y=\dfrac{(3x^3+1)^3}{4}$; **1.6)** $y=(4x^2+1)^{-4}$;

**1.7)** $f(x)=\dfrac{1}{(3x-1)}$; **1.8)** $f(x)=\dfrac{2}{(3x^2+1)^2}$; **1.9)** $f(t)=\sqrt{t+3}$;

**1.10)** $f(x)=5\sqrt{2x^2+3}$; **1.11)** $y=\sqrt[3]{(1-x)^2}$; **1.12)** $f(t)=\dfrac{2}{5\sqrt{(3t-1)^3}}$; **1.13)** $f(z)=\sqrt{2z}+\sqrt{2}z$; **1.14)** $f(x)=\sqrt[5]{4x}-\dfrac{1}{\sqrt[5]{4x}}$; **1.15)** $f(x)=x(x-1)^3$;

**1.16)** $f(x)=3x^2(3-x)^5$; **1.17)** $f(t)=t^2\sqrt{t+3}$; **1.18)** $f(x)=(4x-1)^3(5x+3)^2$;

**1.19)** $y=\sqrt{(x+3)(1-x)}$; **1.20)** $f(x)=\dfrac{(3x-1)^3}{(1-5x)^3}$; **1.21)** $f(x)=\left(\dfrac{3x-1}{1-5x}\right)^3$;

**1.22)** $y=\dfrac{x^2-1}{(3x+1)^2}$; **1.23)** $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{3x-1}{2-x}}$; **1.24)** $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{(3x-1)^2}{(2-x)^5}}$;

**1.25)** $f(x)=5(x^3-2x+2)\sqrt{x+3}$; **1.26)** $f(x)=5x^3-2x+2\sqrt{3-x}$;

**1.27)** $y=\dfrac{x-1}{4-x}-\left(\dfrac{x-1}{4}\right)^3$; **1.28)** $f(z)=\dfrac{\sqrt{z^2+1}}{1-z}$; **1.29)** $h(t)=\sqrt{(2t+1)(t+2)+2}$

**2)** Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=\sqrt{(x^2-5)^3}$ cuando $x=3$

**Respuestas: 1.1)** $24(4x-1)^5$; **1.2)** $-8x(4-x^2)^3$; **1.3)** $4(3-2x)(3x-x^2)^3$;
**1.4)** $24(1-2x)(1+3x-3x^2)$; **1.5)** $\dfrac{27x^2(3x^3+1)^2}{4}$; **1.6)** $-32x(4x^2+1)^{-5}$; **1.7)** $-\dfrac{3}{(3x-1)^2}$;
**1.8)** $-24x(3x^2+1)^{-3}$; **1.9)** $\dfrac{1}{2\sqrt{t+3}}$; **1.10)** $\dfrac{10x}{\sqrt{2x^2+3}}$; **1.11)** $\dfrac{-2}{3\sqrt[3]{1-x}}$; **1.12)** $-\dfrac{9}{5\sqrt{(3t-1)^5}}$; **1.13)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{z}}+\sqrt{2}$; **1.14)** $\dfrac{\sqrt[5]{4}}{5\sqrt[5]{x^4}}+\dfrac{1}{5\sqrt[5]{4x^6}}$; **1.15)** $f(x)=(x-1)^2(4x-1)$;
**1.16)** $3x(3-x)^4(6-7x)$; **1.17)** $\dfrac{t(5t+12)}{\sqrt{t+3}}$; **1.18)** $2(4x-1)^2(5x+3)(50x+13)$; **1.19)** $\dfrac{-(x+1)}{\sqrt{(x+3)(1-x)}}$;
**1.20)** $-\dfrac{6(3x-1)^2}{(1-5x)^4}$; **1.21)** $\dfrac{-6}{(1-5x)^2}\left(\dfrac{3x-1}{1-5x}\right)^2$; **1.22)** $\dfrac{2x+6}{(3x+1)^3}$; **1.23)** $\dfrac{5}{3(2-x)^2}\cdot\sqrt[3]{\left(\dfrac{2-x}{3x-1}\right)^2}$;

**1.24)** $\dfrac{9x+7}{3\sqrt[3]{(2-x)^8(3x-1)}}$ ; **1.25)** $5\left(\dfrac{7x^3+18x^2-6x-10}{2\sqrt{x+3}}\right)$; **1.26)** $15x^2-2-\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$;

**1.27)** $\dfrac{3}{(4-x)^2}-\dfrac{3(x-1)^2}{4^3}$ ; **1.28)** $\dfrac{z+1}{(z-1)\sqrt{x^2+1}}$ **; 1.29)** $\dfrac{4t+5}{2\cdot\sqrt{2t^2+5t+4}}$ **; 2)** $y=18x-46$

**PROBLEMAS DE ECONOMÍA**

**1)** Se ha estimado que el consumo de gasolina en cierta ciudad dependerá de los habitantes que tenga y está dado por $c(p)=\sqrt{\dfrac{p^2}{2}+11}$. Si el tamaño de la población se estima en $p(t)=100-\dfrac{50}{(t+2)^2}$ miles. ¿A qué razón de cambiará el consumo de gasolina con respecto al tiempo? **Respuesta:** $\dfrac{dc}{dt}=\dfrac{50p}{(t+2)^3}$

donde $p(t)=100-\dfrac{50}{(t+2)^2}$

**2)** La ecuación de demanda de cierto artículo es $p=25\dfrac{1}{1+q}$. Determinar la razón de cambio del precio con respecto a la demanda. **a)** Calcule esta razón de cambio para $q$=9. **b)** Interprete sus resultados.

**Respuesta:** $-\dfrac{1}{4}$

**3) (**Demanda marginal) La ecuación de demanda de un artículo está dada por $q-\dfrac{1}{p+2}=0$. Determinar la demanda marginal para un precio de $p$=1. Interprete sus resultados. (Se define como demanda marginal a $dq/dp$ ) **Respuesta:** $-\dfrac{1}{9}$

**4)** Sea $C(I)=1.2I-5\sqrt{I+4}+6$ la función de consumo de cierto país, donde $I$ y $C$ vienen dadas en miles de millones de UM . **a)** Encuentre la propensión marginal al consumo y al ahorro cuando $I=32$.
**b)** Interprete sus resultados.
**Respuesta** 0.783

**5)** La función de ingreso por la venta de cierto artículo está dada por $I(q)=\dfrac{20}{(1+3x)}+20x-10$, donde $q$ está dado en miles de unidades y el ingreso en miles de UM. Determine el ingreso marginal cuando el nivel de ventas es de 1000 unidades. Interprete sus resultados. **Respuesta:** 16.250UM

**PROBLEMAS EN CIENCIAS SOCIALES**

**1) (Demografía)** Para una población de 50.000 habitantes el número de personas que se estiman vivirán más de $x$ años está modelado por $E(x)=5.000\sqrt{100-x}$. Calcule la razón de cambio de $E$ con respecto a $x$ cuando $x$=51? **Respuesta:** -357

# DERIVADAS DE FUNCIONES ESPECIALES

A continuación presentamos la derivada de funciones de uso frecuente.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$(e^x)' = e^x$$

Podemos obtener por definición la derivada del logaritmo neperiano, haciendo uso del límite notable $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$. Tenemos entonces por definición de límite que

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h}$$

Usando continuidad de la función logaritmo tenemos que

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \ln\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h}\right) = \ln\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{xh}}\right) = \ln\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}\right)^{1/x}$$

$$= \ln e^{1/x} = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}.$$

Próximamente deduciremos la derivada de $e^x$

**Observación:** La fórmula para la derivada del logaritmo es en base *e*, luego se dará la fórmula para cualquier base. Un comentario similar hay con respecto a la función exponencial.

**Ejemplo 1.-** Encontrar la derivada de las siguientes funciones:
**a)** $y = 3\ln x$; **b)** $y = xe^x$; **c)** $y = \sqrt{\ln x}$

**Solución:**

**a)** Aplicando la regla del factor constante queda

$$y' = (3\ln x)' = 3(\ln x)' = 3\cdot\frac{1}{x} = \frac{3}{x}$$

**b)**Se aplica la regla de producto

$$y' = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x$$

Finalmente podemos expresar el resultado de la derivada en forma factorizada

$$y' = e^x(1+x)$$

**c)** Se reescribe primero $y = \sqrt{\ln x} = (\ln x)^{1/2}$, se aplica la regla de la potencia generalizada

$$y' = \frac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}(\ln x)' = \frac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}\cdot\frac{1}{x}$$ Reescribiendo esta última expresión obtenemos

$$y' = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

**Ejercicio de desarrollo.** Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

**a)** $y = x\ln x$ **b)** $y = \frac{e^x}{2}$ **c)** $y = \frac{x}{e^{-x}}$

**FORMAS FRECUENTES DE FUNCIONES ESPECIALES**:

Las funciones especiales frecuentemente vienen dadas con un argumento distinto a simplemente la variable. Esta situación la podemos escribir en cada caso como: $\ln g(x)$ y $e^{g(x)}$,. Todas ellas pueden ser expresadas como una composición donde la función interna es $u = g(x)$. Para obtener la derivada de cada una de estas formas se usa la regla de la cadena. Las funciones externas *f* son respectivamente: $\ln\bullet$ , $e^{\bullet}$ . La función interna es en todos los casos: $u = g(x)$. Aplicando a cada caso la regla de la cadena:

$$h'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)\,.$$

$$\boxed{\left(\ln g(x)\right)' = \frac{1}{(g(x))}\cdot g'(x)}$$

$$\boxed{\left(e^{g(x)}\right)' = e^{g(x)}\cdot g'(x)}$$

**Ejemplo 2.-** Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

**a)** $y = \ln(x^2+1)$ **b)** $y = e^{-x}$; **c)** $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}xe^{-x^2}$.

**Solución**

**a)** La función es de la forma $\ln g(x)$. Remarcamos que la función externa es ln y la interna $g(x) = x^2+1$. Aplicamos entonces la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\ln(x^2+1)\right)' \\ &= \frac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)' \\ &= \frac{2x}{x^2+1} \end{aligned}$$

No se olvide de la derivada interna

**b)** La función es de la forma $e^{g(x)}$. La función externa es $e^{\cdot}$ y la interna $g(x) = -x$

$$y' = \left(e^{-x}\right)' = e^{-x}(-x)' = -e^{-x}$$

**c)** Para derivar $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}x\cdot e^{-x^2}$ usamos primero la regla del factor constante

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x\cdot e^{-x^2}\right)'$$ Se aplica entonces la regla del producto.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-x^2} + x(e^{-x^2})'\right)$$ Ahora queda por derivar $e^{-x^2}$ que tiene la forma $e^{g(x)}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-x^2} + x(e^{-x^2})(-x^2)'\right)$$ Al derivar $-x^2$ y reordenar la expresión queda

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-x^2} - 2x^2(e^{-x^2})\right)$$ Se saca $e^{-x^2}$ de factor común

$$y' = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}}\left(1-2x^2\right)$$

Reescritura

Cuando tenemos un logaritmo de un producto, cociente o potencia podemos usar las propiedades del logaritmo para reescribir la función de tal manera que resulte más fácil y rápido de derivar.

**Ejemplo 3.-** Encontrar la derivada de la siguiente función $y = \ln[(3x+1)(x+2)^2]$

**Solución:** Reescribimos la función usando primero la propiedad del producto y luego la de la potencia:

$$y = \ln(3x+1) + \ln(x+2)^2$$

$$y = \ln(3x+1) + 2\ln(x+2)$$

Esta última forma es la que derivamos, aplicando primero la derivada de la suma

$$y' = \left(\ln(3x+1)\right)' + \left(2\ln(x+2)\right)'$$

Se aplica regla de la cadena a $\ln(3x+1)$ y regla del factor constante al segundo término.

$$y' = \frac{1}{3x+1}\cdot(3x+1)' + 2\left(\ln(x+2)\right)'$$

$$y' = \frac{1}{3x+1}\cdot 3 + 2\frac{1}{x+2}\cdot 1$$

$$y' = \frac{3}{3x+1} + \frac{2}{x+2}$$

**Ejercicio de desarrollo.** Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

**a)** $y = \ln\sqrt{1-x}$ **b)** $y = \dfrac{x}{4e^{3x^2+1}}$; **c)** $y = \ln\left(\dfrac{2x-1}{3x\sqrt{x+1}}\right)$

**Ejemplo 4.-** Encontrar la derivada de la siguiente función: $y = \sqrt{\ln\sqrt{x}}$

**Solución:**

Reescribimos la función usando exponente fraccionario $y = (\ln x^{1/2})^{1/2}$ . Quedó escrita de la forma $(g(x))^r$, con $g(x) = \ln x^{1/2}$ y $r$=1/2. Se aplica la regla de la potencia generalizada:

$$y' = \frac{1}{2}(\ln x^{1/2})^{-1/2}\cdot(\ln x^{1/2})'$$ Se reescribe la expresión a derivar

$$y' = \frac{1}{2}(\ln x^{1/2})^{-1/2}\cdot(\frac{1}{2}\ln x)'$$ Se aplica la regla del factor constante

$$y' = \frac{1}{2}(\ln x^{1/2})^{-1/2}\cdot\frac{1}{2}(\ln x)'$$

$$y' = \frac{1}{4\sqrt{\ln\sqrt{x}}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{4x\sqrt{\ln\sqrt{x}}}$$

**Ejercicio de desarrollo.** Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

**a)** $y = \sqrt{\ln(x(x^2-1))}$ **b)** $y = \dfrac{xe^{-2x}}{x+1}$ **c)** $y = \dfrac{xe^{3x+1}-1}{e^{3x}}$

**A continuación deduciremos la derivada de la exponencial a partir de las derivadas de logaritmos**
Sea $g(x)=e^x$, como el logaritmo es la función inversa de la exponencial tenemos que

$\ln g(x)=x$ Derivamos ambos miembros

$\dfrac{g'(x)}{g(x)}=1$ Finalmente al despejar $g'(x)$ obtenemos que $g'(x)=g(x)$, esto es

$g'(x)=e^x$ Finalmente hemos concluido que $(e^x)'=e^x$

## FÓRMULAS PARA LAS DERIVADAS DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES CON BASE DISTINTA A e.

Para obtener una fórmula para la derivada de $y=\log_a g(x)$ nos basamos en la fórmula de cambio de base

$$\log_a(g(x))=\frac{\ln(g(x))}{\ln(a)}.$$

Así

$$\left(\log_a(g(x))\right)'=\left(\frac{\ln(g(x))}{\ln(a)}\right)'=\frac{1}{\ln a}\cdot(\ln(g(x))'=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{(g(x))}\cdot g'(x)$$

$$\boxed{\left(\log_a(g(x))\right)'=\frac{1}{(g(x))}\cdot g'(x)\cdot\frac{1}{\ln a}}$$

Esta fórmula es expresada en manera coloquial como sigue:

*La derivada de un logaritmo con base distinta a e es la derivada del logaritmo por un factor de corrección. En este caso el factor de corrección es* $\dfrac{1}{\ln a}$

Para obtener una fórmula para la derivada de $y=a^{g(x)}$, usamos el hecho que el logaritmo es la función inversa de la exponencial: $a^{g(x)}=e^{\ln a^{g(x)}}$. Esta la escribimos como $y=e^{\ln a\cdot g(x)}$, la cuál derivamos

$\left(a^{g(x)}\right)'=e^{\ln a\cdot g(x)}\cdot(\ln a\cdot g(x))'$ Usamos la regla del factor constante

$=e^{\ln a\cdot g(x)}\cdot\ln a\cdot g'(x)$ Finalmente usamos $a^{g(x)}=e^{\ln a^{g(x)}}$ para obtenemos

$$\boxed{\left(a^{g(x)}\right)'=a^{g(x)}g'(x)\cdot\ln a}$$

Esta derivada es expresada como:

*La derivada de una función exponencial con base distinta a e es la derivada de la exponencial por un factor de corrección. En este caso el factor de corrección es* $\ln a$

**Ejemplo 6.-** Encontrar la derivada de las siguientes funciones:
**a)** $y = \log_2(\sqrt{x} + 2x)$ **b)** $y = x\log_2(x^3 + x)$; **c)** $y = 2^{\sqrt{x}}$
**Solución:**

**a)** Se derivará usando la formula $\left(\log_a(g(x))\right)' = \frac{1}{(g(x))} \cdot g'(x) \cdot \frac{1}{\ln a}$

$$y' = \left(\log_2(\sqrt{x} + 2x)\right)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + 2x}\left(\sqrt{x} + 2x\right)' \cdot \frac{1}{\ln 2}$$

Recuerde que si la base es distinta a *e* hay un factor de corrección en la derivada

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + 2x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\right) \cdot \frac{1}{\ln 2}$$

Realizando la suma intermedia y los productos tenemos

$$= \frac{1 + 4\sqrt{x}}{2\ln 2\sqrt{x}\left(\sqrt{x} + 2x\right)}$$

**b)** Aplicamos la regla del producto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x)\log_2(x^3 + x) + x \cdot \frac{d}{dx}(\log_2(x^3 + x))$$

Se usa cambio de base en el segundo logaritmo.

$$= 1 \cdot \log_2(x^3 + x) + x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(x^3 + x)}{\ln 2}\right)$$

En el segundo término aplicamos la regla del Factor Cte.

$$= \log_2(x^3 + x) + x \cdot \frac{1}{\ln 2}\frac{d}{dx}(\ln(x^3 + x))$$

$$= \log_2(x^3 + x) + \frac{x}{\ln 2}\frac{1}{(x^3 + x)}\frac{d}{dx}(x^3 + x)$$

$$= \log_2(x^3 + x) + \frac{x}{\ln 2} \cdot \frac{1}{(x^3 + x)}(3x^2 + 1)$$

Sacamos *x* de factor común en el denominador y simplificamos.

$$= \log_2(x^3 + x) + \frac{3x^2 + 1}{\ln(2)(x^2 + 1)}$$

Alternativamente para calcular $\frac{d}{dx}(\log_2(x^3 + x))$ pudimos usar la fórmula

$$\boxed{\left(\log_a(g(x))\right)' = \frac{1}{(g(x))} \cdot g'(x) \cdot \frac{1}{\ln a}}$$

en vez de usar la fórmula de cambio de base antes de derivar.

**c) Alternativa 1.-** Reescribimos la función $y = 2^{\sqrt{x}}$ como $y = e^{\ln 2^{\sqrt{x}}} = e^{\sqrt{x}\ln 2}$. Esta última es la que derivamos, la cual tiene la forma $e^{g(x)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}\ln 2}) = e^{\sqrt{x}\ln 2}\frac{d}{dx}(\sqrt{x}\ln 2)$$

$$= e^{\sqrt{x}\ln 2}\ln 2\frac{d}{dx}(x^{1/2})$$

De una vez usamos el hecho que $e^{\sqrt{x}\ln 2} = 2^{\sqrt{x}}$

$$= 2^{\sqrt{x}}\ln 2\frac{1}{2x^{1/2}}$$

$$= \frac{2^{\sqrt{x}-1}\ln 2}{\sqrt{x}}$$

| |
|---|
| Esta forma de la derivada la reescribimos usando propiedades de exponente y multiplicación de fracciones. |

**Alternativa 2.-** Se usa la fórmula: $y' = a^{g(x)}g'(x)\cdot \ln a$
Directamente entonces obtenemos

$$y' = \left(2^{\sqrt{x}}\right)'$$

$$= 2^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\right)'\ln 2$$

$$= \frac{\ln 2}{2\sqrt{x}}2^{\sqrt{x}} = \frac{2^{\sqrt{x}-1}\ln 2}{\sqrt{x}}$$

**Ejercicio de desarrollo.** Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

**a)** $y = \log\left(\frac{(1-x)^2\sqrt{x+1}}{x^3}\right)$; **b)** $y = \frac{10^{-\frac{1}{x}}}{x}$

**APLICACIONES**

**Ejemplo 1.-** Un modelo de crecimiento de cierto país está dado por $P(t) = 25(1.03)^t$ millones de habitantes a partir de 1999. ¿A qué razón cambiará la población con respecto al tiempo $t$ años después?

**Solución:** Debemos conseguir $\frac{dP}{dt}$. La función $P(t) = 25(1.03)^t$ tiene forma exponencial

$\frac{dP}{dt} = 25\frac{d(1.03)^t}{dt}$. Se aplica $(a^x)' = \ln(a)\cdot a^{g(x)}\cdot g'(x)$, obteniendo

$$\frac{dP}{dt} = 25\ln(1.03)\cdot(1.03)^t\cdot 1.$$

Por tanto la población cambiará a una razón de $\frac{dP}{dt} = 25\ln(1.03)\cdot(1.03)^t$ millones de habitantes en el año $t$.

**Ejercicio de desarrollo.-** Para cada una de las siguientes funciones indique los pasos que usted haría para conseguir la derivada. Considere reescribir.

**Ejemplo:** $f(x) = 2x\ln(x^2+1)$. El 2 sale afuera de la derivación por la regla del factor constante. Se aplica la regla del producto, quedan dos términos en uno hay que derivar $\ln(x^2+1)$ el cual tiene la forma del logaritmo de g($x$). La derivada interna se deriva como una suma

**a)** $f(x) = \sqrt{e} + \ln x + x^2$; **b)** $f(z) = 3e^{x^2+1}$; **c)** $h(x) = \ln(x^2 - x) + \ln 2$;

**d)** $f(x)=\dfrac{\ln x}{\ln x^2}$; **e)** $g(x)=\ln\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}\right)$; **f)** $f(x)=\ln(e^x-1)$;

**g)** $y=\dfrac{\ln(3x-1)}{5}+\dfrac{1}{e^x}$; **h)** $h(x)=\ln\left(\dfrac{(x-1)^5}{(1-3x)^5}\right)$; **i)** $h(x)=\dfrac{2}{3e^{x^2}}$;

**j)** $y=\dfrac{2}{\ln(3x-1)}$; **k)** $g(t)=\dfrac{\ln x-1}{\ln(x-1)}$; **l)** $y=\dfrac{e^{2x}}{5x+1}-\dfrac{\sqrt{2}}{e}+2\dfrac{\ln 3}{x}$;

**m)** $g(x)=\ln\left(2^{x^2}\cdot 3^{x^2}\right)$; **n)** $g(x)=\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)^2$; **ñ)** $y=\dfrac{e^{2x}-x}{x}$;

**o)** $y=\dfrac{\ln(x-1)}{\log(x)}$; **p)** $h(x)=x\cdot 2^{3x}$; **q)** $g(x)=\dfrac{2}{2^x+1}$

## EJERCICIOS

**1)** Encuentre la derivada de las siguientes funciones

**1.1)** $y=\ln(3x-4)$; **1.2)** $f(x)=x\ln x^2$; **1.3)** $f(x)=\ln(1-2x^3)$;

**1.4)** $g(t)=(4t-1)^2\ln(3t+5)$; **1.5)** $h(z)=\dfrac{\ln(z^2+1)}{z}$; **1.6)** $f(z)=\dfrac{z}{\ln(z^2+1)}$;

**1.7)** $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)$; **1.8)** $f(s)=\ln\sqrt[4]{\dfrac{s^4+1}{s^4-1}}$; **1.9)** $f(s)=\sqrt{\ln\left(\dfrac{s^4+1}{s^4-1}\right)}$;

**1.10)** $y=\ln\left((3x-1)(4x+1)\right)$; **1.11)** $h(x)=\ln\left(x(x-1)^3\right)$; **1.12)** $y=\ln\left((4x-1)^2\sqrt{3x^2+1}\right)$;

**1.13)** $y=\sqrt{\ln(x)-1}$; **1.14)** $y=\ln x^4+\ln^4 x$; **1.15)** $y=\ln\left(1+\ln(x)\right)$;

**1.16)** $h(x)=\dfrac{3}{\ln(2x+1)}$; **1.17)** $g(x)=\dfrac{3}{\ln(2x)+1}$.

**2)** Encuentre la derivada de las siguientes funciones

**2.1)** $y=e^{4x-5}$; **2.2)** $y=2e^{4-3x}$; **2.3)** $y=\dfrac{e^{x^2-3x}}{4}$;

**2.4)** $y=e^{\ln x-3}$; **2.5)** $y=x^2e^{-x}$; **2.6)** $y=\dfrac{e^x-1}{e^{-x}+1}$;

**2.7)** $y=(x^3+1)e^{-3x}$; **2.8)** $y=4x^3+3^x$; **2.9)** $y=3^{x^2}$;

**2.10)** $y=3\cdot 3^x\cdot 3^{x^2}$; **2.11)** $y=3\ e$; **2.12)** $y=\dfrac{2}{e^{-2x}}+(e^{2x})^2$;

**2.13)** $y=(e^{2x}+1)^9$; **2.14)** $y=\ln(1+e^{2x})$; **2.15)** $y=\dfrac{2}{e^{-2x}+2}$;

**3)** Encuentre la derivada de las siguientes funciones. Considere reescribir

**3.1)** $y=\ln(1+e^{2x})$ ; **3.2)** $y=\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{e^{2x}}$; **3.3)** $y=\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)}$;

**3.4)** $y=\ln\left(\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^x}\right)$ ; **3.5)** $y=\ln\left(\dfrac{e^{-x}}{2}\right)$; **3.6)** $y=\sqrt{\ln x^2\cdot\ln x^3}$ ;

**3.7)** $y=\ln 2^{x^2+1}\cdot\ln 3^{x^2}$ ; **3.8)** $y=e^{2\ln x+1}$; **3.9)** $y=\ln\sqrt{x+1}\cdot\ln x$;

**3.10)** $y=\sqrt{\dfrac{e^{x^2}\cdot e}{e^x}}$ ; **3.11)** $y=\sqrt{4^x\cdot 2^{2x}}$ ; **3.12)** $y=\ln^5(e^x+1)$;

**3.13)** $y=\ln(e^x+1)^5$; **3.14)** $y=\dfrac{\ln(1-x)}{2^{x^2}}$; **3.15)** $y=\dfrac{e^{x-1}-x}{e^{x+2}}$;

**3.16)** $y=\log\left(e^{3x}\right)$; **3.17)** $y=\dfrac{\log\left(x^2\right)}{x^2}$; **3.18)** $y=\sqrt{1+\log(x)}$

**4)** Si $f(x)=3^{3\sqrt{x}}$; encuentre $f'(4)$

**5)** Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^2e^{3x-3}$ cuando $x$=1;

**6)** Cierta cantidad crece según la ley $C(t)=\dfrac{e^{kt}}{t}$. Calcule la razón de cambio porcentual de $C$ con respecto a $t$.

**Respuestas: 1.1)** $\dfrac{3}{3x-4}$ **; 1.2)** $2(\ln x+1)$ **; 1.3)** $\dfrac{-6x^2}{1-2x^3}$ **; 1.4)** $(4t-1)(8\ln(3t+5)+\dfrac{3(4t-1)}{3t+5})$ **; 1.5)** $\dfrac{2z^2-(z^2+1)\ln(z^2+1)}{z^2(z^2+1)}$ **; 1.6)** $\dfrac{(z^2+1)\ln(z^2+1)-2z^2}{(z^2+1)\ln^2(z^2+1)}$ **; 1.7)** $\dfrac{2}{x(x^2+1)}$ **; 1.8)** $-\dfrac{8s^3}{s^8-1}$ **; 1.9)** $\dfrac{-4s^3}{s^8-1}\left(\ln\left(\dfrac{s^4+1}{s^4-1}\right)\right)^{-1/2}$ **; 1.10)** $\dfrac{24x-1}{(3x-1)(4x+1)}$ **; 1.11)** $\dfrac{4x-1}{x(x-1)}$ **; 1.12)** $\dfrac{12x^2+27x+8}{(4x+1)(3x^2+1)}$ **; 1.13)** $\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x-1}}$ **1.14)** $\dfrac{4}{x}+\dfrac{4\ln^3 x}{x}$ **; 1.15)** $\dfrac{1}{(\ln(x)+1)x}$ **; 1.16)** $\dfrac{-6}{(2x+1)\ln^2(2x+1)}$ **;1.17)** $\dfrac{-3}{(\ln(2x)+1)^2 x}$ **;**

**2.1)** $4e^{4x-5}$ **;2.2)** $-6e^{4-3x}$ **; 2.3)** $\dfrac{2x-3}{4}e^{x^2-3x}$ **; 2.4)** $1$ **; 2.5)** $x(2-x)e^{-x}$ **; 2.6)** $\dfrac{2+e^x-e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}$ **; 2.7)** $3(-x^3+x^2-1)e^{-3x}$ **; 2.8)** $12x^2+3^x\ln 3$ **; 2.9)** $2\ln(3)x3^{x^2}$ **; 2.10)** $3\cdot\ln 3\cdot 3^x\cdot 3^{x^2}(1+2x)$ **; 2.11)** 0**;**

**2.12)** $4(e^{2x}+e^{4x})$ **;2.13)** $18e^{2x}(e^{2x}+1)^8$ **2.14)** $y=\dfrac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$ **; 2.15)** $\dfrac{4}{1+2e^{2x}}$ **; 3.1)** $\dfrac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$ **; 3.2)** $-2e^{-2x}$;

**3.3)** $\dfrac{(1+x)\ln(1+x)+\ln(1-x)(1-x)}{(x^2-1)(\ln(1+x))^2}$ **; 3.4)** $\dfrac{e^{-x}+2-e^x}{(1+e^x)(1-e^{-x})}$ **; 3.5) -1: 3.6)** $\dfrac{\sqrt{6}}{x}$ **; 3.7)** $(4x^3+2x)\ln 2\cdot\ln 3$;

**3.8)** 2e$x$; **3.9)** $\dfrac{x\ln x+(x+1)\ln(x+1)}{2x(x+1)}$; **3.10)** $(x-1/2)e^{(x^2-x+1)/2}$; **3.11)** $4^x\cdot\ln 4$; **3.12)** $\dfrac{5e^x\left(\ln(1+e^x)\right)^4}{1+e^x}$;

**3.13)** $\dfrac{5e^x}{1+e^x}$; **3.16)** $3\log e$ **; 3.17)** $\dfrac{2-4\ln 10\cdot\log x}{x^3\cdot\ln 10}$ **; 3.18)** $\dfrac{1}{2x\ln 10\sqrt{1+\log x}}$

**4)** $\dfrac{3^7}{4}\ln 3$ **; 5)** $y=5x-4$ **; 6)** $e^{kt}\dfrac{(kt-1)}{t^2}$

## PROBLEMAS DE CIENCIAS SOCIALES

**1)** Un modelo de crecimiento de cierto país está dado por $P(t)=30e^{0.025t}$ millones de habitantes a partir de 1999. **a)**¿A qué razón cambiará la población respecto al tiempo 2009? **b)** Calcule la razón porcentual con que cambiará la población $t$ años después de 1999? **Respuesta: a)** 0.96 millones por año; **b)** 2.5%.

**2)** Un modelo de crecimiento poblacional de cierto país está dado por $P(t)=25(1+r)^t$ millones de habitantes a partir de 1999. Encuentre la razón de cambio de $P$ con respecto a $t$.

**Respuesta:** $25(1+r)^t\ln(1+r)$

**3)** Una población crece de acuerdo al siguiente modelo logístico $P(t)=\dfrac{25}{2+3e^{-0.04t}}$

Calcule la tasa de crecimiento de la población en el momento *t*. **Respuesta:** $\dfrac{3e^{-0.04t}}{2+e^{-0.04t}}$

## PROBLEMAS DE ECONOMÍA

**1)** Sea $\bar{c}=\dfrac{400}{\ln(q+4)}$ el costo promedio de producir *q* unidades. **a)** Encuentre la función de costo marginal. **b)** Calcule el costo marginal para *q*=30. **c)** Interprete sus resultados.

**Respuesta: a)** $C'(q)=\dfrac{400\left((q+4)\ln(q+4)-q\right)}{(q+4)\left(\ln(q+4)\right)^2}$ **b)** $C'(30)\approx 5.48$

**2)** Sea $C=25\ln(q^2+1)+12$ el costo total de producir *q* unidades de un producto. **a)** Encuentre la función de costo marginal. **b)** Encuentre el costo marginal para *q*=3; **c)** Interprete sus resultados.

**Respuesta: a)** $C'(q)=\dfrac{50q}{q^2+1}$; **b)** $C'(3)=15$

**3)** Suponga $p=\dfrac{25}{\ln(q+2)}$ representa la ecuación de la demanda de un determinado producto. Determine **a)** la función de ingreso marginal; **b)** la función ingreso marginal para *q*=2; **c)** Interprete sus resultados.

**Respuestas: a)** $I(q)=25\dfrac{\left((q+2)\ln(q+2)-q\right)}{(q+2)\left(\ln(q+2)\right)^2}$ ; **b)** $I'(2)\approx 11.52$

**4)** Sea $\bar{c}(q)=\dfrac{400e^{(3q+200)/300}}{q}$ el costo promedio de producir *q* unidades. Encuentre la función de costo marginal y el costo marginal para *q*=98. **Respuestas:** $4e^{(3q+200)/300}$ ; 20.75

**5)** Sea $p=25e^{-0.02q}$ la ecuación de la demanda de un determinado artículo. Determine la función de ingreso marginal y la función ingreso marginal para *q*=98. Interprete sus resultados.
**Respuesta:** $I'(q)=25e^{-0.02q}(1-0.02q)$; $I'(98)=-24e^{-1.96}=-3.38$

**6)** (Precio marginal) La ecuación de demanda de cierto artículo es $p=25e^{-0.02q}$. **a)** Determinar la función de precio marginal. **b)** Evalúe el precio marginal para un nivel de producción de 100 unidades. **c)** Interprete sus resultados (Recuerde que el precio marginal es $dp/dq$ ).**Respuesta: a)** $-0.5e^{-0.02q}$

**7)** Una máquina se deprecia *t* años después de su compra a un valor dado por $D(t)=5000e^{-0.03t}$. Calcule la razón de cambio y la razón de cambio porcentual con respecto al tiempo.
**Respuesta:** $D(t)=-150e^{-0.03t}$

**8)** Sea $S(I)=0.3I-0.5e^{-0.2I}$ la función de ahorro de cierto país. **a)** Encuentre la propensión marginal al consumo y al ahorro cuando $I=5$ miles de millones. **b)** Interprete sus resultados.
**Respuesta** $S'(5)=0.337$

**9)** Un capital de 6000UM se deposita en un banco a una tasa anual del 8% capitalizada continuamente. Calcule la razón de cambio y la tasa de cambio porcentual con respecto al tiempo? **Respuesta:** $48e^{0.08t}$

**10)** Un capital de 5000UM se deposita en un banco a una tasa anual del 8% capitalizada anualmente. Calcule la razón de cambio y la tasa de cambio porcentual con respecto al tiempo?

**11)** Por la venta de un artículo se obtiene una utilidad de 10U.M Se ha decidido hacer una campaña publicitaria a fin de aumentar las ventas. Si se invierte *x* UM se estima que se venderán $1000(1-e^{-kx})$ artículos donde *k*=0,001. Sea *U* la utilidad cuando se han invertido *x* U.M. en publicidad. **a)** Calcule $\dfrac{dU}{dx}$. **b)** Evalúe esta derivada cuando se han invertido 1000 U.M. en publicidad. **c)** Ahora evalúe cuando la inversión es de 3.000 U.M. **d)** Intérprete sus resultados.

**VERDADERO O FALSO.**

Diga si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique.

**1.1)** ( ) La derivada se interpreta como la razón de cambio momentánea de $y$ con respecto a $x$

**1.2)** ( ) $(\ln(2))' = \frac{1}{2}$; **1.3)** ( ) $f(x) = |x - 1|$ no es derivable en 0

**1.4)** ( ) $\left(\frac{e^x}{e^x - x}\right)' = \frac{(e^x)'}{(e^x - x)'}$ ;

**1.5)** ( ) Si $f$ es derivable en un punto entonces es continua en ese punto

**1.6)** ( ) Si $f$ es continua entonces es derivable.; **1.7)** ( ) $f(x) = x^{2/5}$ es derivable en su dominio.

Para las siguientes afirmaciones suponga que $f$ y $g$ son diferenciables

**1.8)** ( ) $(2f(x) - 3g(x))' = 2f'(x) - 3g'(x)$ ; **1.9)** ( ) $\left(\ln(\frac{1}{g(x)})\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)}$

**1.10)** ( ) $(xf(x))' = f(x) + xf'(x)$; **1.11)** ( ) $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f'(x)}}$

**1.12)** La ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3$ en el punto (2,8) es $y - 8 = 3x^2(x - 2)$

**1.13)** El Ingreso de la unidad 51 es estimado por el ingreso marginal evaluado en 50

**1.14)** $U(21) - U(20)$ es la utilidad exacta por producir y vender la unidad 21.

**Respuestas:1.1)**Verdadera; **1.2)** Falsa, la derivada vale cero porque es una constante;**1.3)**Falso, no es derivable en 1; **1.4)** Falsa, se debe aplicar correctamente la regla del cociente; **1.5)**Verdadera; **1.6)**Falsa y= $|x|$ es continua pero no derivable en 0; **1.7)**Falso, no es derivable en 0; **1.8)** Verdadera, se aplica la regla de la diferencia y luego la del factor constante; **1.9)**Verdadera, se reescribe y se aplica la derivada $(-\ln(g(x)))'$, no hay que olvidar la derivada interna; **1.10)** Verdadero, se aplica la regla del producto; **1.11)** Falsa, hay que reescribir y aplicar la regla de la potencia generalizada, queda $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$; **1.12)** Falso, hay que evaluar la derivada en $x$ =2, la pendiente es 12.**1.13)** Verdadera, $\frac{I(51) - I(50)}{1} \approx I'(50)$ e $I(51) - I(50)$ es el ingreso exacto de la unidad adicional a 50.**1.14)** Verdadera, $U(21)$ es la utilidad por la producción y venta de las primeras 21 unidades si se le quita la utilidad de las primeras 20 se obtiene la utilidad de la unidad 21.

Derivada de $f$ en $c$ Por definición $f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$

Razón de cambio porcentual de $C(x)$ $= 100\frac{C'(x)}{C(x)}$

Ecuación de la recta tangente a la grafica de $f$ en el punto $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ $(y - y_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Propensión marginal al ahorro y al consumo

$$I = C(I) + S(I)$$
$$C'(I) = \frac{dC}{dI}$$
$$1 = \frac{dC}{dI} + \frac{dS}{dI}$$

REGLAS Y FORMULAS

| | |
|---|---|
| R. de la potencia | $(x^r)' = rx^{r-1}$ |
| R. del factor constante | $(cf(x))' = cf'(x)$ |
| R. de la suma | $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ |
| R. del producto | $((f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ |
| R. del cociente | $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ |
| R. de la potencia generalizada | $\left((g(x))^r\right)' = r(g(x))^{r-1}g'(x)$ |
| Derivada de funciones exponenciales con base e | $\left(e^{g(x)}\right)' = e^{g(x)} \cdot g'(x)$ |
| Derivada de logaritmos neperianos | $(\ln g(x))' = \frac{1}{(g(x))} \cdot g'(x)$ |
| Derivada de funciones exponenciales con base $a$ | $\left(a^{g(x)}\right)' = a^{g(x)}g'(x) \cdot \ln a$ |
| Derivada de logaritmos generales | $(\log_a(g(x)))' = \frac{1}{(g(x))} \cdot g'(x) \cdot \frac{1}{\ln a}$ |