

Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Mérida Edo. Mérida

**Determinación de la Región de Estabilidad de una
Órbita Periódica para un Sistema de Reacción y
Difusión.**

Mérida – Venezuela
1.999

Determinación de la Región de Estabilidad de una Órbita Periódica para un Sistema de Reacción y Difusión.¹

Trabajo especial de grado, presentado por el Lic. Giovanni E. Calderón S., como requisito para optar al título de Magister Scientiae en Matemáticas.

**Tutor: Dr. Marcos Lizana
Cotutor: Dra. María C. Trevisan**

Mérida, Septiembre de 1.999

¹Este trabajo contó con el financiamiento del CDCHT de la Universidad de Los Andes bajo el proyecto C-941-99-05-D

¹Los cálculos numéricos realizados en este trabajo fueron parcialmente soportados por el Centro Nacional de Cálculo Científico (CeCalCULA)

Esta tesis esta dedicada a mis hijos Nube Blanca y Simón Ernesto

RESUMEN

Dado un sistema de reacción y difusión con condiciones de frontera de tipo Neumann e iguales a cero se tiene que si el sistema sin difusión tiene una órbita ω -periódica no constante ésta es solución del sistema con difusión. Además es conocido que si la órbita es orbital asintóticamente estable entonces esta estabilidad se mantiene para el sistema de reacción y difusión cuando los coeficientes difusivos son iguales a varían poco.

Dada la importancia que tiene saber cual es la región, en el plano de las difusiones, de estabilidad. En este trabajo nosotros encontramos una aproximación de la misma por medio de métodos numéricos, confirmamos numéricamente los resultados existentes sobre estabilidad o inestabilidad de la órbita y conjeturamos resultados más generales. Además, se prueba la convergencia de uno de los métodos numéricos usados la cual no existía en la literatura.

AGRADECIMIENTO

A mi esposa y mi querida familia por el apoyo incondicional que me han brindado en la realización de esta nueva meta. Que los Dioses los bendigan.

A los Profesores Marcos Lizana y María C. Trevisan por guiarme en la realización de este trabajo. Muchas gracias.

A los Prof. Hugo Leiva, Gustavo Carrero y Hildebrando Rodríguez, sus sugerencias siempre han sido escuchadas.

A mis queridos amigos, para ustedes un agradecimiento muy especial.

A mi casa de estudios la **Universidad de Los Andes**.

Contenido

Introducción	ii
1 Marco Teórico	1
1.1 Nociones Preliminares	1
1.2 Semigrupo Analítico generado por el operador Laplaciano sujeto a condiciones de frontera del tipo Neumann	8
1.3 Ecuación de Reacción-Difusión	13
1.4 Estabilidad orbital y aplicación de Poincaré.	16
2 Determinación de la región de estabilidad de una órbita periódica en el plano de los coeficientes de difusión	20
2.1 Métodos Numéricos para resolver el sistema de reacción y difusión con un problema de frontera de tipo Neumann	20
2.1.1 El Método del Splitting	20
2.1.2 Esquema Predictor-Corrector de Crank-Nicolson	23
2.2 Resultados Numéricos	26
2.2.1 Ejemplo 1: Construyendo un problema con las condiciones de Henry	27
2.2.2 Ejemplo 2: Sin las condiciones de inestabilidad de Henry	35
2.3 Conclusiones	37
Bibliografía	38

Introducción

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones de reacción y difusión

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= D\Delta u(t, x) + F(u(t, x)) \quad , \quad t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad , \quad \text{en } \partial\Omega, \\ u(0, x) &= u_0(x) \quad , \quad x \in \Omega \quad \text{y} \quad u_0 \in L^2,\end{aligned}\tag{0.1}$$

donde $D = \text{diag}(d_1, d_2)$ y $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una función de clase C^2 , $F = (f, g)$. De aquí en adelante supondremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, conexo y acotado con frontera suave.

Supongamos que el sistema sin difusión

$$u'(t) = F(u(t)) \quad , \quad t > 0\tag{0.2}$$

tiene una solución ω -periódica no trivial $\varphi(t)$. Obviamente $\varphi(t)$ es también una solución periódica del sistema (0.1), pues $\varphi(t)$ no depende de la variable espacial y (0.1) se está considerando con un problema de frontera $\partial u/\partial n = 0$. Además, consideraremos la linealización de (0.2) alrededor de $\varphi(t)$:

$$z'(t) = F'(\varphi(t))z(t).\tag{0.3}$$

A fin de establecer un marco adecuado para plantear el problema que estudiaremos en esta tesis enunciaremos un teorema que aparece en Dan Henry [13] página 251.

Teorema 0.1 Sean ρ_1 y ρ_2 los exponentes de Floquet de (0.3).

1. Si $\rho_2 > 0$, entonces φ es una solución inestable del sistema (0.1).
2. Si $\rho_2 < 0$ y $D = dI + \text{diag}(\epsilon_1, \epsilon_2)$ con ϵ_i suficientemente pequeños, entonces $\varphi(t)$ es orbital asintóticamente estable para el sistema (0.1).
3. Si $\int_0^\omega \frac{\partial g}{\partial v}(\varphi(t))dt > 0$, $\rho_2 < 0$ y $d_1 = \epsilon$ y $d_2 = 1/\epsilon$ con ϵ suficientemente pequeño, entonces φ es orbitalmente inestable para la EDP (0.1).

Notemos que la prueba que aparece en el libro de Dan Henry es difícil de seguir y que la tercera afirmación simplemente fue planteada como un ejercicio. Una prueba elegante y autocontenida de las afirmaciones 1 y 2 se puede ver en Leiva [15], las cuales tienen validez para sistemas no necesariamente bidimensionales.

En otras palabras, el teorema anterior nos dice que: si el sistema sin difusión (0.2) posee una solución periódica orbital asintóticamente estable ella es solución de (0.1) y su estabilidad se preserva cuando uno de los exponentes de Floquet asociados a la órbita periódica es cero y el otro tiene parte real negativa, para $d_1 = d + \varepsilon_1$ y $d_2 = d + \varepsilon_2$, con $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ suficientemente pequeños. Además, ese mismo resultado afirma que cuando uno de los coeficientes difusivos es suficientemente pequeño y el otro grande, la órbita se desestabiliza cuando se verifica que

$$\int_0^\omega \frac{\partial g}{\partial v}(\varphi(t)) dt > 0 \quad .$$

En este trabajo nos concentraremos en la búsqueda de las fronteras de estabilidad de la órbita periódica en el plano de los parámetros (d_1, d_2) . Este objetivo lo realizaremos utilizando algoritmos numéricos-gráficos.

A fin de clarificar las dificultades del problema analicemos las publicaciones de Morita [17]. Este autor publicó un resultado sobre un interesante fenómeno que surge con las ecuaciones parabólicas con retardo. Supongamos que se está considerando el siguiente sistema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u(t, x) + f(u_t, \alpha), \quad u_t(s) = u(t + s, x), \quad \forall s \in [-1, 0],$$

con condiciones de Neumann nulas en la frontera de Ω . Morita mostró en ese artículo que: si el sistema sin difusión tiene una bifurcación supercrítica para algún α_0 , entonces se pueden elegir los coeficientes difusivos suficientemente pequeños de modo que la órbita periódica que está sobre la componente conexa que emana de la bifurcación de Hopf se desestabiliza. En ese mismo artículo, Morita afirma en la página 43, ejemplo B, que el método desarrollado para las ecuaciones de reacción y difusión con retardo se puede extender a las ecuaciones de reacción y difusión sin retardo. Es más, cito:

“More detailed discussion together with interesting examples will be given in the forthcoming paper [16], ...

[16] Y. Morita, K. Kishimoto and M. Mimura, Diffusive instability of spatially homogeneous periodic solutions to Lotka-Volterra, in preparation”

Luego de una ardua búsqueda del mencionado artículo, recurrimos directamente al autor el cual nos confirmó que ese artículo nunca se publicó y que en su defecto había publicado [18]. En este segundo artículo, Morita sí produce resultados para desestabilizar órbitas periódicas, pero espacialmente no homogéneas de sistemas del tipo (0.1).

Sobre las soluciones periódicas espacialmente homogéneas, no se pronuncia. Y es exactamente sobre este tipo de soluciones que está centrado nuestro interés.

Motivados por la poca información que existe sobre la susceptibilidad de la órbita periódica espacialmente homogénea a ser desestabilizada y a la importancia que tiene en aplicaciones a modelos de biomatemática, física teórica, etc. en saber dónde está localizada la frontera crítica de estabilidad de este tipo de soluciones, en el plano de las difusiones (d_1, d_2) , en este trabajo nos propusimos y logramos alcanzar los siguientes objetivos

1. Se adaptan dos métodos numérico-gráfico para la determinación de la frontera de estabilidad de las soluciones periódicas de (0.1), a saber, el método del splitting y el método de Crank-Nicolson.
2. Se da una prueba autocontenida y simple del método del splitting, ya que en la literatura que conocemos no conseguimos su demostración.
3. Se construyó analíticamente un ejemplo en un espacio de dimensión uno donde la órbita periódica espacialmente homogénea orbital-asintóticamente estable se desestabiliza por cuenta de los coeficientes de difusión, quedando absolutamente descartada la geometría del dominio como la posible causante de la desestabilización.
4. Se encuentran numéricamente las fronteras de estabilidad del ejemplo anteriormente mencionado.

El trabajo está dividido en dos capítulos.

En el primer capítulo se plantea el problema en un espacio abstracto, se demuestran propiedades básicas del operador Laplaciano sujeto a condiciones de frontera de tipo Neumann, las cuales son usadas para probar que la parte lineal de (0.1) genera un semigrupo analítico. Este resultado asegura la existencia y unicidad de la solución de (0.1). Además se citan los resultados más relevantes sobre la estabilidad de órbitas periódicas para ecuaciones diferenciales autónomas.

En el segundo capítulo se desarrollan los objetivos 1-4 antes mencionados.

Finalmente, queremos hacer unos comentarios respecto de los métodos numéricos, uno tipo splitting y el otro basado en los esquemas predictor-corrector de Crank-Nicolson, utilizados en este trabajo. Estos métodos están básicamente contruidos para resolver problemas regulares. Como este no es el caso y siendo el tiempo final grande, el costo en tiempo computacional es alto. Evidentemente queda la inquietud de construir y/o adaptar algún método numérico más eficientes que refleje las peculiaridades del sistema. Nosotros no profundizaremos en esta dirección.

A pesar de las debilidades de los métodos numéricos empleados, ambos arrojan los mismos resultados. Estos resultados numéricos nos llevan a conjeturar que la estabilidad

de la órbita se preserva cuando los coeficientes difusivos difieren entre ellos en una cantidad significativa. En el caso de la ecuación de Van der Pol, la cual posee un único ciclo límite orbital-asintóticamente estable en grande, cuando se introduce difusión, los experimentos numéricos evidencian que la estabilidad se preserva independientemente de la magnitud de los coeficientes de difusión.

Al finalizar este trabajo quedó absolutamente claro que se necesita una investigación teórica adicional para resolver alguno de los puntos antes discutidos.

Capítulo 1

Marco Teórico

En este capítulo resumiremos los hechos más relevantes relacionados con la existencia y unicidad de las soluciones del sistema de reacción y difusión siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= d_1 \Delta u + f(u, v, \alpha), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= d_2 \Delta v + g(u, v, \alpha),\end{aligned}\tag{1.1}$$

con

$$u(0, x) = u_0(x) \quad , \quad v(0, x) = v_0(x) \quad , \quad \text{con } x \in \Omega \text{ y } u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad , \quad \forall (t, x) \in (0, \infty) \times \partial\Omega .$$

1.1 Nociones Preliminares

Consideremos la siguiente ecuación parabólica con condiciones de frontera de tipo Neumann

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u(t, x), \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ en } \partial\Omega,\end{aligned}\tag{1.2}$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad u_0 \in L^2(\Omega, \mathbb{R}),$$

Definamos ahora el operador lineal no acotado

$$A : D(A) \subset L^2 \longrightarrow L^2 \quad \text{con} \quad Au := -\Delta u ,$$

$$D(A) := \left\{ \varphi \in H^2(\Omega, \mathbb{R}) : \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\}\tag{1.3}$$

donde $H^2(\Omega, \mathbb{R})$ es el espacio de Sobolev de todas las funciones $\varphi \in L^2 = L^2(\Omega, \mathbb{R})$, tales que $D^\alpha \varphi \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$, con $\alpha = 1, 2$ y $D^\alpha \varphi$ denota la derivada débil de φ .

Resolveremos (1.2) considerando $u(t)$ como una función definida en $[0, +\infty)$ con valores en $D(A)$. Así pues, la notación $u(t)$ designará un elemento de $D(A)$. Definiendo el problema de valor inicial P.V.I

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -Au(t), & t > 0 \\ u(0) = u_0, & u_0 \in D(A) \end{cases} \quad (1.4)$$

y pidiendo en (1.2) que $u_0 \in D(A)$ la resolución de la ecuación (1.2) es equivalente a la resolución de (1.4). Veremos que la existencia y unicidad de la solución de (1.4) queda justificada al probar que el operador $-A$ genera un semigrupo analítico. Para tal propósito recordaremos algunas definiciones y resultados previos y finalizaremos probando que el operador $-A$ genera un semigrupo analítico.

Denotemos por \mathbb{E} un espacio de Banach cualquiera y por $\mathcal{L}(\mathbb{E})$ el espacio de todos los operadores lineales y continuos de \mathbb{E} en sí mismo.

Definición 1.1 *Supongamos que para todo $t \in [0, +\infty)$ existe un operador $T(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ tal que:*

- i) $T(0) = I_{\mathbb{E}} :=$ *identidad en \mathbb{E} ,*
- ii) $T(t+s) = T(s)T(t)$ *para cada $t, s \geq 0$, y*
- iii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$, *para cada $x \in \mathbb{E}$.*

*Si una familia $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ cumple (i) y (ii) ésta es llamada un **semigrupo** y si además se verifica la condición (iii) entonces tal familia es llamada un **semigrupo fuertemente continuo**, también se les suele llamar *semigrupo de tipo C_0* , o simplemente *C_0 semigrupo*. Cuando para cada $x \in \mathbb{E}$, un C_0 semigrupo es una función analítica real en t sobre el intervalo $(0, +\infty)$, se dice que el **semigrupo es analítico**.*

Definición 1.2 *Denotemos por $D(A) := \{x \in \mathbb{E} : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(T(t)x - x), \text{ exista}\}$. Al operador $A : D(A) \subseteq \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ definido como sigue*

$$Ax := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(T(t)x - x), \quad x \in D(A)$$

*se le denomina **generador infinitesimal** del semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.*

El siguiente resultado se encuentra probado en el Teorema 2.4 de Pazy [20], pág. 4-5.

Proposición 1.1 Sea $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 semigrupo y sea A su generador infinitesimal. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:

i) Para cada $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ y

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

ii) $\overline{D(A)} = \mathbb{E}$ y A es un operador lineal cerrado.

Definición 1.3 Sea H un espacio de Hilbert y $A : D(A) \subseteq H \rightarrow H$ un operador lineal no acotado. Se dice que A es **monótono**, si $(Av, v) \geq 0$ para todo $v \in D(A)$. Si además $R(I + A) = H$, $R =$ rango, se dice que A es **maximal monótono**; es decir,

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \text{ tal que } u + Au = f.$$

Definición 1.4 Sea H un espacio de Hilbert y $A : D(A) \subseteq H \rightarrow H$ un operador lineal no acotado. Se dice que A es **simétrico** si $(Au, v) = (u, Av)$, $\forall u, v \in D(A)$. A es **autoadjunto**, si $A^* = A$, donde A^* denota el operador adjunto de A .

Definición 1.5 Sea X un espacio vectorial normado y $A : Y \subseteq X \rightarrow X$ un operador lineal. El **conjunto resolvente** de A denotado como $\rho(A)$, es el conjunto de todos los escalares $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que:

i) $\overline{R(\lambda I - A)} = X$.

ii) El operador $(\lambda I - A)^{-1}$ existe y es continuo.

El **espectro** de A , denotado como $\sigma(A)$, es el complemento del conjunto resolvente.

Además a los conjuntos

$$1. C_\sigma(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \overline{R(\lambda I - A)} = X \text{ y } (\lambda I - A)^{-1} \exists \text{ y no es continuo}\},$$

$$2. R_\sigma(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \overline{R(\lambda I - A)} \subsetneq X \text{ y } (\lambda I - A)^{-1} \exists\},$$

$$3. P_\sigma(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : (\lambda I - A)^{-1} \nexists\},$$

los llamaremos espectro continuo, espectro residual y espectro puntual de A , respectivamente.

Lema 1.2 Sean X e Y dos espacios normados y $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Entonces, el operador A^{-1} existe y es acotado sobre el rango de A si y sólo si existe algún $k > 0$ tal que $k\|x\| \leq \|Ax\|$, $\forall x \in X$

Prueba: ver teorema 14.9 de Bachman [3], pág. 241. ■

Proposición 1.3 *Sea A un operador maximal monótono. Entonces, A es simétrico si y sólo si A es autoadjunto.*

Prueba: ver proposición VII.6 de Brézis [4], pág. 113. ■

Proposición 1.4 *Sea A un operador no acotado densamente definido sobre un espacio de Hilbert. Si A es autoadjunto, entonces $\sigma(A)$, el espectro de A , es real y el espectro residual $R_\sigma(A) = \emptyset$. Además, para todo $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, con $\beta \neq 0$, se verifica que*

$$\|(A - \lambda I)^{-1}y\| \leq \frac{1}{|\beta|} \|y\|, \quad \forall y \in R(A - \lambda I). \quad (1.5)$$

Prueba: Para ver que $\sigma(A)$ es real tomemos $\lambda = \alpha + i\beta$, con $\beta \neq 0$, y probemos que éste pertenece al conjunto resolvente de A , es decir $\lambda \in \rho(A)$.

Supongamos que $\lambda \in P_\sigma(A)$. Entonces existe $x \neq 0$, tal que $Ax = \lambda x$; y por lo tanto

$$\lambda(x, x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x)$$

lo cual implica que $\lambda = \bar{\lambda}$ y esto contradice el hecho que $\beta \neq 0$. Así, $\lambda \notin P_\sigma(A)$.

Como $\lambda \notin P_\sigma(A)$ entonces se tiene que el operador

$$(A - \lambda I)^{-1} : R(A - \lambda I) \longrightarrow H$$

existe. Para probar que $\lambda \in \rho(A)$ faltaría mostrar que:

- i) $(A - \lambda I)^{-1}$ es continuo y,
- ii) $\overline{R(A - \lambda I)} = H$.

Denotemos por $y = (A - \lambda I)x$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= ((A - \alpha)x - i\beta x, (A - \alpha)x - i\beta x) \\ &= \|(A - \alpha)x\|^2 - i\beta(x, (A - \alpha)x) + i\beta((A - \alpha)x, x) + |\beta|^2 \|x\|^2 \\ &= \|(A - \alpha)x\|^2 + |\beta|^2 \|x\|^2, \end{aligned}$$

lo cual implica que $|\beta|^2 \|x\| \leq \|y\|^2$, es decir, $\|x\| \leq \frac{1}{|\beta|} \|y\|$, pues $\beta \neq 0$. Esta desigualdad es (1.5) y por el lema 1.2, se verifica que $(A - \lambda I)^{-1}$ es un operador continuo.

Veamos ahora que $\overline{R(A - \lambda I)} = H$. Si $N(A - \lambda I)$ denota el espacio nulo de $A - \lambda I$ se tiene (ver Brézis [4], pág. 28)

$$\overline{R(A - \lambda I)} = N((A - \lambda I)^*)^\perp = N(A^* - \bar{\lambda}I)^\perp = N(A - \bar{\lambda}I)^\perp. \quad (1.6)$$

Como $Im(\bar{\lambda}) = -\beta \neq 0$ entonces de forma análoga a como se hizo al comienzo de la prueba se puede demostrar que $(A - \bar{\lambda}I)^{-1}$ existe, lo que implica que

$$N(A - \bar{\lambda}I) = \{x \in H : (A - \bar{\lambda}I)x = 0\} = \{0\}.$$

Pues, si $x \neq 0$ y pertenece a $N(A - \bar{\lambda}I)$ entonces $\bar{\lambda}$ es un autovalor de A y en consecuencia $(A - \bar{\lambda}I)$ no es inyectivo, lo cual contradice la existencia de $(A - \bar{\lambda}I)^{-1}$. De esto tenemos que $N(A - \bar{\lambda}I)^\perp = 0^\perp = H^* \equiv H$, y de (1.6) se sigue que $\overline{R(A - \bar{\lambda}I)} = H$; por lo tanto $\lambda \in \rho(A)$.

Mostremos finalmente que $R_\sigma(A) = \emptyset$.

Supongamos que $R_\sigma(A) \neq \emptyset$, y sea $\lambda \in R_\sigma(A) \subseteq \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Como $\lambda = \bar{\lambda}$ y A es autoadjunto, se cumple que

$$\{0\} = N(A - \lambda I) = N(A^* - \bar{\lambda}I) = N((A - \lambda I)^*).$$

Por lo tanto

$$H = \{0\}^\perp = N((A - \lambda I)^*)^\perp = \overline{R(A - \lambda I)}$$

lo cual es una contradicción, pues $\lambda \in R_\sigma(A)$. Así, $R_\sigma(A)$, el espectro residual de A , es vacío. ■

Lema 1.5 *Sea H un espacio de Hilbert y $A : D(A) \subseteq H \rightarrow H$ un operador lineal no acotado. Si A es maximal monótono, entonces $(I + A) : D(A) \rightarrow H$ es biyectivo, con inversa $(I + A)^{-1}$ acotada y $\|(I + A)^{-1}\| \leq 1$.*

Prueba: Obviamente, de la definición de maximal monótono, $I + A$ es sobreyectivo. Veamos que $I + A$ es inyectivo.

Supongamos que $I + A$ no es inyectivo, es decir existen $x_1 \neq x_2$ en $D(A)$ tales que $(I + A)x_1 = (I + A)x_2$; entonces $(I + A)u = 0$ con $u := x_1 - x_2 \neq 0$. Por lo tanto $u = -Au$, de donde obtenemos que $(u, u) = -(Au, u)$. Como $(Au, u) \geq 0$, se sigue que $u = 0$, lo cual contradice el hecho supuesto de que $x_1 \neq x_2$. Así, obtenemos la inyectividad del operador $I + A$.

Por lo tanto, si $f \in H$, $\exists! u \in D(A)$ tal que $(I + A)u = f$, de donde $(u, u) + (Au, u) = (f, u)$ y por lo tanto

$$\|u\|^2 = (u, u) \leq (f, u) \leq \|f\|\|u\| \quad \text{y} \quad \|u\| \leq \|f\|.$$

Se tiene así que para el operador

$$\begin{aligned} (I + A)^{-1} &: H \longrightarrow D(A) \\ f &\longrightarrow (I + A)^{-1}f = u, \end{aligned}$$

$\|(I + A)^{-1}f\| = \|u\| \leq \|f\|$. Entonces $(I + A)^{-1}$ es acotado y $\|(I + A)^{-1}\| \leq 1$. ■

Los resultados anteriores son válidos para cualquier operador que cumpla las condiciones requeridas en los enunciados. Pero nuestro objetivo está centrado en el operador Laplaciano. Así que, veamos algunos resultados sobre éste.

Proposición 1.6 *El operador $A = -\Delta : D(A) \subset L^2 \longrightarrow L^2$ es un operador autoadjunto, siendo $D(A) = \{\varphi \in H^2(\Omega, \mathbb{R}) : \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$. Por lo tanto, el espectro del operador $A = -\Delta$ es real.*

Prueba: Sea $u \in D(A)$. Usando la identidad de Green en espacios de Sobolev, obtenemos que

$$(Au, u) = \int_{\Omega} (-\Delta u)u dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} u dS = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq 0.$$

Por lo tanto, A es un operador monótono.

Veamos ahora que A es maximal monótono; es decir, que: $R(I + A) = L^2$. Pero esto es una consecuencia del Teorema IX.26 de Brézis [4], el cual afirma que para toda $f \in L^2$, la ecuación $u - \Delta u = f$, con condición de Neumann, posee una única solución $u \in H^2$. Así para demostrar que A es autoadjunto sólo basta demostrar que A es simétrico. En efecto, si $u, v \in D(A)$ se tiene que:

$$(Au, v) = \int_{\Omega} (-\Delta u)v dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

y

$$(u, Av) = \int_{\Omega} u(-\Delta v) dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} u dS = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx,$$

lo cual implica que $(Au, v) = (u, Av)$. ■

Hasta ahora lo que sabemos del espectro del operador $-\Delta$ sujeto a condiciones de borde de tipo Neumann es que es real. Ahora mostremos que el espectro de $-\Delta$ es puntual y no negativo.

Proposición 1.7 *$\lambda = 0$ es un autovalor simple del operador Laplaciano definido sobre $D(A) = \{\varphi \in H^2(\Omega, \mathbb{R}) : \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$*

Prueba: Es evidente que las funciones constantes son soluciones de:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Si v es una solución de (1.7) entonces

$$0 = (-\Delta v, v) = \int_{\Omega} (-\Delta v)v dx = \int_{\Omega} \nabla v \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} v dS = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx = 0.$$

Por lo tanto $\nabla v = 0$ en Ω y en consecuencia v es una función constante. Resulta así que el autoespacio generado por el autovalor $\lambda = 0$ es de dimensión uno. ■

Proposición 1.8 *El espectro del operador $A = -\Delta : D(A) \subset L^2 \longrightarrow L^2$ es puntual, discreto y su único punto de acumulación es $+\infty$. Además se verifica que $\sigma(A) \geq 0$, es decir $\lambda \geq 0, \forall \lambda \in \sigma(A)$.*

Prueba: Sabemos por el Lema 1.5 que el operador $(A+I)$ es biyectivo y que el operador $\tilde{T} = (A+I)^{-1}$ es acotado.

Como la inclusión i de $H^2(\Omega) \subset_{\supset} L^2(\Omega)$ es compacta, tenemos que el operador $T := i \circ \tilde{T} : L^2 \longrightarrow L^2$ es también un operador compacto, teorema 17.6 de Bachman [3], pág. 290. Por lo tanto, por el teorema VI.8 de Brézis [4], pág 95, sabemos que el espectro de T está formado por el elemento cero y que todo elemento de él distinto de cero es un autovalor; además se verifica una de las siguientes condiciones:

- i) $\sigma(T) = \{0\}$,
- ii) $\sigma(T) \setminus 0$ es finito,
- iii) $\sigma(T) \setminus 0$ es una sucesión que tiende a cero.

Descartemos i) y ii).

Sabemos por la proposición 1.7 que $\lambda = 0$ es un autovalor del operador A y esto implica de manera inmediata que $\mu = 1$ es un autovalor del operador T y la primera situación queda descartada.

Supongamos ahora que $\sigma(T) \setminus 0$ es finito. Es fácil ver que el cero no es un autovalor de T , por lo tanto $\sigma(T) \setminus 0 = P_\sigma(T) = \{\mu_n\}_{n=1}^k$ es finito. Ahora como A es un operador autoadjunto, se tiene entonces que T también lo es. Por lo tanto, por el teorema VI.11 de Brézis [4], pág. 97 y por las Alternativas de Fredholm tenemos que:

$$L^2(\Omega, \mathbb{R}) = \bigoplus_{n=1}^k E_n,$$

donde $E_n = N(T - \mu_n I)$ este es el autoespacio generado por el autovalor μ_n de T , de dimensión finita para $1 \leq n \leq k$. Por lo tanto $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ es de dimensión finita. Contradicción. De esta manera, $\sigma(T) \setminus 0$ es una sucesión que tiende a cero.

Por otra parte, es fácil probar que $\lambda \in \sigma(A)$ si y sólo si $\lambda + 1 \in \sigma(A + I)$ y en forma general para $C_\sigma(A)$, $R_\sigma(A)$ y $P_\sigma(A)$. Así, de todo lo anterior y del hecho que:

$$\sigma(A + I) = \left\{ \frac{1}{\mu_n} : \mu_n \in \sigma(\tilde{T}) \right\} = \left\{ \frac{1}{\mu_n} : \mu_n \in \sigma(T) \right\} \quad y$$

$$\sigma(A) = \left\{ \lambda_n := \frac{1}{\mu_n} - 1 : \mu_n \in \sigma(T) \right\}$$

tenemos que $\sigma(A) = P_\sigma(A) = \{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ donde $\lambda_0 = 0$, pues $1 \in \sigma(T)$, y $\lambda_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Veamos que $\sigma(A) = P_\sigma(A) \geq 0$. Como A es maximal monótono, entonces si u es la autofunción asociada al autovalor λ , tenemos que:

$$(Au, u) = (\lambda u, u) = \lambda \|u\|^2 \geq 0.$$

Por lo tanto $\lambda \geq 0$. ■

1.2 Semigrupo Analítico generado por el operador Laplaciano sujeto a condiciones de frontera del tipo Neumann

Para demostrar que el operador $A = -\Delta$ genera un semigrupo analítico usaremos esencialmente la siguiente definición y los dos teoremas que enunciamos a continuación.

Definición 1.6 *Se dice que A es un operador sectorial si para algún $\theta \in (0, \pi/2)$, $M \geq 1$ y $a \in \mathbb{R}$ se cumple que:*

i) *El sector $S_{a,\theta} = \{\lambda : \theta \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\} \subset \rho(A)$ y*

ii) $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|} \quad \forall \lambda \in S_{a,\theta}.$

Teorema 1.9 *Sea \mathbb{E} un espacio de Banach y A un operador lineal cerrado, $A : D(A) \rightarrow \mathbb{E}$, con $\overline{D(A)} = \mathbb{E}$. Si A es un operador sectorial entonces $-A$ es el generador infinitesimal del semigrupo analítico $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$.*

Teorema 1.10 (Hille-Yosida) *Sea \mathbb{E} un espacio de Banach. Un operador lineal no acotado $-A$ es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo de contracciones $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ si y sólo si:*

i) $-A$ es cerrado y $\overline{D(-A)} = \mathbb{E}$,

ii) $\rho(-A) \supseteq \mathbb{R}^+$ y

iii) para cada $\lambda > 0$ se cumple que $\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$.

Estos teoremas se encuentran probados en la pág. 20 de Henry [13] y en la pág. 8 de Pazy [20] respectivamente.

Proposición 1.11 *Sea $A = -\Delta : D(A) \subset L^2 \rightarrow L^2$, donde*

$$D(A) = \{\varphi \in H^2(\Omega, \mathbb{R}) : \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega\},$$

entonces $-A = \Delta$ es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo de contracciones.

Prueba: Veamos que se cumplen las condiciones del teorema de Hille-Yosida. En efecto, sabemos que $\sigma(A) \geq 0$, es decir, $\sigma(-A) \leq 0$ y $\rho(-A) \supseteq \mathbb{R}^+$. También por la proposición 1.6 el operador A es maximal monótono, por lo tanto, por la proposición VII.1 de Brézis [4], pág. 101, él cumple las siguientes afirmaciones:

1. el operador $-A$ es cerrado y $D(-A)$ es denso en L^2 , y
2. para todo $\lambda > 0$ se cumple que $\|(I + \lambda A)^{-1}\| \leq 1$, es decir:

$$\|(I + \lambda A)^{-1}\| = \|\lambda^{-1}(\lambda^{-1}I + A)^{-1}\| \leq 1.$$

Así,

$$\|(\frac{1}{\lambda}I + A)^{-1}\| \leq |\lambda| \quad \forall \lambda > 0.$$

Poniendo $\mu = \frac{1}{\lambda} > 0$, para todo $\mu > 0$ tenemos que:

$$\|(\mu I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\mu|}.$$

De esta manera, por el teorema 1.10, $-A = \Delta$ es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo. ■

Teorema 1.12 *El operador $A = -\Delta : D(A) \subset L^2 \rightarrow L^2$ donde*

$$D(A) = \{\varphi \in H^2(\Omega, \mathbb{R}) : \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$$

es un operador sectorial. Por lo tanto, $-A = \Delta$ es el generador infinitesimal del semigrupo analítico $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$.

Prueba: Sin pérdida de generalidad y por cuestiones de comodidad tomaremos el sector S_θ con $\theta = \pi/4$, pues la prueba sería análoga para cualquier $\theta \in (0, \pi/2)$. Por lo tanto veamos que el sector

$$S_{\pi/4} = \{\lambda : \frac{\pi}{4} \leq |\arg(\lambda)| \leq \pi, \lambda \neq 0\} \subset \rho(A).$$

En efecto, como $\sigma(A) \geq 0$, entonces el resolvente $\rho(A) \supset \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Además, el sector $S_{\pi/4} \subset \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Por lo tanto $S_{\pi/4} \subset \rho(A)$.

Verifiquemos ahora que existe $M \geq 1$ tal que

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in S_{\pi/4}$$

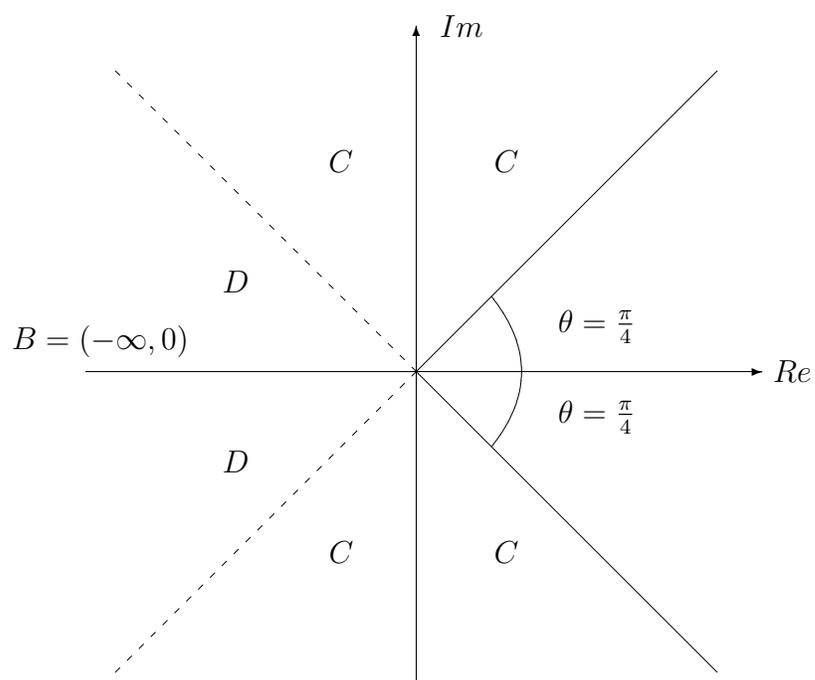


Figura 1.1: $S_{\frac{\pi}{4}} = B \cup C \cup D$

Denotemos por:

$$\begin{aligned} B &= (-\infty, 0), \\ C &= \{\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} : |\beta| \geq |\alpha| \text{ y } \beta \neq 0\}, \\ D &= \{\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} : |\alpha| > |\beta|, \beta \neq 0 \text{ y } \alpha < 0\}. \end{aligned}$$

De aquí se sigue, como se muestra claramente en la figura que $S_{\pi/4} = B \cup C \cup D$.

Caso 1: Sea $\lambda = \alpha + i\beta \in (-\infty, 0)$.

De la proposición 1.11 se tiene que para todo $\mu > 0$ se cumple que $\|(I + \mu A)^{-1}\| \leq 1$ es decir

$$\|(I + \mu A)^{-1}\| = \|(-\mu(-\mu^{-1}I - A))^{-1}\| = |\mu^{-1}| \|(-\mu^{-1}I - A)^{-1}\| \leq 1.$$

Sea $\mu > 0$ tal que $\mu = -\frac{1}{\lambda}$, entonces tenemos $|\lambda| \|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq 1$. Por lo tanto,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in (-\infty, 0).$$

Caso 2: Sea $\lambda = \alpha + i\beta \in C$, es decir $|\beta| \geq |\alpha|$ y $\beta \neq 0$.

De la proposición 1.4 tenemos que si $\lambda = \alpha + i\beta$ con $\beta \neq 0$ entonces se cumple que

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\beta|}.$$

Ahora, como $|\beta| \geq |\alpha|$, tenemos $|\lambda|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 \leq 2|\beta|^2$, lo que implica que,

$$\frac{\sqrt{2}}{|\lambda|} \geq \frac{1}{\beta}.$$

Por lo tanto,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\beta|} \leq \frac{\sqrt{2}}{|\lambda|}.$$

Caso 3: Sea $\lambda = \alpha + i\beta \in D$, es decir $|\alpha| \geq |\beta|$, $\beta \neq 0$ y $\alpha < 0$.

Como $-A$ es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo de contracciones, entonces haciendo uso del corolario 3.6 de Pazy [20], pág. 11, tenemos que:

$$\rho(-A) \supseteq \{z : \operatorname{Re}(z) > 0\},$$

y para estos z se cumple (como en el caso 1)

$$\|(zI + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}(z)}.$$

Escojamos ahora $z \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda = -z$, es decir

$$\|(-\lambda I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|Re(\lambda)|} = \frac{1}{|\alpha|}.$$

Siendo $|\lambda|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 \leq 2|\beta|^2$ y $\frac{\sqrt{2}}{|\lambda|} \geq \frac{1}{|\alpha|}$, entonces

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{\sqrt{2}}{|\lambda|}.$$

De esta manera, basta escoger $M = \sqrt{2}$ para que se cumpla que:

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in S_{\pi/4}.$$

Por lo tanto el operador $A = -\Delta$ es un operador sectorial y $-A = \Delta$ es el generador infinitesimal del semigrupo analítico $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$. ■

Teniendo probado que el operador $-A$ genera un semigrupo analítico $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ veamos que el problema de Cauchy (1.4) tiene una única solución, definida para todo $t \geq 0$.

Definamos $u(t) := T(t)u_0$. Por la proposición 1.1 se sigue que $T(t)u_0 = u(t) \in D(A)$ y $u'(t) = T'(t)u_0 = T(t)Au_0 = AT(t)u_0 = Au \quad \forall t \geq 0$, con $u(0) = T(0)u_0 = u_0$. Por lo tanto $u(t)$ es solución del PVI (1.4).

Probemos ahora que dicha solución es única.

Sabemos que $u(t) = T(t)u_0$ es solución de (1.4). Sea $v(t)$ otra solución de (1.4) y definamos $F(s) := T(t-s)v(s)$, con $s \in [0, t]$, y $t \geq 0$. Como $v(s) \in D(A)$ entonces por la proposición 1.1 $F(s)$ resulta diferenciable en s , y

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}F(s) &= AT(t-s)v(s) + T(t-s)v'(s) \\ &= T(t-s)Av(s) - T(t-s)Av(s) \equiv 0, \quad \forall s \in [0, t]. \end{aligned}$$

Por lo tanto $F(s)$ es constante $\forall s \in [0, t]$. En particular $F(0) = F(t)$. Como $F(0) = T(t)v(0) = T(t)u_0 = u(t)$ y $F(t) = T(0)v(t) = v(t)$, entonces $u(t) = v(t) \quad \forall t \geq 0$ y la unicidad queda demostrada.

Observemos que a pesar de saber que el operador $A = -\Delta$ sujeto a condiciones de frontera del tipo Neumann genera un semigrupo analítico, aún no se tiene una expresión explícita de éste. Para tal representación ver proposición 2.5 de Carrero [6], pág. 22.

Por otro lado, los resultados obtenidos en el teorema anterior los podemos extender a un problema de Neumann en forma vectorial, es decir, dado el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= D\Delta u(t, x) \quad , \quad t > 0, \\
\frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad , \quad \text{en } \partial\Omega, \\
u(0, x) &= u_0(x) \quad \quad u_0 \in L_n^2,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

donde $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y cuyos autovalores tienen parte real positiva, Ω un subconjunto acotado de \mathbb{R}^n con frontera suave y u una función en $C^{1,2}(\Omega^*, \mathbb{R}^n)$ con $\Omega^* = \mathbb{R}^+ \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Podemos plantear el problema como una E.D.O. en un espacio abstracto; para esto sea $L_n^2 = L^2(\Omega, \mathbb{R}) \times \cdot s \times L^2(\Omega, \mathbb{R}) = X$ el espacio de Hilbert dotado del producto interno

$$\langle u, v \rangle_n = \int_{\Omega} (u_1(x)v_1(x) + \cdot s + u_n(x)v_n(x))dx = \sum_{i=1}^n \langle u_i, v_i \rangle ,$$

y consideremos ahora el operador lineal no acotado

$$\begin{aligned}
A : D(A) \subset L_n^2 &\longrightarrow L_n^2 \quad \text{donde} \quad Au := -D\Delta u \quad , \quad y \\
D(A) &:= \left\{ \varphi \in H^2(\Omega, \mathbb{R})^n : \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\} .
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Así, de forma análoga a como se hizo para el problema (1.2), podemos definir un PVI en un espacio abstracto y tener una equivalencia en la resolución de dicho PVI con la resolución del problema (1.8) pidiendo que $u_0 \in D(A)$. Además, se demuestra en el teorema 2.6 de Carrero [6], pág 25 que el operador $-A$ definido en (1.9) es sectorial y por lo tanto es el generador infinitesimal del semigrupo analítico $T(t) = e^{-At}$, $t \geq 0$.

1.3 Ecuación de Reacción-Difusión

Debido a que el teorema (0.1) es dado para EDO en un espacio abstracto en esta sección nos concentraremos en escribir nuestro problema de reacción-difusión de forma abstracta y así estar en el marco teórico adecuado para estudiar la estabilidad de la órbita periódica $\varphi(t)$ usando los resultados 1 y 2 de dicho teorema.

Consideremos la ecuación diferencial siguiente:

$$\begin{aligned}
u_t + Au &= f(u) \quad , \quad t > 0 \\
u(0) &= u_0 \quad , \quad u_0 \in L_n^2,
\end{aligned} \tag{1.10}$$

donde asumimos que A , dado en (1.9), es un operador sectorial. Por lo tanto las potencias fraccionales del operador $A_1 = A + aI$, con $a > 0$ están bien definidas, y los

espacios $X^\alpha = DA_1^\alpha$ con $\alpha \in [0, 1]$ dotados con la norma del gráfico $\|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|$ están bien definidos. A f la definimos como: $f : U \subset X^\alpha \longrightarrow X$, donde U es un subconjunto abierto de X^α para algún $\alpha \in [0, 1]$ y f una función localmente Lipschitz.

Una solución del PVI (1.10) en $(0, \tau)$ es una función continua $u : [0, \tau) \longrightarrow X$ tal que: $u(0) = u_0$ y para todo $t \in (0, \tau)$ se tiene $u(t) \in D(A)$, u_t existe y satisface (1.10). Además, se pide que la aplicación $t \longmapsto f(u(t))$ sea localmente Hölder continua y $\int_0^\rho \|f(u(t))\| dt < \infty$ para algún $\rho > 0$.

Relacionemos ahora la solución del PVI (1.10) con la solución de una ecuación integral que involucra el semigrupo analítico generado por el operador $-A = D\Delta$. Del lema 3.3.2 de Henry [13], pág. 53, se tiene que para todo $\tau > 0$ se cumple que si $u : [0, \tau) \longrightarrow X$ es solución del PVI (1.10) entonces

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(u(s))ds, \quad t \in (0, \tau], \quad (1.11)$$

donde $T(t)$ es el semigrupo analítico generado por el operador $-A = D\Delta$. Recíprocamente, si $u : (0, \tau) \longrightarrow X^\alpha$ es una función continua, $\int_0^\rho \|f(u(t))\| dt < \infty$ para algún $\rho > 0$, y la ecuación integral (1.11) se satisface para todo $t \in (0, \tau]$ entonces $u : (0, \tau) \longrightarrow X^\alpha$ es solución del PVI (1.10) en $(0, \tau)$.

Es este resultado el que permite obtener el siguiente teorema de existencia y unicidad local para el PVI (1.10) cuya prueba se encuentra en la pág. 54 de Henry [13].

Teorema 1.13 *Consideremos el PVI (1.10), entonces para cada $u_0 \in U$ existe $\tau = \tau(u_0) > 0$ tal que el PVI (1.10) posee una única solución $u : (0, \tau) \longrightarrow X^\alpha$ con $u(0) = u_0$.*

Dada esta discusión, consideremos ahora el siguiente sistema de ecuaciones de reacción-difusión sujeto a condiciones de Neumann

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= D\Delta u(t, x) + f(u(t, x)) \quad , \quad t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad , \quad \text{en } \partial\Omega \quad , \\ u(0, x) &= u_0(x) \quad , \quad x \in \Omega \quad \text{y} \quad u_0 \in L^2, \end{aligned} \quad (1.12)$$

donde $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y cuyos autovalores tienen parte real positiva, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función C^2 y u una función $C^{1,2}(\Omega^*, \mathbb{R}^n)$ con $\Omega^* = \mathbb{R} \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Usando la misma idea que en el problema anterior, buscamos plantear el sistema (1.12) en forma abstracta como en (1.10).

Definamos el operador de evolución:

$$\begin{aligned} f^e &: X^\alpha \longrightarrow X \quad \text{con } \alpha \in (3/4, 1] \\ u &\longrightarrow f^e(u) \quad \text{tal que } f^e(u)(x) = f(u(t, x)). \end{aligned}$$

Veamos que f^e está bien definida. Se sabe por el lema 1.6.1 de Henry [13], pág. 39, que si $\alpha \in (3/4, 1]$ se cumple que $X^\alpha \subset C(\bar{\Omega})$. Por lo tanto $f^e(u)(\cdot) = (f \circ u)(\cdot) \in C(\bar{\Omega})$, pues f y u son continuas y $f^e(u) \in X$. Entonces f^e es continua con respecto a la primera variable y se puede ver que f^e es localmente Lipschitz.

Probemos que f^e es localmente Lipschitz, es decir, para $r > 0$ existe $k = k(\alpha) > 0$ tal que $\|f^e(u_1) - f^e(u_2)\|_{L_n^2} \leq k\|u_1 - u_2\|_\alpha$ si $\|u_1\|, \|u_2\| \leq r$.

Como $f \in C^2$, entonces dado $\rho > 0$ existe $L(\rho) > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L(\rho)\|x - y\| \quad \text{en } \|x\|, \|y\| \leq \rho.$$

Por el mismo lema 1.6.1 se sabe que para $3/4 < \alpha \leq 1$ las siguientes inclusiones son continuas:

- i) $X^\alpha \subset C(\Omega, \mathbb{R}^n)$
- ii) $X^\alpha \subset X = L_n^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Por lo tanto usando i), $\exists l > 1$ tal que:

$$\sup_{x_0 \in \Omega} \|u(x_0)\|_{\mathbb{R}^n} \leq l\|u\|_\alpha \quad u \in X^\alpha.$$

Ahora, dado $r > 0$ tomemos $\rho = lr$, entonces:

$$\|f(u_1(x_0)) - f(u_2(x_0))\| \leq L(\rho)\|u_1(x_0) - u_2(x_0)\| \quad \text{si } \|u_1\|_\alpha, \|u_2\|_\alpha < r \quad \text{y } x_0 \in \Omega.$$

Por lo tanto,

$$\|f^e(u_1) - f^e(u_2)\|_{L^2} \leq L(lr)\|u_1 - u_2\|_{L^2} \quad \text{si } \|u_1\|_\alpha, \|u_2\|_\alpha \leq r.$$

Como la inclusión ii) es continua, $\exists k > 0$ tal que:

$$\|f^e(u_1) - f^e(u_2)\|_{L^2} \leq L(lr)\|u_1 - u_2\|_{L^2} \leq k\|u_1 - u_2\|_\alpha$$

es decir, f^e es localmente Lipschitz.

Con los hechos anteriores se puede plantear el sistema (1.12) de manera abstracta como el PVI siguiente

$$\begin{aligned} u_t + Au &= f^e(u), \quad t > 0 \\ u(0) &= u_0, \quad u_0 \in X^\alpha, \end{aligned} \tag{1.13}$$

donde el operador A está dado como en (1.9).

1.4 Estabilidad orbital y aplicación de Poincaré.

En esta sección resumiremos los hechos más relevantes sobre la estabilidad orbital de soluciones periódicas de sistemas autónomos del tipo

$$x' = f(x) \tag{1.14}$$

Si φ es una órbita periódica del sistema (1.14) a través del punto x_o y Σ es un hiperplano perpendicular a φ en x_o , entonces para un punto $x \in \Sigma$ suficientemente cerca de x_o , la solución $\phi(t, x)$ de (1.14) a través de x en $t = 0$ cruza de nuevo Σ en un punto $P(x)$ cerca de x_o ; ver figura 1.2 Entonces la función $x \rightarrow P(x)$ es llamada la

Figura 1.2: La función de Poincaré

aplicación de Poincaré.

El teorema 1 de Perko [21], pág. 194, y el cual enunciamos a continuación, muestra cuando la aplicación Poincaré $P(x)$ está bien definida y es de clase C^1 .

Teorema 1.14 *Sea W un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y sea $f \in C^1(W)$. Supongamos que $\phi(t, x_o)$ es una solución periódica de (1.14) de período ω y que la órbita periódica*

$$\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n / x = \phi(t, x_o), 0 \leq t \leq \omega\}$$

está contenida en W . Sea Σ el hiperplano ortogonal a φ en x_o , es decir

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n / (x - x_o) \cdot f(x_o) = 0\}.$$

Entonces existe $\delta > 0$ y una única función $\tau(x)$, definida y continuamente diferenciable para $x \in N_{\delta(x_o)}$, tal que $\tau(x_o) = \omega$ y $\phi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma \quad \forall x \in N_{\delta(x_o)}$.

Teniendo en cuenta el teorema anterior podemos definir la aplicación de Poincaré como sigue:

Definición 1.7 Sean φ , Σ , ϕ y $\tau(x)$ definidas como en el teorema 1.14. Entonces la aplicación de Poincaré asociada a la órbita periódica viene dada por:

$$P(x) = \phi_{\tau(x)}(x), \quad x \in N_\delta(x_o) \cap \Sigma.$$

A continuación citaremos algunos resultados sobre la aplicación de Poincaré para sistemas en el plano.

Sin pérdida de generalidad asumamos que el origen ha sido trasladado al punto $x_o \in \varphi \cap \Sigma$; la línea normal Σ puede ser una línea que pasa por el origen, ver figura 1.3.

Figura 1.3: La línea Σ normal a φ la cual pasa por φ en 0

El punto $0 \in \varphi \cap \Sigma$ y divide la línea Σ en dos segmentos abiertos Σ^+ y Σ^- donde Σ^+ queda completamente en el exterior de φ . Sea s la distancia a lo largo de Σ con $s > 0$ para puntos en Σ^+ y $s < 0$ para puntos en Σ^- .

Del teorema 1.14, el mapa de Poincaré $P(s)$ está definido para $|s| < \delta$ y se tiene $P(0) = 0$. Para ver cómo la estabilidad de la órbita φ es determinada por $P'(0)$, introduzcamos la función desplazamiento

$$d(s) = P(s) - s.$$

Entonces $d(0) = 0$ y $d'(s) = P'(s) - 1$; y sigue del Teorema del Valor Medio que para $|s| < \delta$

$$d(s) = d'(\xi)s$$

para algún ξ entre 0 y s . Ya que $d'(s)$ es continua, el signo de $d'(s)$ debería ser el mismo que el de $d'(0)$ para $|s|$ suficientemente pequeño y lo suficientemente grande para que $d'(0) \neq 0$. Así, si $d'(0) < 0$ se sigue que $d(s) < 0$ para $s > 0$ y que $d(s) > 0$ para $s < 0$, es decir, la órbita φ es un ciclo ω -límite estable (figura 1.3). Análogamente, si $d'(0) > 0$ entonces φ es un ciclo límite inestable. Tenemos así el siguiente resultado:

si $P(0) = 0$ y $P'(0) < 1$, entonces φ es un ciclo límite estable y si $P(0) = 0$ y $P'(0) > 1$, entonces φ es un ciclo límite inestable.

Por lo tanto, la estabilidad de φ es determinada por la derivada de la aplicación de Poincaré.

El siguiente corolario da una fórmula para $P'(0)$ en función del campo vectorial (1.14).

Corolario 1.15 *Sea W un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 y supongamos que $f \in C^1(W, \mathbb{R}^2)$. Sea $\varphi(t)$ una solución periódica de (1.14) de periodo ω . Entonces la derivada de la función de Poincaré $P(s)$ a lo largo de la línea Σ normal a $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2/x = \varphi(t) - \varphi(0), 0 \leq t \leq \omega\}$ en $x = 0$ es dada por*

$$P'(0) = \exp \int_0^\omega \operatorname{div} f dt,$$

donde $\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$.

Bajo las hipótesis del corolario anterior la solución periódica $\varphi(t)$ es un ciclo límite (órbita periódica aislada) estable si

$$\int_0^\omega \operatorname{div} f dt < 0 \tag{1.15}$$

y un ciclo límite inestable si

$$\int_0^\omega \operatorname{div} f dt > 0.$$

Cuando $\int_0^\omega \operatorname{div} f dt = 0$ estamos en presencia de un caso crítico y se precisa de mas investigación para decidir sobre la estabilidad de la órbita periódica.

Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental principal de la ecuación variacional

$$z' = A(t)z \tag{1.16}$$

con $A(t) = f'(\varphi(t))$. Entonces existe una matriz B $n \times n$ tal que $\Phi(\omega) = e^{\omega B}$, donde ω es el período de $\varphi(t)$. A los autovalores de la matriz B se le llaman **los exponentes de Floquet** y los autovalores de $\Phi(\omega)$ **multiplicadores característicos**. Del corolario 3.9 de [1], tenemos que si (1.16) tiene una solución ω -periódica entonces uno de los multiplicadores característicos es $\lambda = 1$. Por otro lado, es fácil ver, usando el teorema de Liouville, que los multiplicadores característicos satisfacen la siguiente relación:

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \exp \left(\int_0^\omega \operatorname{Tr} A(t) dt \right), \quad \operatorname{Tr} A(t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Por lo tanto para un sistema de dimensión 2 los multiplicadores característicos vienen dados por

$$\lambda_1 = 1 ; \quad \lambda_2 = \exp \left(\int_0^\omega \text{Tr}A(t)dt \right).$$

O lo que es equivalente, los exponentes de Floquet son

$$\rho_1 = 0; \quad \rho_2 = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \text{Tr}A(t)dt = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \text{div } f dt.$$

Tiene lugar el siguiente resultado:

Teorema 1.16 *Sea $\varphi(t)$ una solución periódica no constante de (1.14). Supongamos que los exponentes de Floquet ρ_1 y ρ_2 del sistema periódico (1.16) verifican $\rho_1 = 0$ y $\text{Re}(\rho_2) < -\mu < 0$. Entonces $\varphi(t)$ es orbital asintóticamente estable. Es decir, existen constantes positivas ρ y δ tales que, si $\psi(t)$ es una solución de (1.14) con*

$$d(\psi(t_o), \gamma) \leq \rho \quad \gamma = \{\varphi(t) : t \in \mathbb{R}\},$$

para algún t_o , entonces $\exists h \in \mathbb{R}$ ($h = h(\psi)$) tal que

$$\|\psi(t+h) - \varphi(t)\| \leq \delta e^{-\mu t}, \quad t \geq 0.$$

Capítulo 2

Determinación de la región de estabilidad de una órbita periódica en el plano de los coeficientes de difusión

Como ya mencionamos en la introducción, nuestro objetivo principal es la determinación de las fronteras de estabilidad en el plano de los coeficientes de difusión de una órbita periódica espacialmente homogénea. Con el fin de alcanzar nuestro objetivo vamos a discutir en primer lugar, los métodos numéricos que utilizaremos.

2.1 Métodos Numéricos para resolver el sistema de reacción y difusión con un problema de frontera de tipo Neumann

2.1.1 El Método del Splitting

A continuación describiremos un método tipo splitting el cual puede ser usado para resolver numéricamente un sistema del tipo

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= d_1 \Delta u + f(u, v, \alpha), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= d_2 \Delta v + g(u, v, \alpha),\end{aligned}\tag{2.1}$$

con

$$u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x), \quad x \in \Omega \text{ y } u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad \forall (t, x) \in (0, t_f) \times \partial\Omega,$$

donde $\Omega = [0, 1]$.

Introduciendo la red

$$R_{h,k} = \{(t_n, x_m) : t_n = nk, \quad x_m = mh, \quad m = 0 : M \text{ y } n = 0 : p\},$$

la solución aproximada de (2.1) en el tiempo t_n se calcula de la siguiente manera:

Paso 1: Para $t \in [t_{n-1}, t_n]$ resolvemos el problema

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = d_2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}$$

con $\tilde{u}(t_{n-1}, x) = u(t_{n-1}, x)$, $\tilde{v}(t_{n-1}, x) = v(t_{n-1}, x)$ y

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial n} = 0, \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Si $n = 1$ $\tilde{u}(t_0, x) = u_0$, $\tilde{v}(t_0, x) = v_0 \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$.

Paso 2: Resolvemos para t desde t_{n-1} hasta t_n el PVI siguiente:

$$\frac{d}{dt} u^*(t) = f(u^*, v^*) \tag{2.3}$$

$$\frac{d}{dt} v^*(t) = g(u^*, v^*)$$

con u^* y v^* en \mathbb{R}^m y condiciones iniciales dadas por las soluciones $\tilde{u}(t_n, x)$ y $\tilde{v}(t_n, x)$.

Paso 3: Definimos como solución de (2.1) en el tiempo t_n a la solución del PVI (2.3) en el instante $t = t_n$; es decir $(u^*(t_n, x), v^*(t_n, x))$.

Paso 4: Repetimos los pasos anteriores desde $n = 1 : p$, donde $kp = t_f$

Una de las razones de la elección de este método para resolver (2.1) es su fácil implementación. Además, tanto para el sistema parabólico (2.2) como para el PVI (2.3) existen métodos numéricos cuya estabilidad y convergencia son bien conocidas. Por ejemplo, el método de diferencias finitas usado para resolver (2.2) está bien documentado en Calderón [5]. La aplicación del método de diferencias finitas en el paso 1 nos genera soluciones aproximadas U y V en los nodos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_M$ de la red y por lo tanto, el paso 2 consiste en la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Para la resolución de estos PVI usamos el ODE45 de MATLAB, el cual está basado en los métodos de Runge-Kutta-Fehlberg de orden 4-5. Este código se encuentra bien documentado en [2] o en la página web MATLAB ODE Suite L.F. Shampine and M.W. Reichelt. Estos métodos además cuentan con códigos altamente comprobados. Si bien es cierto que el método de Runge-Kutta-Fehlberg trabaja adecuadamente en algunos problemas de perturbaciones singulares no puede ser utilizado en problemas fuertemente stiff. De hecho, en nuestro trabajo algunos de nuestros ejemplos son problema rígidos, para lo cual sustituimos el ODE45 por el ODE23s.

Cuando los algoritmos numéricos para la resolución de los problemas (2.2) y (2.3) son convergentes, bastará probar que la solución del splitting converge a la solución exacta de (2.1), lo cual mostraremos en la siguiente sucesión.

Un problema presente en la resolución de (2.2) son sus coeficientes difusivos, pues la diferencia de escala de los mismos nos obliga a tomar un paso temporal y espacial bastante pequeños, lo cual se traduce en un tiempo de cómputo grande.

Antes de proceder a probar la convergencia del método del splitting, queremos señalar que no hemos conseguido en la literatura ninguna referencia sobre este esquema y su implementación numérico y por ende tampoco podemos citar su convergencia como algo ya conocido. Este método fue sugerido por el Dr. John Neuberger de la Universidad de North Texas, Denton, Estados Unidos.

Prueba de la Convergencia del Método Splitting

Por simplicidad tomemos (2.1) en forma vectorial, es decir, definamos $w = (u, v)$, $F = (f, g)$ y $w_0(x) = (u_0(x), v_0(x))$.

Del teorema 1.12 se concluye la existencia y unicidad de la solución de (2.2) dada por $T(t)w_0(x)$ donde $T(t)w_0(x) = e^{A(t-t_{n-1})}w_S(t_{n-1}, x)$. Así, la solución de (2.3) y por lo tanto la solución dada por el método del splitting de (2.1) para un x fijo y $t \in [t_{n-1}, t_n]$ viene dada por la ecuación integral

$$w_S(t, x) = T(t_n - t_{n-1})w_S(t_{n-1}, x) + \int_{t_{n-1}}^t F(w_S(s, x))ds. \quad (2.4)$$

De (1.11) se tiene que la solución exacta de (2.1) está dada por

$$w_E(t, x) = T(t - t_{n-1})w_S(t_{n-1}, x) + \int_{t_{n-1}}^t T(t - s)F(w_E(s, x))ds. \quad (2.5)$$

Sumando y restando $F(w_E(s, x))$ a la integral de (2.5) y restando (2.4) de (2.5) tenemos

$$w_E(t, x) - w_S(t, x) = (T(t - t_{n-1}) - T(t_n - t_{n-1}))w_S(t_{n-1}, x) + \int_{t_{n-1}}^t [T(t - s) - I]F(w_E(s, x))ds + \int_{t_{n-1}}^t [F(w_E(s, x)) - F(w_S(s, x))]ds, \quad (2.6)$$

donde $t_{n-1} - s \leq t - s \leq t_n - s$, pues $t_{n-1} \leq t \leq t_n$.

Ahora, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $|t_n - t| < \delta$ entonces $\|T(t - t_{n-1}) - T(t_n - t_{n-1})\| < \varepsilon/(2\|w_S(t_{n-1}, x)\|)$ y además

$$\left\| \int_{t_{n-1}}^t [T(t-s) - I]F(w_E(s, x))ds \right\| < \varepsilon/2,$$

pues $T(t-s) \rightarrow I$ cuando $t_n \rightarrow t_{n-1}$. De esto y usando en la segunda integral de (2.6), la condición de Lipschitz de F con constante de Lipschitz L , se tiene

$$|w_E(t, x) - w_S(t, x)| \leq \varepsilon + L \int_{t_{n-1}}^t \|w_E(s, x) - w_S(s, x)\| ds.$$

De la desigualdad de Gronwall, tenemos

$$\|w_E(t, x) - w_S(t, x)\| \leq \varepsilon e^{Lt}, \forall t \in [t_{n-1}, t_n].$$

Como L es independiente de n , basta tomar $\varepsilon^* = \varepsilon e^{-Lt}$ para obtener la convergencia del método. \blacksquare

Observación: Debemos hacer notar que en la convergencia del método no podemos pasar por alto el valor de las difusiones. Pues de la representación del semigrupo $T(t) = e^{At}$, $t \geq 0$, ver teorema 2.6 de [6], página 27, tenemos que para difusiones grandes $T(t-s)$ no necesariamente es pequeño y como consecuencia ε es grande, teniendo así, la necesidad de refinar aun más la red temporal.

2.1.2 Esquema Predictor-Corrector de Crank-Nicolson

Con el fin de obtener el esquema de diferencias finitas para resolver (2.1) en la red $R_{h,k}$ las soluciones $u = u(t, x)$ y $v = v(t, x)$ en el punto de la red (t_n, x_m) serán denotadas por u_m^n y v_m^n y denotaremos por U_m^n y V_m^n las soluciones aproximadas. Los operadores de diferencias progresivas, regresivas y de orden 2 se definen como $D_+ = (u_{m+1} - u_m)h^{-1}$, $D_- = (u_m - u_{m+1})h^{-1}$ y $\delta_x^2 = u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}$.

El argumento usual para obtener un esquema de diferencias finitas está basado en las expansiones de Taylor. Con tal motivo consideremos las siguientes expansiones:

$$\frac{u_m^{n+1/2} - u_m^n}{k/2} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_m^n + \frac{k}{4} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_m^{n+\xi_1} \quad \text{con } 0 < \xi_1 < 1/2, \quad (2.7)$$

$$u_m^{n+1} = u_m^{n+1/2} + \frac{k}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_m^{n+1/2} + \frac{k^2}{8} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_m^{n+\xi_2} \quad \text{con } 1/2 < \xi_2 < 1, \quad (2.8)$$

$$u_m^n = \frac{u_m^n + u_m^{n+1/2}}{2} - \frac{k}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_m^{n+\xi_3} \quad \text{con } 0 < \xi_3 < 1/2, \quad (2.9)$$

$$u_m^{n+1/2} = \frac{u_m^{n+1} + u_m^{n+1/2}}{2} - \frac{k}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_m^{n+\xi_4} \quad \text{con } 1/2 < \xi_4 < 1, \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{h^2} \delta_x^2 u_m^n = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_m^n + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_{m+\xi_4} \quad \text{con } -1 < \xi_5 < 1. \quad (2.11)$$

En la búsqueda del esquema, evaluemos la primera ecuación de (1.1) en el punto $(t_{n+1/2}, x_m)$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_m^{n+1/2} = d_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_m^{n+1/2} + f_m^{n+1/2}.$$

Ahora, usando las expresiones (2.8) y (2.11)

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n+1/2}}{k/2} = \frac{d_1}{h^2} \delta_x^2 u_m^{n+1/2} + f_m^{n+1/2} + \frac{k}{4} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_m^{n+\xi_2} - \frac{h^2 d_1}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_{m+\xi_5},$$

y de (2.10) tenemos

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n+1/2}}{k/2} = \frac{d_1}{h^2} \delta_x^2 \left(\frac{u_m^{n+1} + u_m^{n+1/2}}{2} \right) + f_m^{n+1/2} + \tau_m^{n+1} \quad (2.12)$$

donde τ_m^{n+1} es el error de truncamiento y está dado por

$$\tau_m^{n+1} = -\frac{d_1 k}{4h^2} \delta_x^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_m^{n+\xi_4} + \frac{k}{4} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_m^{n+\xi_2} - \frac{h^2 d_1}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_{m+\xi_4}.$$

Despreciando el error de truncamiento en (2.12) obtenemos el esquema de diferencias

$$U_m^{n+1} - U_m^{n+1/2} = \frac{k d_1}{2h^2} \delta_x^2 \left(\frac{U_m^{n+1} + U_m^{n+1/2}}{2} \right) + \frac{k}{2} f_m^{n+1/2} \quad (2.13)$$

el cual resulta ser un esquema implícito que requiere del conocimiento del valor intermedio $U_m^{n+1/2}$. Para calcular este valor nos planteamos el siguiente esquema: evaluando a (1.1) en el punto (t_n, x_m)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_m^n = d_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_m^n + f_m^n$$

y usando (2.7) y (2.11)

$$\frac{u_m^{n+1/2} - u_m^n}{k/2} = \frac{d_1}{h^2} \delta_x^2 u_m^n + f_m^n + \frac{k}{4} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_m^{n+\xi_1} - \frac{h^2 d_1}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_{m+\xi_5},$$

y de (2.9) se tiene

$$\frac{u_m^{n+1/2} - u_m^n}{k/2} = \frac{d_1}{h^2} \delta_x^2 \left(\frac{u_m^{n+1/2} + u_m^n}{2} \right) + f_m^n + \tau_m^{n+1/2}$$

con

$$\tau_m^{n+1/2} = -\frac{d_1 k}{4h^2} \delta_x^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_m^{n+\xi_3} + \frac{k}{4} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_m^{n+\xi_1} - \frac{h^2 d_1}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_{m+\xi_5}^n.$$

De donde se obtiene el esquema

$$U_m^{n+1/2} - U_m^n = \frac{kd_1}{2h^2} \delta_x^2 \left(\frac{U_m^{n+1/2} + U_m^n}{2} \right) + \frac{k}{2} f_m^n \quad (2.14)$$

con un error de truncamiento dado por $\tau_m^{n+1/2}$.

Así, en general, para resolver el sistema (1.1) proponemos el siguiente método de diferencias finitas:

$$\begin{cases} (1 - r_1 \delta_x^2) U_m^{n+1/2} = (1 + r_1 \delta_x^2) U_m^n + \tilde{k} f_m^n \\ (1 - r_2 \delta_x^2) V_m^{n+1/2} = (1 + r_2 \delta_x^2) V_m^n + \tilde{k} g_m^n \\ (1 - r_1 \delta_x^2) U_m^{n+1} = (1 + r_1 \delta_x^2) U_m^{n+1/2} + \tilde{k} f_m^{n+1/2} \\ (1 - r_2 \delta_x^2) V_m^{n+1} = (1 + r_2 \delta_x^2) V_m^{n+1/2} + \tilde{k} g_m^{n+1/2} \end{cases} \quad (2.15)$$

con $r_1 = \frac{kd_1}{4h^2}$; $r_2 = \frac{kd_2}{4h^2}$; $\tilde{k} = k/2$ y $m = 0 : M$.

Para completar el esquema de diferencias a (2.15) le añadimos las condiciones iniciales

$$U_m^0 = u(0, x_m), \quad V_m^0 = v(0, x_m), \quad \text{con } m = 0 : M,$$

y para los valores U_{-1} , U_{M+1} , V_{-1} y V_{M+1} , que aparecen cuando evaluamos en la frontera, usamos

$$\frac{U_{m+1}^j - U_{m-1}^j}{2h} = 0 \quad \text{para } m = 0, \quad m = M \quad \text{y } j = 0, 1, \dots$$

el cual tiene un orden $O(h^2)$ y el mismo surge de tomar la expansión de Taylor

$$\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots$$

Los errores de truncamiento dados anteriormente para el esquema (2.15) tienen un orden $\tau_m^{n+1/2} = \tau_m^{n+1} = O(k + h^2)$. Los detalles para ver el orden del error de Truncamiento y la convergencia del método se pueden ver Douglas y Jones [10] o en Cordero [7] donde se desarrolla, en cierta manera, un sistema equivalente a (2.15).

2.2 Resultados Numéricos

Dado

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= d_1 \Delta u + f(u, v, \alpha), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= d_2 \Delta v + g(u, v, \alpha), \end{aligned} \tag{2.16}$$

con

$$u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x); \quad x \in [0, 1] \text{ y } u_0, v_0 \in L^2([0, 1])$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad \forall (t, x) \in (0, t_f) \times \partial[0, 1],$$

recordemos que si (2.16) tiene una órbita periódica $\varphi(t)$, la estabilidad orbital de la misma está regida por el teorema (0.1) dado en la introducción. Nuestro interés principal es encontrar la región de inestabilidad de φ , en el plano de difusiones (d_1, d_2) , basándonos en dicho resultado y tratar de ver, en lo posible, qué está pasando con la estabilidad de la órbita fuera de esta región. Por tal motivo resolveremos (2.16), tomando (t, x) en la red $R_{h,k}$ y variando las difusiones teniendo presente que la estabilidad se pierde para $d_1 = \epsilon$ y $d_2 = 1/\epsilon$ con ϵ suficientemente pequeño. Empezaremos haciendo un barrido de las difusiones con ϵ cerca del cero de la siguiente manera: fijada una difusión, por ejemplo d_1 , buscamos el valor de la otra para la cual la estabilidad se pierde para luego invertir el proceso de búsqueda. Estos cálculos los haremos usando los métodos numéricos propuestos en la sección anterior, con un paso temporal $k \leq 10^{-4}$ y con paso espacial $h = 0.02$ y un tiempo final $t_f \geq 15$. En consecuencia, para ver el comportamiento de la solución, tenemos que realizar un gran volumen de cálculo con el fin de ubicar un punto (d_1, d_2) para el cual la estabilidad de φ se pierde. Por lo tanto tomaremos los valores de las difusiones a lo sumo con dos decimales correctos.

Desarrollaremos dos ejemplos: en el primero construimos un problema en el cual las condiciones de inestabilidad dadas en el teorema (0.1), se cumplen y en el segundo modificamos el problema construido anteriormente para hacer que las condiciones de inestabilidad no se cumplan. En este segundo ejemplo consideramos casos donde $\int_0^\omega \frac{\partial g}{\partial v}(\varphi(t)) dt \leq 0$ y casos donde las difusiones verifican que $|d_1 - d_2| \gg 1$.

2.2.1 Ejemplo 1: Construyendo un problema con las condiciones de Henry

Dado el sistema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u - v + (1 - u^2 - v^2)(au + bv),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + u + (1 - u^2 - v^2)(cu + dv),$$

con

$$u(0, x) = u_0(x) \quad , \quad v(0, x) = v_0(x) \quad ; \quad x \in [0, 1]$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad , \quad \forall (t, x) \in (0, t_f) \times \partial[0, 1],$$

se tiene que $\varphi(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))^T$ es una órbita 2π -periódica del sistema EDO (0.2). Por otro lado tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(t)) = -2 \cos(t)(a \cos(t) + b \text{sen}(t)),$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(\varphi(t)) = -2 \text{sen}(t)(c \cos(t) + d \text{sen}(t)).$$

Entonces

$$\rho_2 = -\frac{1}{2\pi} \left[2a \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt + 2d \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(t) dt + 2(b+c) \int_0^{2\pi} \cos(t) \text{sen}(t) dt \right].$$

Así, $\rho_2 = -(a+d)$ y tomando $a = 2$, $d = -1$ tenemos $\rho_2 = -1$. Esto nos dice que φ es orbital asintóticamente estable. Además

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial v}(\varphi(t)) dt = -2d \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(t) dt = -2d\pi,$$

y por lo tanto $\int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial v}(\varphi(t)) dt > 0$. Teniendo así un ejemplo que cumple todas las condiciones del teorema (0.1) de D. Henry. Para simplificar tomaremos $b = c = 0$ y el sistema a considerar es entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u - v + 2u(1 - u^2 - v^2), \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + u - v(1 - u^2 - v^2),$$

con condiciones iniciales dadas por

$$u(0, x) = 1.1 \cos(\pi x) \quad , \quad v(0, x) = (1.1 - (1.1)^2 \cos^2(\pi x))^{1/2}; \tag{2.18}$$

para $x \in [0, 1]$ y condiciones de frontera

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad \forall (t, x) \in (0, t_f) \times \partial[0, 1].$$

Aunque la mayoría de los resultados los presentaremos con las condiciones iniciales anteriores también tomaremos condiciones iniciales dadas por

$$u(0, x) = 0.9 \cos(\pi x) \quad , \quad v(0, x) = (0.9 - (0.9)^2 \cos^2(\pi x))^{1/2} \quad (2.19)$$

para $x \in [0, 1]$. Esto es con el propósito de justificar la estabilidad o inestabilidad orbital desde dentro de la órbita y así hablar de una estabilidad total y no de una semi estabilidad. Por otro lado excluimos las condiciones iniciales constantes, pues si $(u(t, x), v(t, x))$ es solución de (2.16) con $u(0, x)$ y $v(0, x)$ constantes tenemos que, por la unicidad de la solución, ésta va a coincidir con la solución $(u(t), v(t))$ de la EDO con las mismas condiciones iniciales. De la estabilidad orbital de $\varphi(t)$ tendríamos estabilidad orbital en $\varphi(t, x)$.

A continuación mostramos las soluciones numéricas que consideramos más relevantes para describir el comportamiento de las soluciones de (2.17) cuando tenemos estabilidad o inestabilidad en la órbita periódica. Además, damos una aproximación de la región de estabilidad de la órbita en el plano de las difusiones.

Las soluciones numéricas de (2.17) con $d_1 = d_2$ se muestran en la Figura (2.1), donde vemos que para un valor de x fijo, la órbita converge a la órbita periódica, es decir, $\varphi(t, x) = \varphi(t)$ es asintóticamente estable. El comportamiento de la órbita para cualquier valor de $x \in [0, 1]$ es análogo, como se ve en la gráfica b) de la Figura (2.1).

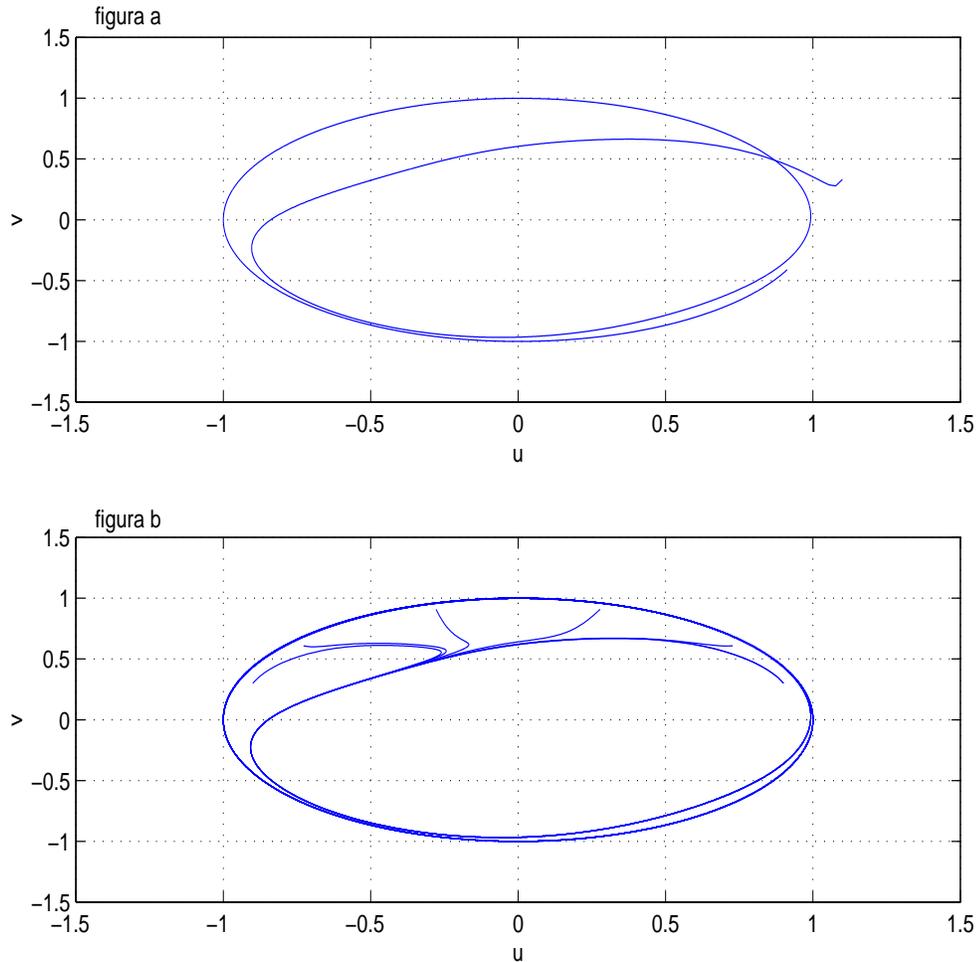


Figura 2.1: a.) Órbita de (2.17) en $x = 0$, $d_1 = d_2 = 1$ y condiciones iniciales dadas por (2.18). b.) Órbitas de (2.17) en $x = 0 : .2 : 1$, $d_1 = d_2 = 1$ y condiciones iniciales dadas por (2.19).

La Figura (2.2) muestra la órbita de (2.17) en $x = 0$ para $d_1 = .01$ y $d_2 = 1$ calculada con los dos métodos propuestos, splitting y predictor-corrector de C-N. La inestabilidad de la órbita resulta del valor de las difusiones. Las magnitudes de las diferencias entre las órbitas calculadas no son mayores que $5 * 10^{-4}$, lo cual indica que para cualquiera de los dos métodos que usemos estamos calculando las soluciones con un mismo orden de error. Pero vale destacar que entre ambos métodos existe una gran diferencia, pues debido a que el splitting tiene un orden de convergencia $O(k^2 + h^2)$ en el parabólico y en el PVI el ODE45 tiene un orden 4 y 5 tenemos un error de truncamiento más pequeño en este método que en el método de diferencias finitas de C-N que sólo tiene un orden de convergencia $O(k + h^2)$. Sin embargo, este orden de convergencia no se refleja en la velocidad del método splitting ya que el necesita resolver en cada paso un PVI con un número grande de ecuaciones.

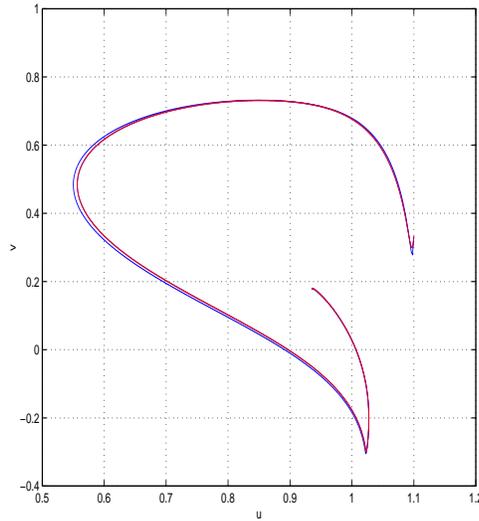


Figura 2.2: Órbita de (2.17) usando splitting y C-N en $x = 0$, $d_1 = .01$ y $d_2 = 1$.

La gráfica de la Figura 2.2 junto con la Figura (2.3) nos muestran el comportamiento de las órbitas que se inician cerca de la órbita periódica $\varphi(t, x) = \varphi(t)$ cuando ésta es inestable y $d_1 < d_2$.

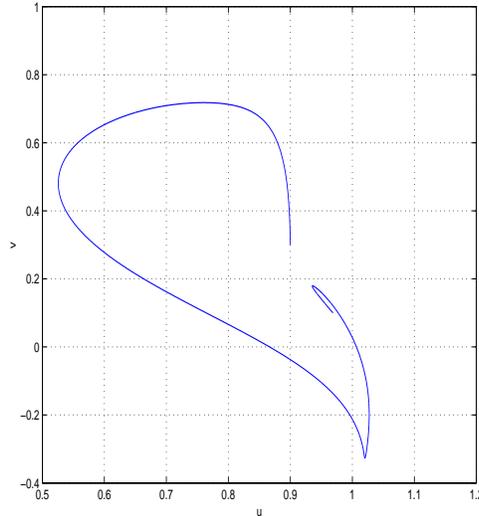


Figura 2.3: Órbita en $x = 0$, $d_1 = .01$, $d_2 = 1$ y cond. iniciales dadas por (2.19).

La Figura (2.4) muestra el comportamiento general de las soluciones para distintos valores de la coordenada espacial; en esta figura hemos representado solamente seis de las cincuenta y una soluciones que tenemos, pues recordemos que $x \in [0, 1]$ y la red espacial está dada con un paso $h = 0.02$.

Hacemos notar que tanto u como v después de un tiempo determinado se hacen constantes y v además tiende a cero.

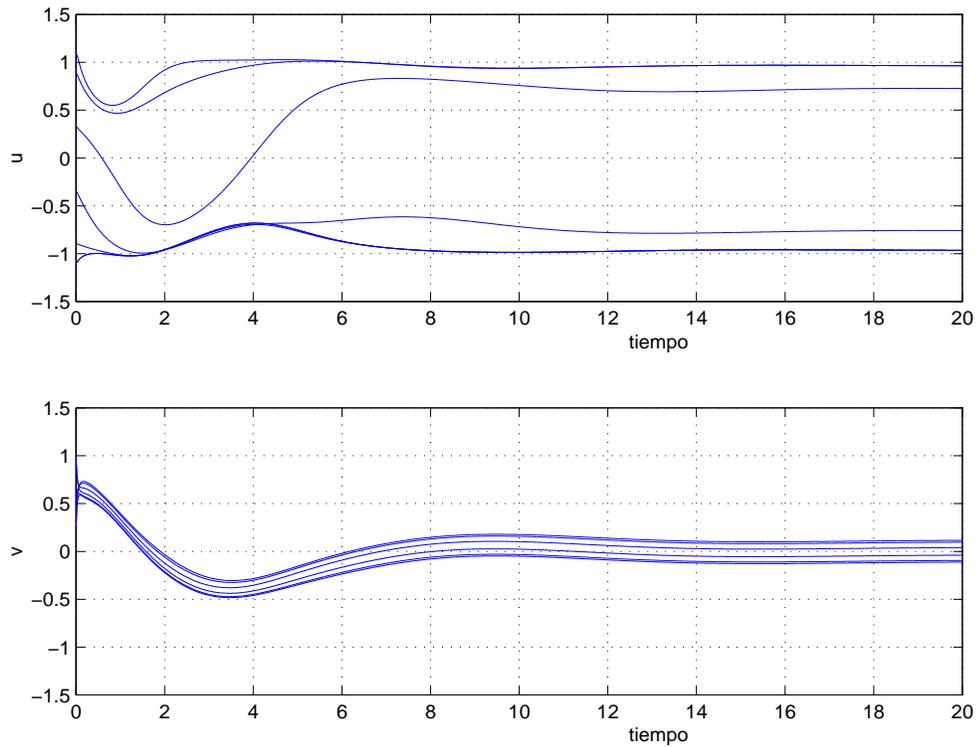


Figura 2.4: Solución u y v de (2.17) en $x = 0 : .2 : 1$ con $d_1 = .01$ y $d_2 = 1$.

Cuando tenemos $d_1 > d_2$, el comportamiento de las soluciones es de explosión. En la Figura (2.5) mostramos uno de estos casos.

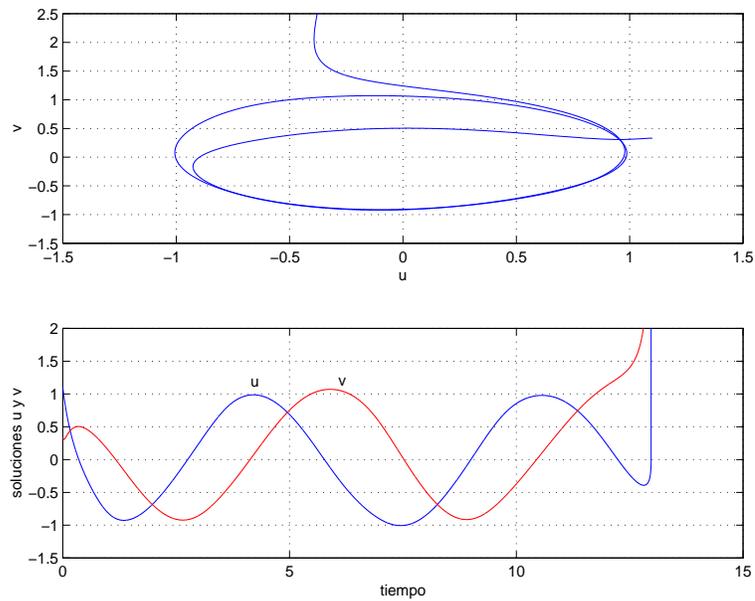


Figura 2.5: Soluciones de (2.17) en $x = 0$ con $d_2 = .06$ y $d_1 = 0.5$

Los resultados numéricos obtenidos nos permiten dar una aproximación de la región de estabilidad de $\varphi(t, x)$ como se muestra en la Figura (2.5). La frontera entre ambas regiones pertenece a la región de estabilidad.

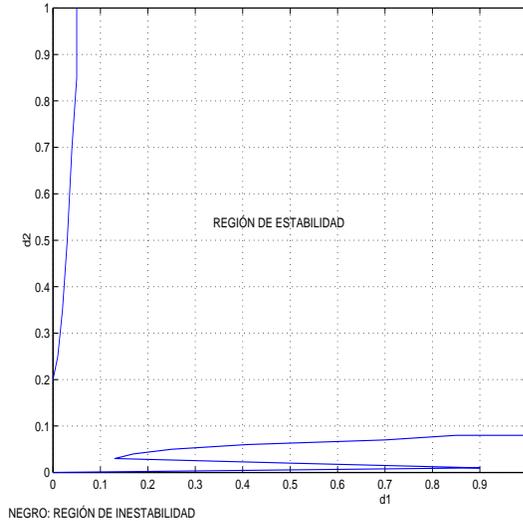
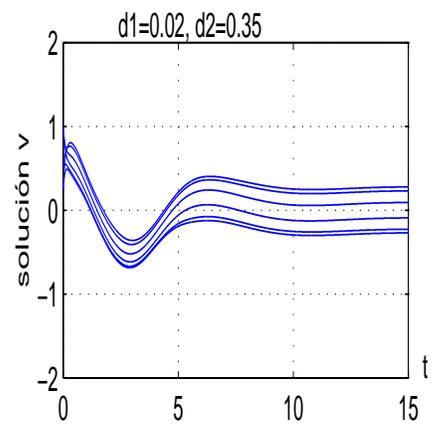
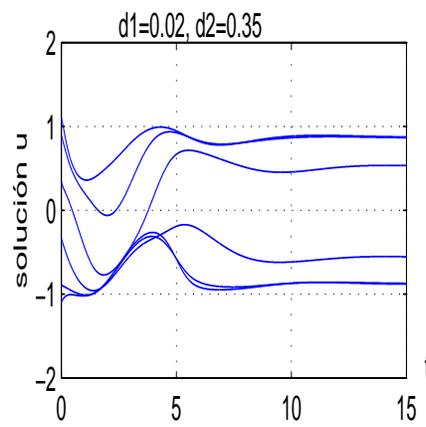
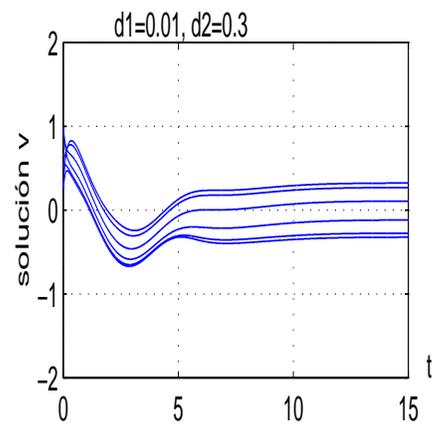
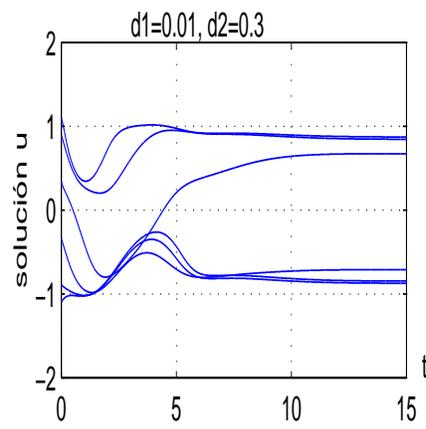
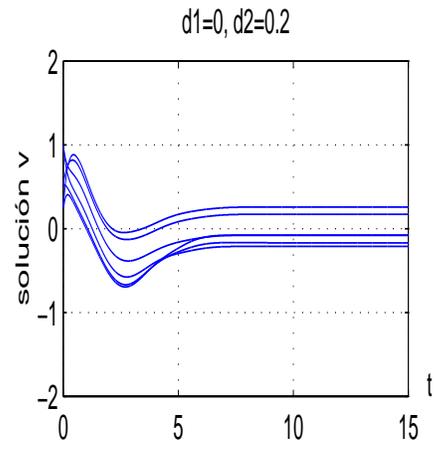
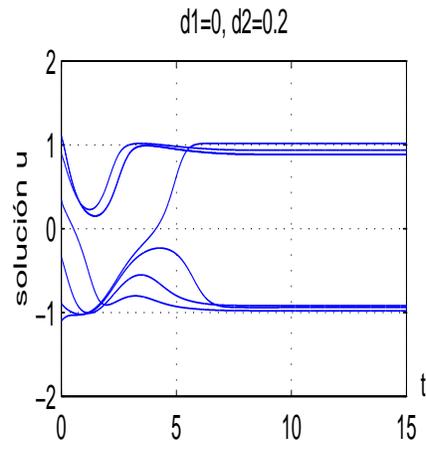


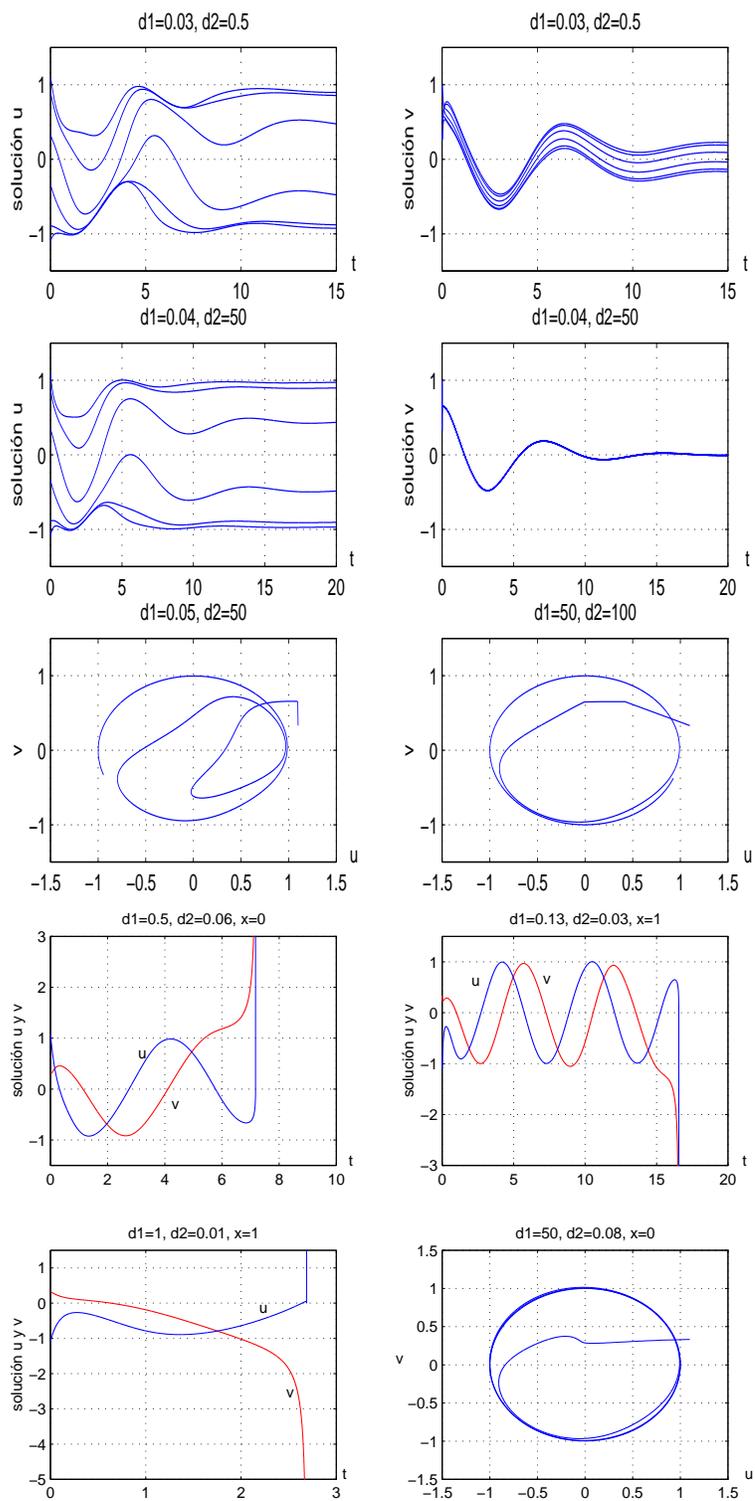
Figura 2.5: Región de estabilidad de la órbita φ de (2.17)

La región obtenida concuerda en cierta manera con el resultado de Henry, pero observando que la difusión grande ($1/\epsilon$), propuesta por él, no necesariamente se cumple. Por otro lado estos resultados numéricos nos llevan a conjeturar dos resultados de gran importancia. El primero es el hecho de haber construido un ejemplo con dominio en \mathbb{R} (es decir el dominio del problema es irrelevante) en el cual la órbita periódica pierde su estabilidad orbital; Morita [18] había logrado esto resolviendo el mismo problema para dominios no convexos. El segundo hecho relevante es el de presumir que la estabilidad de la órbita se mantiene cuando $|d_1 - d_2|$ es grande con d_1 y $d_2 \gg 0$. Este ejemplo junto con el ejemplo 2 que enunciaremos más adelante, nos dan un conjunto de problemas que cumplen esta conjetura. Ahora, si esta conjetura no es cierta en forma general, nos preguntamos, qué condiciones adicionales deben agregarse al problema para asegurar la pérdida de la estabilidad de la órbita.

En la Figura (2.6) damos una secuencia de soluciones tanto para $d_1 < d_2$ como para $d_1 > d_2$. Estos resultados numéricos nos muestran que cuando estamos en la franja vertical de inestabilidad ($0 \leq d_1 \leq 0.04$) las soluciones se hacen rápidamente constantes y cuando $d_1 = 0.04$ la solución v se hace cero, mientras que la solución u mantiene un comportamiento análogo para los distintos valores de d_1 , siendo $\epsilon = 0.04$ el valor máximo de ϵ para el cual la órbita es inestable. Ahora, en la franja horizontal de inestabilidad ($0 < d_2 \leq 0.07$) las soluciones explotan y tienden a $\pm\infty$, dependiendo de la coordenada espacial; en este caso el valor máximo de ϵ para el cual ocurre la inestabilidad es $\epsilon = 0.07$.

Para finalizar, los casos donde hemos tomado difusiones grandes, por ejemplo $d_1 = 50$ y $d_2 = 100$, nos reafirman la conjetura dada anteriormente.





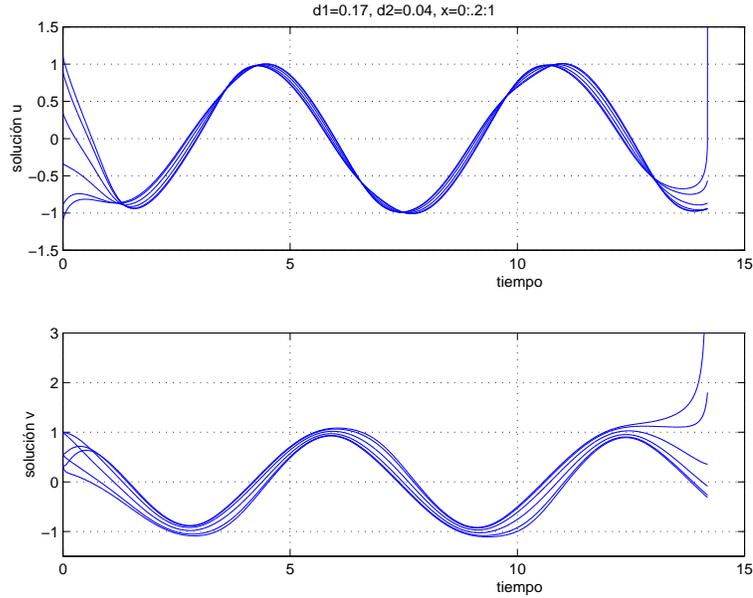


Figura 2.6: Soluciones de (2.17) para distintos valores en las difusiones.

Resumiendo los resultados numéricos nos sugieren que:

1. La estabilidad de la órbita se pierde cuando tenemos una difusión pequeña, como señala Henry, pero la otra difusión no necesariamente debe ser grande.
2. Cuando estamos en la franja vertical de inestabilidad ($0 \leq d_1 \leq 0.04$) las soluciones se hacen rápidamente constantes y cuando $d_1 = 0.04$ la solución v se hace cero, mientras la solución u mantiene un comportamiento análogo para los distintos valores de d_1 .
3. En la franja horizontal de inestabilidad ($0 < d_2 \leq 0.07$) las soluciones explotan y tienden a $\pm\infty$, ocurriendo tal explosión después que la solución ha permanecido cerca de la órbita periódica durante un tiempo. Este comportamiento es similar para toda la región.
4. Fuera de estas franjas de inestabilidad, la órbita periódica mantiene su estabilidad orbital, lo que nos hace presumir que la órbita mantiene su estabilidad cuando $|d_1 - d_2|$ es grande.

2.2.2 Ejemplo 2: Sin las condiciones de inestabilidad de Henry

En esta sección desarrollamos distintos problemas para los cuales se verifica que:

$$\int_0^\omega \frac{\partial g}{\partial v}(\varphi(t)) dt \leq 0. \quad (2.20)$$

1. Tomando $d = 1$ en el ejemplo 1 (lo cual nos da la desigualdad estricta de (2.20)) y difusiones $d_1 = 10$ y $d_2 = 100$ obtuvimos una solución numérica cuya gráfica se muestra en la Figura (2.7)

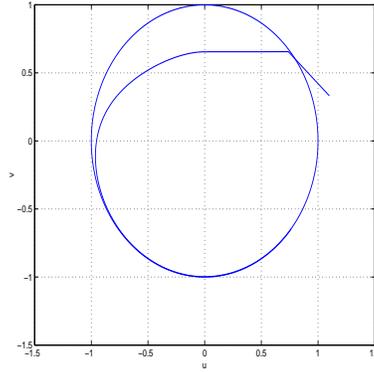


Figura 2.7: Órbita en $x = 0$. Las demás órbitas para los distintos valores de x son semejantes.

2. Tomando $d = 0$ en el ejemplo 1 (resultando la igualdad en (2.20)) y difusiones $d_1 = 1$ y $d_2 = 10$ obtuvimos la solución numérica cuya gráfica se muestra en la Figura (2.8).

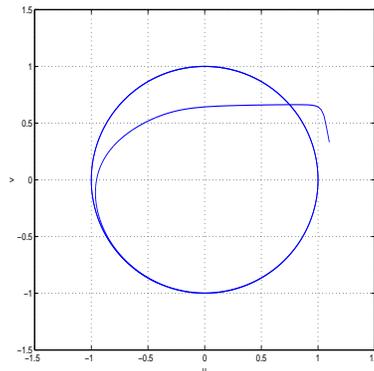


Figura 2.8: Órbita en $x = 0$. Las demás órbitas para los distintos valores de x son semejantes.

3. Se tomaron otros problemas de prueba como por ejemplo el generado por la EDO de Van der Pol, $x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = 0$, o ejemplos como el dado en coordenadas polares por $r' = r(1 - r^2)$; $\theta' = 1$, los cuales tienen una órbita periódica global asintóticamente estable. En estos casos se obtuvieron resultados análogos sobre la estabilidad orbital.

2.3 Conclusiones

A continuación damos algunas conclusiones sobre el trabajo y sugerencias para futuros estudios del problema

1. De los resultados numéricos obtenidos en los ejemplos presumimos que el resultado 2 del teorema (0.1) es más general. Es decir:
Si $D = dI + \text{diag}(\epsilon_1, \epsilon_2)$ con los ϵ_i distintos y no necesariamente pequeños, entonces $\varphi(t)$ es orbital asintóticamente estable.
2. Si la conjetura anterior no fuera cierta entonces qué condiciones adicionales debemos pedirle al problema para tener inestabilidad cuando las difusiones son grandes y distintas.
3. Se puede desestabilizar la órbita sólo por cuenta de las difusiones del sistema.
4. Si una difusión está dada por ϵ para que exista inestabilidad la otra difusión está sobre-acotada por $1/\epsilon$.
5. Probar teóricamente la conjetura dada en el primer punto o en caso contrario refutarla.
6. Dada la rigidez de los problemas se hace necesario encontrar métodos numéricos capaces de resolver problemas altamente stiff sin la necesidad de restringir el paso temporal de manera, tal vez, extrema.
7. Por la naturaleza del problema se hace necesario obtener métodos numéricos en donde la restricción del paso temporal no sea extrema. Pues, para saber si un punto en el plano de difusiones (d_1, d_2) desestabiliza o no la órbita periódica, se requiere un promedio de 3 horas de máquina con el esquema de C-N o de 5 con el método del splitting. Además cabe señalar que en el caso del splitting se necesita resolver en cada paso, un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de un tamaño relativamente grande (102 ecuaciones en nuestro ejemplo) y que en ambos métodos el intervalo temporal para observar si la órbita se desestabiliza o no también debe ser grande. Mayor eficiencia computacional podría lograrse si usan lenguajes tales como Fortran o C, los cuales tienen mayor velocidad de cálculo y herramientas de paralelización.

Bibliografía

- [1] Aguilera J., Lizana M., *Estudio Cualitativo de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Editorial UCV, 1990.
- [2] Atkinson K. E., *An Introduction to Numerical Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [3] Bachman G., Narici L., *Functional Analysis*. Academic Press, 1966.
- [4] Brézis H., *Análisis Funcional, Teoría y aplicaciones*. Alianza Editorial, 1983.
- [5] Calderón G., *Esquemas Económicos para la Resolución de EDP de tipo Parabólico*. Tesis de Grado, Facultad de Ciencias, ULA, 1995.
- [6] Carrero G., *Soluciones Periódicas Estables para un sistema Epidemiológico con Difusión*. Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias, ULA, 1998.
- [7] Cordero F., *Un Esquema de Diferencias finitas para Ecuaciones Parabólicas No Lineales*. Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias, ULA, 1998.
- [8] De Oliveira L., *Instabilidade de Soluções Periódicas Espacialmente Homogêneas de Equações Parabólicas com Retardamento*. Tesis de Doctorado, Universidad de São Paulo, 1990.
- [9] De Oliveira L., *Instability of Homogeneous Periodic Solutions of Parabolic-Delay Equations*, J. of Diff. Equations 109, 42-76, 1994.
- [10] Douglas J. and Jones B., *On Predictor-Corrector Methods for Nonlinear Parabolic Differential Equations*. J. Soc. Indust. Math. Vol. 11, No. 1, pp. 195-204, 1963.
- [11] Evans L., *Partial Differential Equations*. Berkeley Mathematics Lecture Notes, Vol. 3A, 1994.
- [12] Folland G., *Introduction to Partial Differential Equations*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1976

-
- [13] Henry D., *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1981.
 - [14] Ladas G., Lakshmikantham V., *Differential Equations in Abstract Spaces*. Academic Press, New York, 1972.
 - [15] Leiva H., *Stability of a Periodic Solution for a System of Parabolic Equations*. Applicable Analysis, Vol.60, pp. 277-300, 1995.
 - [16] Maginu K., *Stability of spatially homogeneous periodic solutions of reaction-diffusion equations*. J. Differential Equations 31, pp. 130-138, 1979.
 - [17] Morita Y., *Reaction-Diffusion Systems in Nonconvex Domains: Invariant Manifold and Reduced Form*. J. of Dynamic and Diff. Eq., Vol. 2, N° 1, 1990.
 - [18] Morita Y., *Destabilization of period solutions arising in delay diffusion systems in several space dimensions*. Japan J. Appl. Math., 1 (1984), 39-65.
 - [19] Morris W. H. and Smale S., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, New York, 1974.
 - [20] Pazy A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences V.44, Springer-Verlag, New York, 1983.
 - [21] Perko L., *Differential Equations and Dynamical Systems*. Texts in Applied Mathematics V.7, Springer-Verlag, New York, 1991.