Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Grupo de Álgebra

Sobre La Fusión De Estados Epistémicos

Lic. Amilcar Daniel Mata Díaz

Trabajo Para Optar al Título de
Magister Scienteae en Matemáticas
Tutor: Dr. Ramón Pino Pérez

Mérida-Venezuela
2010

DEDICATORIA

A mi familia, quienes me han ayudado a levantarme cuando he caído. Gracias por estar ahí cuando los he necesitado.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco ante todo a Dios, la Virgen y a mis padres; a ustedes les debo todo.

Al Profesor Ramón Pino, quien además de ayudarme durante la realización de este trabajo, me ayudo a mantenerme para alcanzar esta meta. Incluyo en este equipo a los profesores Carlos Eduardo Cova, Jahn Franklin Leal y José Luis Chacón.

A los profesores Carlos Uzcategui y Arelis Díaz, por su aporte y ayuda para las correcciones de este trabajo.

Al FONACIT, por el apoyo económico brindado para lograr éste nuevo logro.

Por último, y no menos importante, agradezco al CDCHT por ayudarme a consolidar este trabajo, proyecto tomado por ellos, bajo el Código:.

Amílcar Daniel Mata Díaz.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La fusión del conocimiento estudia los métodos mediante los cuales se extrae una información coherente de un conjunto de informaciones. Su espectro va desde la toma de decisiones, pasando por los diagnósticos médicos y la planificación de políticas (en cualquier área), hasta la integración automática de varias bases de datos.

Konieczny y Pino Pérez presentan en [8, 9, 10, 11] métodos que permiten definir operadores que fusionan las bases de creencias de un grupo de agentes, arrojando como resultado una base de creencias general que satisface, tanto como sea posible, las bases de creencias de cada agente que participa en el proceso de fusión. Además, ellos introducen varios postulados de racionalidad, los cuales generalizan los ya conocidos postulados de revisión del marco AGM en contexto finito [6]; probando además que sus operadores satisfacen dichos postulados. De hecho, establecen ciertos teoremas de representación.

Sin embargo, los operadores de fusión presentados por Konieczny y Pino Pérez, no consideran toda la información que poseen cada uno de los agentes. Además, las bases de creencias que arrojan estos operadores no dan referencia alguna acerca de la información omitida por cada uno de los individuos.

Sería interesante que dichos operadores logren fusionar las creencias totales de los agentes, los cuales están determinados por *estados epistémicos complejos*, obteniéndose así un estado epistémico global mucha más informativo. Thomas A. Meyer [13], propone una solución a este problema. Sin embargo, para sus operadores de fusión él no propone una representación lógica.

Entonces, es muy natural buscar una serie de axiomas lógicos con características de racionalidad, que sean satisfechos por los operadores que fusionen varios estados epistémicos en un estado epistémico global.

Es de notar que en el caso de la revisión ya hay trabajos en los que se manejan estados epistémicos complejos. Primeramente los trabajos de Darwiche y Pearl [3, 4]: al momento de revisar el estado epistémico de un individuo por una información entrante, dicha información es puntual, estando así determinada por una fórmula. Sin embargo, existen situaciones donde la información entrante(prioritaria) es más compleja, y puede estar determinada por un estado epistémico. Esto fue considerado por Benferhat *et ál.* [2]. El siguiente ejemplo ilustra este tipo de situaciones en la vida corriente.

Imaginemos un especialista en economía, realizando un estudio acerca de la fluctuación del precio del dólar y del petróleo. Él considera que el escenario más posible es que el cambio del dólar y del barril de petróleo aumenten, mientras que un segundo escenario, menos probable que el anterior, sería que el dólar aumente su valor y el petróleo no; considerando que cualquier escenario en que el cambio del dólar no aumente es muy poco probable. Luego se presenta un estudiante de economía y le informa al especialista que es muy posible que el precio del petróleo aumente, y, de no darse esta situación, como segundo escenario menos probable se tendrá que el dólar va a aumentar y el petróleo no; mientras que el escenario en que ni el dólar ni el petróleo aumenten sus valores es poco probable. Habiendo escuchado esto, y confiando menos en el análisis del estudiante que en el suyo propio, pero tomándolo en cuenta, el especialista hace una revisión de su análisis, dándole, por supuesto, prioridad a éste. Así, el especialista llega a la conclusión, luego de revisión, que el escenario más probable es en el que tanto el dólar como el petróleo aumenten su valor; un segundo escenario menos probable es que el dólar aumente de precio y el petróleo no; un tercer escenario, menos probable que los dos anteriores es que el cambio del dólar no aumente mientras que el valor del petróleo si, y el escenario menos probable es que ninguno de los dos, ni el dólar ni el petróleo, aumenten su valor[1].

Este ejemplo muestra el interés que tiene el considerar toda la información que poseen los agentes para un razonamiento más preciso y coherente.

De manera más precisa, en este trabajo nos proponemos, en un primer tiempo, axiomatizar en forma sintáctica las propiedades a cumplir por ciertas clases de operadores que permitan fusionar estados epistémicos. Obtendremos una representación semántica para un estudio más sencillo del comportamiento de estos operadores, dando cabida a operadores que generalicen a los operadores de fusión presentados por Konieczny y Pino Pérez [8, 9, 10, 11]. En un segundo tiempo se mostrará, haciendo uso de funciones de agregación, la existencia de varios operadores de fusión de estados epistémicos, analizando las propiedades que estos poseen; y haciendo uso de estos, se verificará la independencia total o parcial que poseen cada uno de los axiomas que deben satisfacer los operadores de fusión. Por último, se verificará que los operadores de fusión de estados epistémicos

[1] Un análisis más profundo de este ejemplo, en el que se detalla exactamente el mecanismo de revisión, será visto más adelante (ver ejemplo 6.1).

generalizan los operadores de revisión por estados epistémicos presentados por Benferhat *et ál.* [2].

El trabajo se organiza en seis capítulos. En el primero introduciremos la nociones de *bases de creencias* y de *estados epistémicos* haciendo resaltar las diferencias entre ellos. También presentamos las nociones básicas sobre preórdenes, ordenes, y funciones de agregación, definiendo y analizando el comportamiento de algunos tipos que se utilizarán a lo largo del desarrollo del trabajo. En el segundo capítulo están los resultados más básicos (y ya clásicos) sobre los operadores de fusión lógica; esto está basado principalmente en los artículos [10, 11] y en la tesis de Licenciatura de mi autoría [12]. En los capítulos 3 y 4 presentaremos la axiomática sobre fusión de estados epistémicos. En estos capítulos haremos un análisis profundo sobre las características de estos axiomas y daremos un teorema de representación para operadores de este tipo. En el capítulo 5 mostraremos la independencia de los postulados dados en los capítulos 3 y 4, por medio de una serie de ejemplos ahí presentados. Finalmente, el último capítulo esta dedicado al estudio de los *operadores de revisión por estados epistémicos* presentados por Benferhat *et ál.* [2], donde compararemos los operadores de fusión con este tipo de operadores y haremos un análisis sobre su comportamiento iterativo.

Los resultados del capítulo 3, 4 y 5 son todos nuevos, y simplifican los resultados del capítulo 6.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1. Bases de creencias vs. estados epistémicos

Consideremos $\mathcal{L}$ el conjunto de todas las fórmulas proposicionales construidas sobre el alfabeto finito $\mathcal{P}$ de proposiciones atómicas. El conjunto de todas las interpretaciones es denotado por $\mathcal{W}$. Sea φ una fórmula, $[\varphi]$ denota el conjunto de los modelos de φ, es decir

$$[\varphi] = \{w \in \mathcal{W} : w \models \varphi\}$$

Dado un conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$. La conjunción de los elementos de dicho conjunto será denotado por $\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$, y la disyunción por $\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$, es decir

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \qquad\qquad \bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n$$

Proposición 1.1 *Dado un conjunto de interpretaciones I, existe una fórmula, la cual denotaremos por φ_I, tal que $[\varphi_I] = I$.*

Demostración: Supongamos que I esta formado por un único modelo w, y consideremos los conjuntos $A = \{p \in \mathcal{P} : w \models p\}$ y $B = \{\neg p : p \notin A\}$. Notemos que w satisface cada una de las fórmulas en $A \cup B$. Así, consideremos φ_w la fórmula determinada por la conjunción de los elementos de $A \cup B$, y observemos $w \models \varphi_w$.

Verifiquemos que $[\varphi_w] = \{w\}$, para ello razonemos por el absurdo, y supongamos que existe $w' \models \varphi_w$, con $w' \neq w$. De esta forma existe $p' \in \mathcal{P}$ tal que $w \models p'$ y $w' \not\models p'$, o bien $w \not\models p'$ y $w' \models p'$. Sin perdida de generalidad supongamos que $w \models p'$ y $w' \not\models p'$.

De esta manera $p' \in A$, implicando que $w' \not\models \varphi_w$, pues $w' \not\models p'$; esto contradice el hecho que $w' \models \varphi_w$, demostrando lo deseado.

Ahora bien, consideremos I un conjunto no vacío de interpretaciones y para cada $w \in I$ consideremos la fórmula φ_w, de tal forma de que w es el único modelo de φ_w. Consideremos la fórmula φ_I determinada por la disyunción de las fórmulas φ_w. Notemos que $I \subseteq [\varphi_I]$. Por otro lado, si $w' \in [\varphi_I]$ entonces $w' \models \varphi_w$, para algún $w \in I$. De esta forma $w' = w$, implicando que $I = [\varphi_I]$. ∎

1.1.1. Bases de creencias y conjuntos de creencias

Definición 1.1 (Bases de creencias) *Una base de creencias φ es un conjunto finito de fórmulas proposicionales.*

Note que si $\varphi = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, ese conjunto es lógicamente equivalente[1] a $\varphi' = \{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n\}$ y por lo tanto φ será identificada con una sola fórmula a saber $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$. De ahora en adelante las bases de creencias serán siempre identificadas con una fórmula.

Una base de creencias φ_i denotará las creencias de un agente i. Supondremos que todas las bases de creencias son consistentes, es decir, que cada agente posee información coherente.

Dos bases de creencias φ, φ' son equivalentes, denotado por $\varphi \equiv \varphi'$, si $C_n(\varphi) = C_n(\varphi')$, donde C_n es el operador de consecuencias lógicas.

Definición 1.2 (Conjuntos de creencias) *Un conjunto de creencias es un multiconjunto finito Ψ, no vacío, formado por bases de creencias, es decir, si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ son n bases de creencias, no necesariamente diferentes, un conjunto de creencias es un multiconjunto Ψ que consiste de esas n bases de creencias: $\Psi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$*

Haciendo abuso de notación, si φ es una base de creencias, ella también denotará al conjunto de creencias $\Psi = \{\varphi\}$.

Supongamos $\Psi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ y $\Psi' = \{\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_m\}$ conjuntos de creencias. La unión de los dos multiconjuntos[2] es el conjunto $\Psi \sqcup \Psi' = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi'_1, \ldots, \varphi'_m\}$.

Denotemos por $\bigwedge\!\!\!\bigwedge \Psi$ a la conjunción de las bases de Ψ, es decir, $\Psi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$. Cuando $w \models \bigwedge\!\!\!\bigwedge \Psi$ escribimos $w \models \Psi$.

Obsérvese que, a diferencia de las bases de creencias φ, que siempre suponemos consistente, $\bigwedge\!\!\!\bigwedge \Psi$ puede ser inconsistente; para ver esto basta con tomar $\Psi = \{p, \neg p\}$.

[1] Decimos que dos conjuntos de fórmulas Σ_1 y Σ_2 son lógicamente equivalentes si $C_n(\Sigma_1) = C_n(\Sigma_2)$

[2] Usaremos esa notación para la unión de multiconjuntos de cualquier tipo de elementos

Denotaremos por $\mathcal{B}$ al conjunto formado por los conjuntos de creencias.

Definición 1.3 (Equivalencia entre conjunto de creencias) *Sean Ψ, Ψ' dos conjuntos de creencias. Diremos que Ψ y Ψ' son equivalentes, denotado por $\Psi \leftrightarrow \Psi'$, si, y sólo si, existe $f : \Psi \to \Psi'$ una biyección de multiconjuntos*[3] *tal que $f(\varphi) \equiv \varphi$, para cada φ en Ψ.*

1.1.2. Estados epistémicos y perfiles de creencias

Para introducir la noción de estados epistémicos, es necesario mostrar las diferencias entre bases de creencias y estados epistémicos[4]. Una *base de creencias* φ caracteriza un conjunto de proposiciones el cual un agente está totalmente de acuerdo en cualquier momento, mientras que un *estado epistémico* contiene, además de la base de creencias φ, informaciones adicionales para tratar la dinámica de una manera más precisa.

Varios marcos formales han sido introducidos para representar la noción de estados epistémicos; como ejemplo de estos es el presentado en el marco AGM [1, 5], donde los estados son representados a través de teorías[5]. Otra representación de estados epistémicos está dada a través de preórdenes sobre las interpretaciones; este contexto fue presentado por Darwiche y Pearl [3, 4]. Una representación más abstracta es presentada por Benferhat *et al.* [2], y es la que adoptaremos a partir de ahora para nuestro estudio, en combinación con la noción dada a través de preórdenes.

Definición 1.4 (Espacios epistémicos) *Un espacio epistémico es una terna $(\mathcal{E}, B, \mathcal{L})$, donde $\mathcal{E}$ es un conjunto no vacío, $\mathcal{L}$ es el conjunto de fórmulas de una lógica proposicional finita*[6]*, y B es una función de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{L}$, tal que la imagen de B es $\mathcal{L}^*$, el conjunto de fórmulas no contradictorias.*

Los elementos de $\mathcal{E}$ serán denominados *estados epistémicos*, la función B será denominada *función de creencias* y, para cada estado epistémico E, $B(E)$ será llamado *creencias arraigadas* del estado epistémico E. De esta manera la función de creencias B puede ser vista como una función de proyección, donde a cada estado epistémico E, lo proyecta en su base de creencias $B(E)$.

Note que si I es un conjunto no vacío de interpretaciones siempre existe un estado epistémico E, tal que $B(E) \equiv \varphi_I$.

Denotaremos por $E_\top$ a un estado estado epistémico tal que $B(E_\top) \equiv \top$, y E_i denotará el estado epistémico de un agente i, así cada agente posee información coherente.

[3] Si $\Psi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ y $\Psi' = \{\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_n\}$, entonces $f(\varphi_i) = \varphi'_{\sigma(i)}$, con σ una permutación.

[4] Estas comparaciones fueron presentadas por Darwiche y Pearl [3, 4]

[5] Conjuntos de fórmulas cerrados bajo consecuencias lógicas

[6] Es decir, el conjunto de variables proposicionales debe ser finito

Un ejemplo de espacio epistémico viene dado al considerar $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional finito cualquiera, y considerar $\mathcal{E}$, el conjunto de todos preórdenes totales sobre las valuaciones determinadas por $\mathcal{L}$, y B la función que envía a cada estado epistémico en sus minimales. En este tipo de espacio nos concentraremos más adelante.

Definición 1.5 (Perfiles de creencias) *Un perfil de creencias es un multiconjunto finito Φ, no vacío, formado sólo por estados epistémicos. Así, si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son estados epistémicos, no necesariamente diferentes, un perfil de creencias es $\Phi = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$.*

El conjunto de todos los perfiles de creencias será denotado por $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Si E es un estado epistémico, a veces también denotará al perfil de creencias $\Phi = \{E\}$, por abuso de anotación.

1.2. Relaciones de orden

En esta sección introduciremos una clase de relaciones muy importante en el estudio de la dinámica del conocimiento: los preórdenes totales[7].

Definición 1.6 (Preórdenes y preórdenes totales) *Sea A un conjunto no vacío y $\preceq$ una relación sobre A. Diremos que $\preceq$ es un preorden sobre A si se satisfacen las siguientes propiedades:*

Reflexividad *Si $a \in A$, entonces $a \preceq a$.*

Transitividad *Si $a, b, c \in A$ y además $a \preceq b$ y $b \preceq c$, entonces $a \preceq c$.*

Diremos que un preorden $\preceq$ sobre A es un preorden total si satisface que:

Totalidad *Si $a, b \in A$, entonces $a \preceq b$, o bien $b \preceq a$.*

Notemos que, a partir de esta definición, para verificar que una relación es un preorden total es suficiente con mostrar que esta satisface la totalidad y la transitividad, pues siempre que una relación satisfaga la totalidad, esta satisface la reflexividad.

Definición 1.7 (Órdenes totales) *Sea A un conjunto no vacío y $\leq$ una relación sobre A. Diremos que $\leq$ es un orden sobre A si, además de satisfacer las propiedades de reflexividad y transitividad, dadas en la definición* 1.6*, se satisface lo siguiente:*

Antisimetría *Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.*

[7]Estas relaciones son usadas en otros campos de la matemática, particularmente en la Teoría de Elección Social y en Teoría de Decisión

Diremos que un orden $\leq$ sobre A es un orden total sobre A si satisface la propiedad de totalidad dada en la definición 1.6.

Notemos que toda relación de orden es un relación de preorden y que todo orden total es un preorden total. Además, si $\preceq$ es un preorden sobre A definimos $\prec$, la relación estricta o modular correspondiente a $\preceq$, como sigue

$$a \prec b \text{ si, y sólo si, } a \preceq b \text{ y } b \npreceq a,$$

y su correspondiente relación de indiferencia $\simeq$ como

$$a \simeq b \text{ si, y sólo si, } a \preceq b \text{ y } b \preceq a.$$

Notemos que $\simeq$ es una relación de equivalencia cuando $\preceq$ es un preorden.

Lema 1.1 *Si $\preceq$ es un preorden total sobre un conjunto A, no vacío, se tiene lo siguiente:*

(*i*) *$\prec$ es transitiva e irreflexiva,*

(*ii*) *Si $a \preceq b$ y $b \prec c$, entonces $a \prec c$,*

(*iii*) *Si $a \prec b$ y $b \preceq c$, entonces $a \prec c$.*

Demostración: Mostremos sólo (*i*), la demostración de (*ii*) y (*iii*) es similar a la demostración de la transitividad de esta parte del resultado.

La irreflexibilidad de $\prec$ es consecuencia inmediata de su definición, faltando sólo por ver que $\prec$ es transitiva. Para ver esto supongamos que $a \prec b$ y $b \prec c$. De esta manera, $a \preceq b$, $b \preceq c$ y $c \npreceq b$.

Notemos que, de la transitividad de $\preceq$, $a \preceq c$. Así bien, si $c \preceq a$, nuevamente de la transitividad de $\preceq$ se tiene que $c \preceq b$, lo que contradice que $c \npreceq b$. De esta forma $c \npreceq a$ y consecuentemente $a \prec c$. ∎

Definición 1.8 (Minimales de un conjunto) *Sea $\preceq$ una preorden sobre A y $B \subseteq A$. Diremos que a es un* elemento minimal *de B (respecto a la relación $\preceq$) si, y sólo si, $a \in B$ y para cada $b \in B$, $b \nprec a$.*

Al conjunto de todos los minimales de $B \subseteq A$, respecto a $\preceq$, lo denotaremos por $min(B, \preceq)$, y $min(\preceq)$ denotará al conjunto $min(A, \preceq)$.

Notemos, que si $\preceq$ es un preorden total sobre A y $B \subseteq A$, entonces a es un elemento minimal de B, respecto a $\preceq$, si, y sólo si, a es un elemento de B, y para cada b en B se tiene que $a \preceq b$. Por otro lado, notemos que si $\leq$ es un orden total sobre A este posee un único elemento minimal.

Procederemos ahora a definir varios preórdenes que, por sus características, serán muy útiles en varios ejemplos y definiciones posteriores.

Sean $\{A_i\}_{i=1}^n$ una familia de conjuntos, y para cada $i \leq n$, supongamos $\preceq_i$ un preorden total sobre A_i. Definimos la relación $\preceq^{l_n}$, el *orden del diccionario* sobre $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ como sigue:

Si $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ entonces

$$a \preceq^{l_n} b \Leftrightarrow \begin{cases} \text{para cada } i \leq n,\ a_i \simeq_i b_i, \text{ o bien} \\ \text{existe } k \leq n \text{ tal que, para cada } i < k,\ a_i \simeq_i b_i \text{ y } a_k \prec_k b_k, \end{cases}$$

Proposición 1.2 *La relación $\preceq^{l_n}$ definida anteriormente es un preorden total sobre A.*

Demostración:

Totalidad: Sean $a, b \in A$ y supongamos que existe $i \leq n$ tal que $a_i \not\simeq_i b_i$. Sea k el mínimo de $\{i \leq n : a_i \not\simeq_i b_i\}$, y notemos que, para cada $i < k$, $a_i \simeq_i b_i$, y además $a_k \prec_k b_k$, o bien, $b_k \prec_k a_k$. En cualquiera de los casos se tiene, de manera respectiva, que $a \preceq^{l_n} b$ o bien $b \preceq^{l_n} a$.

Transitividad: Supongamos que $a \preceq^{l_n} b$ y $b \preceq^{l_n} c$. De esta manera tenemos lo siguiente:

- Para cada $i \leq n$, $a_i \simeq_i b_i$, o bien, existe $k \leq n$ tal que, para cada $i < k$, $a_i \simeq_i b_i$ y $a_k \prec_k b_k$, y
- para cada $i \leq n$, $b_i \simeq_i c_i$, o bien, existe $m \leq n$ tal que, para cada $i < m$, $b_i \simeq_i c_i$ y $b_m \prec_m c_m$.

Supongamos que, para cada $i \leq n$, $a_i \simeq_i b_i$. Si, para cada $i \leq n$, $b_i \simeq_i c_i$, de la transitividad de $\simeq_i$ se tiene que, si $i \leq n$ entonces $a_i \simeq_i c_i$, deduciéndose el resultado de la definición. Ahora bien, si existe $m \leq n$ tal que, para cada $i < m$, $b_i \simeq_i c_i$ y $b_m \prec_m c_m$, se tiene de $\simeq_i$ y del lema 1.1 que, para cada $i < m$, $a_i \simeq_i c_i$ y $a_m \prec_m c_m$. De esta forma $a \preceq^{l_n} b$.

Por otro lado, supongamos que existe $k \leq n$ tal que, para cada $i < k$, $a_i \simeq_i b_i$ y $a_k \prec_k b_k$. Si, para cada $i \leq n$, $b_i \simeq_i c_i$, la demostración es análoga al caso anterior. Ahora bien, supongamos que existe $m \leq n$ tal que, para cada $i < m$, $b_i \simeq_i c_i$ y $b_m \prec_k c_m$.

Sea $r = min\{k, m\}$, y notemos que, para cada $i \leq r$, $a_i \simeq_i b_i$ y $b_i \simeq_i c_i$. Además se tiene que $a_r \preceq_r b_r$ y $b_r \preceq_r c_r$. De esta manera, en virtud de la transitividad de

$\simeq_i$ y $\preceq_r$, se tiene que, para cada $i \leq r$, $a_i \simeq_i c_i$ y $a_r \preceq_r c_r$.

Si $c_r \preceq_r a_r$ se tiene de la transitividad de $\preceq_r$ que $c_r \preceq_r b_r$, deduciéndose que $c_r \simeq_r b_r$. De esta manera, puesto que $r = min\{k, m\}$, $r \leq k$; más aún, $r = k$, y $a_r \prec_r b_r$. Ahora bien, de $\simeq_r$ y del lema 1.1 se tiene que $a_r \prec_r c_r$, deduciéndose que $c_r \not\prec_r a_r$. Contradicción.

De esta manera $a_r \preceq_r c_r$ y $c_r \not\preceq_r a_r$. Por lo tanto, para cada $i < r$, $a_i \simeq c_i$ y $a_r \prec c_r$, obteniendo que $a \prec^{l_n} c$, mostrando así la transitividad de $\preceq^{l_n}$. ∎

Como ejemplo de esto consideremos en $\mathbb{R}$ el orden natural sobre los números reales y $\preceq^{l_n}$ el orden lexicográfico de los vectores de longitud n. Notemos que si cada $\leq_i$ es un orden total sobre A_i, entonces $\leq^{l_n}$ es un orden total sobre A.

Sea A un conjunto no vacío, y consideremos $\preceq_1$ y $\preceq_2$ dos preórdenes totales sobre A. Definamos la relación $lex(\preceq_1, \preceq_2)$ sobre A, denotada por $\preceq^{lex}$, como sigue:

$$a \preceq^{lex} b \Leftrightarrow \begin{cases} a \prec_1 b, & \text{o bien} \\ a \simeq_1 b \quad \& & a \preceq_2 b \end{cases}$$

Proposición 1.3 *La relación $\preceq^{lex} := lex(\preceq_1, \preceq_2)$ definida anteriormente es un preorden total sobre A, satisfaciendo que:*

(i) *Si $a \prec_1 b$, entonces $a \prec^{lex} b$*

(ii) *$a \simeq^{lex} b$ si, y sólo si, $a \simeq_1 b$ & $a \simeq_2 b$*

(iii) *Si $a \simeq_1 b$ y $a \prec_2 b$, entonces $a \prec^{lex} b$*

Demostración:

Totalidad Sean $a, b \in A$ y sin pérdida de generalidad, en virtud de la totalidad de $\preceq_1$, supongamos que $a \preceq_1 b$.

Si $a \prec_1 b$ el resultado se deduce de forma inmediata. Así, supongamos que $a \simeq_1 b$ y notemos que, en virtud de la totalidad de $\preceq_2$, $a \preceq_2 b$ o $b \preceq_2 a$, implicando en cada caso que $a \preceq^{lex} b$, o bien $b \preceq^{lex} a$, respectivamente.

Transitividad Supongamos que $a \preceq^{lex} b$ y $b \preceq^{lex} c$. De esta manera tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{lll} a \prec_1 b, & \text{o bien} & a \simeq_1 b \;\&\; a \preceq_2 b \\ b \prec_1 c, & \text{o bien} & b \simeq_1 c \;\&\; b \preceq_2 c \end{array}$$

Notemos que, en cualquiera de los casos, $b \preceq_1 c$. Consideremos de esta manera lo siguiente:

- ($a \prec_1 b$): Puesto que $b \preceq_1 c$ se tiene, del lema 1.1, que $a \prec_1 c$. Esto nos lleva a que $a \preceq^{lex} c$.

- ($a \simeq_1 b$ & $a \preceq_2 b$): Si $b \prec_1 c$ entonces, por el lema 1.1, $a \prec_1 c$, implicando así que $a \preceq^{lex} c$. Por otro lado, si $b \simeq_1 c$, entonces $b \preceq_2 c$, y puesto que $a \preceq_2 b$, se tiene que $a \preceq_2 c$. Además, como $a \simeq_1 b$ entonces $a \simeq_1 c$. De esta forma, $a \preceq^{lex} c$.

De esta manera $\preceq^{lex}$ define un preorden total sobre los mundos.

Mostremos ahora que $\preceq^{lex}$ satisface (i)-(iii).

(i) Supongamos $a, b \in A$ tales que $a \prec_1 b$. De esta forma $b \not\preceq_1 a$ y $a \preceq^{lex} b$. Ahora bien, si $b \preceq^{lex} a$ entonces $b \preceq_1 a$, lo cual es una contradicción. Así, $b \not\preceq^{lex} a$, deduciéndose de la totalidad de $\preceq^{lex}$ que $b \prec^{lex} a$.

(ii) Consideremos $a, b \in A$ tales que $a \simeq_1 b$ y $a \simeq_2 b$. De esta manera tenemos que

$$\begin{aligned} a \simeq_1 b \; \& \; a \preceq_2 b \quad &\Rightarrow \quad a \preceq^{lex} b \\ b \simeq_1 a \; \& \; b \preceq_2 a \quad &\Rightarrow \quad b \preceq^{lex} a, \end{aligned}$$

implicando que $a \simeq^{lex} b$.

Por otro lado, si $a \simeq^{lex} b$ se tiene que $a \preceq^{lex} b$ y $b \preceq^{lex} a$. Notemos que, por la parte (i) que $a \not\prec_1 b$ y $b \not\prec_1 a$. Así, $a \simeq_1 b$, y puesto que $a \preceq^{lex} b$ y $b \preceq^{lex} a$, se tiene que $a \preceq_2 b$ y $b \preceq_2 a$, implicando que $a \simeq_2 b$.

(iii) Es consecuencia inmediata de (ii). ∎

Observación 1.1 Notemos que si $\preceq_1 = \preceq_2$, o bien si $\preceq_1$ (o $\preceq_2$) es tal que, para cada par $a, b \in A$, $a \simeq_1 b$ (o $a \simeq_2 b$) entonces $lex(\preceq_1, \preceq_2) = \preceq_1$ (o bien $lex(\preceq_1, \preceq_2) = \preceq_2$).

Proposición 1.4 *Sean A un conjunto no vacío, $\preceq_1$ y $\preceq_2$ preórdenes totales definidos sobre A, entonces*

$$min\big(min(\preceq_1), \preceq_2\big) = min\big(\preceq^{lex}\big)$$

donde $\preceq^{lex} := lex(\preceq_1, \preceq_2)$.

Demostración:

- $min\big(min(\preceq_1), \preceq_2\big) \subseteq min\big(\preceq^{lex}\big)$:

  Sean $a \in min\big(min(\preceq_1), \preceq_2\big)$ y $b \in A$, cualesquiera. Como $a \in min(\preceq_1)$ entonces $a \preceq_1 b$.

  Ahora bien, si $a \prec_1 b$ se deduce de forma inmediata que $a \preceq^{lex} b$. Por otro lado, si $a \simeq_1 b$ entonces $b \in min(\preceq_1)$ y de esta forma $a \preceq_2 b$, implicando que $a \preceq^{lex} b$. De esta manera hemos probado que $a \preceq^{lex} b$, para cualquier b, es decir $a \in min(\preceq^{lex})$.

- $min\big(min(\preceq_1), \preceq_2\big) \supset min\big(\preceq^{lex}\big)$:

  Razonemos por el absurdo suponiendo que existe a en A tal que $a \in min(\preceq^{lex})$ y $a \notin min\big(min(\preceq_1), \preceq_2\big)$.

  Si $a \notin min\big(\preceq_1\big)$ entonces existe $b \in A$ tal que $b \prec_1 a$; pero esto nos conduce a que $b \prec^{lex} a$, contradiciendo el hecho que $a \in min\big(\preceq^{lex}\big)$. Así, $a \in min\big(\preceq_1\big)$.

  Ahora bien
  como $a \notin min\big(min(\preceq_1), \preceq_2\big)$, existe $b \in min(\preceq_1)$ tal que $b \prec_2 a$. Pero $b \simeq_1 a$, de esta manera $b \prec^{lex} a$, lo que contradice que $a \in min\big(\preceq^{lex}\big)$. De esta manera $a \in min\big(min(\preceq_1), \preceq_2\big)$. ∎

Supongamos que A es un conjunto finito, el *rango* de un elemento $a \in A$, con respecto a un preorden total $\preceq$ sobre A, es un número entero no negativo, que corresponde al nivel donde a se encuentra en el preorden total $\preceq$. Formalmente, considerando $\mathbb{P}$ el conjunto de todos los preórdenes totales definidos sobre A, el *rango* es una aplicación $r : A \times \mathbb{P} \to \mathbb{N}$, la cual está definida por:

$$r(a, \preceq) = n \textit{ si } n \textit{ es el mayor entero tal que existen } a_0, a_1, \ldots, a_n, \textit{ con } a_i \prec a_{i+1} \textit{ y } a_n = a.$$

Para cada a en A y $\preceq$ preorden total sobre A denotaremos por $r_{\preceq}(a)$ a $r(a, \preceq)$. Además, si una familia de preórdenes sobre A es indexada por un conjunto I, para cada λ en I escribiremos $r_\lambda(a)$ en vez de $r_{\preceq_\lambda}(a)$.

La operación de concatenación de dos vectores cuyas coordenadas están en $\mathbb{R}^+$ será denotada por $\odot$. Si v_1 y v_2 dos vectores, $v_1 \overrightarrow{\odot} v_2$ denota el vector que se obtiene al ordenar de forma decreciente al vector $v_1 \odot v_2$. El número de componentes de un vector v será denotado por $|v|$.

Proposición 1.5 *Sean v_1, v_2 y v_3 vectores formados por números reales no negativos, ordenados de forma decreciente, con $|v_1| = |v_2| = n$ y $|v_3| = m$. Si $v_1 \leq^{l_n} v_2$ ($v_1 <^{l_n} v_2$), entonces $v_1 \overrightarrow{\odot} v_3 \leq^{l_{n+m}} v_2 \overrightarrow{\odot} v_3$ ($v_1 \overrightarrow{\odot} v_3 <^{l_{n+m}} v_2 \overrightarrow{\odot} v_3$).*

Demostración: Por inducción en el tamaño de v_3. En realidad el caso interesante es cuando $|v_3| = 1$, pues claramente si $v_3 = (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ se tiene

$$v \overrightarrow{\odot} v_3 = (v \overrightarrow{\odot} (a_1, \ldots, a_{n-1})) \overrightarrow{\odot} (a_n)$$

Supongamos $v_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $v_2 = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Si $v_1 = v_2$ el resultado se deduce de forma inmediata. Así supongamos que $v_1 \neq v_2$, y notemos así que $v_1 <^{l_n} v_2$. De esta manera existe j tal que $x_j < y_j$ y si $1 \leq k < j$ se tiene que $x_k = y_k$.

Sea $v_3 = (z)$. Si $z \leq x_j$, entonces $z < y_j$. De esta manera las primeros j elementos de $v_1 \overrightarrow{\odot} v_3$ y $v_2 \overrightarrow{\odot} v_3$ son respectivamente los mismos de los vectores v_1 y v_2 lo que implica $v_1 \overrightarrow{\odot} v_3 <^{l_{n+m}} v_2 \overrightarrow{\odot} v_3$.

Ahora bien supongamos que $z > x_j$ y sea $k = min\{i : z \geq x_i\}$. Consideremos los siguientes casos: $z \geq y_j$ o $z < y_j$. En el primer caso, z va a coincidir con la k-ésima coordenada de las listas $v_1 \overrightarrow{\odot} v_3$ y $v_2 \overrightarrow{\odot} v_3$. Así la situación será como se describe gráficamente a continuación

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & x_2 & \ldots & x_{k-1} & z & x_k & \ldots & x_j & \ldots \\
\shortparallel & \shortparallel & \cdots & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \cdots & \wedge & \\
y_1 & y_2 & \ldots & y_{k-1} & z & y_k & \ldots & y_j & \ldots
\end{array}$$

donde se ve claramente que $v_1 \overrightarrow{\odot} v_3 <^{l_{n+m}} v_2 \overrightarrow{\odot} v_3$.

Por otro lado, si $z < y_j$ se tiene las primeras j entradas del vector $v_2 \overrightarrow{\odot} v_3$ se mantienen iguales, y además se tiene que $z < y_k$, ya que $y_j \leq y_k$. Ahora bien, como para cada $i < k$ se tiene que $x_i = y_i$, y puesto que el vector $v_1 \overrightarrow{\odot} v_3$ está ordenado de forma descendente, se tiene que z se encuentra en la k-ésima entrada del vector $v_1 \overrightarrow{\odot} v_3$, como se observa en la siguiente representación

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & x_2 & \ldots & x_{i-1} & z & x_i & \ldots & x_j & \ldots \\
\shortparallel & \shortparallel & \cdots & \shortparallel & \wedge & & & & \\
y_1 & y_2 & \ldots & y_{i-1} & y_i & y_{i+1} & \ldots & y_{j+1} & \ldots
\end{array}$$

de donde se ve claramente que $v_1 \overrightarrow{\odot} v_3 <^{l_{n+1}} v_2 \overrightarrow{\odot} v_3$. ∎

Como corolario a la proposición anterior obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.1 *Sean v_1, v_1', v_2, v_2' vectores conformados por números reales no negativos* *ordenados de forma decreciente tales que* $|v_1| = |v_1'| = n$ *y* $|v_2| = |v_2'| = m$.

(i) Si $v_1 \leq^{l_n} v_1'$ *y* $v_2 \leq^{l_m} v_2'$*, entonces* $v_1 \overrightarrow{\odot} v_2 \leq^{l_{n+m}} v_1' \overrightarrow{\odot} v_2'$.

(ii) Si $v_1 \leq^{l_n} v_1'$ *y* $v_2 <^{l_m} v_2'$*, entonces* $v_1 \overrightarrow{\odot} v_2 <^{l_{n+m}} v_1' \overrightarrow{\odot} v_2'$.

Demostración: Demostremos sólo (i), (ii) se demuestra de forma análoga a (i). Supongamos que $v_1 \leq^{l_n} v_1'$ y $v_2 \leq^{l_m} v_2'$. Entonces, por la proposición 1.5, $v_1 \overrightarrow{\odot} v_2 \leq^{l_{n+m}} v_1' \overrightarrow{\odot} v_2$ y $v_2 \overrightarrow{\odot} v_1' \leq^{l_{n+m}} v_2' \overrightarrow{\odot} v_1'$. Como $v_1' \overrightarrow{\odot} v_2 = v_2 \overrightarrow{\odot} v_1'$ y en virtud de la transitividad de $\leq^{l_{n+m}}$ se tiene que $v_1 \overrightarrow{\odot} v_2 \leq^{l_{n+m}} v_1' \overrightarrow{\odot} v_2'$. ∎

1.3. Funciones de agregación

Definición 1.9 (Función de agregación) *Para cada número natural* n *sea* A_n *un conjunto no vacío,* $\leq_n$ *un orden lineal sobre* A_n*, y supongamos* $\overline{0}_n = min(A_n, \leq_n)$*. Una función de agregación es una función total,* f*:*

$$f : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R}^+)^n \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n,$$

satisfaciendo, que para cada $n \geq 1$*, si* $v \in (\mathbb{R}^+)^n$*, entonces* $f(v) \in A_n$*, y además cumple con las siguientes propiedades:*

Anonimato *Para cualquier permutación* σ*,*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

Minimalidad *Si* $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{0}_n$*, entonces* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Monotonía *Si* $x < y$ *entonces*

$$f(x, v) \leq_{n+1} f(y, v)$$

Diremos que una función de agregación f *es estricta si satisface lo siguiente:*

Monotonía estricta *Si* $x < y$ *entonces*

$$f(x, v) <_{n+1} f(y, v)$$

En muchos casos, las estructuras ordenadas serán todas las mismas iguales a $\mathbb{R}^+$ con el orden natural. Ese será el caso de las funciones suma, máximo y mínimo como observaremos más adelante. Pero en otros no será de esa manera, como en el caso de la función máximo generalizado donde para cada n, A_n será $(\mathbb{R}^+)^n$ y el orden $\leq_n$ será el orden lexicográfico para los vectores de tamaño n.

Por otro lado, como veremos más adelante a partir de sus definiciones, las funciones suma y máximo generalizado son funciones de agregación fuertes; a diferencia de las funciones máximo y mínimo, las cuales son funciones de agregación débil.

Por abuso de lenguaje, y con el deseo de simplificar la notación, denotaremos a $\overline{0}_n$ por 0 y a $\leq_n$ por $\leq$, siendo claro del contexto de quien se trata.

Definición 1.10 *Sea f una función de agregación y vectores v_1, v_2, v_3, v_4 de reales no negativos, con $|v_1| = |v_2|$ y $|v_3| = |v_4|$. Diremos que f es una función de agregación que satisface la propiedad Pareto fuerte si cumple con:*

(i) Si $f(v_1) \leq f(v_2)$ y $f(v_3) \leq f(v_4)$, entonces $f(v_1 \odot v_3) \leq f(v_2 \odot v_4)$;

(ii) Si $f(v_1) \leq f(v_2)$ y $f(v_3) < f(v_4)$, entonces $f(v_1 \odot v_3) < f(v_2 \odot v_4)$

Diremos f es una función de agregación que satisface Pareto débil si cumple la condición (i) anterior y además la condición (ii') que se enuncia a continuación:

(ii') Si $f(v_1) < f(v_2)$ y $f(v_3) < f(v_4)$, entonces $f(v_1 \odot v_3) < f(v_2 \odot v_4)$.

Proposición 1.6 *Sea f una función de agregación y $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Si para cada $i \leq n$, $x_i \leq y_i$ entonces, para cada $k \leq n$,*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq f(y_1, y_2, \ldots, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

Demostración: Demostremos este hecho haciendo inducción sobre $k \leq n$. Como $x_1 \leq y_1$, se deduce de la monotonía que

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq f(y_1, x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

satisfaciéndose así para $k = 1$.

Supongamos que, para $k < n$, se satisface que

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq f(y_1, y_2, \ldots, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n), \tag{1.1}$$

y consideremos $v = (y_1, y_2, \ldots, y_k, x_{k+2}, \ldots, x_n)$. Así, en virtud de la monotonía de f tenemos que $f(x_{k+1}, v) \leq f(y_{k+1}, v)$, deduciéndose de la propiedad de anonimato que

$$f(y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) \leq f(y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n).$$

De esto último, y de la ecuación (1.1), se tiene que

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq f(y_1, \ldots, y_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) \qquad \blacksquare$$

Observemos en el resultado anterior que, al cambiar la hipótesis de función de agregación y suponer que f es una función de agregación estricta obtenemos una desigualdad estricta, siempre que $x_i \leq y_i$, para cada $i \leq n$, y exista $j \leq n$ tal que $x_j < y_j$.

Por otro lado, como consecuencia directa del resultado anterior tenemos lo siguiente:

Corolario 1.2 *Sea f una función de agregación y $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ números reales no negativos. Si para cada $i \leq n$, $x_i \leq y_i$ entonces*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Más aún, si f una función de agregación estricta, y para algún $j \leq n$ se tiene que $x_j < y_j$, entonces

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de las propiedades de Pareto y anonimato.

Proposición 1.7 *Para cada número natural n, sea A_n un conjunto no vacío, $\leq_n$ un orden lineal sobre A_n, y supongamos $\overline{0}_n = min(A_n, \leq_n)$. Sea, f una función que asocia a cada n-upla finita de números reales no negativos un elemento en A_n. Si f satisface anonimato y alguna de las propiedades Pareto antes mencionada, y es tal que para cualesquiera x e y, con $x < y$, se tiene que $f(x) < f(y)$, entonces f satisface monotonía. Más aún, si f satisface Pareto fuerte entonces f satisface monotonía estricta.*

A continuación definiremos cuatro funciones de agregación, las cuales son comúnmente utilizadas.

La función *máximo* (el máximo de las entradas de un vector de números reales no negativos) esta definida por

$$Max : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R}^+)^n \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

siendo su regla de correspondencia la siguiente:

$$Max(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

De las propiedades del máximo se puede notar que Max es una función de agregación satisfaciendo Pareto débil. La función *mínimo* (el mínimo de las entradas de un vector de números reales no negativos) también es una función de agregación Pareto débil.

$$min : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R}^+)^n \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

donde su regla de correspondencia esta dada como sigue:

$$min(x_1, x_2, \ldots, x_n) = min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

La función de agregación *suma* (la suma de los elementos de un vector de números reales positivos) esta definida por:

$$\sum : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R}^+)^n \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

donde $\sum(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$. De las propiedades de la suma es evidente que $\sum$ es función de agregación estricta que satisface Pareto fuerte.

Para cada n, entero positivo, consideremos $\leq^{l_n}$ el orden lexicográfico sobre $(\mathbb{R}^+)^n$. Definimos la función *máximo generalizado*, $GMax$ de la siguiente forma:

$$GMax : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R}^+)^n \longrightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R}^+)^n,$$

donde $GMax(v) = v \downarrow$, siendo $v \downarrow$ el vector que se obtiene de v al ordenar sus entradas en forma decreciente. Notemos que $GMax$ es una función que satisface anonimato y minimalidad.

Además, $GMax$ satisface Pareto fuerte, esto en virtud de la proposición 1.5 y del hecho que $GMax(v_1) \overrightarrow{\odot} GMax(v_2) = GMax(v_1 \overrightarrow{\odot} v_2)$.

Ahora bien, puesto que para cada par $x < y$ se tiene que $GMax(x) < GMax(y)$, de la proposición 1.7 y de lo expuesto anteriormente se tiene que f es una función de agregación estricta que satisface Pareto fuerte.

CAPÍTULO 2

FUSIÓN DE BASES DE CREENCIAS

En esta sección estudiaremos una clase de operadores presentados por Konieczny y Pino Pérez, los cuales son una extensión del concepto introducido en [8], fue acuñado en [9] y ampliamente estudiado en [7, 10, 11]. El objetivo de los operadores de fusión es determinar cuáles son las creencias de grupo a partir de las creencias de los individuos y las restricciones impuestas por el sistema (restricciones físicas, leyes, ...).

En el marco KP[1], tanto las creencias de los individuos como las restricciones estarán codificadas en bases de creencias (fórmulas proposicionales).

2.1. Operadores de fusión IC

Un operador de fusión Δ es una función que envía un conjunto de creencias Ψ y una base de creencias μ (que denota las restricciones de integridad del sistema) en una base de creencias. Formalmente:

$$\Delta : \mathcal{B} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$$

donde $\mathcal{B}$ denota el conjunto de todos los conjuntos de creencias. En vez de $\Delta(\Psi, \mu)$ escribiremos $\Delta_\mu(\Psi)$ por simplicidad.

Definición 2.1 (Operadores de fusión IC) Δ *es un operador de fusión con restricciones de integridad (Operador de fusión IC, para abreviar*[2]*) si, satisface lo siguiente:*

(IC0) $\Delta_\mu(\Psi) \vdash \mu$.

(IC1) *Si* μ *es consistente, entonces* $\Delta_\mu(\Psi)$ *es consistente.*

[1]Denominación que le daremos a este contexto por las iniciales de Konieczny y Pino Pérez

[2]Por sus iniciales en inglés: *Integrity Constraints*

(IC2) *Si* $\bigwedge \Psi$ *es consistente con* μ*, entonces* $\Delta_\mu(\Psi) \equiv \bigwedge \Psi \wedge \mu$.

(IC3) *Si* $\Psi \equiv \Psi'$ *y* $\mu \equiv \mu'$*, entonces* $\Delta_\mu(\Psi) \equiv \Delta_{\mu'}(\Psi')$.

(IC4) *Si* $\varphi \vee \varphi' \vdash \mu$ *y* $\Delta_\mu(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi \nvdash \perp$*, entonces* $\Delta_\mu(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi' \nvdash \perp$.

(IC5) $\Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu(\Psi') \vdash \Delta_\mu(\Psi \sqcup \Psi')$.

(IC6) *Si* $\Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu(\Psi') \nvdash \perp$*, entonces* $\Delta_\mu(\Psi \sqcup \Psi') \vdash \Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu(\Psi')$.

(IC7) $\Delta_\mu(\Psi) \wedge \mu' \vdash \Delta_{\mu \wedge \mu'}(\Psi)$.

(IC8) *Si* $\Delta_\mu(\Psi) \wedge \mu' \nvdash \perp$*, entonces* $\Delta_{\mu \wedge \mu'}(\Psi) \vdash \Delta_\mu(\Psi) \wedge \mu'$.

(ICO) asegura que el operador de fusión satisface las restricciones de integridad. **(IC1)** estipula que siempre que las restricciones de integridad sean consistentes, el resultado de la fusión será consistente. **(IC2)** nos dice que, de ser posible, el resultado de la fusión es la conjunción de las creencias con las restricciones de integridad. **(IC3)** expresa el hecho de que el resultado de la fusión depende sólo de las opiniones expresadas por los agentes y no de su interpretación sintáctica. **(IC4)** es conocido como el postulado de equidad; el punto es que, cuando fusionamos dos bases de creencias, el operador no debe dar preferencia a ninguna de ellas. **(IC5)** e **(IC6)** estipulan que, si se pueden encontrar dos subgrupos cuyos resultados son consistentes, el resultado de la fusión global será exactamente la conjunción de los resultados. **(IC7)** e **(IC8)** estipulan que una alternativa que es preferida entre las alternativas posibles (μ), se mantendrá preferida si restringimos las posibles escogencias ($\mu \wedge \mu'$) y ella aún está allí.

Definición 2.2 (Asignación sincrética) *Una asignación sincrética es una función que envía cada conjunto de creencias* Ψ *a un preorden total* $\preceq_\Psi$ *sobre todas las interpretaciones tal que para conjuntos de creencias* Ψ, Ψ_1, Ψ_2 *y bases de creencias* φ_1, φ_2*, cualesquiera, se tiene:*

1. *Si* $w \models \Psi$ *y* $w' \models \Psi$*, entonces* $w \simeq_\Phi w'$.

2. *Si* $w \models \Psi$ *y* $w' \not\models \Psi$*, entonces* $w \prec_\Psi w'$.

3. *Si* $\Psi_1 \equiv \Psi_2$*, entonces* $\preceq_{\Psi_1} = \preceq_{\Psi_2}$

4. $\forall\, w \models \varphi_1\ \exists\, w' \models \varphi_2,\ w' \preceq_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} w$

5. *Si* $w \preceq_{\Psi_1} w'$ *y* $w \preceq_{\Psi_2} w'$*, entonces* $w \preceq_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} w'$

6. *Si* $w \preceq_{\Psi_1} w'$ *y* $w \prec_{\Psi_2} w'$*, entonces* $w \prec_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} w'$

Las dos primeras condiciones aseguran que los modelos de los conjuntos de creencias (de haber) son las interpretaciones más plausibles[3] para el preorden asociado al conjunto de creencias. La tercera condición estipula que dos conjuntos de creencias equivalentes tienen el mismo preorden asociado.

La cuarta condición expresa que, cuando se fusionan dos bases de creencias, para cada modelo de la primera, existe un modelo de la segunda tal que es al menos tan buena como la primera. Esto asegura que las dos bases de creencias dadas tienen igual consideración.

La quinta condición dice que, si una interpretación w es al menos tan plausible como una interpretación w' para un conjunto de creencias Ψ_1, y de igual manera ocurre para un conjunto de creencias Ψ_2, entonces si se unen los dos conjuntos de creencias w se mantendrá tan plausible como w'.

La sexta condición fortifica la condición previa. Esta condición expresa que si una interpretación w es al menos tan plausible como una interpretación w' para un conjunto de creencias Ψ_1, y si w es estrictamente más plausible que w' para un conjunto de creencias Ψ_2, entonces si unimos las dos conjuntos de creencias w será estrictamente más plausible que w'.

Teorema 2.1 (Representación de operadores de fusión) *Un operador Δ es un operador de fusión IC si, y sólo si, existe una asignación sincrética que manda cada conjunto de creencias Ψ en un preorden total $\preceq_\Psi$ sobre $\mathcal{W}$ tal que*

$$[\Delta_\mu(\Psi)] = min\big([\mu], \preceq_\Psi\big)$$

El teorema 2.1 nos dice que un operador de fusión IC le corresponde una familia de preórdenes. De hecho, un operador está determinado completamente por estos preórdenes. Daremos algunos ejemplos de esto en la siguiente sección. La demostración de este resultado puede ser vista en [9] y [10], donde podemos notar que el postulado (IC6) solamente se usó para demostrar la condición 6 de la definición de asignación sincrética y, del mismo modo, dicha condición se uso para demostrar (IC6), obteniéndose el siguiente corolario.

Corolario 2.1 *Un operador satisface* (IC0)-(IC5), (IC7) *e* (IC8) *si, y sólo si, puede ser representado por una asignación que satisface* 1-5.

Próximamente daremos una variante del Teorema 2.1 debilitando el postulado (IC6) y su correspondiente condición sobre la asignación, y cuya demostración puede ser vista

[3]La relación $\prec_\Psi$ se interpreta como una relación de plausibilidad; así $w \preceq_\Psi w'$ significará que w es más plausible que w'

en [10].

Consideremos el siguiente postulado:

(IC6') *Si* $\Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu(\Psi') \nvdash \perp$ *entonces* $\Delta_\mu(\Psi \sqcup \Psi') \vdash \Delta_\mu\Psi \vee \Delta_\mu(\Psi')$

Esta propiedad dice que si una alternativa es tomada por un grupo, entonces si dividimos el grupo en dos subgrupos (los cuales concuerdan en algo), al menos uno de estos subgrupos tendrá esa alternativa. Esta propiedad corresponde a la siguiente condición que es obviamente más débil que la condición 6 para las asignaciones sincréticas.

6′. Si $w \prec_\Psi w'$ y $w \prec_{\Psi'} w'$, entonces $w \prec_{\Psi\sqcup\Psi'} w'$

Definición 2.3 (Operadores de cuasi-fusión fusión IC) *Diremos que un operador es un operador de cuasi-fusión IC si satisface* (IC0)-(IC5), (IC6'), (IC7) *e* (IC8)*. Una asignación cuasi-sincrética es una asignación que satisface las condiciones* 1-5 *y* 6'.

Teorema 2.2 (Representación de operadores de cuasi-fusión) *Un operador* Δ *es un operador de cuasi-fusión si, y sólo si, puede ser representado por una asignación cuasi-sincrética.*

2.2. Algunos operadores de fusión IC

Daremos en esta sección la definición de tres familias de operadores. Todos estos operadores están basados sobre una distancia entre interpretaciones que inducen el preorden asociado a cada conjunto de creencias.

Definición 2.4 (Distancia entre interpretaciones) *Una distancia entre interpretaciones es una aplicación* $d : \mathcal{W}\times\mathcal{W} \to \mathbb{R}^+$ *tal que para cualesquiera* $w, w', \in \mathcal{W}$ *se cumple que:*

- $d(w, w') = d(w', w)$
- $d(w, w') = 0$ *si, y sólo si,* $w = w'$
- *Para cada* w, w', w'' *interpretaciones,* $d(w, w') \leq d(w, w'') + d(w'', w')$

Una distancia entre interpretaciones induce en forma natural una extensión, que llamaremos distancia entre una interpretación y una base de creencias de la siguiente manera

$$d(w, \varphi) = \min_{w' \models \varphi} d(w, w')$$

Esta a su vez, en conjunto con una función de agregación f, induce una *distancia* entre una interpretación y un conjunto de creencias como sigue:

$$d_f(w, \Psi) = \underset{\varphi \in \Psi}{f} \big(d(w, \varphi)\big)$$

donde $\underset{\varphi \in \Psi}{f} \big(d(w, \varphi)\big) := f(d(w, \varphi_1), d(w, \varphi_2), \ldots, d(w, \varphi_n))$[4], siendo $\Psi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$.

Esto último nos permite definir un preorden sobre interpretaciones como sigue:

$$w \preceq_{\Psi}^{d,f} w' \textit{si, y sólo si, } d_f(w, \Psi) \leq d_f(w', \Psi)$$

Proposición 2.1 *Sea d una pseudo distancia y f una función de agregación cumpliendo con una de las propiedades de Pareto. La aplicación $\Psi \mapsto \preceq_{\Psi}^{d,f}$ cumple con las primeras cuatro postulados de la asignación sincrética.*

Demostración: Consideremos Ψ, Ψ' conjuntos de creencias φ y φ' bases de creencias cualesquiera.

1. Si $w \models \Psi$ y $w' \models \Psi$, entonces para cada $\varphi \in \Psi$ se tiene que $w \models \varphi$ y $w' \models \varphi$. De esta manera
$$\forall\ \varphi \in \Psi,\ d(w, \varphi) = d(w', \varphi) = 0$$
y de la propiedad de minimalidad de f se tiene que
$$d_f(w, \Psi) = 0 = d_f(w', \Psi)$$
Por lo tanto $w \simeq_{\Psi}^{d,f} w'$.

2. Supongamos que $w \models \Psi$ y $w' \not\models \Psi$. Como $w \models \Psi$, $d_f(w, \Psi) = 0$. Por otro lado $w' \not\models \varphi$, para algún $\varphi \in \Psi$, de esta manera $d(w', \varphi) > 0$. Así, de la propiedad de minimalidad se tiene
$$d_f(w', \Psi) = \underset{\varphi \in \Psi}{f} \big(d(w', \varphi)\big) > 0$$
De esta manera tenemos
$$d_f(w, \Psi) < d_f(w', \Psi)$$
lo que indica que $w \prec_{\Psi}^{d,f} w'$

3. Supongamos que $\Psi \equiv \Psi'$. Así, existe una biyección $g : \Psi \to \Psi'$ tal que para cada $\varphi \in \Psi$, $g(\varphi) \equiv \varphi$. Consideremos w y w' interpretaciones y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $w \preceq_{\Psi}^{d,f} w'$. De esta manera $d_f(w, \Psi) \leq d_f(w', \Psi)$.

[4]Nótese $\underset{\varphi \in \Psi}{f} \big(d(w, \varphi)\big)$ esta bien definido en virtud de la propiedad de anonimato de f.

Puesto que para cada $\varphi \in \Psi$, $g(\varphi) \equiv \varphi$ entonces,

$$\forall\, \varphi \in \Psi,\ d(w, \varphi) = d(w, g(\varphi))$$

para cada φ en Ψ, y de la condición de anonimato de f se tiene

$$d_f(w, \Psi) = \underset{\varphi \in \Psi}{f} \big(d\big(w, g(\varphi)\big)\big)$$

De la biyectividad de g y del anonimato se tiene que $d_f(w, \Psi) = \underset{\varphi \in \Psi'}{f} \big(d(w, \varphi)\big)$, y así

$$d_f(w, \Psi) = d_f(w, \Psi')$$

De igual manera se demuestra que $d_f(w', \Psi) = d_f(w', \Psi')$, lo que implica que

$$d_f(w, \Psi') \leq d_f(w', \Psi'),$$

luego $w \preceq^{d,f}_{\Psi'} w'$. Análogamente se demuestra que si $w \preceq^{d,f}_{\Psi'} w'$ entonces $w \preceq^{d,f}_{\Psi} w'$.

4. Sea $w \models \varphi$. Mostremos que existe $w' \models \varphi'$ tal que $w' \preceq^{d,f}_{\varphi \sqcup \varphi'} w$.

   Sea $w' \models \varphi'$ tal que $d(w, w') = d(w, \varphi')$, y notemos que $d(w, \varphi) = d(w', \varphi') = 0$. Ahora bien,

   $$d(w', \varphi) \leq d(w, w')$$

   luego $d(w', \varphi) \leq d(w, \varphi')$. En virtud de las propiedades de Pareto de f tenemos que

   $$f(d(w', \varphi'), d(w', \varphi)) \leq f(d(w', \varphi'), d(w, \varphi')).$$

   De aquí se tiene que $f(d(w', \varphi'), d(w', \varphi)) \leq f(d(w, \varphi), d(w, \varphi'))$, es decir

   $$d_f(w', \varphi \sqcup \varphi') \leq d_f(w, \varphi \sqcup \varphi'),$$

   Esto muestra que $w' \preceq^{d,f}_{\varphi \sqcup \varphi'} w$. ∎

Como corolario directo de este resultado y de la definición de función de agregación Pareto fuerte y débil tenemos:

Corolario 2.2 *Sea d una pseudo distancia. Si f una función de agregación Pareto fuerte (débil) entonces la aplicación definida por que envía a cada conjunto de creencias Ψ en un preorden $\preceq^{d,f}_{\Psi}$ es una asignación sincrética (cuasi-sincrética).*

Dados d una distancia entre interpretaciones y f una función de agregación , un operador de fusión (cuasi - fusión) definamos el operador $\Delta^{d,f} : \mathcal{B} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, como sigue:

$$[\Delta_{\mu}^{d,f}(\Psi)] = min([\mu], \preceq_{\Psi}^{d,f}),$$

Así de los resultados anteriores y de los teoremas de representación se obtiene que:

Corolario 2.3 *Sea d una pseudo distancia y f una función de agregación Pareto fuerte (débil). Entonces el operador $\Delta^{d,f}$ es un operador de fusión (cuasi- fusión) IC.*

Gracias al corolario anterior, podemos definir tres familias de operadores, cuyas diferencias en su comportamiento radica en la distancia entre interpretaciones y la definición de la función de agregación f a considerar.

Definición 2.5 (Operador Max) *Sea Ψ un conjunto de creencias, w una interpretación y d una distancia entre interpretaciones. La distancia Max es definida por*

$$d_{Max}(w, \Psi) = \underset{\varphi \in \Psi}{Max}\, d(w, \varphi).$$

Esta distancia induce un preorden sobre las interpretaciones de la siguiente manera:

$$w \preceq_{\Psi}^{d,Max} w' \textit{si, y sólo si, } d_{Max}(w, \Psi) \leq d_{Max}(w', \Psi)$$

La función Max es una función de agregación que cumple con la propiedad de Pareto débil, así definimos el correspondiente operador de cuasi-fusión IC, $\Delta^{d,Max}$ como sigue:

$$[\Delta_{\mu}^{d,Max}(\Psi)] = min\big([\mu], \preceq_{\Psi}^{d,Max}\big)$$

La condición 6 no necesariamente se cumple, para esto consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1 Consideremos las bases de creencias φ y φ' cuyos modelos son $[\varphi] = \{101, 100, 111\}$ y $[\varphi'] = \{110, 111\}$, y consideremos las interpretaciones $w = 101$ y $w' = 011$. Si consideramos la distancia de Hamming (número de posiciones en que las interpretaciones difieren), d_H, tenemos que:

$$d_H(w, \varphi) = 0, \qquad d_H(w, \varphi') = 1,$$

$$d_H(w', \varphi) = 1, \qquad d_H(w', \varphi') = 1$$

De esta manera $w \prec_{\varphi}^{Max} w'$ y $w \preceq_{\varphi'}^{Max} w'$. Sin embargo

$$Max\{d_H(w', \varphi), d_H(w', \varphi')\} = 1 = Max\{d_H(w, \varphi), d_H(w, \varphi')\}$$

lo que implica $d_{Max}(w, \varphi \sqcup \varphi') = d_{Max}(w', \varphi \sqcup \varphi')$, y por lo tanto $w \simeq_{\varphi \sqcup \varphi'}^{d_H, Max} w'$.

Definición 2.6 (Operador Σ) *Sea Ψ un conjunto de creencias, w una interpretación y d una distancia entre interpretaciones. La distancia Σ esta definida por*

$$d_{\Sigma}(w, \Psi) = \sum_{\varphi \in \Psi} d(w, \varphi)$$

Esto induce un preorden sobre las interpretaciones:

$$w \preceq_{\Psi}^{d,\Sigma} w' \textit{si, y sólo si, } d_{\Sigma}(w, \Psi) \leq d_{\Sigma}(w', \Psi)$$

La función Σ es una función de agregación que satisface la propiedad de Pareto fuerte. Así, podemos definir el correspondiente operador de fusión $\Delta^{d,\Sigma}$:

$$[\Delta_{\mu}^{d,\Sigma}(\Psi)] = min\big([\mu], \preceq_{\Psi}^{d,\Sigma}\big)$$

El resultado de los operadores $\Delta^{d,\Sigma}$ puede ser considerado como la elección de la opción *más popular* entre las restricciones de integridad.

Definición 2.7 (Operador $GMax$) *Sea Ψ un conjunto de creencias, w una interpretación y d una distancia entre interpretaciones. La distancia $GMax$ esta definida por*

$$d_{GMax}(w, \Psi) = \underset{\varphi \in \Psi}{GMax}(d(w, \varphi))$$

De esta manera, si consideramos $\leq^{l_n}$, el orden lexicográfico entre sucesiones de enteros con la misma longitud, definimos el siguiente preorden total

$$w \preceq_{\Psi}^{d,GMax} w' \textit{si, y sólo si, } d_{d,GMax}(w, \Psi) \leq^{l_n} d_{d,GMax}(w', \Psi)$$

Como la función $GMax$ es una función de agregación que satisface la propiedad de Pareto fuerte, el operador $\Delta^{d,GMax}$, definido por

$$[\Delta_{\mu}^{d,GMax}(\Psi)] = min([\mu], \preceq_{\Psi}^{d,GMax}),$$

es un operador de fusión.

Ahora, vamos a ilustrar el comportamiento de esta familias de operadores con un ejemplo.

Ejemplo 2.2 [5] En una reunión de la directiva de un complejo recreacional, el presidente de dicho complejo propone, para el año venidero, la construcción de una cancha de tenis, una montaña rusa y una pista de carting. Durante la reunión la directiva se da cuenta que si dos de estas atracciones son construidas, la renta se incrementará significativamente para los accionistas del complejo.

Denotemos por c, m, p las construcciones de la cancha de tenis, la montaña rusa y la pista de carting, respectivamente, y denotemos por i el incremento de la renta.

La directiva notó que la construcción de dos o más de las atracciones conducirá a un importante incremento sobre la renta

$$\mu = (c \wedge m) \vee (c \wedge p) \vee (m \wedge) \rightarrow i$$

Hay cuatro miembros de la directiva cuyas creencias serán denotadas por φ_1, φ_2, φ_3, φ_4. Así, $\Psi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$. Dos de los miembros de la directiva quieren construir las tres atracciones y no les importa el incremento de la renta ($\varphi_1 = \varphi_2 = c \wedge m \wedge p$). El tercero de los miembros piensa que la construcción de cualquiera de las atracciones causará, el cualquier momento, un aumento en la renta y quiere que los accionistas paguen la renta más baja posible, de esta forma el se opone a cualquier construcción de ($\varphi_3 = \neg c \wedge \neg m \wedge \neg p \wedge \neg i$). El último directivo piensa que el complejo en realidad necesita la cancha de tenis y la pista de carting pero no desea un incremento en la renta ($\varphi_3 = c \wedge p \wedge \neg i$).

Las variables proposicionales c, m, p e i serán consideradas en ese orden para las valuaciones. Así:

- $[\mu] = \mathcal{W} - \{0110, 1010, 1100, 1110\}$
- $[\varphi_3] = \{0000\}$
- $[\varphi_1] = [\varphi_2] = \{1110, 1111\}$
- $[\varphi_4] = \{1010, 1110\}$

Los resultados de las distancias están en la tabla 2.1. Las Filas sombreadas corresponden a las interpretaciones rechazadas por la restricción de integridad. De esta manera, los resultados han de ser encontrados entre las interpretaciones que no están sombreadas.

[5] Este ejemplo es una pequeña variante del clásico ejemplo de Konieczny y Pino Pérez [10].

Con el operador $\Delta^{d_H,Max}$, la distancia la distancia mínima es 2 y las interpretaciones escogidas son

$$[\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(\Psi)] = \{0010, 0011, 0100, 1000, 1001\}.$$

Así la decisión que más se ajusta a los deseos del grupo es entonces no incrementar la renta y construir una de las tres atracciones, o incrementar la renta y construir la cancha de tenis o bien la pista de carting.

Podemos observar en este ejemplo por qué el operador $\Delta^{d_H,Max}$ no es un operador de fusión IC. Por ejemplo las interpretaciones 0010 y 0011 son escogidas por $\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(\Psi)$, aunque 0010 es mejor para φ_3 y φ_4 que 0011, siendo así que estas dos son igualmente preferidas por φ_1 y φ_2. Parece natural entonces que 0010 sea globalmente preferida a 0011.

$[\mu]$	$d(w,\varphi_1)$	$d(w,\varphi_2)$	$d(w,\varphi_3)$	$d(w,\varphi_4)$	$dist_{Max}$	$dist_{\Sigma}$	$dist_{GMax}$
0000	3	3	0	2	3	8	(3,3,2,0)
0001	3	3	1	3	3	10	(3,3,3,1)
0010	2	2	1	1	**2**	6	$(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{1})$
0011	2	2	2	2	**2**	8	(2,2,2,2)
0100	2	2	1	2	**2**	7	(2,2,2,1)
0101	2	2	2	3	3	9	(3,2,2,2)
0110	1	1	2	1	2	5	(2,1,1,1)
0111	1	1	3	2	3	7	(3,2,1,1)
1000	2	2	1	1	**2**	6	$(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{1})$
1001	2	2	2	2	**2**	8	(2,2,2,2)
1010	1	1	2	0	2	4	(2,1,1,0)
1011	1	1	3	1	3	6	(3,1,1,1)
1100	1	1	2	1	2	5	(2,1,1,1)
1101	1	1	3	2	3	7	(3,2,1,1)
1110	0	0	3	0	3	3	(3,0,0,0)
1111	0	0	4	1	4	**5**	(4,1,0,0)

Tabla 2.1: Cálculo de la fusión

También observemos de la tabla que $[\Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}(\Psi)] = \{1111\}$, lo que muestra un comportamiento mayoritario. Por otra parte se tiene que $[\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}(\Psi)] = \{0010, 1000\}$, lo que muestra un comportamiento más consensual.

CAPÍTULO 3

FUSIÓN DE ESTADOS EPISTÉMICOS

3.1. Operadores de fusión de estados epistémicos

Definición 3.1 (Operadores de combinación de estados epistémicos) *Un operador de combinación de estados epistémicos (operador de combinación EE, de una manera abreviada) es una aplicación de la forma*

$$\nabla : \mathcal{M}(\mathcal{E}) \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

A partir de ahora estableceremos ciertos postulados que deben satisfacer los operadores de combinación de estados epistémicos, los cuales obedecen a criterios de racionalidad. Debemos resaltar que casi todas estas características son adaptaciones de los postulados presentados por Konieczny y Pino Pérez para los operadores de fusión IC estudiados en el capítulo anterior, mientras que otras son propuestas por primera vez aquí (ver los postulados (FEE5) y (FEE-It), además de los postulados (FEE-PI), (FEE-PF) y (FEE-PU) presentados en el siguiente capítulo). Esta nueva axiomática, en muchos casos, hace alusión a una función de creencias B, así supondremos a partir de ahora que dicha función esta dada.

Un primer postulado determinará la consistencia de los de resultados, siempre que las creencias arraigadas de las restricciones sean consistentes:

(FEE0) *Si $B(E)$ es consistente, también lo es $B\big(\nabla(\Phi, E)\big)$.*

Este postulado no es importante para nuestros operadores de combinación EE, pues estamos considerando estados epistémicos con creencias arraigadas consistentes. Así, si ∇ esta bien definido, este se cumplirá.

La siguiente propiedad establece la prioridad que posee la restricción sobre el resultado de la fusión.

(FEE1) $B\big(\nabla(\Phi, E)\big) \vdash B(E)$

Este postulado expresa el hecho de que las creencias más arraigadas de la fusión debe satisfacer las creencias más arraigadas de la restricción.

La siguiente es conocida como la propiedad de irrelevancia de sintaxis.

(FEE2) *Si* $B(E_1) \equiv B(E_2)$ *entonces* $B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big) \equiv B\big(\nabla(\Phi, E_2)\big)$

Este postulado establece que el resultado de la fusión, a nivel de las creencias, depende sólo de las creencias arraigadas de las restricciones, y no de su interpretación sintáctica.

Los siguientes dos postulados determinan la manera en que las alternativas más arraigadas son escogidas.

(FEE3) *Si* $B(E) \equiv B(E_1) \wedge B(E_2)$ *entonces* $B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big) \wedge B(E_2) \vdash B\big(\nabla(\Phi, E)\big)$

(FEE4) *Si* $B(E) \equiv B(E_1) \wedge B(E_2)$ *y* $B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big) \wedge B(E_2) \not\vdash \bot$ *entonces*

$$B\big(\nabla(\Phi, E)\big) \vdash B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big) \wedge B(E_2)$$

(FEE3) y (FEE4), en conjunto, estipulan que las alternativas más arraigadas entre las alternativas posibles, $B(E_1)$, se mantendrán preferidas si restringimos las posibles escogencias, $B(E)$, y éstas aún están allí.

Si dos individuos poseen distintas maneras de pensar, existen situaciones que deben confrontar donde no estarán completamente de acuerdo. Esto es visto a través del siguiente postulado.

(FEE5) *Si* $E_1 \neq E_2$, *existe* E *tal que* $B\big(\nabla(E_1, E)\big) \not\equiv B\big(\nabla(E_2, E)\big)$

Este postulado establece que, dados dos estados epistémicos distintos, existe al menos una restricción E tal que las creencias más arraigadas de los resultados de la fusión de cada uno los estados epistémico, con E, no serán equivalentes.

Otra propiedad que es natural es dada por la unanimidad. Si un grupo de individuos están de acuerdo, en forma conjunta sobre cierta situación la cual satisface las restricciones del sistema, entonces el resultado no puede ser otro sino el consenso del grupo, considerando dichas restricciones. Esto puede ser expresado a través del siguiente postulado.

(FEE6) *Si* $\bigwedge\!\!\!\bigwedge_{E' \in \Phi} B(E') \wedge B(E) \not\vdash \bot$, *entonces* $B\big(\nabla(\Phi, E)\big) \equiv \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{E' \in \Phi} B(E') \wedge B(E)$

(FEE6) nos dice que, de ser posible, la creencia arraigada del resultado de la fusión es la conjunción de las creencias arraigadas de cada uno de los agentes envueltos en el proceso con las creencias arraigadas de la restricción.

Las siguientes dos propiedades dictaminan como es el resultado de la fusión, si el grupo a fusionar es dividido.

(FEE7) $B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big) \wedge B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big) \vdash B\big(\nabla(\Phi_1 \sqcup \Phi_2, E)\big)$

(FEE7) estipula que, para cualquier división de un grupo en dos subgrupos, la conjunción de creencias arraigadas de cada uno va a satisfacer a las creencias arraigadas del grupo en pleno.

Otra propiedad natural esta dada por el recíproco del postulado (FEE7), en caso de consistencia:

(FEE8) *Si* $B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big) \wedge B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big) \nvdash \perp$, *entonces*

$$B\big(\nabla(\Phi_1 \sqcup \Phi_2, E)\big) \vdash B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big) \wedge B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big).$$

Este postulado dictamina que si podemos dividir un grupo en dos subgrupos, que posean creencias arraigadas en común, dada ciertas restricciones, entonces la creencias arraigadas global debe satisfacer las creencias arraigadas de cada subgrupo, con las mismas restricciones.

Una propiedad más débil a la anterior esta dada por el siguiente enunciado:

(FEE8W) *Si* $B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big) \wedge B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big) \nvdash \perp$, *entonces*

$$B\big(\nabla(\Phi_1 \sqcup \Phi_2, E)\big) \vdash B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big) \vee B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big).$$

Esta propiedad determina que, de ser posible, al dividir un grupo en dos subgrupos, los cuales poseen creencias arraigadas en común, las creencias arraigadas del grupo en pleno debe satisfacer las creencias arraigadas de, al menos, uno de los subgrupos.

Vale la pena resaltar que todo operador que satisface (FEE8) satisface (FEE8W); sin embargo en el próximo capítulo (ver proposición 4.14) mostraremos la existencia de operadores satisfaciendo (FEE8W) y que no satisfacen (FEE8).

Otra propiedad interesante tiene que ver con la iteración de las restricciones de integridad. Las creencias, luego de dos iteraciones, son iguales a las creencias del resultado de una sola iteración por el resultado de la fusión del primer estado con la restricción del segundo. Más precisamente el postulado se formula así:

(FEE-It) $B\Big(\nabla\big(\Phi, \nabla(E_1, E_2)\big)\Big) \equiv B\Big(\nabla\big(\nabla(\Phi, E_1), E_2\big)\Big)$

En presencia de otras propiedades, este postulado posee propiedades más fuertes que (FEE3) y (FEE4) como veremos a continuación en el siguiente resultado.

Proposición 3.1 *Sea ∇ un operador de combinación EE satisfaciendo* (FEE1)*,* (FEE2) *y* (FEE6)*. Entonces si ∇ satisface* (FEE-It)*, ∇ satisface* (FEE3) *y* (FEE4)*.*

Demostración: Consideremos Φ un perfil de creencias y E, E_1 y E_2, estados epistémicos tales que $B(E) \equiv B(E_1) \wedge B(E_2)$.

Si $B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big)$ es inconsistente con $B(E_2)$ el resultado se obtiene en forma directa. Así, supongamos que $B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big)$ es consistente con $B(E_2)$, y notemos que, en virtud de (FEE6)

$$B\Big(\nabla\big(\nabla(\Phi, E_1), E_2\big)\Big) \equiv B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big) \wedge B(E_2). \tag{3.1}$$

Por otro lado, en virtud de (FEE1) tenemos que $B(E_1)$ es consistente con $B(E_2)$, siguiéndose de (FEE6) que $B\big(\nabla(E_1, E_2)\big) \equiv B(E_1) \wedge B(E_2)$. De esta forma $B\big(\nabla(E_1, E_2)\big) \equiv B(E)$, obteniéndose de (FEE2) y (FEE-It) que

$$B\Big(\nabla\big(\nabla(\Phi, E_1), E_2\big)\Big) \equiv B\big(\nabla(\Phi, E)\big),$$

y así, por (3.1), $B\big(\nabla(\Phi, E)\big) \equiv B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big) \wedge B(E_2)$. ∎

Sin embargo el recíproco de este último resultado no se cumple, es decir, los postulados (FEE3) y (FEE4) no son suficientes para mostrar que el operador ∇ satisface (FEE-It), como veremos más adelante en el capítulo 5 (ver proposición 5.5). Sin embargo, existen situaciones en las cuales los postulados (FEE3) y (FEE4) son equivalentes a (FEE-It). Esto se observa en el siguiente resultado.

Proposición 3.2 *Sea ∇ un operador de combinación EE satisfaciendo las propiedades* (FEE1), (FEE2) *y* (FEE6)*. Si ∇ satisface los postulado* (FEE3) *y* (FEE4)*, y además si Φ es un perfil de creencias, E_1 y E_2 son estados epistémicos tales que $B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big)$ es consistente con $B(E_2)$, entonces*

$$B\Big(\nabla\big(\Phi, \nabla(E_1, E_2)\big)\Big) \equiv B\Big(\nabla\big(\nabla(\Phi, E_1), E_2\big)\Big).$$

Demostración: Sea Φ un perfil de creencias y E_1, E_2 estados epistémicos tales que

$$B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big) \wedge B(E_2) \nvdash \perp \tag{3.2}$$

Notemos que, de lo anterior y en virtud de (FEE1), $B(E_1)$ es consistente con $B(E_2)$. De esta forma, en virtud de (FEE6)

$$B\big(\nabla(E_1, E_2)\big) \equiv B(E_1) \wedge B(E_2)$$

Consideremos el estado epistémico determinado por $\nabla(E_1, E_2)$, y notemos que por (FEE3) y (FEE4)

$$B\Big(\nabla\big(\Phi, \nabla(E_1, E_2)\big)\Big) \equiv B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big) \wedge B(E_2).$$

Por otro lado, puesto que ∇ satisface (FEE6), se tiene de (3.2) que

$$B\Big(\nabla\big(\nabla(\Phi, E_1), E_2\big)\Big) \equiv B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big) \wedge B(E_2),$$

y de esta manera $B\Big(\nabla\big(\nabla(\Phi, E_1), E_2\big)\Big) \equiv B\Big(\nabla\big(\Phi, \nabla(E_1, E_2)\big)\Big)$ ∎

La siguiente propiedad es una adaptación a la propiedad de equidad de los operadores de fusión IC. Esta propiedad posee características que parecen naturales; sin embargo haremos más adelante algunas críticas a este postulado por ciertas características poco razonables que veremos más adelante.

(FEE-Eq) Si $B(E_1) \vee B(E_2) \vdash B(E)$ y $B\big(\nabla(E_1 \sqcup E_2, E)\big) \wedge B(E_1) \nvdash \perp$ entonces

$$B\big(\nabla(E_1 \sqcup E_2, E)\big) \wedge B(E_2) \nvdash \perp$$

Este postulado expresa el hecho que si las creencias arraigadas de dos individuos satisfacen las creencias arraigadas de una restricción, al fusionar sus estados epistémicos con la restricción, el resultado no debe dar preferencia a alguno de ellos.

Veamos ahora, a través de un ejemplo, por qué este postulado no es tan natural.

Ejemplo 3.1 Luis y Ana deben viajar desde un lugar, A, hacia otro, B, y ambos conocen sólo tres rutas para realizar ese recorrido: la ruta 1, la ruta 2 y la ruta 3. Luis, cree que para llegar más rápido al punto B la ruta 1 es la más rápida, y cree que por las dos rutas restantes el viaje es igual de lento. Por otro lado, Ana cree firmemente que el viaje es más grato y tranquilo por la ruta 2 que por la ruta 3; y esta ruta es, a su vez, más grata y tranquila que la ruta 1. Ambos también saben que para llegar ahí sólo una ruta pueden tomar, ya que éstas son ajenas entre sí. Luis y Ana deben tomar una decisión la cual se ajuste más a las preferencias de los dos, sabiendo que sólo pueden tomar una ruta. Esta debe ser tomar la ruta 2.

La toma de esta decisión se debe a que la opción de viajar por la ruta 1, a pesar de ser preferida por Luis, esta muy lejos de las preferencias arraigadas de Ana, mientras que la opción de la la ruta 2 es más consensual para ambos.

Notemos que en este ejemplo se satisfacen las premisas del postulado (FEE-Eq); sin embargo, la preferencia grupal satisface sólo las preferencias de Ana. En la sección 4.1 haremos un análisis más profundo de este ejemplo.

Otro problema que presenta este postulado radica en la manera como esta enunciado, ya que esta propiedad no extiende la noción de equidad a situaciones donde tres o más estados epistémicos participan en el proceso de fusión.

El siguiente resultado garantiza que, al restringirnos sólo a las creencias de los individuos, la creencia arraigada global, obtenida al fusionar, satisface las creencias de cada individuo.

Proposición 3.3 *Sea ∇ un operador de combinación EE. Si ∇ satisface* (FEE1) *y* (FEE-Eq)*, entonces para cualesquiera E, E_1, E_2 estados epistémicos, con $B(E)$ equivalente a $B(E_1) \vee B(E_2)$ se tiene que*

$$B\big(\nabla(E_1 \sqcup E_2, E)\big) \wedge B(E_1) \nvdash \perp$$

Demostración: Sean E, E_1, E_2 estados epistémicos tales que $B(E) \equiv B(E_1) \vee B(E_2)$ y, razonando por el absurdo, supongamos que $B\big(\nabla(E_1 \sqcup E_2, E)\big)$ es inconsistente con $B(E_1)$. De esta manera, en virtud de (FEE1), tenemos que $B\big(\nabla(E_1 \sqcup E_2, E)\big) \vdash B(E_2)$. Así $B\big(\nabla(E_1 \sqcup E_2, E)\big) \wedge B(E_2) \nvdash \perp$, obteniéndose de esto último, y de (FEE-Eq), que $B\big(\nabla(E_1 \sqcup E_2, E)\big) \wedge B(E_1) \nvdash \perp$, lo que es una contradicción. ∎

Después de analizar algunas propiedades, las cuales consideramos son los requisitos mínimos razonables que deben satisfacer los operadores de fusión al momento de crear un estado epistémico global a partir de los estados epistémicos de un grupo de individuos, procederemos a clasificarlos para introducir ciertas familias de operadores de combinación EE, entre ellas una clase muy especial los cuales denominaremos *operadores de fusión EE*. Primero recapitulemos todos los postulados razonables introducidos:

(FEE1) $B\big(\nabla(\Phi, E)\big) \vdash B(E)$

(FEE2) *Si* $B(E_1) \equiv B(E_2)$ *entonces* $B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big) \equiv B\big(\nabla(\Phi, E_2)\big)$

(FEE3) *Si* $B(E) \equiv B(E_1) \wedge B(E_2)$ *entonces* $B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big) \wedge B(E_2) \vdash B\big(\nabla(\Phi, E)\big)$

(FEE4) Si $B(E) \equiv B(E_1) \wedge B(E_2)$ y $B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big) \wedge B(E_2) \nvdash \bot$ entonces

$$B\big(\nabla(\Phi, E)\big) \vdash B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big) \wedge B(E_2)$$

(FEE5) *Si $E_1 \neq E_2$, existe E tal que $B\big(\nabla(E_1, E)\big) \not\equiv B\big(\nabla(E_2, E)\big)$*

(FEE6) Si $\bigwedge\!\!\!\bigwedge_{E' \in \Phi} B(E') \wedge B(E) \nvdash \bot$, entonces $B\big(\nabla(\Phi, E)\big) \equiv \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{E' \in \Phi} B(E') \wedge B(E)$

(FEE7) $B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big) \wedge B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big) \vdash B\big(\nabla(\Phi_1 \sqcup \Phi_2, E)\big)$

(FEE8) *Si $B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big) \wedge B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big) \nvdash \bot$, entonces*

$$B\big(\nabla(\Phi_1 \sqcup \Phi_2, E)\big) \vdash B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big) \wedge B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big)$$

(FEE8W) *Si $B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big) \wedge B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big) \nvdash \bot$, entonces*

$$B\big(\nabla(\Phi_1 \sqcup \Phi_2, E)\big) \vdash B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big) \vee B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big)$$

(FEE-It) $B\Big(\nabla\big(\Phi, \nabla(E_1, E_2)\big)\Big) \equiv B\Big(\nabla\big(\nabla(\Phi, E_1), E_2\big)\Big)$

Definición 3.2 (Operadores de fusión básicos de estados epistémicos) *Sea ∇ un operador de combinación EE. Diremos que ∇ es un operador de fusión básico de estados epistémicos (operador de fusión básicos EE, de manera abreviada), con respecto a una función de creencias B, si satisface los postulados* (FEE1)-(FEE4) *con respecto a B.*

Definición 3.3 (Operadores de fusión de estados epistémicos) *Sea ∇ un operador de combinación EE. Diremos que ∇ es un operador de fusión de estados epistémicos (operador de fusión EE, de manera abreviada), con respecto a una función de creencias B, si satisface los postulados* (FEE1)-(FEE8) *con respecto a B.*

Definición 3.4 (Operadores de cuasi-fusión de estados epistémicos) *Sea ∇ un operador de combinación EE. Diremos que ∇ es un operador de cuasi-fusión de estados epistémicos (operador de cuasi-fusión EE, de manera abreviada), con respecto a una función de creencias B, si satisface los postulados* (FEE1)-(FEE7) y (FEE8W) *con respecto a B.*

Definición 3.5 (Operadores de fusión iterables de estados epistémicos) *Sea ∇ un operador de combinación EE. Diremos que ∇ es un operador fusion iterable de estados epistémicos (operador de fusión iterable EE, en corto), con respecto a una función* *de creencias B, si satisface los postulados* (FEE1),(FEE2),(FEE5)-(FEE8) y (FEE-It) *con respecto a B.*

Diremos que ∇ es un operador de cuasi-fusión iterable de estados epistémicos (operador de cuasi-fusión iterable EE, en corto), con respecto a una función de creencias B, si satisface los postulados (FEE1),(FEE2),(FEE5)-(FEE7), (FEE8W) y (FEE-It) *con respecto a B.*

Notemos que, en virtud de la proposición 3.1, todo operador fusion iterable EE, es un operador de fusión EE. De igual manera, todo operador de cuasi-fusión iterable EE, es un operador de cuasi-fusión EE.

3.2. Asignación fiel

Supongamos que conocemos los estados epistémicos de un grupo de individuos y deseamos expresar una preferencia global de dicho grupo ¿qué propiedades debe tener este *orden* de tal manera que las preferencias más plausibles del grupo se aproximen tanto como sea posible a las preferencias arraigadas de cada individuo que lo integra?

En esta sección intentamos responder a esta interrogante, para ello haremos un análisis cualitativo de ciertas propiedades[1], las cuales nos parecen razonables al momento de establecer preferencias grupales. Al igual que algunos de las postulados de los operadores de fusión EE, algunas de estas propiedades dependen de la función de creencias B.

Definición 3.6 (Asignación) *Sea $\mathbb{P}$ el conjunto de todos los preórdenes totales definidos sobre $\mathcal{W}$. Una asignación es una aplicación de la forma*

$$f : \mathcal{M}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{P}$$

Por simplicidad, dado un perfil de creencias Φ, denotaremos por $\preceq_\Phi$ al preorden total $f(\Phi)$, mientras que $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ denotará dicha aplicación. Enunciaremos ahora ciertas propiedades racionales al momento de establecer preferencias grupales.

Si dos individuos poseen estados epistémicos distintos, la forma de ordenar sus preferencias debe ser distintas.

1. *Si $E_1 \neq E_2$, entonces $\preceq_{E_1} \neq \preceq_{E_2}$*

Esta propiedad dictamina que estados epistémicos distintos generan distintos preórdenes totales sobre los mundos, estableciendo inyectividad de la asignación, restringida

[1] De nuevo algunas son adaptaciones de las propiedades de las asignaciones sincréticas, presentadas y estudiadas por Pino Pérez y Konieczny en [8], [9], [10], [11], a este contexto, mientras otras son presentadas por primera vez en este trabajo.

al conjunto de estados epistémicos.

Si dos alternativas son dadas a un grupo de individuos, y estas se encuentran entre las creencias más arraigadas de cada individuo del grupo, entonces dichas alternativas deben ser igual de plausibles para el grupo en pleno. Así tenemos la siguiente propiedad:

2. *Si* $\Phi = \{E_1, \ldots, E_n\}$ *y* $\forall i \leq n$, $w, w' \models B(E_i)$, *entonces* $w \simeq_\Phi w'$

Ahora bien, si una alternativa se encuentra entre las preferencias arraigadas de todos los individuos de un grupo, y si una alternativa distinta no pertenece a las creencias de algún individuo del grupo entonces, de forma global, el grupo debe preferir estrictamente la primera de estas alternativas, con respecto a la otra. Esto nos lleva a lo siguiente:

3. *Si* $\Phi = \{E_1, \ldots, E_n\}$, $\forall i \leq n$, $w \models B(E_i)$ *y*, $\exists j \leq n$, $w' \not\models B(E_j)$, *entonces* $w \prec_\Phi w'$

2 y 3 establecen que, de existir, los modelos de la conjunción de las creencias más arraigadas de los estados epistémicos del perfil de creencias son las interpretaciones más plausibles para el orden asociado al perfil de creencias.

Por otro lado, estas dos propiedades en conjunto establecen que las creencias más arraigadas de un individuo están dadas por los minimales del preorden asociado a su estado epistémico, como veremos a continuación en el siguiente resultado.

Proposición 3.4 *Si la asignación* $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ *satisface los postulados* 2 *y* 3*, con respecto a* B*, entonces, para cada estado epistémico* E*, la función de creencia* B *satisface que*

$$[B(E)] = min(\preceq_E) \tag{3.3}$$

Demostración: Supongamos que la asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ satisface 2 y 3, y consideremos E un estado epistémico arbitrario.

Si $w \models B(E)$, considerando el perfil de creencia conformado únicamente por E, en virtud de los postulados 2 y 3, tenemos que $w \preceq_E w'$, para cualquier interpretación w'. De esta manera $w \in min(\preceq_E)$, mostrando que $[B(E)] \subseteq min(\preceq_E)$.

Por otro lado, consideremos w interpretación minimal de $\preceq_E$ y notemos que si $w \not\models B(E)$, al considerar $w' \models B(E)$ tenemos, por el postulado 2, que $w' \prec_E w$, lo que contradice que $w \in min(\preceq_E)$. De esta manera, $w \models B(E)$, obteniéndose que $min(\preceq_E) \subseteq [B(E)]$. ∎

La ecuación (3.3) es denominada *condición de minimalidad de* B, con respecto a la asignación $\Phi \mapsto \preceq \Phi$. Analizando esta demostración podemos notar que este resultado se mantiene si restringimos el dominio de la asignación al conjunto de perfiles formados por un único estado epistémicos.

Las siguientes dos propiedades determinan cual es el comportamiento de los preórdenes al unirse dos grupos que poseen plausibilidad similar con respecto a dos opciones.

4. *Si* $w \preceq_{\Phi_1} w'$ *y* $w \preceq_{\Phi_2} w'$ *entonces* $w \preceq_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} w'$

5. *Si* $w \preceq_{\Phi_1} w'$*y* $w \prec_{\Phi_2} w'$ *entonces* $w \prec_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} w'$

La propiedad 4 expresan que, dadas dos alternativas w_1 y w_2, si w_1 es al menos tan plausible como w_2 para un grupo, ocurriendo lo mismo para un segundo grupo, entonces al reunirse los dos grupos, w_1 debe permanecer al menos tan plausible como w_2. Por otro lado, 5 establece que si w_1 es al menos tan plausible como w_2 para un grupo, mientras que para un segundo grupo w_1 es estrictamente más plausible que w_2, entonces w_1 debe ser estrictamente más plausible que w_2 al unirse los dos grupos.

La siguiente es más débil que la propiedad 5. Dadas dos alternativas, w, w', si para un grupo, w es estrictamente plausible como w', ocurriendo lo mismo para otro grupo, entonces, al juntar los dos grupos, w debe permanecer estrictamente más plausible que w'.

5'. *Si* $w \prec_{\Phi_1} w'$*y* $w \prec_{\Phi_2} w'$ *entonces* $w \prec_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} w'$

Notemos que siempre que una asignación satisfaga la propiedad 5, esta va a satisfacer 5'; sin embargo, más adelante mostraremos la existencia de asignaciones que satisfacen la propiedad 5' y no satisfacen la propiedad 5, como es el caso de la *asignación máximo* definida en la sección 4.1.

A pesar de que las propiedades 2, 3, 4 y 5 parecen independientes, en ciertas situaciones estas no lo son del todo, como lo veremos en el siguiente resultado:

Proposición 3.5 *Sea* $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ *una asignación y supongamos que la función de creencias* B *satisface la condición de minimalidad con respecto a* $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$*. Entonces:*

(*i*) *Si* $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ *satisface* 4*, ésta satisface* 2*.*

(*ii*) *Si* $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ *satisface* 4 *y* 5*, entonces satisface* 3*.*

Demostración:

(*i*) Sea $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ una asignación satisfaciendo 4 y, por medio de la inducción sobre el número de elementos de Φ, mostremos que dicha asignación satisface la propiedad 2.

Supongamos que $\Phi = \{E\}$ y consideremos w y w' interpretaciones tales que ambos satisfacen $B(E)$. Como $[B(E)] = min(\preceq_E)$ tenemos que $w \simeq_E w'$, obteniéndose lo deseado.

Ahora bien, sea $n > 1$ un entero positivo arbitrario y supongamos que, para cualquier perfil de creencias Φ, con $|\Phi| < n$, la asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ satisface 2. Mostremos entonces que, para perfiles de creencias con n estados epistémicos, la propiedad 2 también se satisface.

Sea $\Phi = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ un perfil de creencias y $w,\ w'$ interpretaciones tales que, para cada $i \leq n$, w y w' satisfacen $B(E_i)$. Consideremos los perfiles de creencias $\Phi_1 = \{E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}\}$ y $\Phi_2 = \{E_n\}$ y notemos que, en virtud de la hipótesis inductiva, $w \simeq_{\Phi_1} w'$ y $w \simeq_{\Phi_2} w'$. De esta manera, por 4, $w \simeq_\Phi w'$.

(*ii*) Supongamos que la asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ satisface 4 y 5, y por inducción sobre $|\Phi|$, mostremos que la asignación también satisface 3.

Si E es un estado epistémico y $w,\ w'$ son interpretaciones tales que $w \models B(E)$ y $w' \not\models B(E)$, como $[B(E)] = min(\preceq_E)$, entonces $w \prec_E w'$; demostrándose así para el caso $|\Phi| = 1$.

Sea $n > 1$ arbitrario, y supongamos ahora que para cada perfil de creencias Φ, con $|\Phi| < n$, se tiene que la asignación satisface la propiedad 3. Mostremos que para Φ, con $|\Phi| = n$, también se satisface 3.

Sea $\Phi = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ un perfil de creencias y supongamos $w,\ w'$ interpretaciones tales que, para cada $i \leq n$, $w \models B(E_i)$ y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $w' \not\models B(E_n)$. Consideremos $\Phi_1 = \{E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}\}$ y $\Phi_2 = \{E_n\}$. Si $w' \models B(E_i)$, para todo $i < n$, entonces de la parte (*i*) se tiene que $w \simeq_{\Phi_1} w'$. Por otro lado, si existe $j < n$ tal que $w' \not\models B(E_j)$ entonces, de la hipótesis inductiva se tiene que $w \prec_{\Phi_1} w'$. Así, en cualquier caso $w \preceq_{\Phi_1} w'$.

Ahora bien, puesto que $w \preceq_{\Phi_1} w'$ y como $w \prec_{\Phi_2} w'$ entonces, de 5 se tiene que $w \prec_\Phi w'$, satisfaciendo así 3. ∎

En el capítulo 5 mostraremos que la condición de minimalidad de B, con respecto a la asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$, es una condición necesaria para que las implicaciones se satisfagan (ver proposiciones 5.6 y 5.7).

La siguiente propiedad depende de la presencia de un operador de combinación EE

6. $\preceq_{\nabla(\Phi,E)} = lex(\preceq_E, \preceq_\Phi)$

Este postulado determina la manera en que la asignación actúa sobre la combinación de las creencias, dada una restricción.

El siguiente postulado establece que, si un perfil de creencias está compuesto por sólo dos estados epistémicos, el preorden resultante no debe tener preferencia por ninguna de las componentes del perfil. Más precisamente:

(Eq.) *Para cada* $w \models B(E_1)$ *existe* $w' \models B(E_2\ )$ *tal que* $w' \preceq_{E_1 \sqcup E_2} w$

Sin embargo, esta propiedad no parece tan natural, como veremos en la siguiente sección.

Esta serie de propiedades, las cuales nos parecen en principio razonables, nos permiten introducir ciertas familias de asignaciones que poseen buen comportamiento al momento de establecer una creencia grupal de individuos.

Procederemos primero a dar la lista de estas propiedades

Sean Φ_1 *y* Φ_2 *perfiles de creencias,* $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *estados epistémicos,* w, w' *interpretaciones, y supongamos que* $\Phi = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$:

1. *Si* $E_1 \neq E_2$, *entonces* $\preceq_{E_1} \neq \preceq_{E_2}$

2. *Si para cada* $i \leq n$, $w, w' \models B(E_i)$, *entonces* $w \simeq_\Phi w'$

3. *Si para cada* $i \leq n$, $w \models B(E_i)$, *y existe* $j \leq n$ *tal que* $w' \not\models B(E_j)$, *entonces* $w \prec_\Phi w'$

4. *Si* $w \preceq_{\Phi_1} w'$ *y* $w \preceq_{\Phi_2} w'$ *entonces* $w \preceq_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} w'$

5. *Si* $w \preceq_{\Phi_1} w'$ *y* $w \prec_{\Phi_2} w'$ *entonces* $w \prec_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} w'$

5'. *Si* $w \prec_{\Phi_1} w'$ *y* $w \prec_{\Phi_2} w'$ *entonces* $w \prec_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} w'$

6. $\preceq_{\nabla(\Phi,E)} = lex(\preceq_E, \preceq_\Phi)$

Definición 3.7 (Asignación fiel) *Diremos que una asignación* $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ *es fiel, con respecto a una función de creencias* B, *si esta satisface los postulados* 1-5.

Definición 3.8 (Asignación cuasifiel) *Diremos que una asignación* $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ *es cuasifiel, con respecto a una función de creencias* B, *si satisface los postulados* 1-4 *y* 5'.

Definición 3.9 (Asignación lexi-fiel) *Sea* ∇ *un operador de combinación EE. Diremos que una asignación* $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ *es lexi-fiel, con respecto a* ∇, *si* $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ *satisface los postulados* 1-5, *con respecto a* B, *y satisface* 6 *con respecto a* ∇.

Diremos que una asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ *es lexi-cuasifiel, con respecto a* ∇, *si* $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ *satisface los postulados* 1-4 *y* 5', *con respecto a* B, *y satisface* 6 *con respecto a* ∇.

3.3. Teoremas de representación para operadores de fusión de estados epistémicos

En aras de profundizar en el estudio del comportamiento de los operadores de fusión de estados epistémicos, en esta sección haremos un análisis exhaustivo de las relaciones que existen entre las propiedades de los operadores de fusión EE y las propiedades de las asignaciones fieles. A través de esto llegaremos a ciertos resultados de *representación* que nos permitan describir dichos operadores en forma semántica. Como se observará más adelante, dichos resultados dependerán de la estructura concreta que posean los estados epistémicos.

Proposición 3.6 *Un operador de combinación EE, ∇, es un operador de fusión básico EE, con respecto a una función de creencias B, si, y sólo si, existe una única asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$, satisfaciendo, para cualquier perfil de creencias Φ y estado epistémico E, lo siguiente:*

$$[B\big(\nabla(\Phi, E)\big)] = min\big([B(E)], \preceq_\Phi\big) \tag{B-Rep}$$

Demostración: Supongamos primero que ∇ es un operador de básico, y para cada perfil de creencias Φ definimos la relación $\preceq_\Phi$ sobre los mundos de la siguiente manera:

$$w \preceq_\Phi w' \;\Leftrightarrow\; w \models B\big(\nabla(\Phi, E)\big),\; \textit{con } E \textit{ tal que } [B(E)] = \{w, w'\} \tag{3.3}$$

De la sobreyectividad de B, sabemos que un tal estado epistémico E existe. Además, en virtud de (FEE2), la definición de la relación $\preceq_\Phi$ no depende de la selección del estado epistémico E. Veamos que la relación $\preceq_\Phi$ define un preorden total sobre $\mathcal{W}$.

Totalidad Sean w y w' interpretaciones cualesquiera y sea E un estado epistémico tal que $[B(E)] = \{w, w'\}$. Puesto que $B\big(\nabla(\Phi, E)\big)$ es consistente, y en virtud de (FEE1), $w \models B\big(\nabla(\Phi, E)\big)$ o bien $w' \models B\big(\nabla(\Phi, E)\big)$; obteniéndose, respectivamente en cada caso, que $w \preceq_\Phi w'$ o $w' \preceq_\Phi w$.

Transitividad Sean w_1, w_2, w_3 interpretaciones y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $w_1 \preceq_\Phi w_2$ y $w_2 \preceq_\Phi w_3$. Mostremos, por reducción al absurdo, que $w_1 \preceq_\Phi w_3$, y para ello consideremos E_1, E_2, E_3 y E_4 estados epistémicos tales que $[B(E_1)] = \{w_1, w_3\}$, $[B(E_2)] = \{w_1, w_2, w_3\}$, $[B(E_3)] = \{w_2, w_3\}$ y $[B(E_4)] = \{w_1, w_2\}$. Supongamos que $w_1 \not\preceq_\Phi w_3$.

Puesto que $B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big)$ es consistente y además como $w_1 \not\preceq_\Phi w_3$, se puede notar por el postulado (FEE1), que w_3 es el único modelo de $B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big)$.

Consideremos ahora los siguientes casos:

- $B(\nabla(\Phi, E_2)) \wedge B(E_1) \nvdash \perp$:

  Notemos que $B(E_1) \equiv B(E_2) \wedge B(E_1)$, obteniéndose de (FEE3) y (FEE4) que
  $$B(\nabla(\Phi, E_2)) \wedge B(E_1) \equiv B(\nabla(\Phi, E_1)),$$
  de esta forma se tiene que $w_1 \not\models B(\nabla(\Phi, E_2))$, y $[B(\nabla(\Phi, E_2))] \neq \{w_2\}$. Así, en virtud de (FEE1) y de lo anterior, se tiene que $[B(\nabla(\Phi, E_2))] = \{w_3\}$ o bien $[B(\nabla(\Phi, E_2))] = \{w_2, w_3\}$. En cualquiera de los dos casos, como consecuencia de (FEE3) y (FEE4), se tiene
  $$B(\nabla(\Phi, E_2)) \wedge B(E_3) \equiv B(\nabla(\Phi, E_3)); \tag{3.4}$$
  pues $B(E_3) \equiv B(E_2) \wedge B(E_3)$ y $B(\nabla(\Phi, E_2)) \wedge B(E_3) \nvdash \perp$.

  Ahora bien, como $w_2 \preceq_\Phi w_3$, se tiene de (3.4) que $[B(\nabla(\Phi, E_2))] \neq \{w_3\}$, implicando que $[B(\nabla(\Phi, E_2))] = \{w_2, w_3\}$. Así, de los postulados (FEE3) y (FEE4) se deduce que
  $$B(\nabla(\Phi, E_2)) \wedge B(E_4) \equiv B(\nabla(\Phi, E_4)),$$
  ya que $B(E_4) \equiv B(E_2) \wedge B(E_4)$ y $B(\nabla(\Phi, E_2)) \wedge B(E_4) \nvdash \perp$. Pero $w_1 \preceq_\Phi w_2$, implicando que $w_1 \models B(\nabla(\Phi, E_4))$, y por lo tanto $w_1 \models B(\nabla(\Phi, E_2))$, lo que es una contradicción.

- $B(\nabla(\Phi, E_2)) \wedge B(E_1) \vdash \perp$:

  De ser este el caso, $B(\nabla(\Phi, E_2))$ posee un único modelo, a saber w_2. De esto último se obtiene la consistencia de $B(\nabla(\Phi, E_2))$ con $B(E_4)$, y en virtud de los postulados (FEE3) y (FEE4)
  $$B(\nabla(\Phi, E_2)) \wedge B(E_4) \equiv B(\nabla(\Phi, E_4)),$$
  pues $B(E_4) \equiv B(E_2) \wedge B(E_4)$. Luego $w_1 \not\models B(\nabla(\Phi, E_4))$, lo que implica que $w_1 \not\preceq_\Phi w_2$, obteniendo de nuevo una contradicción.

De esta forma, para cada perfil de creencias Φ, la relación $\preceq_\Phi$ es un preorden total sobre los mundos, lo que nos permite definir una asignación a través de (3.3).

Mostremos ahora que se satisface (B-Rep), para ello consideremos un perfil de creencias Φ y estado epistémico E, arbitrarios.

- $\big[B\big(\nabla(\Phi, E)\big)\big] \subseteq min\big([B(E)], \preceq_\Phi\ \big)$

  Sea w modelo de $B\big(\nabla(\Phi, E)\big)$, y notemos que, en virtud de (FEE1), $w \models B(E)$. Así, si suponemos que $w \not\in min\big([B(E)], \preceq_\Phi\ \big)$, existe $w' \models B(E)$ tal que $w' \prec_\Phi w$. Sea E', estado epistémico, tal que $\big[B(E')\big] = \{w, w'\}$ y notemos que, en virtud de la definición de $\preceq_\Phi$, $w \not\models B\big(\nabla(\Phi, E')\big)$.

  Puesto que $B\big(\nabla(\Phi, E)\big)$ es consistente con $B(E')$ y $B(E') \equiv B(E) \wedge B(E')$, de (FEE3) y (FEE4) se tiene que

  $$B\big(\nabla(\Phi, E)\big) \wedge B(E') \equiv B\big(\nabla(\Phi, E')\big)$$

  implicando que $w \not\models B\big(\nabla(\Phi, E)\big)$, lo que es una contradicción. De esta manera $w \in min\big([B(E)], \preceq_\Phi\ \big)$.

- $\big[B\big(\nabla(\Phi, E)\big)\big] \supset min\big([B(E)], \preceq_\Phi\ \big)$

  Sea $w \in min\big([B(E)], \preceq_\Phi\ \big)$, consideremos $w' \models B\big(\nabla(\Phi, E)\big)$. Notemos que, en virtud de (FEE1), $w' \models B\big(E\big)$ y por lo tanto $w \preceq_\Phi w'$. De esta manera

  $$w \models B\big(\nabla(\Phi, E')\big), \tag{3.5}$$

  donde E' es un estado epistémico con $[B(E)'] = \{w, w'\}$.

  Por otro lado, de la consistencia de $B\big(\nabla(\Phi, E)\big)$ con $B(E')$ y puesto que $B(E') \equiv B(E) \wedge B(E')$, de (FEE3) y (FEE4) se tiene que

  $$B\big(\nabla(\Phi, E)\big) \wedge B(E') \equiv B\big(\nabla(\Phi, E')\big)$$

  Por lo tanto, en virtud de (3.5), se tiene que $w \models B\big(\nabla(\Phi, E)\big)$.

Mostremos que la asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ es única; para ello razonemos por el absurdo y supongamos que existe otra asignación, $\Phi \mapsto \preceq'_\Phi$, distinta de $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$, satisfaciendo (B-Rep). De esta manera,

$$min([B(E)], \preceq_\Phi) = min([B(E)], \preceq'_\Phi)$$

Consideremos así Φ, perfil de creencias, y w, w', interpretaciones, tales que $w \preceq_\Phi w'$ y $w' \prec'_\Phi w$. Si E es un estado epistémico, con $[B(E)] = \{w, w'\}$ tenemos que $w \in min([B(E)], \preceq_\Phi)$ y $w \notin min([B(E)], \preceq'_\Phi)$, lo cual es una contradicción.

Ahora bien, para mostrar el recíproco, supongamos que $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ es la asignación satisfaciendo (B-Rep). La satisfacción por parte de ∇ de las propiedades (FEE1) y (FEE2), relativo a B, se obtiene como consecuencia directa de (B-Rep), quedando sólo por demostrar los postulados (FEE3) y (FEE4).

(FEE3) Consideremos E , E_1 y E_2 estados epistémicos, con $B(E) \equiv B(E_1) \wedge B(E_2)$, y sea Φ un perfil de creencias. Si $B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big)$ es inconsistente con $B(E_2)$ el resultado se deduce de forma inmediata. Supongamos ahora que $B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big)$ es consistente con $B(E_2)$ y consideremos $w \models B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big) \wedge B(E_2)$. En virtud de (B-Rep), $w \models B(E_1) \wedge B(E_2)$ y por lo tanto $w \models B(E)$.

Por otro lado, si $w' \models B(E)$ se tiene que $w' \models B(E_1)$ y por lo tanto $w \preceq_\Phi w'$. De esta manera $w \in min\big([B(E)], \preceq_\Phi\big)$ y así, en virtud de (B-Rep), $w \models B\big(\nabla(\Phi, E)\big)$.

(FEE4) Sean E , E_1 y E_2 estados epistémicos tales que $B(E) \equiv B(E_1) \wedge B(E_2)$, y sea Φ un perfil de creencias cualquiera; supongamos además que $B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big)$ es consistente con $B(E_2)$ y consideremos $w' \models B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big) \wedge B(E_2)$. De esta manera, en virtud de (B-Rep), $w' \models B(E_1) \wedge B(E_2)$ y por lo tanto $w' \models B(E)$.

Ahora bien, sea $w \models B\big(\nabla(\Phi, E)\big)$ y, razonando por el absurdo, supongamos que $w \not\models B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big) \wedge B(E_2)$. En virtud de (B-Rep), se tiene que $w \models B(E)$, por lo tanto $w \models B(E_1) \wedge B(E_2)$, obteniéndose así que $w \not\models B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big)$. Pero $w \models B(E_1)$, implicando que $w' \prec_\Phi w$, y así $w \notin min\big([B(E)], \preceq_\Phi\big)$, lo que es una contradicción. De esta manera $w \models B\big(\nabla(\Phi, E_1)\big) \wedge B(E_2)$. ∎

Notemos que la sobreyectividad de la función de creencias B fue necesaria para demostrar que la relación dada en (3.3) define una única asignación que permite representar semánticamente el operador de combinación EE; sin embargo, esto también se consigue si la función B satisface que, para cada fórmula proposicional con a lo sumo tres modelos, éstas poseen al menos una preimagen bajo B.

Proposición 3.7 *Sea ∇ un operador de combinación EE. En presencia de los postulados básicos, el postulado* (FEE5) *es equivalente a la propiedad* 1.

Demostración: Sean E_1 y E_2 estados epistémicos tales que $E_1 \neq E_2$. Supongamos que ∇ satisface el postulado (FEE5). Entonces por B-Rep, existe un estado epistémico E tal que

$$min\big([B(E)], \preceq_{E_1}\big) \neq min\big([B(E)], \preceq_{E_2}\big).$$

De aquí es inmediato que $\preceq_{E_1} \neq \preceq_{E_2}$.

Recíprocamente, si $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ satisface 1, existen interpretaciones w y w' tales que $w \preceq_{E_1} w'$ y $w' \prec_{E_2} w$. Sea E un estado epistémico, con $[B(E)] = \{w, w'\}$, y notemos que $w \in min\big([B(E)], \preceq_{E_1}\big)$ y $w \notin min\big([B(E)], \preceq_{E_2}\big)$. Así

$$min\big([B(E)], \preceq_{E_1}\big) \neq min\big([B(E)], \preceq_{E_1}\big),$$

deduciéndose de (B-Rep) lo deseado. ∎

Proposición 3.8 *Sea* ∇ *un operador de combinación EE. En presencia de los postulados básicos, el postulado* (FEE6) *es equivalente a las propiedades* 2 *y* 3.

Demostración: Sea $\Phi = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ un perfil de creencias. Supongamos que ∇ satisface el postulado (FEE6) con respecto a B, y consideremos w y w', interpretaciones tales que, para cada $i \leq n$, $w, w' \models B(E_i)$. Sea E un estado epistémico, con w y w' modelos de $B(E)$. Entonces, por (FEE6),

$$B\big(\nabla(\Phi, E)\big) \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} B(E_i) \wedge B(E).$$

Así por (B-Rep), $w, w' \in min\big([B(E)], \preceq_\Phi\big)$. Por lo tanto $w \simeq_\Phi w'$, satisfaciéndose la propiedad 2.

Por otro lado, si para todo $i \leq n$ $w, w' \models B(E_i)$ y para algún $j \leq n$, $w' \not\models B(E_j)$, entonces $w \in min\big([B(E)], \preceq_\Phi\big)$ y $w' \notin min\big([B(E)], \preceq_\Phi\big)$; esto por (FEE6) y (B-Rep). De esta forma $w \prec_\Phi w'$, satisfaciéndose la propiedad 3.

Recíprocamente, supongamos que la asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ satisface las propiedades 2 y 3. Además supongamos que la conjunción de los $B(E_i)$ con $B(E)$ es consistente.

Notemos que, en virtud de (B-Rep), basta demostrar que

$$\left[\bigwedge_{i=1}^{n} B(E_i) \wedge B(E)\right] = min\big([B(E)], \preceq_\Phi\big)$$

- $\left[\bigwedge_{i=1}^{n} B(E_i) \wedge B(E)\right] \subseteq min\big([B(E)], \preceq_\Phi\big)$

  Si $w \models \bigwedge_{i=1}^{n} B(E_i) \wedge B(E)$, de los postulados 2 y 3 de se tiene que, para cualquier interpretación w', $w \preceq_\Phi w'$, en especial si $w' \models B(E)$. Así $w \in min\big([B(E)], \preceq_\Phi\big)$.

- $\left[\bigwedge_{i=1}^{n} B(E_i) \wedge B(E)\right] \supset min\big([B(E)], \preceq_\Phi\ \big)$

  Sea $w \in min\big([B(E)], \preceq_\Phi\ \big)$ y, en búsqueda de una contradicción, supongamos que existe $j \leq n$ tal que, $w \not\models B(E_j)$. Consideremos

$$w' \models \bigwedge_{i=1}^{n} B(E_i) \wedge B(E),$$

  obteniéndose de la propiedad 3 que $w' \prec_\Phi w$. De esta forma $w \notin min\big([B(E)], \preceq_\Phi\ \big)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto

$$w \models \bigwedge_{i=1}^{n} B(E_i) \wedge B(E).$$

∎

Proposición 3.9 *Sea ∇ un operador de combinación EE. En presencia de los postulados básicos, el postulado* (FEE7) *es equivalente a la propiedad* 4.

Demostración: Sean $\Phi_1,\ \Phi_2$ perfiles de creencias y $w_1,\ w_2$ interpretaciones, cualesquiera. Supongamos que ∇ satisface (FEE7), y además, supongamos que $w_1 \preceq_{\Phi_1} w_2$ y $w_1 \preceq_{\Phi_2} w_2$.

De esta manera, $w_1 \models B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big) \wedge B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big)$, donde E es un estado epistémico con $[B(E)] = \{w_1, w_2\}$. Así, en virtud de (FEE7), se tiene que $w_1 \models B\big(\nabla(\Phi_1 \sqcup \Phi_2, E)\big)$, y por lo tanto $w_1 \preceq_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} w_2$.

Recíprocamente, supongamos que la asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ satisface 4, y notemos que si $B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big)$ es inconsistente con $B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big)$ el resultado se deduce de manera inmediata. Supongamos entonces lo contrario y sea $w \models B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big) \wedge B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big)$.

Si $w' \models B(E)$ se tiene, por (B-Rep), que $w \preceq_{\Phi_1} w'$ y $w \preceq_{\Phi_2} w'$. Así, en virtud de 4, para cualquier $w' \models B(E)$, $w \preceq_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} w'$, implicando que $w \in min\big([B(E)], \preceq_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2}\ \big)$. De nuevo por (B-Rep), se tiene que $w \models B\big(\nabla(\Phi_1 \sqcup \Phi_2, E)\big)$. ∎

Proposición 3.10 *Sea ∇ un operador de combinación EE. En presencia de los postulados básicos, el postulado* (FEE8) *es equivalente a la propiedad* 5.

Demostración: Sean Φ_1, Φ_2 perfiles de creencias cualesquiera. Supongamos que ∇ satisface (FEE8), y sean w, w' interpretaciones tales que $w \preceq_{\Phi_1} w'$ y $w \prec_{\Phi_2} w'$. Consideremos E un estado epistémico con $[B(E)] = \{w, w'\}$, y notemos que w es el único modelo en $min\big([B(E)], \preceq_{\Phi_1}\big) \cap min\big([B(E)], \preceq_{\Phi_2}\big)$, y en virtud de (B-Rep) tenemos que

$$\big[B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big) \wedge B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big)\big] = \{w\}$$

Ahora bien, de la consistencia de $B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big)$ con $B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big)$ y del postulado (FEE7) se tiene que

$$B\big(\nabla(\Phi_1 \sqcup \Phi_2, E)\big) \vdash B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big) \wedge B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big).$$

Así, $w' \not\models B\big(\nabla(\Phi_1 \sqcup \Phi_2, E)\big)$, y en virtud de (B-Rep), $w \prec_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} w'$.

Para el recíproco, supongamos E estado epistémico tales que $B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big)$ es consistente con $B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big)$, y consideremos $w \models B\big(\nabla(\Phi_1 \sqcup \Phi_2, E)\big)$. Por B-Rep, $w \in [B(E)]$. En búsqueda de una contradicción, supongamos que $w \not\models B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big) \wedge B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big)$ y, sin pérdida de generalidad, supongamos también que $w \not\models B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big)$.

De la consistencia de $B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big)$ con $B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big)$, tomemos w' modelo de $B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big) \wedge B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big)$, y notemos que, en virtud de (B-Rep), $w' \models B(E)$ y además

$$w' \preceq_{\Phi_1} w \quad \text{y} \quad w' \prec_{\Phi_2} w$$

Así, por la propiedad 5, se tiene que

$$w' \prec_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} w,$$

implicando que $w \notin min\big([B(E)], \preceq_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2}\big)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $w \models B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big) \wedge B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big)$. ∎

Proposición 3.11 *Sea ∇ un operador de combinación EE. En presencia de los postulados básicos, el postulados* (FEE8W) *es equivalente a la propiedad* 5'.

Demostración: Sean Φ_1, Φ_2 perfiles de creencias cualesquiera. Supongamos que ∇ satisface (FEE8W), y sean w, w', interpretaciones tales que $w \prec_{\Phi_1} w'$ y $w \prec_{\Phi_2} w'$. Consideremos E un estado epistémico, con $[B(E)] = \{w, w'\}$. Así, en virtud de (B-Rep) se tiene que

(*i*) $w \models B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big) \wedge B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big)$,

(*ii*) $w' \not\models B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big) \vee B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big)$.

De esto último, por (FEE8W), tenemos que $w' \not\models B\big(\nabla(\Phi_1 \sqcup \Phi_2, E)\big)$. Así, por (B-Rep), $w \prec_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} w'$.

Ahora, supongamos que la asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ satisface 5' y sea E un estado epistémico tal que $B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big)$ es consistente con $B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big)$.

Sea $w \models B\big(\nabla(\Phi_1 \sqcup \Phi_2, E)\big)$ y, sin perdida de generalidad, supongamos que $w \not\models B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big)$. Consideremos $w' \models B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big) \wedge B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big)$. Notemos que en virtud de (B-Rep) $w' \models B(E)$. Además:

(*i*) $w \preceq_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} w'$,

(*ii*) $w' \prec_{\Phi_1} w$,

(*iii*) $w' \preceq_{\Phi_2} w$.

Si $w' \prec_{\Phi_2} w$, por 5' tenemos que $w' \prec_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} w$, lo cual es una contradicción, pues w es un minimal en $[B(E)]$ para $\preceq_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2}$. Luego $w \simeq_{\Phi_2} w'$, y de nuevo por (B-Rep) $w \models B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big)$. Por lo tanto $w \models B\big(\nabla(\Phi_1, E)\big) \vee B\big(\nabla(\Phi_2, E)\big)$. ∎

Proposición 3.12 *Sea ∇ un operador de combinación EE. En presencia de los postulados básicos, el postulados* (FEE-It) *es equivalente a la propiedad* 6*.*

Supongamos que ∇ satisface (FEE-It), y mostremos que la asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ satisface el postulados 6.

Consideremos Φ un perfil de creencias y E un estado epistémico, y denotemos por $\preceq^{l(E,\Phi)}$ al orden $lex(\preceq_E, \preceq_\Phi)$. Sean w, w' interpretaciones arbitrarias, E' un estado epistémico con $[B(E')] = \{w, w'\}$ y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $w \preceq_{\nabla(\Phi,E)} w'$.

En virtud de (B-Rep), $w \models B\Big(\nabla\big(\nabla(\Phi, E), E'\big)\Big)$, y por (FEE-It) se tiene que $w \models B\Big(\nabla\big(\Phi, \nabla(E, E')\big)\Big)$. Luego, por (FEE1), $w \models B\big(\nabla(E, E')\big)$, obteniéndose de (B-Rep) que $w \preceq_E w'$.

Notemos que si $w \prec_E w'$ se deduce de forma inmediata que $w \prec^{l(E,\Phi)} w'$. Ahora bien, si $w \simeq_E w'$ se tiene de (B-Rep) que $B\big(\nabla(E, E')\big) \equiv B(E')$. De esta manera, por (FEE2)

$$B\Big(\nabla\big(\Phi, \nabla(E, E')\big)\Big) \equiv B\big(\nabla(\Phi, E')\big).$$

Por lo tanto, $w \models B\big(\nabla(\Phi, E')\big)$, implicado por (B-Rep) que $w \preceq_\Phi w'$. Así, $w \preceq^{l(E,\Phi)} w'$. Ahora, supongamos que $w \preceq^{l(E,\Phi)} w'$, y consideremos los siguientes casos:

(*i*) $w \prec_E w'$: En este caso, por (B-Rep), w es el único modelo de $B\big(\nabla(E, E')\big)$, y en virtud de (FEE1) y (FEE-It) también lo es de $B\Big(\nabla\big(\nabla(\Phi, E), E'\big)\Big)$. De esta manera, $w \prec_{\nabla(\Phi,E)} w'$.

(*ii*) $w \simeq_E w'$ & $w \preceq_\Phi w'$: En este caso, por (B-Rep), $B\big(\nabla(E,E')\big) \equiv B(E')$, lo que implica, por (FEE2) y (FEE-It), que

$$B\Big(\nabla\big(\nabla(\Phi,E),E'\big)\Big) \equiv B\big(\nabla(\Phi,E')\big).$$

Puesto que $w \preceq_\Phi w'$ se tiene de (B-Rep) que $w \models B\big(\nabla(\Phi,E')\big)$, y por lo tanto $w \models B\Big(\nabla\big(\nabla(\Phi,E),E'\big)\Big)$. De esta forma, en virtud de (B-Rep), $w \preceq_{\nabla(\Phi,E)} w'$.

Recíprocamente, supongamos que la asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ satisface 6, y veamos que el operador ∇ satisface (FEE-It); para ello, en virtud de (B-Rep) y 6, basta con mostrar que para cada perfil de creencias Φ y estados epistémicos E y E'

$$min\big(min([B(E')], \preceq_E), \preceq_\Phi\big) = min\big([B(E')], \preceq^{l(E,\Phi)}\big);$$

pero esto es consecuencia inmediata de la proposición 1.4. ∎

Presentamos una variante del resultado anterior, la cual es consecuencia inmediata de este y de las proposiciones 3.1, 3.6 y 3.8.

Corolario 3.1 *Sea ∇ un operador de combinación EE. Entonces ∇ satisface los postulados* (FEE1), (FEE2), (FEE6) *y* (FEE-It) *si, y sólo si, existe una única asignación satisfaciendo* (B-Rep) *y los postulados* 2, 3, 6*, con respecto a B y ∇.*

Es razonable pensar que al fusionar un estado epistémico E consigo mismo, el estado epistémico resultante no puede ser sino E. Algo similar debe ocurrir si al momento de fusionar no existe restricción alguna. Más precisamente nos referimos a dos postulados nuevos:

(FEE-Inv) $\nabla(E,E) = E$

(FEE-Taut) $\nabla(E_\top,E) = \nabla(E,E_\top) = E$

A continuación veremos algunas condiciones que implican a estos postulados.

Proposición 3.13 *Sea ∇ un operador de combinación EE. Si existe una asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ satisfaciendo* 1 *y* 6 *con respecto a ∇, entonces ∇ satisface* (FEE-Inv).

Demostración: Si la asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ satisface los postulados 1 y 6 con respecto a ∇, entonces para todo E estado epistémico se tiene que

$$\preceq_{\nabla(E,E)} = lex(\preceq_E, \preceq_E) = \preceq_E,$$

y de esta manera $\nabla(E, E) = E$. ∎

Como corolario directo de este resultado, y de las proposiciones 3.6 y 3.11, tenemos lo siguiente:

Corolario 3.2 *Todo operador de fusión básico EE que satisfaga los postulados* (FEE5) *y* (FEE-It) *satisface también la propiedad* (FEE-Inv)*.*

Proposición 3.14 *Sea* ∇ *un operador de combinación EE. Si existe una asignación* $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ 1 *y* 6*, con respecto a* ∇*, y es tal que* B *satisface la condición de minimalidad, entonces* ∇ *satisface* (FEE-Taut)*.*

Demostración: Supongamos que existe una asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ que satisface las propiedades 1 y 6, con respecto a ∇, y es tal que B satisface la condición de minimalidad con respecto a esta. Notemos que

$$\mathcal{W} = [B(E_\top)] = min(\preceq_{E_\top})$$

de esta manera, para cuales quiera $w, w' \in \mathcal{W}$, $w \simeq_{E_\top} w'$. Ahora bien, en virtud de 6 y de la observación 1.1 se tiene que

$$\preceq_{\nabla(E,E_\top)} = lex(\preceq_{E_\top}, \preceq_E) = \preceq_E \ .$$

Del mismo modo,

$$\preceq_{\nabla(E_\top,E)} = lex(\preceq_E, \preceq_{E_\top}) = \preceq_E$$

y de esta forma, en virtud de la propiedad 1, obtenemos que $\nabla(E, E_\top) = \nabla(E_\top, E) = E$. ∎

El siguiente resultado se deduce directamente de la proposiciones 3.4, 3.7, 3.11 y de la proposición anterior.

Corolario 3.3 *Todo operador de combinación EE que satisfaga los postulados* (FEE1), (FEE2), (FEE5), (FEE6)*, y* (FEE-It)*, satisface también* (FEE-Taut)*.*

Proposición 3.15 *En presencia de los postulados básicos, el postulado* (FEE-Eq) *es equivalente a* Eq*, relativo a la función de creencias* B*.*

Demostración:

Sean E_1 y E_2 estados epistémicos cualesquiera y consideremos E un estado epistémico con $B(E) \equiv B(E_1) \vee B(E_2)$. Notemos que, por la proposición 3.3, $B\big(\nabla(E_1 \sqcup E_2, E)\big)$ es consistente con $B(E_1)$, y en virtud de (FEE-Eq), tambien lo es con $B(E_2)$.

Ahora bien, sea $w \models B(E_1)$ y consideremos $w' \models B\big(\nabla(E_1 \sqcup E_2, E)\big) \wedge B(E_2)$. Notemos que w, w' son ambos modelos de $B(E_1) \vee B(E_2)$, y por ende lo son de $B(E)$; pero $w' \models B\big(\nabla(E_1 \sqcup E_2, E)\big)$ de esta forma, y en virtud de (B-Rep), $w' \preceq_{E_1 \sqcup E_2} w$.

Por otro lado, consideremos $E,\ E_1,\ E_2$ estados epistémicos tales que $B(E_1) \vee B(E_2)$ satisface a $B(E)$ y supongamos que $B\big(\nabla(E_1 \sqcup E_2, E)\big)$ es consistente con $B(E_1)$. Sea $w \models B\big(\nabla(E_1 \sqcup E_2, E)\big) \wedge B(E_1)$ y notemos que, por (B-Rep), para cada $w'' \models B(E)$ se tiene que $w \preceq_{E_1 \sqcup E_2} w''$.

Ahora bien, en virtud de (Eq) existe $w' \models B(E_2)$ tal que $w' \preceq_{E_1 \sqcup E_2} w$, y por transitividad tenemos que $w' \preceq_{E_1 \sqcup E_2} w''$, para cada $w'' \models B(E)$. Pero $w' \models B(E_2)$, así $w' \models B(E)$ implicando que $w' \in min\big([B(E)], \preceq_{E_1 \sqcup E_2}\big)$, y en virtud de (B-Rep) se tiene que $w' \models B\big(\nabla(E_1 \sqcup E_2, E)\big) \wedge B(E_2)$, mostrando la consistencia de $B\big(\nabla(E_1 \sqcup E_2, E)\big)$ con $B(E_2)$. ∎

El resultado anterior muestra el por qué, en general, la propiedad (Eq) no posee propiedades razonables, estando en presencia de postulados que si poseen buenas características.

Ahora procederemos a enunciar varios resultados de representación, cuya demostración se deduce directamente de los resultados previamente vistos de esta sección.

Teorema 3.1 (Representación débil de operadores de fusión EE) *Sea ∇ un operador de combinación EE. Entonces, ∇ es un operador de fusión EE si, y sólo si, existe una asignación fiel, que satisface* (B-Rep).

Teorema 3.2 (Representación débil de operadores de cuasifusión EE) *Sea ∇ un operador de combinación EE. Entonces, ∇ es un operador de cuasifusión EE si, y sólo si, existe una asignación cuasifiel, satisfaciendo* (B-Rep).

Teorema 3.3 (Representación débil de operadores de fusión iterables EE) *Sea ∇ un operador de combinación EE. Entonces, ∇ es un operador fusion (cuasifusión) iterable EE si, y sólo si, existe una asignación lexi-fiel (lexi-cuasifiel), con respecto a ∇.*

A diferencia del teorema de representación para los operadores de fusión de bases de creencias en el marco KP [10] los teoremas previos no nos permiten construir el operador ∇ a partir de los preórdenes asociados a los estados epistémicos; pero lo que es interesante de estos teoremas es que permiten representar semánticamente la parte observable del resultado de la fusión a través de preórdenes. Más adelante daremos ejemplos de operadores.

CAPÍTULO 4

FUSIÓN EN UNA REPRESENTACIÓN CONCRETA DE ESTADOS EPISTÉMICOS: LOS PREÓRDENES TOTALES.

Las representaciones débiles obtenidas hasta el momento, describen sólo las preferencias arraigadas de un grupo o la forma en que debe estar ordenado el estado epistémico global de dicho grupo, perdiéndose así la estructura general del estado epistémico global generado por el operador de fusión. En esta sección daremos una solución a este problema, mostrando que, en el caso en que los estados epistémicos estén ordenados, la fusión también ordenará todas las alternativas, es decir, para estados epistémicos con estructura de preórdenes, los operadores de fusión preservan esta estructura.

Consideremos $\mathcal{E}$ el conjunto de todos los preórdenes totales definidos sobre $\mathcal{W}$ y consideremos los siguientes propiedades para las asignaciones:

(PI) *Si* $\Phi = \{\preceq_1, \ldots, \preceq_n\}$ *y, para cada* $i \leq n$, $w \simeq_i w'$ *entonces* $w \simeq_\Phi w'$.

(PF) *Si* $\Phi = \{\preceq_1, \ldots, \preceq_n\}$, *para cada* $i \leq n$, $w \preceq_i w'$ *y existe* $j \leq n$ *tal que* $w \prec_j w'$ *entonces* $w \prec_\Phi w'$.

(PU) *Si* $\Phi = \{\preceq_1, \ldots, \preceq_n\}$ *y, para cada* $i \leq n$, $w \prec_i w'$ *entonces* $w \prec_\Phi w'$.

Estas propiedades expresan comportamientos razonables al momento de fusionar las creencias de un grupo de individuos. La propiedad (PI) establece que si dos opciones son igualmente de plausibles para todos los miembros de un grupo, el grupo en general debe mantenerlos igualmente plausibles. Por otro lado, (PF) estipula que si todos los miembros de un grupo consideran w al menos tan plausible como w', y si w estrictamente mas plausible que w' para al menos un integrante del grupo, entonces w se mantendrá estrictamente más preferido para el grupo en general; mientras que (PU) expresa el hecho que, entre dos opciones, todos los miembros del grupo considera más plausible una de ellas de forma unánime, entonces el grupo en pleno considerará ésta estrictamente más plausible con respecto a la restante. Notemos que toda asignación que satisface el postulado (PF), satisface también el postulado (PU)[1].

Por otro lado, una de las propiedades sensatas que deben satisfacer las asignaciones fieles es la preservación de las estructura de los estados epistémicos. Diremos que una asignación $\Phi \mapsto \prec_\Phi$ *preserva la estructura de los estados epistémicos* si para cada estado epistémico E, $\preceq_E = E$. En presencia de esta propiedad, y en adición a otras ya mencionadas, los postulados (PI),(PF) y (PU) pueden ser satisfechas por la asignación dada.

Proposición 4.1 *Sea $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ una asignación y supongamos ésta preserva la estructura de los estados epistémicos. Entonces:*

(*i*) *Si $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ satisface* 4*, entonces ésta satisface* (PI)*.*

(*ii*) *Si $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ satisface* 4 *y* 5*, entonces ésta satisface* (PF)*.*

(*iii*) *Si $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ satisface* 5'*, entonces ésta satisface* (PU)*.*

Demostración:

(*i*) Supongamos que la asignación satisface el postulado 4. Por inducción sobre el cardinal de Φ, mostremos que dicha asignación satisface el postulado (PI).

Supongamos que $\Phi = \{E\}$ y denotemos por $\preceq$ al estado epistémico E. Si w y w' son interpretaciones tales $w \simeq w'$, tenemos que $w \simeq_E w'$, ya que $E = \preceq_E$.

Ahora bien, sea $n > 1$ un entero positivo arbitrario y supongamos que, si nos restringimos a perfiles de creencias Φ, con $|\Phi| < n$, la asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ satisface el postulado (PI). Mostremos entonces que, para perfiles de creencias con n estados epistémicos, la propiedad (PI) también se satisface.

Sea $\Phi = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ un perfil de creencias y, para cada $i \leq n$, denotemos a cada E_i por $\preceq_i$. Sean w, w' interpretaciones tales que, para cada $i \leq n$, $w \simeq_i w'$. Consideremos los perfiles de creencias $\Phi_1 = \{E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}\}$ y $\Phi_2 = \{E_n\}$ y notemos que, en virtud de la hipótesis inductiva, $w \simeq_{\Phi_1} w'$ y $w \simeq_{\Phi_2} w'$. De esta manera, por 4, $w \simeq_\Phi w'$.

[1]El nombre de estos postulados es prestado de la Teoría de Elección Social, en donde se encuentran de manera muy natural: PI significa *Pareto Indiferencia*, PF significa *Pareto Fuerte* y PU es *Pareto débil*

(*ii*) Supongamos que la asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ satisface los postulados 4 y 5 y, por inducción sobre $|\Phi|$, mostremos que la asignación también satisface 3.

El caso $|\Phi| = 1$, se sigue directo del hecho que $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ preserva la estructura de los estados epistémicos. Así, sea $n > 1$, y supongamos que, para cada perfil de creencias Φ, con $|\Phi| < n$, se tiene que la asignación satisface la propiedad (PF). Mostremos que para perfiles, Φ, con $|\Phi| = n$, también se satisface (PF).

Sea $\Phi = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ un perfil de creencias y, para cada $i \leq n$, denotemos a E_i por $\preceq_i$. Supongamos w, w' interpretaciones tales que, para cada $i < n$, $w \preceq_i w'$ y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $w \prec_n w'$. Consideremos $\Phi_1 = \{E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}\}$ y $\Phi_2 = \{E_n\}$. Si $w \simeq_i w'$, para todo $i < n$, entonces de la parte (*i*) se tiene que $w \simeq_{\Phi_1} w'$. Por otro lado, si existe $j < n$ tal que $w \prec_j w'$ entonces, de la hipótesis inductiva se tiene que $w \prec_{\Phi_1} w'$. Así, en cualquier caso $w \preceq_{\Phi_1} w'$.

Ahora bien, puesto que $w \preceq_{\Phi_1} w'$ y como $w \prec_{\Phi_2} w'$, se deduce de 5 que $w \prec_\Phi w'$, satisfaciendo (PF).

(*iii*) Se demuestra de manera Análoga a (*i*). ∎

En el resultado anterior vimos como, en presencia de las propiedades 4 y 5, la preservación de la estructura de los estados epistémicos permite obtener las propiedades (PI), (PF) y (PU). Sin embargo, como veremos a continuación en los siguientes dos resultados, las propiedades (PI), (PF) y (PU) permite que la asignación preserve la estructura de los estados epistémicos.

Proposición 4.2 *Si* $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ *es un asignación satisfaciendo* (PI) *y* (PF)*, entonces se tiene lo siguiente:*

(*i*) $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ *preserva la estructura de los estados epistémicos.*

(*ii*) *La asignación satisface la propiedad* 1.

(*iii*) *Si la función de creencia satisface la condición de minimalidad, con respecto a* $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$*, entonces dicha asignación satisface las propiedades* 2 *y* 3.

Demostración: Notemos que (*i*) se deduce directo de (PI) y (PF), considerando, para cada E, el perfil formado únicamente por este estado epistémico. Además (*ii*) se deduce de (*i*).

Para mostrar (*iii*), supongamos que la función de creencias B satisface la condición de minimalidad, con respecto a la asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$. De esta manera, en virtud de (*i*), se tiene que $[B(E)] = min(E)$, para cada estado epistémico E.

Consideremos $\Phi = \{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ un perfil de creencias y w, w' interpretaciones cualesquiera. Además, supongamos que, para cada $i \leq n$, $w \models B(E_i)$, y notemos que, para todo $i \leq n$, $w \in min(E_i)$.

Ahora bien, si para cada $i \leq n$ se tiene que $w' \models B(E_i)$, entonces, denotando por $\preceq_i$ a cada E_i, $w \simeq_i w'$, obteniéndose de (PI) que $w \simeq_\Phi w'$, satisfaciéndose 2.

Por otro lado, si existe $j \leq n$ tal que $w' \not\models B(E_j)$ entonces $w \prec_j w'$, y puesto que, para cada $i \leq n$, $w \preceq_i w'$, se tiene de (PF) que $w \prec_\Phi w'$, satisfaciéndose 3. ∎

Observación 4.1 En la demostración de la parte (*iii*) del resultado anterior podemos observar que la propiedad (PI) sólo fue utilizado en la demostración de la propiedad 2, mientras que (PF) fue usado solamente en la demostración de la propiedad 3.

Por otro lado notemos que si B no satisface la condición de minimalidad, pero en vez de ello B satisface que, para cada E, $B(E) = min(E)$, el resultado se demostraría de igual manera.

Análogamente a la demostración del resultado anterior se demuestra lo siguiente.

Proposición 4.3 *Si* $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ *es un asignación satisfaciendo* (PI) *y* (PU), *entonces se tiene lo siguiente:*

(*i*) $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ *preserva la estructura de los estados epistémicos.*

(*ii*) *La asignación satisface el postulado* 1.

Consideremos ahora los siguientes axiomas sobre los operadores de combinación EE:

Sea $\Phi = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ *un perfil de creencias y* E *un estado epistémico.*

(FEE-PI) *Si para cada* $i \leq n$, $B(\nabla(E_i, E)) \equiv B(E)$, *entonces* $B\big(\nabla(\Phi, E)\big) \equiv B(E)$.

(FEE-PF) *Si* $\bigwedge\!\!\!\bigwedge_{i=1}^{n} B(\nabla(E_i, E)) \not\vdash \perp$, *entonces* $B\big(\nabla(\Phi, E)\big) \vdash \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{i=1}^{n} B(\nabla(E_i, E))$.

(FEE-PU) *Si para cada* $i, j \leq n$, $B(\nabla(E_i, E)) \equiv B(\nabla(E_j, E))$ *entonces, para cada* $i \leq n$, $B\big(\nabla(\Phi, E)\big) \vdash B(\nabla(E_i, E))$

La propiedad (FEE-PI) estipula que, en presencia de una nueva información dada por un estado epistémico E, si las creencias de cada individuo son las creencias de la restricción, entonces, en presencia de dicha restricción, la creencia grupal es equivalente a la restricción.

(FEE-PF) establece que, al "revisar" con una nueva información E, si las nuevas creencias concuerdan en algo, en presencia de dicha restricción, la creencia grupal debe satisfacer dicho acuerdo.

(FEE-PU) es más débil que el postulado (FEE-PF). Este expresa el hecho que, al encontrarse con una nueva información E, si todos los individuos obtienen las mismas creencias, entonces, en presencia de dicha información, la creencia grupal debe satisfacer la nueva creencia de cualquier individuo.

Proposición 4.4 *Sea ∇ un operador de fusión básico, y supongamos ∇ satisface el postulado* (FEE-PI). *Sean $\Phi = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ un perfil de creencias y E un estado epistémico cualesquiera.*

(*i*) *Si ∇ satisface* (FEE-PF) *entonces, siempre que $\bigwedge\!\!\!\bigwedge_{i=1}^{n} B(\nabla(E_i, E))$ sea consistente, $B(\nabla(\Phi, E)) \equiv \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{i=1}^{n} B(\nabla(E_i, E))$.*

(*ii*) *Si ∇ satisface* (FEE-PU) *entonces, siempre que, para cualesquiera $i, j \leq n$, $B(\nabla(E_i, E)) \equiv B(\nabla(E_j, E))$, entonces, para todo $i \leq n$, se tiene que $B(\nabla(\Phi, E)) \equiv B(\nabla(E_i, E))$.*

Demostración:

(*i*) Supongamos que ∇ satisface (FEE-PF) y además supongamos que $\bigwedge\!\!\!\bigwedge_{i=1}^{n} B(\nabla(E_i, E))$ es consistente. Así, por (FEE-PF) tenemos que $B(\nabla(\Phi, E)) \vdash \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{i=1}^{n} B(\nabla(E_i, E))$.

Ahora bien, consideremos $w \models \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{i=1}^{n} B(\nabla(E_i, E))$ y notemos que, en virtud de (FEE1) $w \models B(E)$. Además, si $w' \models B(E)$, se tiene por (B-Rep) que $w \preceq_{E_i} w'$, para todo $i \leq n$.

Consideremos w' un modelo arbitrario de $B(E)$ y sea E' un estado epistémico, con $[B(E')] = \{w, w'\}$. De esta manera, para cada $i \leq n$, se tiene que $w \preceq_{E_i} w'$, lo que implica por (B-Rep) que $w \models \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{i=1}^{n} B(\nabla(E_i, E'))$. De esto último y de (FEE-PF) se tiene que $B(\nabla(\Phi, E')) \vdash \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{i=1}^{n} B(\nabla(E_i, E'))$.

Si $w' \not\models \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{i=1}^{n} B(\nabla(E_i, E'))$ se tiene que $w' \not\models B(\nabla(\Phi, E'))$, deduciéndose de (B-Rep) que $w \preceq_{\Phi} w'$. Por otro lado, si $w' \models \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{i=1}^{n} B(\nabla(E_i, E'))$ entonces, para cada $i \leq n$,

$B(\nabla(E_i, E')) \equiv B(E')$, y además, para $i \leq n$, $\bigwedge\!\!\!\bigwedge_{i=1}^{n} B(\nabla(E_i, E')) \equiv B(E')$; esto en virtud de (FEE1). Así, de (FEE-PI) se tiene que $B(\nabla(\Phi, E')) \equiv B(E')$, y por (B-Rep) se tiene que $w \preceq_\Phi w'$. Así $w \in min([B(E)], \preceq_\Phi)$, mostrando que $w \models B(\nabla(\Phi, E))$. Luego, $\bigwedge\!\!\!\bigwedge_{i=1}^{n} B(\nabla(E_i, E')) \vdash B(\nabla(\Phi, E))$, y por lo tanto

$$B(\nabla(\Phi, E)) \equiv \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{i=1}^{n} B(\nabla(E_i, E')).$$

(ii) La demostración de este inciso es similar al anterior, tomando en cuenta el hecho que, para cualesquiera $i, j \leq n$, $B(\nabla(E_i, E)) \equiv B(\nabla(E_j, E))$.

Vamos a ver que, siempre que la asignación preserve la estructura de los estados epistémicos, los postulados (FEE-PI), (FEE-PF) y (FEE-PI), y las propiedades (PI), (PF) y (PU), son equivalentes. Para ello haremos uso de los siguientes postulados "híbridos", y mostremos como se relacionan con las propiedades (PI), (PF) y (PU) de asignación.

Sean $\Phi = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ un perfil de creencias, E estado epistémico y, para cada $i \leq n$, denotemos por $\preceq_i$ a E_i.

(FEE-PI') *Si para cada $i \leq n$, $w \simeq_i w'$ y $[B(E)] = \{w, w'\}$, $B\big(\nabla(\Phi, E)\big) \equiv B(E)$.*

(FEE-PF') *Si para todo $i \leq n$, $w \preceq_i w'$, y existe $j \leq n$ tal que $w \prec_j w'$, y además $[B(E)] = \{w, w'\}$, entonces $B\big(\nabla(\Phi, E)\big) \equiv \varphi_w$.*

(FEE-PU') *Si para cada $i \leq n$, $w \prec_i w'$ y $[B(E)] = \{w, w'\}$, $B\big(\nabla(\Phi, E)\big) \equiv \varphi_w$.*

(FEE-PI') estipula que, siempre que dos opciones sean igual de plausibles para todos los individuos de un grupo, estas serán las opciones predilectas al fusionar las creencias en cualquier situación donde éstas sean las opciones más arraigadas. (FEE-PF') establece que, dada dos opciones w y w', si w es al menos tan plausible como w' para todos los individuos de un grupo, y w es estrictamente más preferida que w', para al menos uno de los individuos, entonces en cualquier situación en que éstas sean las únicas opciones arraigadas, w será las opción escogida por el grupo. (FEE-PU') expresa el hecho que, entre dos opciones, si los miembros de un grupo prefieren estrictamente a una de ellas, ésta será la opción mas arraigada en forma global, cualquiera sea la situación donde las dos opciones sean las más arraigadas. Es claro que cualquier operador de combinación EE que cumpla con (FEE-PF') satisface (FEE-PU').

Proposición 4.5 *Sea ∇ un operador de fusión básico EE. Si la asignación asociada a ∇, determinada por la proposición* 3.6*, preserva la estructura de los estados epistémicos, se tiene lo siguiente:*

(*i*) (FEE-PI) *es equivalente a* (FEE-PI').

(*ii*) (FEE-PF) *es equivalente a* (FEE-PF').

(*iii*) (FEE-PU) *es equivalente a* (FEE-PU').

Demostración: Para realizar la demostración de este resultado, consideremos $\Phi = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ un perfil de creencias cualquiera y, en momentos que sea necesario, cada E_i será denotado por $\preceq_i$. De esta forma, como la asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ preserva la estructura de los estados epistémicos, para cada $i \leq n$, se tiene que $E_i = \preceq_{E_i} = \preceq_i$.

(*i*) Supongamos que (FEE-PI) se satisface y sean w, w' interpretaciones cualesquiera. Si para cada $i \leq n$, $w \simeq_i w'$, al considerar E un estado con $[B(E)] = \{w, w'\}$, tenemos por (B-Rep) que, para cada $i \leq n$, $B(\nabla(E_i, E)) \equiv B(E)$. De esta manera, de (FEE-PI) se deduce que $B(\nabla(\Phi, E)) \equiv B(E)$.

Recíprocamente, supongamos que (FEE-PI') se satisface y supongamos que E es un estado epistémico tal que, para cada $i \leq n$, $B(\nabla(E_i, E)) \equiv B(E)$. Notemos que del postulado (FEE1) se deduce que $B(\nabla(\Phi, E)) \vdash B(E)$. Por otro lado, si existe $w \models B(E)$ tal que $w \not\models B(\nabla(\Phi, E))$, se tiene de (B-Rep) que existe $w' \models B(E)$ tal que $w' \prec_\Phi w$. Así, como para cada $i \leq n$, $B(\nabla(E_i, E)) \equiv B(E)$, y $w, w' \models B(E)$ se tiene, en virtud de (B-Rep), que $w \simeq_i w'$. De esta manera, al considerar un estado epistémico E', con $[B(E')] = \{w, w'\}$, tenemos por (FEE-PI') que $B(\nabla(\Phi, E')) \equiv B(E')$, obteniéndose de nuevo de (B-Rep) que $w \simeq_\Phi w'$, lo que contradice que $w' \prec_\Phi w$. Por lo tanto $w \models B(\nabla(\Phi, E))$, implicando que $B(\nabla(\Phi, E)) \equiv B(E)$.

(*ii*) Supongamos que (FEE-PF) se satisface y que w, w' son interpretaciones tales que, para cada $i \leq n$, $w \preceq_i w'$, y además supongamos que existe $j \leq n$ tal que $w \prec_j w'$. Consideremos E un estado epistémico tal que $[B(E)] = \{w, w'\}$ y notemos que, en virtud de (B-Rep), $w' \not\models \bigwedge_{i=1}^{n} B(\nabla(E_i, E))$ y además que $w \models \bigwedge_{i=1}^{n} B(\nabla(E_i, E))$. De esta manera, se deduce de (FEE-PF) que $B(\nabla(\Phi, E)) \vdash \bigwedge_{i=1}^{n} B(\nabla(E_i, E))$, obteniéndose de esto último que $w' \not\models B(\nabla(\Phi, E))$. Así, de la consistencia de $B(\nabla(\Phi, E))$ y de (FEE1), se tiene que $B(\nabla(\Phi, E)) \equiv \varphi_w$.

Ahora bien, para demostrar el recíproco, consideremos E un estado epistémico y supongamos que la conjunción de los $B(\nabla(E_i, E))$ es consistente. Sea w un modelo de $B(\nabla(\Phi, E))$ y, razonando por el absurdo, supongamos que w no satisface $\bigwedge_{i=1}^{n} B(\nabla(E_i, E))$. De esta manera existe $j \leq n$ tal que $w \not\models B(\nabla(E_j, E))$. Consideremos $w' \models \bigwedge_{i=1}^{n} B(\nabla(E_i, E))$ y notemos que por (B-Rep) se tiene que, para cada $i \leq n$, $w' \preceq_i w$, $w' \prec_j w$ y además que $w' \models B(E)$. Así, considerando E' un estado epistémico con $[B(E')] = \{w, w'\}$, se tiene de (FEE-PF') que $w \not\models B(\nabla(\Phi, E'))$, deduciéndose de (B-Rep) que $w' \prec_\Phi w$, contradiciendo que $w \in min([B(E)], \preceq_\Phi)$. Luego, $w \models \bigwedge_{i=1}^{n} B(\nabla(E_i, E))$, implicando que $B\big(\nabla(\Phi, E)\big) \vdash \bigwedge_{i=1}^{n} B(\nabla(E_i, E))$

(*iii*) Supongamos que ∇ satisface (FEE-PU) y sean w, w' interpretaciones cualesquiera. Consideremos E un estado epistémico, con $[B(E)] = \{w, w'\}$, y supongamos además que, para cada $i \leq n$, $w \prec_i w'$. Así, en virtud de (B-Rep), para cada $i \leq n$, $B(\nabla(E_i, E)) \equiv \varphi_w$, deduciéndose de esto último que, para cada $i, j \leq n$, $B(\nabla(E_i, E)) \equiv B(\nabla(E_j, E))$. Luego, en virtud de (FEE-PU), se tiene que para todo $i \leq n$, $B(\nabla(\Phi, E)) \vdash B(\nabla(E_i, E))$. De esta forma, puesto que para cada $i \leq n$, $w' \not\models B(\nabla(E_i, E))$ se tiene que $w' \not\models B(\nabla(\Phi, E))$, deduciéndose de (FEE1) y de la consistencia de $B(\nabla(\Phi, E))$ que $B(\nabla(\Phi, E)) \equiv \varphi_w$.

Por otro lado, supongamos que ∇ satisface (FEE-PU') y mostremos que satisface (FEE-PU). Para ello razonemos por el absurdo y consideremos E un estado epistémico tal que, para todo $i, j \leq n$, $B(\nabla(E_i, E)) \equiv B(\nabla(E_j, E))$ y además supongamos que existen $w \models B(\nabla(\Phi, E))$ y $j \leq n$ tal que $w \not\models B(\nabla(E_j, E))$. Sea $w' \models B(\nabla(E_j, E))$. Notemos que $w, w' \models B(E)$. Además de la hipótesis se deduce que, para cada $i \leq n$, $w \not\models B(\nabla(E_i, E))$ y $w' \models B(\nabla(E_i, E))$. Por (B-Rep), se tiene que $w \preceq_\Phi w'$. Sea E' un estado epistémico, con $[B(E')] = \{w, w'\}$ y obsérvese que, en virtud de (B-Rep), para cada $i \leq n$ $w' \prec_i w$, deduciéndose de eso último y de (FEE-PU') que $w \not\models B((\Phi, E'))$. Así, de nuevo por (B-Rep), se tiene que $w' \prec_\Phi w$, lo que contradice que $w \preceq_\Phi w'$. Por lo tanto, $w \models B(\nabla(E_i, E))$, para todo $i \leq n$. ∎

El siguiente resultado nos dice que, en ciertas circunstancias, (FEE-PI'), (FEE-PF') y (FEE-PU') son equivalentes a las propiedades (PI), (PF) y (PU), respectivamente.

Proposición 4.6 *Bajo los postulados básicos de operadores de fusión, los postulados* (FEE-PI')*,* (FEE-PF') *y* (FEE-PU') *son equivalentes a las propiedades* (PI)*,* (PF) *y*

(PU), *respectivamente.*

Demostración: Sean $\Phi = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ perfil de creencias y w, w' interpretaciones cualesquiera. Consideremos E un estado epistémico tal que $[B(E)] = \{w, w'\}$ y , para cada $i \leq n$, denotemos a cada E_i por $\preceq_i$.

Supongamos primero que, para cada $i \leq n$, $w \simeq_i w'$. Si ∇ satisface (FEE-PI') entonces $B\big(\nabla(\Phi, E)\big) \equiv B(E)$. Así, en virtud de (B-Rep), w y w' pertenecen a $min([B(E)], \preceq_\Phi)$, y por lo tanto $w \simeq_\Phi w'$, satisfaciéndose (PI). Por otro lado, si $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ satisface (PI), entonces $w \simeq_\Phi w'$, y por lo tanto $w, w' \in min([B(E)], \preceq_\Phi)$, obteniéndose de (B-Rep) que $B\big(\nabla(\Phi, E)\big) \equiv B(E)$.

Supongamos ahora que, para cada mbox$i \leq n$, $w \preceq_i w'$ y además existe $j \leq n$ tal que $w \prec_j w'$. Si el operador ∇ satisface (FEE-PF') entonces $B\big(\nabla(\Phi, E)\big) \equiv \varphi_w$, obteniéndose de (B-Rep) que $min([B(E)], \preceq_\Phi) = \{w\}$, y por lo tanto $w \prec_\Phi w'$; satisfaciéndose (PF). Por otra parte, si $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ satisface (PF), entonces $w \prec_\Phi w'$, implicando que $min([B(E)], \preceq_\Phi) = \{w\}$, y de esta manera $B\big(\nabla(\Phi, E)\big) \equiv \varphi_w$, satisfaciéndose (FEE-PF').

Por último supongamos que, para cada $i \leq n$, $w \prec_i w'$. Si ∇ cumple con (FEE-PU') se tiene que $B(\nabla(\Phi, E)) \equiv \varphi_w$, y por (B-Rep) se tiene que $min([B(E)], \preceq_\Phi) = \{w\}$, implicando que $w \prec_\Phi w'$, satisfaciéndose (PU). Ahora bien, si la asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ satisface (PU), se tiene que $w \prec_\Phi w'$, y de esta forma $min([B(E)], \preceq_\Phi) = \{w\}$. De (B-Rep) se deduce que $\nabla(\Phi, E) \equiv \varphi_w$, satisfaciéndose (FEE-PU'). ∎

El siguiente resultado se deduce de forma inmediata de las proposiciones 4.5 y 4.6.

Proposición 4.7 *Sea ∇ un operador de fusión básico EE. Si la asignación asociada a ∇ preserva la estructura de los estados epistémicos, se tiene lo siguiente:*

(*i*) *El postulado* (FEE-PI) *es equivalente a la propiedad* (PI).

(*ii*) *El postulado* (FEE-PF) *es equivalente a la propiedad* (PF).

(*iii*) *El postulado* (FEE-PU) *es equivalente a la propiedad* (PU).

El siguiente es un resultado directo de la proposición anterior, en conjunto con las proposiciones 3.7, 3.8 y 4.2.

Corolario 4.1 *Sea ∇ un operador de fusión básico EE. Entonces, si ∇ satisface* (FEE-PI') *y* (FEE-PF') *entonces satisface* (FEE5)*. Además, si B satisface la condición de minimalidad con respecto a la asignación que representa a ∇, dicho operador satisface* (FEE6)*.*

El siguiente resultado es consecuencia inmediata de las proposición 4.5 y del corolario anterior

Corolario 4.2 *Sea* ∇ *un operador de fusión básico EE y supongamos que la asignación asociada a* ∇ *preserva la estructura de los estados epistémicos. Si* ∇ *satisface* (FEE-PI) *y* (FEE-PF) *entonces satisface* (FEE5)*. Además, si* B *satisface la condición de minimalidad con respecto a la asignación que representa a* ∇*, dicho operador satisface* (FEE6)*.*

Proposición 4.8 *Sea* ∇ *un operador de fusión básico EE. Entonces* ∇ *satisface* (FEE-It)*,* (FEE-PI') *y* (FEE-PF')*, si, y sólo si, la asignación* $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ *que representa a* ∇*, satisface las propiedades* 6*,* (PI) *y* (PF)*, con respecto a* B*, y es tal que para cualquier perfil de creencias* Φ *y cualquier estado epistémico* E

$$\nabla(\Phi, E) = lex(E, \preceq_\Phi). \tag{Rep}$$

Demostración: En virtud de la proposiciones 3.12 y 4.6, sabemos el operador de fusión ∇ satisface (FEE-It), (FEE-PI') y (FEE-PF') si, y sólo si, la asignación fiel $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$, asociada a ∇, satisface las propiedades 6, (PI) y (PF). De esta manera, sólo nos falta demostrar que dicha asignación satisface (Rep).

Consideremos Φ perfil de creencias y E estado epistémico, arbitrios, y notemos que en virtud de 6 se tiene que $\preceq_{\nabla(\Phi,E)} = lex(\preceq_E, \preceq_\Phi)$. Ahora bien, puesto que $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ satisface (PI) y (PF), en virtud de la proposición 4.2, se tiene que $\nabla(\Phi, E) = \preceq_{\nabla(\Phi,E)}$ y $E = \preceq_E$. Por lo tanto $\nabla(\Phi, E) = lex(E, \preceq_\Phi)$. ∎

Como corolario de la proposición anterior se tiene:

Proposición 4.9 *Sea* ∇ *un operador de fusión básico y supongamos que la asignación* $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ *que representa a* ∇*, preserva la estructura de los estados epistémicos. Entonces* ∇ *satisface* (FEE-PI) *y* (FEE-PF) *y* (FEE-It) *si, y sólo si, la asignación* $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ *satisface las propiedades* (PI)*,* (PF) *y* 6*, con respecto a* B*, y esta tal que para cuales quiera perfil de creencias* Φ *y estado epistémico* E

$$\nabla(\Phi, E) = lex(E, \preceq_\Phi). \tag{Rep}$$

Demostración: Por las proposiciones 3.12 y 4.7 sabemos que los postulados (FEE-PI), (FEE-PF) y (FEE-It) son equivalentes, de manera respectiva, a las propiedades (PI), (PF) y 6. Ahora bien, como la asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ satisface la propiedad 6, entonces $\preceq_{\nabla(\Phi,E)} = lex(\preceq_E, \preceq_\Phi)$, y puesto que la asignación preserva la estructura de los estados epistémicos se tiene que $\nabla(\Phi, E) = \preceq_{\nabla(\Phi,E)}$ y que $E = \preceq_E$. Así, $\nabla(\Phi, E) = lex(E, \preceq_\Phi)$. ∎

Como corolario de los resultados obtenidos anteriormente tenemos el siguiente teorema de representación:

Teorema 4.1 (Teorema de representación) *Sea ∇ un operador fusión básico EE, y supongamos que la asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$, que representa al operador ∇, preserva la estructura de los estados epistémicos. Entonces ∇ satisface* (FEE7)*,* (FEE8) *y* (FEE-It)*, si, y sólo si, la asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$, asociada a ∇, satisface las propiedades* 4*,* 5 *y* 6*, satisfaciendo* (Rep)*. Más aun, si la función de creencias B satisface la condición de minimalidad con respecto a $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$, entonces ∇ es un operador de fusión iterable EE.*

Demostración: Sabemos, por las proposiciones 3.9, 3.10, 3.12, que ∇ satisface los postulados (FEE7), (FEE8) y (FEE-It), si, y sólo si, la asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$, asociada a ∇, satisface las propiedades 4, 5, 6, respectivamente. Por otro lado, como la asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ satisface las propiedades 4 y 5, y además preserva la estructura de los estados epistémicos se tiene, de la proposición 4.1, que $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ satisface las propiedades (PI) y (PF) y en virtud de la proposición 4.7 se tiene ∇ satisface los postulados (FEE-PI) y (FEE-PF), así en virtud del corolario 4.9 se tiene que ∇ satisface (Rep).

Veamos así que ∇ es un operador fusión iterable. Por ser ∇ un operador básico, éste satisface los postulados (FEE1) y (FEE2), además por hipótesis sabemos que también satisface los postulados (FEE7), (FEE8) y (FEE-It). Ahora bien, como se tiene (PI) y (PU), se deduce de la proposición 4.2 que dicha asignación satisface las propiedades 1, 2 y 3, ya que la función de creencias B satisface la condición de minimalidad con respecto a $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$. De esto último, y en virtud de las proposiciones 3.7 y 3.8 se tiene que ∇ satisface (FEE5) y (FEE6), mostrando la satisfacción de los resultados faltantes por parte de ∇. ∎

4.1. Algunos operadores de fusión EE

En esta sección definiremos varios tipos de operadores de fusión EE, donde los estados epistémicos a fusionar son preórdenes totales. Todos estos operadores están basados en funciones de agregación, y para poder definirlos supondremos de aquí en adelante que para cada estado epistémico E, $[B(E)] = min(E)$.

Una función de agregación f induce, en conjunto con un perfil de creencias Φ, una relación sobre $\mathcal{W}$ de la siguiente manera:

Si $\Phi = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$

$$w \preceq^f_\Phi w' \textit{ si, y sólo si, } f(r_1(w), r_2(w), \ldots, r_n(w)) \leq f(r_1(w'), r_2(w), \ldots, r_n(w')), \quad (4.3)$$

donde $r_i(w)$ *denota el rango de* w *en el preorden* E_i*.*

Es fácil verificar, en virtud de la linealidad de $\leq$, que para cada perfil de creencias Φ, la relación $\preceq^f_\Phi$ es en realidad un preorden total sobre $\mathcal{W}$. Consideremos así, para cada función de agregación f, la asignación $\Phi \mapsto \preceq^f_\Phi$.

Proposición 4.10 *Sea* f *una función de agregación. Si* f *satisface la propiedad de monotonía estricta, al menos para los singletones*[2]*, entonces la asignación* $\Phi \mapsto \preceq^f_\Phi$ *preserva la estructura de los estados epistémicos.*

Demostración: Sea $E := \preceq$ un estado epistémico cualquiera, y consideremos w, w' interpretaciones cualesquiera. Si $w \simeq w'$, entonces $r_E(w) = r_E(w')$. De esta manera $f(r_E(w)) = f(r_E(w'))$, deduciéndose de aquí que $w \simeq^f_E w'$. Ahora bien, supongamos que $w \prec w'$, así $r_E(w) < r_E(w')$, implicando que $f(r_E(w)) < f(r_E(w'))$. De esto último se deduce que $w \prec^f_E w'$.

Ahora bien, supongamos que $w \preceq^f_E w'$. Si $w \simeq^f_E w'$, entonces $f(r_E(w)) = f(r_E(w'))$ y por lo tanto $r_E(w) = r_E(w')$, deduciéndose de esto último que $w \simeq w$. Por otro lado, si $w \prec^f_E w'$, entonces $f(r_E(w)) < f(r_E(w'))$, deduciéndose de esto último, y por la propiedad de monotonía estricta, que $r_E(w) < r_E(w')$. Así $w \prec w'$, lo que demuestra que $E = \preceq^f_E$. ∎

Proposición 4.11 *Sea* f *una función de agregación que satisface la monotonía estricta. Si* f *es Pareto fuerte, entonces la asignación* $\Phi \mapsto \preceq^f_\Phi$ *es una asignación fiel. Más aun, el operador* ∇^f *definido por*

$$\nabla^f(\Phi, \preceq) = lex(\preceq, \preceq^f_\Phi)$$

es un operador fusion iterable EE.

Demostración: Notemos que por la proposición 4.10, la asignación $\Phi \mapsto \preceq^f_\Phi$ preserva la estructura de los estados epistémicos. Además, directamente de la propiedad de Pareto fuerte se deducen las propiedades propiedades 4 y 5. De esta manera, en virtud de la proposición 4.1, se tiene que $\Phi \mapsto \preceq^f_\Phi$ satisface las propiedades (PI) y (PF).

Así, en virtud del teorema 4.1, el operador ∇^f definido por $\nabla^f(\Phi, E) = lex(E, \preceq^f_\Phi)$ es un operador fusion iterable EE, ya que la función de creencias satisface la condición

[2] Es decir, para cada par x, y, $f(x) < f(y)$, siempre que $x < y$.

de minimalidad con respecto a la asignación $\Phi \mapsto \preceq_{\Phi}^{f}$. ∎

El siguiente resultado es consecuencia inmediata de la propiedad de monotonía y Pareto débil.

Proposición 4.12 *Sea f una función de agregación. Si f es Pareto débil, y además satisface que, para cada par x, y, con $x < y$, $f(x) < f(y)$, entonces la asignación $\Phi \mapsto \preceq_{\Phi}^{f}$ satisface las propiedades,* (PI), (PU), 4 *y* 5' *de asignación fiel, la cual preserva la estructura de los estados epistémicos.*

Ya que Σ, y $GMax$ son funciones de agregación estrictas satisfaciendo Pareto fuerte, podemos definir a través de estas los operadores de fusión Σ y $GMax$.

Definición 4.1 (Operador de fusión Σ) *Definimos el operador de fusión EE suma por:*

$$\nabla^{\Sigma}(\Phi, \preceq) = lex(\preceq, \preceq_{\Phi}^{\Sigma}),$$

donde, para cada Φ, el preorden $\preceq_{\Phi}^{\Sigma}$ esta definido como sigue:

Si $\Phi = \{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$, entonces

$$w \preceq_{\Phi}^{\Sigma} w' \textit{ si, y sólo si, } \sum_{i=1}^{n} r_i(w) \leq \sum_{i=1}^{n} r_i(w')$$

Definición 4.2 (Operador de fusión $GMax$) *Definimos el operador de fusión EE máximo generalizado por:*

$$\nabla^{GMax}(\Phi, \preceq) = lex(\preceq, \preceq_{\Phi}^{GMax}),$$

donde, para cada Φ, el preorden $\preceq_{\Phi}^{GMax}$ esta definido de la siguiente manera:

Si $\Phi = \{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ entonces

$$w \preceq_{\Phi}^{GMax} w' \textit{ si, y sólo si } GMax\big(r_1(w), \cdots, r_n(w)\big) \leq^{l_n} GMax\big(r_1(w'), \cdots, r_n(w')\big)$$

Estudiemos ahora las propiedades de la asignación máximo.

Definición 4.3 (Asignación Max) *Definimos la asignación máximo, $\Phi \mapsto \preceq_{\Phi}^{Max}$, por: Si $\Phi = \{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ entonces*

$$w \preceq_{\Phi}^{Max} w' \textit{ si, y sólo si } Max\big(r_1(w), \cdots, r_n(w)\big) \leq Max\big(r_1(w'), \cdots, r_n(w')\big)$$

Proposición 4.13 *La asignación máximo, satisface las propiedades* (PI), (PU), 4 *y* 5'*; pero no satisface las propiedades* (PF) *ni* 5.

Demostración: Notemos que $Max(x) < Max(y)$, siempre que $x < y$. Además, por ser Max una función de agregación Pareto débil, se tiene de la proposición 4.12 que la asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi^{Max}$ satisface las propiedades (PI), (PU), 4 y 5'.

Para mostrar que esta asignación no satisface la propiedad (PF), consideremos $\mathcal{L}$ el lenguaje proposicional formado por las variables atómicas p_1 y p_2. Notemos que el conjunto de interpretaciones está determinado por $\mathcal{W} = \{00, 01, 10, 11\}$. Consideremos también el perfil de creencias Φ formado por los siguientes estados epistémicos:

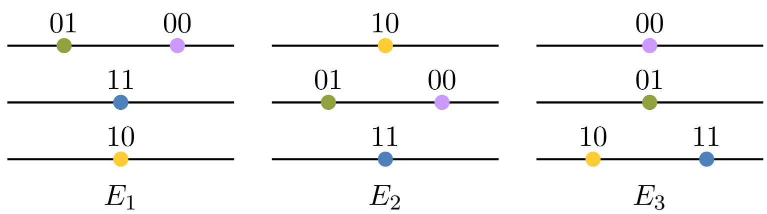


Fig. 4.1: Estados epistémicos individuales

Denotemos a las interpretaciones 01 y 00 por w y w', respectivamente. Notemos que, para cada agente, w es al menos tan preferido como w'; siendo el agente 3 quien prefiere estrictamente a w sobre w'.

Int	r_1	r_2	r_3	Max
00	2	1	2	2
01	2	1	1	2
10	0	2	0	2
11	1	0	0	1

Tabla 4.1: Calculo de los rangos

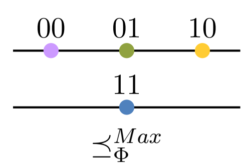


Fig. 4.2: Estado epistémico global

Sin embargo, en la tabla 4.1 se puede observar que $Max\{r_i(w)\} = Max\{r_i(w')\}$, obteniéndose que $w \simeq_\Phi^{Max} w'$.

Por otro lado, notemos que la asignación máximo preserva la estructura de los estados epistémicos, pues satisface las propiedades (PI) y (PU). De esta manera, como ésta no satisface la propiedad (PF), en virtud de la proposición 4.1, $\Phi \mapsto \preceq_\Phi^{Max}$ no satisface la propiedad 5, pues esta satisface 4. ∎

A pesar de que la asignación Max no satisface la propiedad (PF), esta define una asignación cuasifiel como veremos a continuación.

Proposición 4.14 *La asignación* $\Phi \mapsto \preceq_{\Phi}^{Max}$ *satisface la propiedad* 3 *de las asignación. Más aún,* $\Phi \mapsto \preceq_{\Phi}^{Max}$ *define una asignación cuasifiel que preserva la estructura de los estados epistémicos; siendo el operador* $\nabla^{Max}(\Phi, E) = lex(E, \preceq_{\Phi}^{Max})$ *un operador de cuasifusión iterable EE, el cual no satisface* (FEE8).

Demostración: Sean $\Phi = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ un perfil de creencias y w, w' interpretaciones arbitrarias, y supongamos que $w \models B(E_i)$, para cada $i \leq n$. De esta forma, $r_i(w) = 0$, para todo $i \leq n$. Por lo tanto, para cualquier w' que satisfaga esta propiedad se tiene que $w \simeq_{\Phi}^{Max} w'$. Así, $\Phi \mapsto \preceq_{\Phi}^{Max}$ satisface la propiedad 2.

Ahora bien, Si existe $j \leq n$, tal que $w' \not\models B(\preceq_i)$ entonces $r_j(w') > 0$, lo que nos conduce a que $Max\{r_i(w)\} < Max\{r_i(w')\}$; y de esta forma se tiene que $w \prec_{\Phi}^{Max} w'$, satisfaciéndose así la propiedad 3.

Además, como $\Phi \mapsto \preceq_{\Phi}^{Max}$ satisface las propiedades (PI), (PU), 4 y 5', como vimos en el resultado anterior, ésta satisface las la preservación de estados epistémicos, así tenemos la propiedad 1. Luego tenemos, resumiendo que la asignación máximo satisface las propiedades 1-4 y 5', es decir, es cuasi-fiel. De esta forma, operador definido por $\nabla^{Max}(\Phi, E) = lex(E, \preceq_{\Phi}^{Max})$ es una operador iterable de cuasifunción EE, y puesto que $\Phi \mapsto \preceq_{\Phi}^{Max}$ no satisface la propiedad 5 se tiene que ∇^{Max} no satisface la propiedad (FEE8). ∎

Definiremos ahora la asignación *mínimo*, $\Phi \mapsto \preceq_{\Phi}^{min}$.

Definición 4.4 (Asignación min**)** *Definimos la asignación máximo,* $\Phi \mapsto \preceq_{\Phi}^{min}$*, por: Si* $\Phi = \{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ *entonces*

$$w \preceq_{\Phi}^{min} w' \text{ si, y sólo si, } min\big(r_1(w), \cdots, r_n(w)\big) \leq min\big(r_1(w'), \cdots, r_n(w')\big)$$

A diferencia de la función de agregación Max, la función de agregación min no permite construir un operador de fusión, a pesar de que ésta posee propiedades similares a la función Max. Esto es visto a través de los siguientes resultados.

Proposición 4.15 *La asignación mínimo,* $\Phi \mapsto \preceq_{\Phi}^{min}$*, satisface las propiedades* (PI), (PU), 4 *y* 5'*; pero no satisface las propiedades* 3 *ni* 5*. Más aún, el operador de combinación EE* ∇^{min} *definida por* $\nabla(\Phi, E) = lex(E, \preceq_{\Phi}^{min})$ *satisface los postulados* (FEE1)-(FEE5), (FEE7) *y* (FEE8W) *pero no satisface los postulados* (FEE6) *ni* (FEE8).

Demostración:

Notemos que si $x < y$, entonces $min(x) < min(y)$, y puesto que la función de agregación min es Pareto débil, la asignación definida a través min satisface los postulados (PI), (PU), 4 y 5', al igual que la asignación Max; esto en virtud de la proposición 4.12.

Para mostrar que la asignación mínimo no satisface la propiedad 3 consideraremos el lenguaje proposicional finito $\mathcal{L}$, formado por las variables proposicionales p_1 y p_2, de esta forma el conjunto de interpretaciones está determinado por $\mathcal{W} = \{00, 01, 10, 11\}$. Sea Φ el perfil de creencias determinado por los siguientes perfiles definidos gráficamente como sigue:

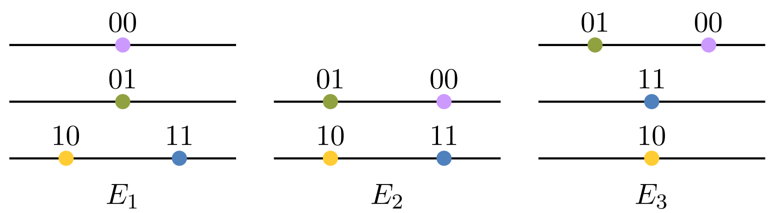


Fig. 4.3: Estados epistémicos individuales

Si consideramos las interpretaciones 10 y 11, denotándolas por w y w', respectivamente, podemos notar que $w \models B(E_i)$, para cada $i = 1, 2, 3$, y $w' \not\models B(E_3)$.

Int	r_1	r_2	r_3	min
00	2	1	2	1
01	1	1	2	1
10	0	0	0	0
11	0	0	1	0

Tabla 4.2: Calculo de los rangos

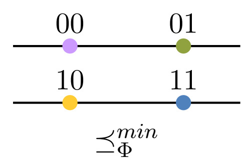


Fig. 4.4: Estado epistémico global

Sin embargo, en la tabla 4.2 se puede observar que $min\{r_i(w)\} = min\{r_i(w')\}$, obteniéndose que $w \simeq_{\Phi}^{min} w'$, lo que demuestra que la asignación mínimo no satisface 3.

Por oro lado, como $\Phi \mapsto \preceq_{\Phi}^{min}$ satisface los postulados (PI) y (PU), en virtud de la proposición 4.3, ésta preserva la estructura de los estados epistémicos, y puesto que $B(E) = min(E)$ se tiene que la función de creencias B satisface con la condición de minimalidad con respecto a $\Phi \mapsto \preceq_{\Phi}^{min}$.

Como consecuencia de esto último, y en virtud de la proposición 4.2 y de la observación 4.1, dicha asignación no satisface el postulado (PF), ya que la asignación mínimo no satisface la propiedad 3. Además, como satisface la propiedad 4, en virtud de la proposición 3.5, se tiene que esta asignación no satisface 5. ∎

Este operador posee un comportamiento demasiado optimista para todos los miembros del grupo que participa en un proceso de fusión, ya que este considera como creencias arraigadas grupal a las interpretaciones más plausibles de cada uno de los individuos, siempre que estos satisfagan las creencias arraigadas de la restricción. Esto puede ser visto a través del siguiente resultado:

Proposición 4.16 *Sean Φ un perfil de creencias y E un estado epistémico, y supongamos que, la función de creencias B satisface la condición de minimalidad con respecto a $\Phi \mapsto \preceq_{\Phi}^{min}$. Entonces, si existe $E' \in \Phi$ tal que $w \models B(E) \wedge B(E')$, entonces $w \models B\big(\nabla^{min}(\Phi, E)\big)$.*

Demostración:

Supongamos que $w \models B(E) \wedge B(E')$, para algún $E' \in \Phi$, y notemos que $r_E(w) = r_{E'}(w) = 0$; esto por las propiedades de B. Así, $min\{r_{E'}(w)\}_{E' \in \Phi} = 0$, y si $w' \models B(E)$, $w \preceq_{\Phi}^{min} w'$. Por lo tanto, $w \in min([B(E)], \preceq_{\Phi}^{min})$, siguiéndose el resultado de (B-Rep). ∎

Retomemos ahora el ejemplo 3.1 visto en la sección 3.1, para realizarle un análisis más profundo haciendo uso de los operadores ya definidos.

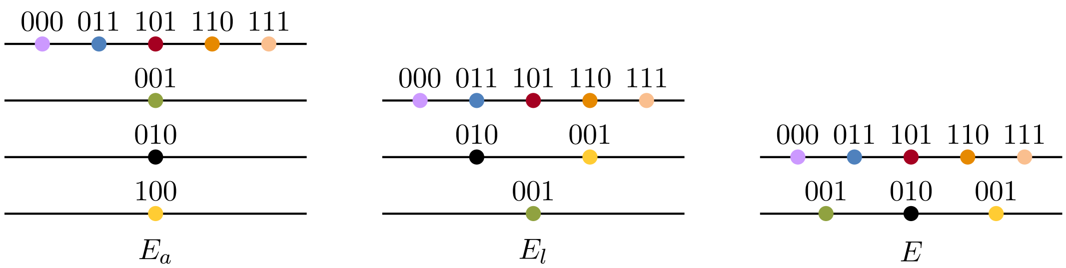
Ejemplo 4.1 Ana y Luis deben realizar un viaje a El Vigía desde la ciudad de Mérida, y ambos conocen las siguientes rutas para ir a este lugar: la autopista, La Palmita y La Azulita. Ana cree firmemente que los paisajes por la vía de La Azulita son más deleitantes que los de la vía de La Palmita, y a su vez, estos lo son más que los de la autopista. Por otro lado, Luis cree que la ruta más rápida para llegar a El Vigía es por la autopista, y también cree que las dos rutas restantes son iguales de lentas. Puesto que las rutas son ajenas entre sí, ellos también creen firmemente que, de viajar a El Vigia, sólo pueden tomar una de las rutas.

Al momento de partir, y puesto que desea llegar rápido a su destino, Luis prefiere irse por la autopista y como segunda opción les son indiferentes las rutas restantes. Ana, por otro lado, desea un viaje más grato y por ese motivo prefiere la ruta de La Azulita como primera opción, como segunda La Palmita y, por última preferencia, la ruta de la autopista.

Definiremos a continuación las variables proposicionales a, p, t, las cuales consideraremos en este orden para construir el conjunto de interpretaciones:

- a: viajar por La Azulita,
- p: viajar por la Palmita,
- t: viajar por la Autopista.

Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje proposicional construido a través de éstas variables proposicionales. Puesto que Ana prefiere La Azulita como primera opción, como segunda La Palmita y, por última preferencia de la autopista, y además conoce que sólo puede tomar una via, se tiene que el estado epistémico E_a, el cual establece el orden de sus preferencias, contiene en su primer nivel a 100, en su segundo nivel a 010, en el tercero a 001, mientras que en cuarto nivel se distribuyen los modelos restantes. Por otro lado, Luis prefiere irse por La Autopista, tomando como segunda opción cualquiera de las rutas restantes, y sabiendo que sólo puede tomar sólo una de las rutas, el estado epistémico que establece sus preferencias, E_l, contiene en su primer nivel a 001, en su segundo nivel a 010 y 100, mientras que en el tercer nivel los modelos restantes. Además, como sólo pueden tomar una ruta la restricción E tiene en su primer nivel a los modelos 100, 010 y 001, y en el nivel siguiente los restantes.



El perfil de creencias esta determinado por los estados epistémicos de Ana y Luis, así $\Phi = \{E_a, E_l\}$. Por otro lado, la restricción esta determinada por el estado epistémico E.

Los cálculos obtenidos en la tabla 4.3 muestran como están definidos los preórdenes $\preceq_\Phi^\Sigma$, $\preceq_\Phi^{GMax}$, $\preceq_\Phi^{Max}$ y $\preceq_\Phi^{min}$, los cuales están dados gráficamente en la figura 4.5.

Int	E_a	E_l	Σ	$GMax$	Max	min
000	3	2	5	$(3,2)$	3	2
001	2	0	2	$(2,0)$	2	**0**
010	1	1	2	$(1,1)$	**1**	1
011	3	2	5	$(3,2)$	3	2
100	0	1	**1**	$(\mathbf{1},\mathbf{0})$	**1**	**0**
101	3	2	5	$(3,2)$	3	2
110	3	2	5	$(3,2)$	3	2
111	3	2	5	$(3,2)$	3	2

Tabla 4.3: Cálculo de los rangos

Notemos que el operador ∇^Σ, al igual que el operador $GMax$ arroja por creencia arraigada grupal a la fórmula determinada por la interpretación 100 como arraigada grupal, es decir la que decisión más favorece a ambos, al considerar estos operadores es la de viajar por La Azulita. Sin embargo, para el operador suma le son indiferentes las interpretaciones 001 y 010, a diferencia del operador $GMax$ quien prefiere estrictamente más a la interpretación 010 que a 001. Más aún, se puede observar que estos operadores poseen características distintas, ya que los resultados obtenidos en cada uno de los operador difieren; esto puede ser visto a través de la representación gráfica de los preórdenes obtenidos dados en 4.5.

Ahora bien, como se observó en el análisis del ejemplo 3.1, la disyunción de las creencias arraigadas de Ana y Luis satisfacen las creencias arraigadas de las restricción. Además, podemos observar, en el caso de los operadores ∇^{Σ}, ∇^{GMax} y ∇^{Max}, que las creencias arraigadas de la fusión con cada uno de estos operadores son consistente con $B(E_a)$, pero no lo son con $B(E_l)$. Por otro lado, el resultado obtenido con el operador ∇^{min} es consistente con las creencias arraigadas de Ana y Luis, ejemplificando la característica de optimista que posee este operador.

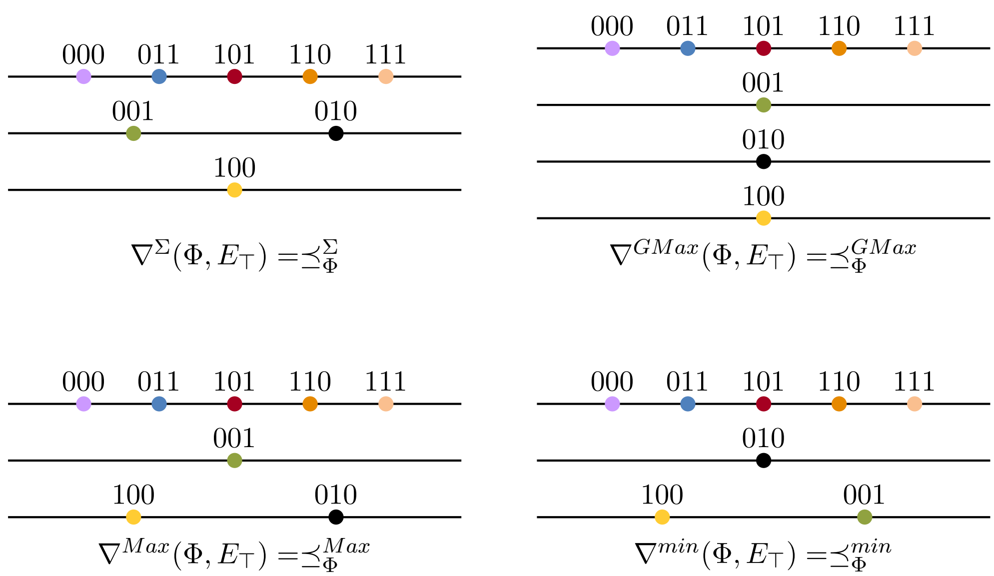


Fig. 4.5: Resultados de la Fusión

CAPÍTULO 5

INDEPENDENCIA DE LOS POSTULADOS

En esta sección mostraremos la independencia que existe entre los postulados (FEE5)-(FEE8) [(FEE8W)] y (FEE-It). Notemos que, si $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ es una asignación podemos definir, para cada perfil de creencias Φ y estado epistémico E, un preorden total estricto, de dos niveles, $\prec^{\Phi,E}$ sobre $\mathcal{W}$, como sigue

$$w \prec^{\Phi,E} w' \text{ si, y sólo si,} w \in min([B(E)], \preceq_\Phi) \text{ y } w' \notin min([B(E)], \preceq_\Phi).$$

Esto nos permite construir un operador de combinación EE a través del preorden total asociado a $\prec^{\Phi,E}$, como sigue:

$$\nabla(\Phi, E) = \preceq^{\Phi,E}, \tag{5.1}$$

Notemos que $min(\preceq^{\Phi,E}) = min([B(E)], \preceq_\Phi)$. Por otro lado, si para cada estado epistémico E, $[B(E)] = min(E)$, se obtiene que $[B(\nabla(\Phi, E))] = min([B(E)], \preceq_\Phi)$. Así, continuaremos haciendo uso de la función de creencias $[B(E)] = min(E)$.

Notemos que la proposición 3.6 nos permite asegurar que el operador ∇ satisface los postulados básicos de fusión. De esta manera, en virtud de los resultados obtenidos en la sección 3.3, basta estudiar la independencia de los propiedades de asignación fiel, y como consecuencia, se obtiene la independencia entre los postulados de fusión de estado epistémicos distintos de los postulados básicos.

Mostremos primero la independencia del axioma (FEE5) de los postulados restantes.

Proposición 5.1 *Existe un operador de combinación EE que no satisface* (FEE5)*, aún en presencia de los postulados básicos y los postulados* (FEE6)-(FEE8).

Demostración: Para cada estado epistémico E, definamos el preorden total sobre los mundos, $\preceq_E$, a través de la siguiente relación modular

$$w \prec_E w' \textit{si, y sólo si, } w \in min(E) \text{ y } w' \notin min(E),$$

extendiendo esta noción a los perfiles de creencias por medio de la función de agregación suma:

Si $\Phi = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$, entonces

$$w \preceq_\Phi w' \textit{si, y sólo si, } \sum_{i=1}^{n} r'_i(w) \leq \sum_{i=1}^{n} r'_i(w'),$$

donde, para cada $i \leq n$, $r'_i = r_{\preceq_{E_i}}$.

Veamos que la asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ satisface los postulados 2-5, pero no 1.

Sea $\Phi = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ y supongamos que w satisface la conjunción de los $B(E_i)$. Así, para cada $i \leq n$, $w \in min(E_i)$. Si w' es una interpretación satisfaciendo también la conjunción de los $B(E_i)$ entonces, para cada $i \leq n$, $w \simeq_{E_i} w'$, y como consecuencia de esto, para cada $i \leq n$, $r'_i(w) = r'_i(w')$, obteniéndose de las propiedades de la suma que $w \simeq_\Phi w'$, mostrando la satisfacción de la propiedad 2. Por otro lado, si para algún $j \leq n$ se tiene que $w' \not\models B(E_j)$, entonces $w' \notin min(E_j)$. Así, para cada $i \leq n$, $w \preceq_{E_i} w'$ y $w \prec_{E_j} w'$, lo que nos conduce a que $\sum r'_i(w) < \sum r'_i(w')$, mostrando que $w \prec_\Phi w'$ y por ende la satisfacción de 3.

La satisfacción de las propiedades 4 y 5 por parte de esta asignación se obtiene de manera directa de la propiedades de Pareto fuerte de la función de agregación suma.

Para mostrar que la asignación aquí definida no satisface 1, consideremos $\mathcal{L}$ el lenguaje proposicional definido a través de las variables proposicionales p_1 y p_2, y consideremos los estados epistémicos E_1 y E_2, definidos gráficamente a continuación.

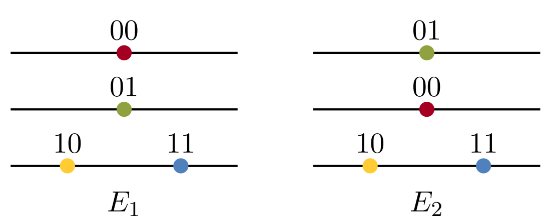


Fig. 5.1: Estados epistémicos

A partir de la definición, es fácil notar que, para cada estado epistémico E, $min(\preceq_E) = min(E)$ y que todos los modelos que no están en $min(E)$ se encuentran en un mismo nivel. De esta manera, como $min(E_1) = min(E_2)$ tenemos que los restantes modelos se encuentran en mismo nivel tanto en $\preceq_{E_1}$ como en $\preceq_{E_2}$, como se muestra en siguiente figura.

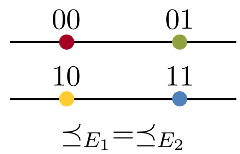


Fig. 5.2: Preorden resultante

Esto muestra que, en general la propiedad 1 no se satisface. Consideremos entonces la aplicación ∇ definida como en (5.1) y notemos que esta satisface los postulados básicos, (FEE6)-(FEE8) y (FEE8W), pero no satisface el postulado (FEE5). ∎

En virtud de la proposiciones 3.5 y 3.6, en presencia de los postulados básicos, (FEE7) y (FEE8) satisfacen al postulado (FEE6), siempre que un B satisfaga la condición de minimalidad con respecto a una asignación. Esto muestra que existen relaciones entre estos postulados. Sin embargo, el siguiente resultado muestra la existencia de un operador de combinación que satisface todos los postulados, a excepción de (FEE6). Esto se debe a que la asignación ahí definida no satisface la condición de minimalidad, lo que nos conduce a la necesidad de esta condición para mostrar la dependencia de estos postulados.

Proposición 5.2 *Existen operadores de combinación EE que no satisface* (FEE6)*, aún en presencia del los postulados básicos y de los postulados* (FEE5), (FEE7) *y* (FEE8)*.*

Demostración: Para cada perfil de creencias Φ definimos la relación $\preceq_{\Phi}^{\Sigma^{-1}}$ sobre $\mathcal{W}$ como sigue,

$$w \preceq_{\Phi}^{\Sigma^{-1}} w' \textit{si, y sólo si, } w' \preceq_{\Phi}^{\Sigma} w.$$

Directamente de la definición de $\preceq_{\Phi}^{\Sigma^{-1}}$ podemos constatar que esta define un preorden total sobre $\mathcal{W}$. Consideremos así la asignación $\Phi \mapsto \preceq_{\Phi}^{\Sigma^{-1}}$, y mostremos que esta satisface las propiedades 1, 2, 4 y 5, mas no satisface el postulado 3.

Para mostrar que esta asignación satisface 1, recordemos que, si E es un estados epistémicos entonces $E = \preceq_{E}^{\Sigma}$. De esta manera, si E_1 y E_2 son estados epistémicos distintos, existen w y w' interpretaciones satisfaciendo que $w \preceq_{E_1}^{\Sigma} w'$ y $w' \prec_{E_2}^{\Sigma} w$. Así, $w' \preceq_{E_1}^{\Sigma^{-1}} w$ y $w \prec_{E_2}^{\Sigma^{-1}} w'$, mostrando que $\preceq_{E_1}^{\Sigma^{-1}} \neq \preceq_{E_2}^{\Sigma^{-1}}$.

Consideremos ahora $\Phi = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ un perfil de creencias y supongamos que w, w' son modelos de la conjunción de los $B(E_i)$. Como la asignación sigma satisface

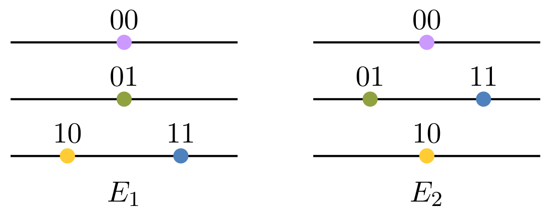


Fig. 5.3: Perfil de creencias

(PI), $w \simeq_{\Phi}^{\Sigma} w'$ ya que, para cada $i \leq n$, $w \simeq_i w'$. Así, $w \simeq_{\Phi}^{\Sigma^{-1}} w'$, satisfaciéndose la propiedad 2.

Consideremos ahora Φ_1 y Φ_2 perfiles de creencias y sean w y w' interpretaciones tales que $w \preceq_{\Phi_1}^{\Sigma^{-1}} w'$ y $w \preceq_{\Phi_2}^{\Sigma^{-1}} w'$. De esta manera $w' \preceq_{\Phi_1}^{\Sigma} w$ y $w' \preceq_{\Phi_2}^{\Sigma} w$, y así $w' \preceq_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2}^{\Sigma} w$, ya que la asignación suma satisface 4. Luego, $w \preceq_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2}^{\Sigma^{-1}} w'$, deduciéndose que $\Phi \mapsto \preceq_{\Phi}^{\Sigma^{-1}}$ satisface 4. De forma análoga se demuestra que $\Phi \mapsto \preceq_{\Phi}^{\Sigma^{-1}}$ satisface 5.

Para mostrar que, en general, $\Phi \mapsto \preceq_{\Phi}^{\Sigma^{-1}}$ no satisface 3, consideremos $\mathcal{L}$ el lenguaje proposicional formado por las variables atómicas p_1 y p_2, y sean E_1 y E_2 los estados epistémicos definidos a continuación:

Consideremos así $w_1 := 10$ y $w_2 := 11$, y notemos que w_1 satisface $B(E_1) \wedge B(E_2)$, mientras que w_2 no satisface a $B(E_2)$. De esta manera, si $\Phi = \{E_1, E_2\}$, tenemos que $w_1 \prec_{\Phi}^{\Sigma} w_2$, obteniéndose que $w_2 \prec_{\Phi}^{\Sigma^{-1}} w_1$, mostrando que no se satisface la propiedad 3.

Al definir el operador $\nabla^{\Sigma^{-1}}$ a través de (5.1), tenemos que este operador de cambio satisface los postulados básicos, en conjunto con los postulados (FEE5), (FEE7) y (FEE8), pero no satisface (FEE6). ∎

En los siguiente resultado mostraremos la independencia de los postulados (FEE7), (FEE8) y (FEE8W).

Proposición 5.3 *Existen operadores de combinación EE que no satisface* (FEE7)*, aún en presencia del los postulados básicos y los postulados* (FEE5),(FEE6) *y* (FEE8)*.*

Demostración: Para cada perfil de creencias Φ, consideremos la relación $\preceq_{\Phi}$ sobre $\mathcal{W}$, definido por

$$\preceq_{\Phi} = \begin{cases} \preceq_{\Phi}^{\Sigma} & si \ \bigwedge_{i=1}^{n} B(E_i) \ es \ consistente \\ lex(\preceq_{\Phi}^{\Sigma}, \leq^{l_n}) & en \ otro \ caso \end{cases},$$

donde n es el número de variables proposicionales.

Es fácil verificar que $\preceq_{\Phi}$ define un preorden total sobre $\mathcal{W}$. Por otro lado, notemos que esta asignación preserva la estructura de los estados epistémicos, satisfaciéndose la propiedad 1, ya que los estados epistémicos son consistentes. Por otro lado, si $\Phi = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ y la conjunción de los $B(E_i)$ es consistente entonces $\preceq_\Phi = \preceq_\Phi^\Sigma$, satisfaciéndose los postulados 2 y 3.

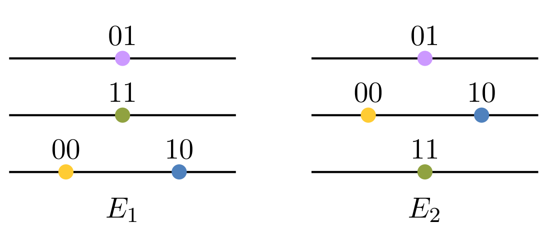
Mostremos entonces que esta asignación satisface la propiedad 5, para ello supongamos Φ_1, Φ_2 perfiles de creencias y w, w' interpretaciones tales que $w \preceq_{\Phi_1} w'$ y $w \prec_{\Phi_2} w'$.

Supongamos primero que la conjunción de las creencias arraigadas en Φ_1 son consistentes, al igual que las creencias de los estados en Φ_2. Así, $\preceq_{\Phi_1} = \preceq_{\Phi_1}^\Sigma$ y $\preceq_{\Phi_2} = \preceq_{\Phi_2}^\Sigma$, obteniéndose que $w \preceq_{\Phi_1}^\Sigma w'$ y $w \prec_{\Phi_2}^\Sigma w'$. De esta manera, $w \prec_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2}^\Sigma w'$. Ahora bien, si la conjunción de las creencias arraigadas de los estados epistémicos en $\Phi_1 \sqcup \Phi_2$ es consistente, entonces $\preceq_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} = \preceq_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2}^\Sigma$, y en caso contrario $\preceq_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} = lex(\preceq_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2}^\Sigma, \leq^{l_n})$, obteniéndose en cualquiera de los dos casos que $w \prec_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} w'$.

Supongamos ahora que la conjunción las creencias arraigadas de los estados epistémicos en Φ_1 o los de Φ_2 son inconsistentes. En este caso, la conjunción de las creencias arraigadas de los estados epistémicos en $\Phi_1 \sqcup \Phi_2$ es inconsistente, obteniéndose que $\preceq_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} = lex(\preceq_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2}^\Sigma, \leq^{l_n})$. Notemos que, en cualquier caso $w \preceq_{\Phi_1}^\Sigma w'$ y $w \preceq_{\Phi_2}^\Sigma w'$, implicando que $w \preceq_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2}^\Sigma w'$.

Si $w \prec_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2}^\Sigma w'$ se tiene de manera inmediata que $w \prec_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} w'$. Por otro lado, si $w \simeq_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2}^\Sigma w'$ entonces $w \simeq_{\Phi_2}^\Sigma w'$, pues si $w \prec_{\Phi_2}^\Sigma w'$ se tiene que $w \prec_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2}^\Sigma w'$, esto se debe a que la asignación suma satisface 5 y del hecho que $w \preceq_{\Phi_1}^\Sigma w'$, lo que es una contradicción. Así, la conjunción de las creencias arraigadas de los estados en Φ_2 es inconsistente, pues de lo contrario $\preceq_{\Phi_2} = \preceq_{\Phi_2}^\Sigma$, lo que nos conduce a $w \simeq_{\Phi_2} w'$, contradiciendo que $w \prec_{\Phi_2} w'$. Así, $\preceq_{\Phi_2} = lex(\preceq_{\Phi_2}^\Sigma, \leq^{l_n})$, y por lo tanto $w <^{l_n} w'$. De esto último se deduce que $w \prec_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} w'$.

Para mostrar que la asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ no satisface el postulado 4, consideremos $\mathcal{L}$ el lenguaje proposicional construido a partir de las variables proposicionales p_1 y p_2, y consideremos $\Phi_1 = \{E_1\}$ y $\Phi_2 = \{E_2\}$, donde E_1 y E_2 son los estado epistémico definidos como sigue:



Notemos que $B(E_1)$ es inconsistente con $B(E_2)$. Por otro lado, sabemos que $\preceq_{\Phi_1} = \preceq_{\Phi_1}^\Sigma$ y $\preceq_{\Phi_2} = \preceq_{\Phi_2}^\Sigma$. Ahora bien, si $w_1 := 00$ y $w_2 := 10$ tenemos que $w_1 \simeq_{\Phi_1}^\Sigma w_2$ y $w_1 \simeq_{\Phi_2}^\Sigma w_2$, obteniéndose de la propiedad 4 que $w \simeq^{\Sigma}_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} w'$; pero $w_1 <_{lex} w_2$ implicando que $w \prec_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} w'$. Esto demuestra que, en general, la asignación definida no satisface la propiedad 4.

Luego, definiendo el operador ∇ a través de (5.1), además de satisfacer los postulados básicos, satisface los postulados (FEE5), (FEE6), (FEE8) y (FEE8W), pero no satisface (FEE7). ∎

Sabemos que siempre que un operador satisfaga (FEE8), este cumplirá con (FEE8W). Sin embargo, en la proposición 4.14, se mostró la existencia de un operador que satisface los postulados (FEE1)-(FEE7) y (FEE8W) pero que no satisface (FEE8), este es el operador Max. Esto muestra la independencia de (FEE8) de los postulados (FEE1)-(FEE7), además de mostrar que (FEE8W) no es equivalente a este, inclusive en presencia de los postulados básicos. De esta manera, falta garantizar la independencia de (FEE8W) del resto de los postulado (FEE1)-(FEE7).

Proposición 5.4 *Existen operadores de combinación EE que no satisface* (FEE8W), *aún en presencia de los postulados* (FEE1)-(FEE7).

Demostración: Para cada perfil de creencias Φ consideremos la relación $\preceq_\Phi$ sobre $\mathcal{W}$, definida como sigue:

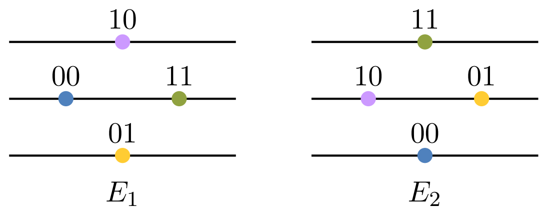
Si $\Phi = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$, *entonces:*

$$\preceq_\Phi = \begin{cases} \preceq^{\Sigma}_{\Phi} & \textit{si } \bigwedge_{i=1}^{n} B(E_i) \textit{ es consistente} \\ \preceq_{E_\top} & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Es fácil verificar que, para cada Φ, $\preceq_\Phi$ define un preorden total sobre $\mathcal{W}$. Consideremos así la asignación $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$. El análisis realizado en la demostración de la proposición 5.3 nos sirve para mostrar la satisfacción de los propiedades 1-3 por parte de esta asignación. Para mostrar que la asignación satisface el postulado 4, consideremos Φ_1 y Φ_2 perfiles de creencias, y supongamos w y w' interpretaciones tales que $w \preceq_{\Phi_1} w'$ y $w \preceq_{\Phi_2} w'$. Si la conjunción de las creencias arraigadas de los estados epistémicos en $\Phi_1 \sqcup \Phi_2$ es inconsistente, entonces $\preceq_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} = \preceq_{E_\top}$ de esta manera $w \simeq_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} w'$. Por otro lado, si la conjunción de las creencias arraigadas de los estados epistémicos en $\Phi_1 \sqcup \Phi_2$ es consistente, también lo es la conjunción de las creencias arraigadas de los estados epistémicos en Φ_1, al igual que para Φ_2. Así, $\preceq_{\Phi_1} = \preceq^{\Sigma}_{\Phi_1}$, $\preceq_{\Phi_2} = \preceq^{\Sigma}_{\Phi_2}$ y $\preceq_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} = \preceq^{\Sigma}_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2}$, obteniéndose que $w \preceq^{\Sigma}_{\Phi_1} w'$ y $w \preceq^{\Sigma}_{\Phi_2} w'$, y de esta forma $w \preceq^{\Sigma}_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} w'$. Por lo tanto, $w \preceq_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} w'$.

A pesar de que la asignación satisface las propiedades 1-4, ella no satisface el postulado 5', y como consecuencia no satisface 5. Esto puede ser visto a través de la siguiente situación:

Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje proposicional construido a través de las proposiciones atómicas p_1, p_2, y consideremos los estados epistémicos E_1 y E_2, gráficamente definidos por



Consideremos las intepretaciones $w_1 := 00$ y $w_2 := 10$ y notemos que $w_1 \prec_{E_1} w_2$ y $w_1 \prec_{E_1} w_2$. Además, como $B(E_1)$ es inconsistente con $B(E_2)$ tenemos que $\preceq_{E_1 \sqcup E_2} = \preceq_{E_\top}$, lo que nos lleva a que $w \simeq_{E_1 \sqcup E_2} w'$.

Ahora bien, consideremos ∇ el operador de fusión EE definido a través de (5.1). Así, ∇ satisface los postulados básicos de la fusión con respecto a B. Además, como la asignación satisface los postulados 1-4 y no 5' con respecto a B, ∇ satisface (FEE5)-(FEE7), con respecto a B, pero no satisface (FEE8W) y por ende no satisface (FEE8). ∎

En la proposición 3.1 vimos como, en presencia de los postulados (FEE1), (FEE2) y (FEE6), el postulado (FEE-It) satisface los postulado (FEE3) y (FEE4), en el siguiente resultado mostraremos que el recíproco no es cierto, además de mostrar la independencia del postulado (FEE-It) del resto de los postulados.

Proposición 5.5 *Existen operadores de fusión EE que no satisfacen* (FEE-It).

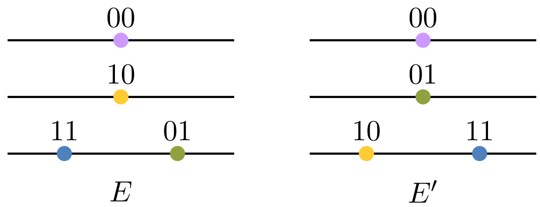
Demostración: Consideremos la asignación fiel suma, y definamos el operador ∇ como en la ecuación (5.1). Así,

$$[B\big(\nabla(\Phi, E)\big)] = min(\preceq^{\Phi,E}) = min\big([B(E)], \preceq_{\Phi}^{\Sigma}\big),$$

obteniéndose, del corolario 3.1, que el operador ∇ es un operador de fusión EE.

Sin embargo, el operador ∇ no satisface el postulado (FEE-It) como veremos a continuación. Notemos que $\nabla(\Phi, E) = \preceq_{\nabla(\Phi,E)}^{\Sigma}$, ya que la asignación suma preserva la estructura de los estados epistémicos. Así, en virtud de la proposición 3.10 basta con mostrar la existencia de un perfil de creencias Φ y un estado epistémico E tales que $\preceq^{\Phi,E} \neq lex(\preceq_E^{\Sigma}, \preceq_{\Phi}^{\Sigma})$.

Consideremos el perfil de creencias Φ determinado por el estados epistémicos E', y el estado epistémico E, que determina la restricción, definidos gráficamente como sigue:



Notemos que, $E' = \preceq_{\Phi}^{\Sigma}$ y que $E = \preceq_{E}^{\Sigma}$. Por otro lado, denotemos por w_1, w_2 w_3 y w_4 a las interpretaciones 00, 01, 10 y 11, respectivamente, y notemos que, de la definición de E, $[B(E)] = \{w_2, w_4\}$, y puesto que $w_4 \prec_{\Phi}^{\Sigma} w_2$ se tiene $min\big([B(E)], \preceq_{\Phi}^{\Sigma}\ \big) = \{w_4\}$. De esta forma, para cada $i \neq 4$, $w_4 \prec^{E,\Phi} w_i$, mientras que para $i, j \neq 4$, $w_i \simeq^{E,\Phi} w_j$. Por otro lado, considerando $\preceq := lex(\preceq_E, \preceq_{\Phi}^{\Sigma})$, notemos que $w_4 \prec w_2 \prec w_3 \prec w_1$, esto en virtud de que $w_2 \prec_E w_3 \prec_E w_1$, $w_4 \prec_E w_3 \prec_E w_1$, $w_2 \simeq_E w_4$ y $w_4 \prec_{\Phi}^{\Sigma} w_2$.

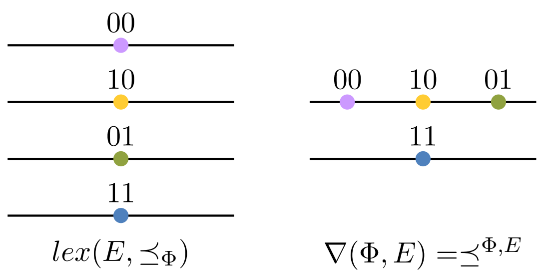


Fig. 5.4: Orden *lex* vs. Resultado de la fusión

Así, $\prec^{E,\Phi} \neq lex(\preceq_E, \preceq_{\Phi})$, deduciéndose de esto último que $\nabla(\Phi, E) \neq lex(\preceq_E, \preceq_{\Phi})$.∎

En la proposición 4.1 observamos que, siempre que la asignación sincrética preserve la estructura de los estados epistémicos, los postulados 4, 5 y 5' implican las propiedades (PI), (PF) y (PU). En los siguientes dos resultados mostraremos que esta condición es necesaria para obtener dicho resultado.

Proposición 5.6 *Existe una asignación satisfaciendo la propiedad* 4 *pero no satisface las propiedades* 2 *ni* (PI).

Demostración: Para cada perfil de creencias Φ definimos la relación $\preceq_{\Phi}$ sobre $\mathcal{W}$ como sigue,

$$\preceq_{\Phi} := lex(\preceq_{\Phi}^{\Sigma}, \leq^{l_n})$$

y notemos que esta define un preorden total sobre $\mathcal{W}$, de hecho $\preceq_{\Phi}$ es un orden lineal. Consideremos así la asignación $\Phi \mapsto \preceq_{\Phi}$, y mostremos que esta satisface el postulado 4 pero no satisface el postulado 2.

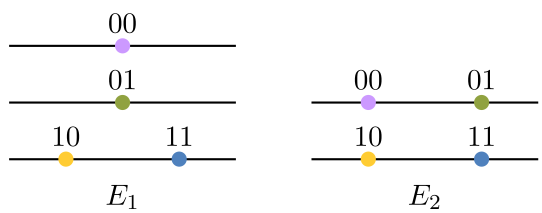
Para mostrar que $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ satisface el postulado 4 consideremos Φ_1 y Φ_2 perfiles de creencias y consideremos w y w' interpretaciones tales que $w \preceq_{\Phi_1} w'$ y $w \preceq_{\Phi_2} w'$.

Notemos que, en cualquier caso, $w \preceq^{\Sigma}_{\Phi_1} w'$. Ahora bien, como $w \preceq_{\Phi_2} w'$ tenemos que $w \prec^{\Sigma}_{\Phi_2} w'$, o bien $w \simeq^{\Sigma}_{\Phi_2} w'$ y $w \leq_{lex} w'$.

Si $w \prec^{\Sigma}_{\Phi_2} w'$ tenemos que $w \prec^{\Sigma}_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} w'$, obteniéndose que $w \preceq_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} w'$.

Por otro lado, si $w \simeq^{\Sigma}_{\Phi_2} w'$ y $w \leq_{lex} w'$, tenemos que $w \preceq^{\Sigma}_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} w'$ y $w \leq_{lex} w'$, teniéndose en cualquier caso que $w \preceq_{\Phi_1 \sqcup \Phi_2} w'$.

Para ver que $\Phi \mapsto \preceq_\Phi$ no satisface 2, consideremos $\mathcal{L}$ el conjunto de fórmulas proposicionales formado a partir de las proposiciones atómicas p_1 y p_2, y sean E_1 y E_2 estados epistémicos definidos, gráficamente, como sigue:



Consideremos Φ el perfil de creencias conformado por E_1 y E_2 y notemos que, si $w_1 := 10$ y $w_2 := 11$, w_1 y w_2 satisfacen $B(E_1) \wedge B(E_2)$. De esta manera $w_1 \simeq^{\Sigma}_{\Phi} w_2$. Sin embargo $w_1 <_{lex} w_2$, obteniéndose que $w \prec_\Phi w'$.

Notemos que , en virtud de la proposición 4.2 y de la observación 4.1, la asignación definida anteriormente no satisface el (PI), pues, para cada estado epistémico E, se tiene que $[B(E)] = min(E)$. ∎

Proposición 5.7 *Existe una asignación satisfaciendo la propiedad* 4 *y* 5 *pero no satisface las propiedades* 3 *ni* (PF)*. Más aun, dicha asignación satisface* 5' *y no satisface* (PU)*.*

Demostración: Para demostrar este resultado basta considerar la asignación $\Phi \mapsto \preceq^{\Sigma^{-1}}_{\Phi}$ definida en la demostración de la proposición 5.2, a saber

$$w \preceq^{\Sigma^{-1}}_{\Phi} w' \textit{si, y sólo si, } w' \preceq^{\Sigma}_{\Phi} w$$

Como se observó en esta demostración, dicha asignación satisface las propiedades 4 y 5, sin embargo esta no cumple con 3. Más aún, ella satisface 5'.

Por otro lado ésta asignación no satisface (PU), y por lo tanto no satisface (PF). Para ver esto retomemos el ejemplo dado en la demostración de la proposición 5.1, y sean $w_1 := 10$ $w_2 := 01$. Denotemos a los estados epistémicos E_1 y E_2 dados allí por $\preceq_1$ y $\preceq_2$, respectivamente.

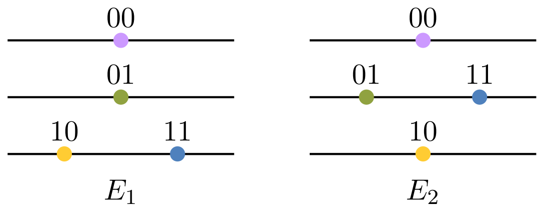


Fig. 5.5: Perfil de creencias

Notemos que $w_1 \prec_1 w_2$, del mismo modo ocurre para $\preceq_2$, indicando que $w_1 \prec_{\Phi}^{\Sigma} w_2$, pues la asignación suma satisface 5'. De esta manera $w_2 \prec_{\Phi}^{\Sigma^{-1}} w_1$, mostrando que, en general, la asignación $\Phi \mapsto \preceq_{\Phi}^{\Sigma^{-1}}$ no satisface la propiedad (PU). ∎

CAPÍTULO 6

OPERADORES REVISIÓN POR ESTADOS EPISTÉMICOS

En este capítulo examinaremos una clase de operadores de revisión que toman en cuenta el proceso de iteración. Este tipo de operadores fue presentado por Benferhat *et al.* en [2], y permite revisar estados epistémicos por medio de estados epistémicos, generalizando de esta forma la axiomática presenta por Darwiche y Pearl en [4], donde la revisión de los estados epistémicos se realiza a través de fórmulas. Como veremos más a delante, los operadores de revisión aquí presentados son un caso particular de operadores de fusión EE.

6.1. Operadores de revisión EE y su relación con los operadores de fusión EE

Un *operador de cambio* es una función $\circ$ que envía a cada par de estados epistémicos un nuevo estado epistémico, es decir, $\circ : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$.

El siguiente conjunto de axiomas serán denominados **REEA**, por las siglas en ingles de *axiomas de revisión por estados epistémicos.*

(REE1) $B(E_1 \circ E_2) \vdash B(E_2)$

(REE2) *Si* $B(E_1) \wedge B(E_2)$ *es consistente, entonces* $B(E_1 \circ E_2) \equiv B(E_1) \wedge B(E_2)$

(REE3) *Si* $B(E_2)$ *es consistente,* $B(E_1 \circ E_2)$ *también lo es.*

(REE4) *Si* $B(E_2) \equiv B(E_3)$ *entonces* $B(E_1 \circ E_2) \equiv B(E_1 \circ E_3)$

(REE-It) $B((E_1 \circ E_2) \circ E_3) \equiv B(E_1 \circ (E_2 \circ E_3))$

Nótese que los axiomas (REE1)-(REE4) son las generalizaciones naturales de los postulados AGM (R1)-(R4) cuando la nueva información es un estado epistémico (Ver [3, 4]). Más aún, si suponemos que un perfil de creencias esta formado por un único estado epistémico, los axiomas (REE1), (REE2), (REE3), (REE4) y (REE-It) son un caso particular de los postulados (FEE1), (FEE6), (FEE0), (FEE2) y (FEEIt), respectivamente. El axioma (REE-It) es denominado axioma de iteración, y de hecho es una generalización de los postulados AGM (R5) y (R6)[1]; más aún, este axioma que expresa asociatividad de $\circ$ al nivel de las creencias arraigadas, captura la prioridad fuerte de la nueva información y garantiza un buen comportamiento con respecto al proceso iterativo. La denominación del axioma (REE-It) como axioma de iteración se debe justamente a que este captura las postulados principales de iteración propuestos por Darwiche y Pearl [4], como veremos próximamente.

Proposición 6.1 *El axioma* (REE-It)*, en conjunto con los postulados* (REE1)-(REE4) *implican los siguientes axiomas:*

(REE5) $B(E \circ E_1) \wedge B(E_2) \vdash B(E \circ E_3)$, con $B(E_3) \equiv B(E_1 \circ E_2)$.

(REE6) Si $B(E \circ E_1) \wedge B(E_2)$ es consistente, entonces $B(E \circ E_3) \vdash B(E \circ E_1) \wedge B(E_2)$, con $B(E_3) \equiv B(E_1 \circ E_2)$.

(REE-Conj) Si $B(E_1) \wedge B(E_2)$ es consistente entonces, para cualquier estado epistémico E_3 con $B(E_3) \equiv B(E_1) \wedge B(E_2)$ se satisface que $B((E \circ E_1) \circ E_2) \equiv B(E \circ E_3)$.

Demostración: Nótese que las propiedades (REE5) y (REE6) se deducen inmediatamente de la proposición 3.1, ya que el axioma (REE5) es correspondiente a (FEE3), mientras que (REE5) es un caso particular de (FEE4); esto en el caso en que el perfil de creencias esté formado por un único estado epistémico.

Para mostrar la satisfacción de (REE-Conj), supongamos que $B(E_1) \wedge B(E_2)$ es consistente, consideremos E_3 un epistémico con $B(E_3) \equiv B(E_1) \wedge B(E_2)$. Luego, de (REE2) se tiene que, $B(E_1 \circ E_2) \equiv B(E_1) \wedge B(E_2)$, deduciéndose de esto último que $B(E_1 \circ E_2) \equiv B(E_3)$. Así, de (REE4) se deduce que $B(E \circ (E_1 \circ E_2)) \equiv B(E \circ E_3)$, obteniéndose de (REE-It) que $B((E \circ E_1) \circ E_2) \equiv B(E \circ E_3)$. ∎

Los axiomas (REE5) y (REE6) son generalizaciones naturales de los postulados AGM (R5) y (R6), respectivamente, presentados por Katsuno y Mendelzon en [6]. El axioma (REE-Conj) expresa el hecho de que, al revisar secuencialmente por dos estados epistémicos que poseen creencias arraigadas mutuamente consistentes, la creencia arraigada re-

[1] Los postulados (R1)-(R6) fueron presentados por Katzuno y Mendelzon en [6], y no son más que una adaptación de los postulados AGM [1, 5] al marco finito

sultante es la misma si revisamos por un estado epistémico cuya creencia arraigada es la conjunción de las creencias arraigadas de los estados epistémicos que determinan la nueva información.

Definición 6.1 (Operadores de revisión por estados epistémicos) *Sea* $(\mathcal{E}, B, \mathcal{L})$ *un espacio epistémico. Una función* $\circ : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *es un operador de revisión por estados epistémicos si satisface REEA.*

Procederemos a dar ahora dos teoremas de representación, para operadores de cambio. El primero de ellos nos da una representación semántica de las creencias arraigadas de los operadores de cambio que satisfacen los postulados (REE1)-(REE6), mientras que el segundo nos da una representación ordinal del conjunto de modelos que subyacen de $\mathcal{L}$.

Teorema 6.1 *Sea* $(\mathcal{E}, B, \mathcal{L})$ *un espacio epistémico y* $\circ$ *un operador de cambio. Entonces* $\circ$ *satisface los postulados* (REE1)-(REE6) *si, y sólo si, existe una aplicación* $E \mapsto \preceq_E$, *que asocia a cada estado epistémico,* E*, un único preorden total sobre los mundos,* $\preceq_E$*, satisfaciendo que:*

(*i*) $[B(E)] = min(\preceq_E)$ *si* $B(E)$ *es consistente,*

(*ii*) $[B(E \circ E')] = min([B(E')], \preceq_E)$*, si* $B(E')$ *es consistente.*

Demostración: Puesto que los axiomas (REE1), (REE3), (REE4), (REE5) y (REE6) son casos particulares de los postulados (FEE1), (FEE0), (FEE2), (FEE3) y (FEE4) respectivamente, en el caso en que el perfil de creencias esté formado por un único estado epistémico, se deduce de la proposición 3.6 que, a cada estado epistémico E, le podemos asociar un único preorden total $\preceq_E$ satisfaciendo:

$$[B(E \circ E')] = min([B(E')], \preceq_E).$$

Consideremos así la aplicación $E \mapsto \preceq_E$, y notemos ésta aplicación satisface las propiedades 2 y 3 de asignación, ya que (FEE6) es una generalización de (REE2) y en virtud de la proposición 3.8. Así, de la proposición 3.4 se deduce (*i*).

Recíprocamente, supongamos que a cada estado epistémico E le podemos asociar un único preorden total $\preceq_E$ sobre los mundos satisfaciendo (*i*) y (*ii*), y consideremos la aplicación $E \mapsto \preceq_E$. Nótese que esta aplicación define una asignación restringida a los estados epistémicos. Así, en virtud de (*ii*) y de la proposición 3.6, se tiene que $\circ$ satisface (REE1), (REE3), (REE4), (REE5) y (REE6), esto por la relación estrecha que tienen estos postulados con los postulados básicos de fusión de estados epistémicos.

Por otro lado, de (i) se deduce que la aplicación $E \mapsto \preceq_E$ satisface las propiedades 1 y 2 de asignación. De esta manera, restringiéndose a los estados epistémicos y en virtud de la relación existente entre (FEE6) y (REE2), se deduce que $\circ$ satisface (REE2). ∎

Teorema 6.2 *Sea $(\mathcal{E}, B, \mathcal{L})$ un espacio epistémico y $\circ$ un operador de cambio. Entonces, $\circ$ es un operador de revisión por estados epistémicos si, y sólo si, existe una aplicación $E \mapsto \preceq_E$, que asocia a cada estado epistémico, E, un único preorden total sobre los mundos, $\preceq_E$, satisfaciendo que:*

(i) $[B(E)] = min(\preceq_E)$*, si* $B(E)$ *es consistente,*

(ii) $\preceq_{E_1 \circ E_2} = lex(\preceq_{E_2}, \preceq_{E_1})$.

Demostración: Sea $\circ$ un operador de revisión por estados epistémicos. Así, en virtud de la proposición 6.1 y del teorema anterior, $\circ$ satisface (REE1)-(REE6). Por lo tanto, del teorema 6.1 se deduce a cada estado epistémico, E, le podemos asociar un preorden total sobre los mundos, $\preceq_E$. Por otro lado, como $\circ$ satisface los postulados básicos de fusión y (FEE-It), que restringidos a perfiles de creencias formados por un solo estados epistémicos corresponden a los postulados REEA, entonces de la proposición 3.12 se tiene (ii). Recíprocamente, supongamos que existe una aplicación $E \mapsto \preceq_E$ que asocia a cada estado epistémico un preorden sobre los mundos, satisfaciendo (i) y (ii). Notemos que, en virtud de la proposición 1.4 y de (i),

$$min([B(E_2)], \preceq_{E_1}) = min(lex(\preceq_{E_2}, \preceq_{E_1})).$$

De esta forma, de (i) y (ii) se tiene que $[B(E_1 \circ E_2)] = min([B(E_2)], \preceq_{E_1})$. Así, en virtud del teorema 6.1, $\circ$ satisface (REE1)-(REE6), deduciéndose de la proposición 3.12 y de (ii) que $\circ$ satisface (REE-It). ∎

A diferencia del bien conocido teorema de representación para los operadores AGM [6], los dos teoremas anteriores no nos permiten construir el operador $\circ$ a partir de los preórdenes, en este sentido son teoremas de representación débiles. A pesar de esto es interesante observar que estos teoremas nos dan información de las creencias arraigadas de un individuo obtenida después de la revisión, via los preórdenes. Otro importante aspecto de estos teoremas es el proceso para calcular las creencias arraigadas del nuevo estado epistémico via el preorden lex.

Definición 6.2 *Sea $(\mathcal{E}, B, \mathcal{L})$ un espacio epistémico tal que los elementos de $\mathcal{E}$ son preórdenes totales sobre $\mathcal{W}$, y supongamos que para cada $E \in \mathcal{E}$ se tiene que $[B(E)] = min(E)$.*

Diremos un operador $\circ : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *preserva los modelos minimales si la siguiente igualdad se cumple:*

$$[B(E_1 \circ E_2)] = min([B(E_2)], E_1)$$

A partir de ahora supondremos que $(\mathcal{E}, B, \mathcal{L})$ es un espacio donde los estados epistémicos son preórdenes totales sobre $\mathcal{W}$, y además que cada uno de ellos satisface que $[B(E)] = min(E)$.

Proposición 6.2 *Sea* $\circ$ *un operador de cambio que satisface los postulado* (REE1)-(REE6). *Entonces* $\circ$ *preserva los modelos minimales si, y sólo si, la aplicación* $E \mapsto \preceq_E$ *que representa a* $\circ$ *preserva la estructura de los estados epistémicos, es decir, si para cada estado epistémico* E, $E = \preceq_E$.

Demostración: Sea E un estado epistémico y, razonando por el absurdo, supongamos que $E \neq \preceq_E$. De esta manera, existen w ,w' interpretaciones tales que wEw' y $w' \prec_E w$. Consideremos así E' un estado epistémico tal que $[B(E')] = \{w, w'\}$

En virtud de la proposición 6.1 sabemos que $\circ$ satisface los postulados (REE1)-(REE6). De esta manera

$$[B(E \circ E')] = min([B(E')], \preceq_E)$$

implicando que $w \not\models B(E \circ E')$. Pero $\circ$ preserva modelos minimales, implicando que

$$[B(E \circ E')] = min([B(E')], E),$$

lo que nos lleva a que $w \models B(E_1 \circ E_2)$, siendo esto último una contradicción. De esta manera, para cada estado epistémico E, $E = \preceq_E$.

Recíprocamente, si la aplicación $E \mapsto \preceq_E$ que representa al operador $\circ$ preserva la estructura de los estados epistémicos, se deduce de forma inmediata del teorema 6.1 que $\circ$ preserva los modelos minimales. ∎

Como corolario de este último resultado y del teorema 6.2, para operadores que preservan modelos minimales tenemos el siguiente teorema de representación.

Teorema 6.3 *Sea* $\circ$ *un operador que preserva modelos minimales. Entonces,* $\circ$ *es un operador de revisión por estados epistémicos si, y sólo si, para cualesquiera* E_1, E_2 *estados epistémicos*

$$E_1 \circ E_2 = lex(E_2, E_1)$$

Demostración: Supongamos que $\circ$ es un operador de revisión por estados epistémicos que preserva los modelos minimales. De esta manera, en virtud del teorema 6.2, existe una aplicación $E \mapsto \preceq_E$ tal que, para cualesquiera E_1, E_2 estados epistémicos

$$\preceq_{E_1 \circ E_2} = lex(\preceq_{E_2}, \preceq_{E_1})$$

Luego, como $\circ$ preserva los modelos minimales, de la proposición 6.2 se deduce que $E_1 \circ E_2 = lex(E_2, E_1)$.

Recíprocamente, supongamos que el operador $\circ$ satisface que, para cada par de estados epistémicos, E_1 y E_2, se tiene que $E_1 \circ E_2 = lex(E_1, E_2)$. Así, para mostrar que $\circ$ es un operador de revisión por estados epistémicos, en virtud del teorema 6.2 basta con mostrar que a cada estado epistémico E, le podemos asociar un preorden total $\preceq_E$ satisfaciendo las condiciones (i) y (ii) de dicho teorema ; pero para ello basta asociar a cada estado epistémico consigo mismo, es decir, para cada E, estado epistémico, $E = \preceq_E$.∎

El siguiente ejemplo, donde retomamos el ejemplo presentado en la introducción, muestra el comportamiento de estos operadores de revisión.

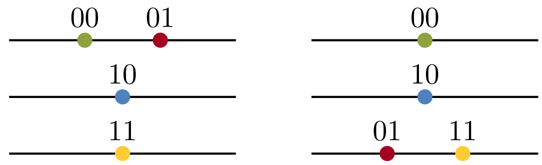
Ejemplo 6.1 Imaginemos un especialista en economía, realizando un estudio acerca de la fluctuación del precio del dólar y del petróleo. Él considera que el escenario más posible es que el cambio del dólar y del barril de petróleo aumenten, mientras que un segundo escenario, menos probable que el anterior, sería que el dólar aumente su valor y el petróleo no; considerando que cualquier escenario en que el cambio del dólar no aumente es muy poco probable. Luego se presenta un estudiante de economía y le informa al especialista que es muy posible que el precio del petróleo aumente, y, de no darse esta situación, como segundo escenario menos probable se tendrá que el dólar va a aumentar y el petróleo no; mientras que el escenario en que ni el dólar ni el petróleo aumenten sus valores es poco probable. Habiendo escuchado esto, y confiando menos en el análisis del estudiante que en el suyo propio, pero tomándolo en cuenta, el especialista hace una revisión de su análisis, dándole, por supuesto, prioridad a éste.

Consideremos así las variables proposicionales a_d, a_p, definida a continuación:

- a_d: aumenta el cambio del dólar,
- a_p: aumenta el precio del barril de petróleo.

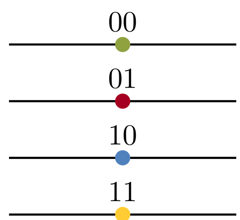
Estas variables serán consideradas en este orden para construir el conjunto de interpretaciones. Así, sea $\mathcal{L}$ el lenguaje proposicional construido a través de éstas variables proposicionales. En virtud de lo expresado, el especialista posee como estado epistémico al preorden E_e, el cual contiene en su primer nivel a 11, en su segundo nivel a 10, mientras que en el tercer nivel se distribuyen los modelos restantes. Por otro lado, la nueva información E, dada por el estudiante, establece que en su primer nivel a los modelos

01 y 11, en su segundo nivel al modelo 10, mientras que en su tercer nivel se encuentra ubicado el modelo 00. Esto puede ser gráficamente visto como sigue:



E_e $\qquad$ E

Puesto que para especialista la información del aficionado no es del todo fidedigna, el revisa dicha información con respecto al análisis hecho por él. De esta manera, el resultado de la revisión esta dada gráficamente por:



$E \circ E_e = lex(E_e, E)$

Así, el especialista llega a la conclusión que el escenario más probable es en el que tanto el dólar como el petróleo aumenten su valor; un segundo escenario menos probable es que el dólar aumente de precio y el petróleo no; un tercer escenario, menos probable que los dos anteriores es que el cambio del dólar no aumente mientras que el valor del petróleo si, y el escenario menos probable es que ninguno de los dos, ni el dólar ni el petróleo, aumenten su valor.

6.2. Comportamiento iterativo de REEA

Ahora estudiaremos el comportamiento de estos operadores con respecto a la iteración. Comenzaremos adaptando los postulados de Darwiche y Pearl [4] al contexto en la cual la nueva información es también un estado epistémico. Los postulados para la revisión iterada de estados epistémicos son los siguientes:

(C1*) Si $B(E_1) \vdash B(E_2)$ entonces $B((E \circ E_2) \circ E_1) \equiv B(E \circ E_1)$.

(C2*) Si $B(E_1) \vdash \neg B(E_2)$ entonces $B((E \circ E_2) \circ E_1) \equiv B(E \circ E_1)$.

(C3*) Si $B(E \circ E_1) \vdash B(E_2)$ entonces $B((E \circ E_2) \circ E_1) \vdash B(E_2)$

(C4*) Si $B(E \circ E_1) \nvdash \neg B(E_2)$ entonces $B((E \circ E_2) \circ E_1) \nvdash \neg B(E_2)$

Sea $(\mathcal{E}, B, \mathcal{L})$ y $\circ$ un espacio epistémico y un operador que preserva modelos minimales con en la definición 6.2. Sea $\mathcal{C}$ un subconjunto de $\mathcal{E}$. Definimos $\circ_{\mathcal{C}}$ como la restricción de $\circ$ a $\mathcal{E} \times \mathcal{C}$.

Notemos que, en el caso en que $\mathcal{C}$ esta formado sólo por los preórdenes que poseen a lo sumo dos niveles, dicho conjunto de estados epistémicos representa el lenguaje proposicional $\mathcal{L}$, ya que si φ es una formula, los elementos minimales del preorden asociado a φ son aquellos modelos que la satisfacen; estando en el segundo nivel los no modelos de dicha fórmula. De ser este el caso caemos en el contexto presentado por Darwiche y Pearl [4], como observamos en los siguientes resultados.

En realidad, los postulados (C1*), (C3*) y (C4*) se satisfacen sin la restricción, es decir, si $\mathcal{C}$ coincide con $\mathcal{E}$, como se observará en el teorema siguiente. Lo que añade el teorema 6.5 es que la satisfacción de (C2*) se logra siempre y cuando $\mathcal{C}$ contenga preórdenes con dos niveles a lo sumo.

Teorema 6.4 *Todo operador de revisión por estados epistémicos que preserva modelos minimales satisface los postulados* (C1*), (C3*) *y* (C4*).

Demostración:

(C1*) Supongamos que $B(E_1) \vdash B(E_2)$ y mostremos que $B((E \circ E_2) \circ E_1) \equiv B(E \circ E_1)$. Si $B(E_1)$ es inconsistente, de (REE1) y (REE3) se tiene que $B((E \circ E_2) \circ E_1)$ y $B(E \circ E_1)$ son inconsistentes, mostrando de esta manera la equivalencia entre estas para este caso.

Supongamos así que $B(E_1)$ es consistente y consideremos el preorden $\preceq^{l(E_2,E)}$ definido por $lex(E_2, E)$ y notemos que, en virtud del teorema 6.3, $E \circ E_2 = \preceq^{l(E_2,E)}$.

Sea $w \models B((E \circ E_2) \circ E_1)$. Así, $w \in min([B(E_1)], \preceq^{l(E_2,E)})$, implicando que $w \models B(E_2)$ y además que, para cada $w' \models B(E_1)$, $w \preceq^{l(E_2,E)} w'$. Más aún, si $w' \models B(E_1)$ entonces $w' \models B(E_2)$, obteniéndose de esta manera que $w' \simeq_{E_2} w$, y así $w \preceq_E w'$. Por lo tanto $w \in min([B(E_1)], E)$, implicando que $w \models B(E \circ E_1)$.

Ahora bien, supongamos que $w \models B(E \circ E_1)$ y consideremos $w' \models B(E_1)$. De esta manera $w' \models B(E_2)$, y puesto que $w \in min([B(E_1)], E)$ tenemos que $w \simeq_{E_2} w'$ y $w \preceq_E w'$. Luego, $w \preceq^{l(E_2,E)} w'$. Como w' es un modelo cualquiera $B(E_1)$ se tiene que $w \in min([B(E_1)], \preceq^{l(E_2,E)})$ implicando que $w \models B((E \circ E_2) \circ E_1)$.

(C3*) Notemos que si $B(E_1)$ es inconsistente el resultado se deduce de forma directa de (REE*1) y (REE*3). De esta manera, supongamos que $B(E_1)$ es consistente y además que $B(E \circ E_1) \vdash B(E_2)$. Además, razonando por el absurdo, supongamos que existe $w \models B((E \circ E_2) \circ E_1)$ tal que $w \not\models B(E_2)$. Así, por hipótesis necesariamente $w \not\models B(E \circ E_1)$. De esta manera, existe $w' \models B(E_1)$ tal que $w' \prec_E w$ y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $w' \models B(E \circ E_1)$.

Así, como $[B(E_2)] = min(E_2)$, entonces $w' \prec_{E_2} w$ y de esta manera $w' \prec^{l(E_2,E)} w$. Pero, w y w' satisfacen $B(E_1)$, lo que indica que $w \notin min([B(E_1)], \preceq^{l(E_2,E)})$ y por lo tanto $w \not\models B((E \circ E_2) \circ E_1)$, siendo esto una contradicción. De esta forma $w \models B(E_2)$.

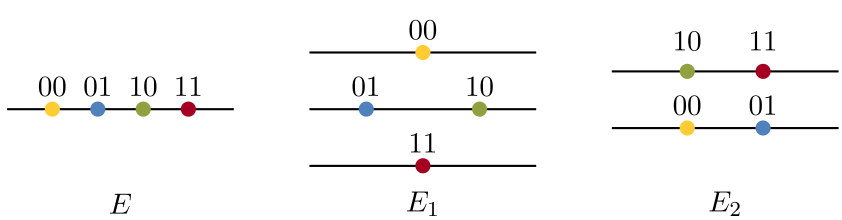
(C4*) Supongamos que $B(E \circ E_1) \nvdash \neg B(E_2)$ y consideremos $w \models B(E \circ E_1) \wedge B(E_2)$. Así, $w \in min([B(E_1)], E)$.

Sea $w' \models B(E_1)$. Si $w' \not\models B(E_2)$ entonces $w \prec_{E_2} w'$, ya que $[B(E_2)] = min(E_2)$, por lo tanto $w \preceq^{l(E_2,E)} w'$. Por otro lado, si $w' \models B(E_2)$ entonces $w \simeq_{E_2} w'$ y como $w \preceq_E w'$, se tiene que $w \preceq^{l(E_2,E)} w'$.

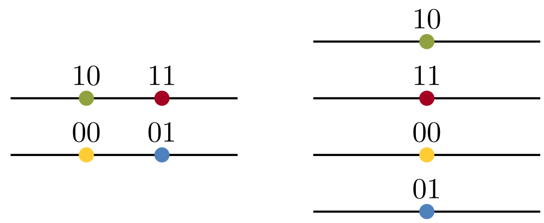
De esta manera, para cualquier $w' \models B(E_1)$ se tiene que $w \preceq^{l(E_2,E)} w'$, implicando que $w \in min([B(E_1)], E \circ E_2))$, y por lo tanto $w \models B((E \circ E_2) \circ E_1) \wedge B(E_2)$, mostrando que $B((E \circ E_2) \circ E_1) \nvdash \neg B(E_2)$ ∎

El siguiente ejemplo muestra que el postulado (C2*) no se satisface en general. En este ejemplo $\mathcal{E}$ esta constituido por los preórdenes sobre las interpretaciones determinadas por la distancia de Hamming entre interpretaciones.

Ejemplo 6.2 Consideremos un circuito eléctrico con un sumador y un multiplicador. No existe información inicial sobre el estado del circuito. Sea E tal que $B(E) = \top$. Después, observamos que el sumador y multiplicador funcionan bien, es decir, $B(E_1) = sumador_{ok} \wedge multiplicador_{ok}$. Pero después de eso notamos que el sumador no trabaja, es decir, $B(E_2) = \neg sumador_{ok}$.



Así, $B(E_2) \vdash \neg B(E_1)$; pero $B((E \circ E_1) \circ E_2) \equiv \neg sumador_{ok} \wedge multiplicador_{ok}$ mientras que $B(E \circ E_2) \equiv \neg sumador_{ok}$. La aplicación de (C2*) nos conduciría a que $B((E \circ E_1) \circ E_2) \equiv \neg sumador_{ok}$, es decir "olvidar" que el multiplicador trabaja.



$E \circ E_2$ $(E \circ E_1) \circ E_2$

Teorema 6.5 *Sea* $\circ_{\mathcal{C}}$ *un operador de revisión por estados epistémicos que preserva modelos minimales. Entonces* $\circ_{\mathcal{C}}$ *satisface* (C2*) *si, y sólo si, los elementos de* $\mathcal{C}$ *son los preórdenes que poseen a lo sumo dos niveles.*

Demostración: Para demostrar la parte *sólo si* de este teorema basta considerar el ejemplo 6.2, notando que podemos aumentar los pisos al agregar nuevos variables proposicionales que nos permitan igualar o superar la cantidad de niveles, y completando por ceros los modelos dados originales dados en este ejemplo, colocándolos en sus respectivos niveles y a los modelos restantes en niveles superiores.

Así, supongamos que $B(E_1) \vdash \neg B(E_2)$ y consideremos $w \models B((E \circ E_2) \circ E_1)$. De esta manera $w \in min([B(E_1)], \preceq^{l(E_2,E)})$, y por lo tanto $w \models \neg B(E_2)$. Además, para cualquier $w' \models B(E_1)$ se tiene que $w \preceq^{l(E_2,E)} w'$. Más aún, si $w' \models B(E_1)$ entonces $w' \not\models B(E_2)$, y puesto que E_2 posee dos niveles y $[B(E_2)] = min(E_2)$, se deduce que $w \simeq_{E_2} w'$. De esta manera, para cualquier $w' \models B(E_1)$, tenemos que $w \simeq_{E_2} w'$ y como $w \preceq^{l(E_2,E)} w'$ entonces $w \preceq_E w'$, indicando que $w \in min([B(E_1)], \preceq_E)$. Por lo tanto, $w \models B(E \circ E_1)$.

Por otro lado, supongamos $w \models B(E \circ E_1)$ y consideremos $w' \models B(E_1)$, cualquiera. Así, $w \preceq_E w'$, y como $w \simeq_{E_2} w'$, se tiene que $w \preceq^{l(E_2,E)} w'$. De esto último se deduce que $w \in min([B(E_1)], \preceq^{l(E_2,E)})$, implicando que $w \models B((E \circ E_2) \circ E_1)$. ∎

CONCLUSIONES

Adaptando los postulados presentados por Konieczny y Pino Pérez [9, 10, 11], logramos introducir una axiomática que define a operadores de fusión de estados epistémicos complejos, esto en el contexto de la lógica proposicional finita. Esta axiomática permite generalizar, de manera razonable, a los operadores de revisión presentados por Benferhat *et. al.* [2] y los operadores de Fusión IC del marco KP.

Bajo estos postulados, logramos obtener la representación, en forma semántica, de estos operadores; obteniendo resultados más fuertes al considerar estados epistémicos que poseen cierta estructura de orden sobre las interpretaciones; más concretamente, estructura de preorden sobre las valuaciones.

Por otro lado, haciendo uso de las funciones agregación, logramos definir varios operadores de fusión EE, mostrando así la existencia de éstos. Estas funciones también nos ayudaron a definir varios operadores combinación EE que permiten demostrar la independencia entre los postulados de fusión.

A través de estos ejemplos, también pudimos apreciar que los operadores que tienen un comportamiento más razonable preservan la estructura de orden de los estados epistémicos – esto en el caso de estados epistémicos determinados por preórdenes totales – como es el caso de los operadores suma, máximo generalizado, máximo. Este hecho nos lleva a preguntarnos si es posible capturar esta propiedad en forma sintáctica, es decir, ¿qué postulado(s) hay que agregar en la axiomática de los operadores, aquí presentada, para que los operadores de combinación EE preserven la estructura de los estados epistémicos?

BIBLIOGRAFÍA

[1] Carlos E. Alchourrón, Peter Gärdenfors, and David Makinson. On the logic of theory change: Partial meet contraction and revision functions. *J. Symb. Log.*, 50(2):510–530, 1985.

[2] Salem Benferhat, Sébastien Konieczny, Odile Papini, and Ramón Pino Pérez. Iterated revision by epistemic states: Axioms, semantics and syntax. In Werner Horn, editor, *ECAI*, pages 13–17. IOS Press, 2000.

[3] Adnan Darwiche and Judea Pearl. On the logic of iterated belief revision. In Ronald Fagin, editor, *TARK*, pages 5–23. Morgan Kaufmann, 1994.

[4] Adnan Darwiche and Judea Pearl. On the logic of iterated belief revision. *Artificial intelligence*, 89:1–29, 1996.

[5] P. Gardenfors. *Knowledge in Flux: Modeling the Dynamics of Epistemic States (Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations)*. College Publications, June 2008.

[6] Hirofumi Katsuno and Alberto O. Mendelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artif. Intell.*, 52(3):263–294, 1992.

[7] Sébastien Konieczny. Sur la logique du changement: revision et fusion de bases de connaissances. *Thèse de Doctorat, Université de Lille 1.*

[8] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. On the logic of merging. In Anthony G. Cohn, Lenhard K. Schubert, and Stuart C. Shapiro, editors, *KR*, pages 488–498. Morgan Kaufmann, 1998.

[9] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. Merging with integrity constraints. In Anthony Hunter and Simon Parsons, editors, *ESCQARU*, volume 1638 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 233–244. Springer, 1999.

[10] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. Merging information under constraints: A logical framework. *J. Log. Comput.*, 12(5):773–808, 2002.

[11] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. Propositional belief base merging or how to merge beliefs/goals coming from several sources and some links with social choice theory. *European Journal of Operational Research*, 160(3):785–802, 2005.

[12] Amilcar Mata. *Manipulabilidad en la Fusión Lógica.* Tesis de Licenciatura. Mérida, Octubre 2007.

[13] Thomas Andreas Meyer. Merging epistemic states. In *PRICAI*, pages 286–296, 2000.