Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Postgrado en Física Fundamental

Defensa de Tesis de Maestría

Osciladores caóticos con acoplamiento ambiental

Lic. Carlos Quintero

Tutor: M. Cosenza

Centro de Física Fundamental
Área de Caos y Sistemas Complejos
www.ciens.ula.ve/cff/caoticos

Contenido

Sistemas con interacciones globales

Interacciones Globales: todos los elementos de un sistema están sujetos a una influencia común. Estructura de red: todos los elementos conectados con todos.

Modelo general

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) + \mathbf{V}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{K}(\mathbf{w})$$

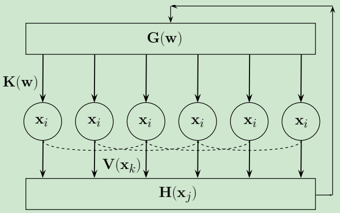
$$\frac{d\mathbf{w}}{dt}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{w}) + \mathbf{H}(\mathbf{x}_j),$$

donde:

- $\mathbf{x}_i(t)$ vector de estado del elemento $i = 1, \ldots, N$,
- $\mathbf{w}(t)$ vector de estado de un campo externo,
- $\mathbf{F}(x)$ dinámica del elemento i;
- $\mathbf{V}(x_k)$, interacción de i con su local $k \in \nu_i$.
  ν_i vecinos que presentan un acoplamiento, i
- $\mathbf{K}(\mathbf{w})$ influencia común los elementos i
- $\mathbf{G}(\mathbf{w})$ dinámica intrínseca del campo
- $\mathbf{H}(x_j)$ retroalimentación del sistema hacia el campo externo, con $j \in Q$, donde Q es un subconjunto que contiene $q \leqslant N$ elementos del sistema.

Se han reportado

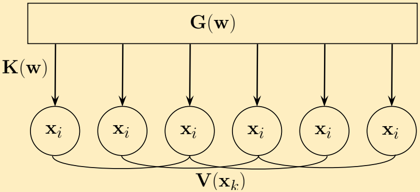
- Oscilaciones químicas, concentraciones cataliticas en un medio no catalítico.
- Oscilaciones genéticas, entre células y el medio intercelular
- Poblaciones de neuronas, concentración del neurotransmisor segregado
- átomos fríos interactuando con un campo electromagnético
- láseres multimodales
- sistemas caóticos y periódicos acoplados indirectamente
- etc. …



Sistemas forzados

Sistemas forzados $\mathbf{H}(\mathbf{x}_j) = 0$

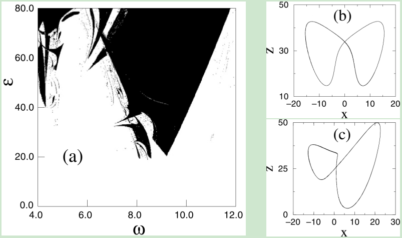
$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_i}{\mathrm{d}t}(t) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) + \mathbf{V}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{K}(\mathbf{w}) \\
\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t}(t) &= \mathbf{G}(\mathbf{w})
\end{aligned}
$$



Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= 10\,(y - x)\,, \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= 28x - y - xz, \\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= -\frac{8}{3}z + xy + \varepsilon \sin \omega t.
\end{aligned}
$$

A. S. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science (2001).

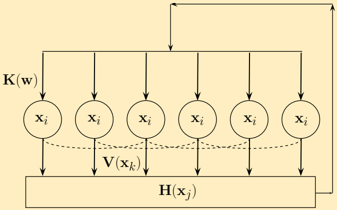


■: Sincronizado

Sistemas autónomos

Sistemas autónomos $\mathbf{G}(\mathbf{w}) = 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{x}_i}{dt}(t) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) + \mathbf{V}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{K}(\mathbf{w}) \\
\frac{d\mathbf{w}}{dt}(t) &= \mathbf{H}(\mathbf{x}_j)
\end{aligned}
$$

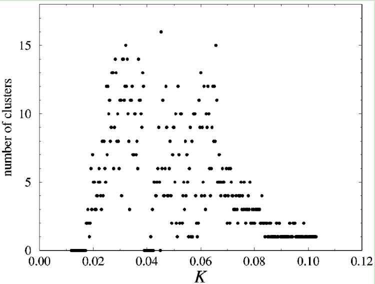


$$
\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i; \quad \bar{z} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i
$$

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_i}{dt} &= -y_i - z_i, \\
\frac{dy_i}{dt} &= x_i + ay_i + K(\bar{y} - y_i), \\
\frac{dz_i}{dt} &= b - cz_i + x_i z_i + K(\overline{xz} - x_i z_i).
\end{aligned}
$$

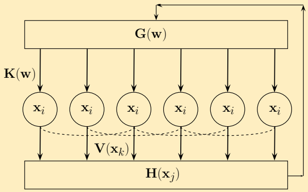
D. H. Zanette and A. S. Mikhailov, Phys. Rev. E **57**, 276 (1998).



Sistemas con acoplamiento ambiental

Sistemas con acoplamiento ambiental

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{x}_i}{dt}(t) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) + \mathbf{V}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{K}(\mathbf{w}) \\
\frac{d\mathbf{w}}{dt}(t) &= \mathbf{G}(\mathbf{w}) + \mathbf{H}(\mathbf{x}_j
\end{aligned}
$$



Ejemplo (con 2 elementos):

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_{i1} &= -x_{i2} - x_{i3} + \varepsilon_1 \beta_i y \\
\dot{x}_{i2} &= x_{i1} + a x_{i2} \\
\dot{x}_{i3} &= b + x_{i3}\,(x_{i1} - c) \\
\dot{y} &= -\kappa y - \frac{\varepsilon_2}{2} \sum_{i=1,2} \beta_i x_{i1}\,,
\end{aligned}
$$

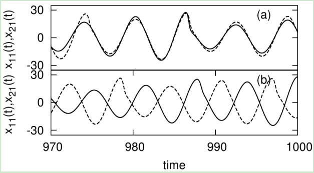
V. Resmi, G. Ambika, and R. Amritkar, Phys. Rev. E **81**, 046216 (2010).

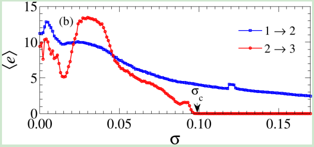
Ejemplo (con 2 elementos):

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = -y_1 - z_1 \\
\dot{y}_1 = x_1 + a_0 y_1 + \sigma\,(y_2 - y_1) + \sigma\,(y_3 - y_1) \\
\dot{z}_1 = 0.2 + z_1\,(x_1 - 5.7)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dot{x}_{2,3} = -y_{2,3} - z_{2,3} \\
\dot{y}_{2,3} = x_{2,3} + a y_{2,3} + \sigma\,(y_1 - y_{2,3}) \\
\dot{z}_{2,3} = 0.2 + z_{2,3}\,(x_{2,3} - 5.7)
\end{cases}
$$

R. Gutiérrez, *et al*, ArXiv e-prints (2013), arXiv:1307.3727.





Comportamientos colectivos en sistemas globalmente acoplados

Los sistemas con interacciones globales pueden exhibir una variedad de comportamiento colectivos en el tiempo, tales como sincronización completa, generalizada y de fase; clusters dinámicos (dominios sincronizados); comportamiento colectivo no trivial.

Cantidades estadísticas para caracterizar estados de sincronización

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{N\,(T-\tau)} \sum_{t=\tau}^{T} \sum_{i=1}^{N} |\mathbf{x}_i(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)|\,,$$

$$\langle \delta \rangle = \frac{1}{N\,(T-\tau)} \sum_{t=\tau}^{T} \sum_{i=1}^{N} |\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{w}(t)|$$

$$\Phi = \frac{1}{(T-\tau)} \sum_{t=\tau}^{T} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sin(\phi_i(t)) \right)^2 + \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \cos(\phi_i(t)) \right)^2$$

Sincronización completa

$$\langle \sigma \rangle = 0, \quad \langle \delta \rangle = 0, \quad \Phi = 1$$

Sincronización generalizada

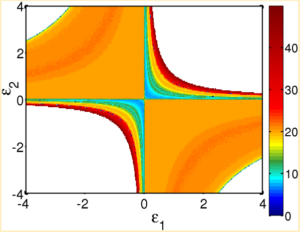
$$\langle \sigma \rangle = 0, \quad \langle \delta \rangle \neq 0, \quad \Phi = 1$$

Sincronización en fase

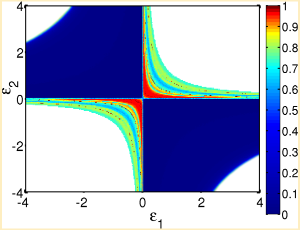
$$\langle \sigma \rangle \neq 0, \quad \langle \delta \rangle \neq 0, \quad \Phi = 1$$

Osciladores de Rössler con campo ambiental unidimensional

$\langle\sigma\rangle$ en el plano $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

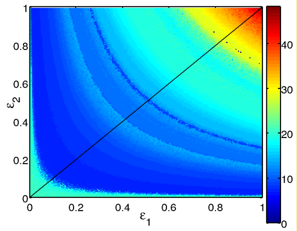


Φ en el plano $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$



$$
\begin{aligned}
\dot{x}_i &= -y_i - z_i + \varepsilon_2 w \\
\dot{y}_i &= x_i + \alpha y_i \\
\dot{z}_i &= \beta + z_i(x_i - \kappa) \\
\dot{w} &= -\lambda w + \frac{\varepsilon_1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i,
\end{aligned}
$$

Magnificación de $\langle\sigma\rangle$ en el plano $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

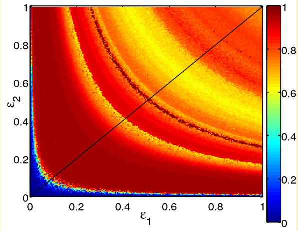


$N = 500; \quad \alpha = 0.1;$

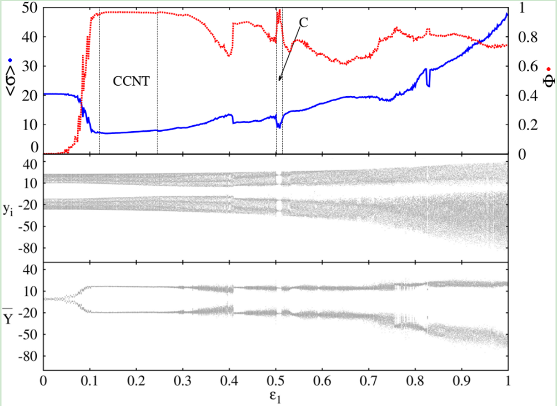
$\beta = 0.1; \quad \kappa = 18$

$\lambda = 1$

Magnificación de Φ en el plano $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

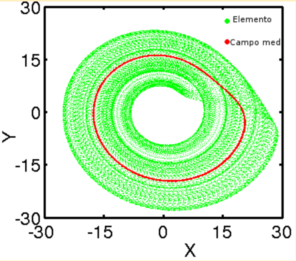


Comportamientos colectivos de osciladores de Rössler con campo ambiental unidimensional.

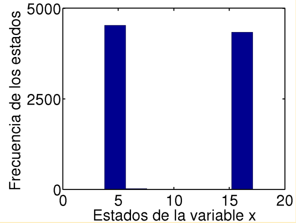


con $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$; CCNT=Comportamiento colectivo no trivial; C = Clusters

Comportamiento colectivo no trivial



Clusters

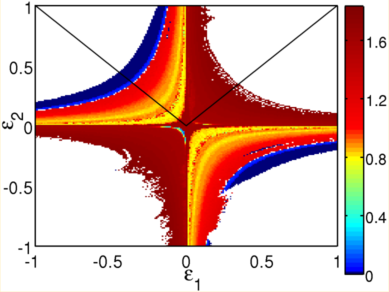


Osciladores de Sprott con campo ambiental unidimensional.

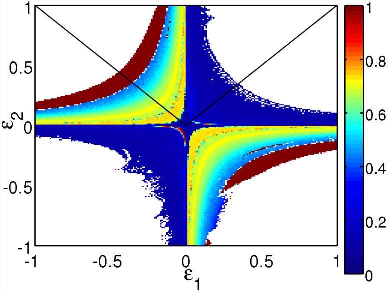
$$
\begin{aligned}
\dot{x}_i &= y_i + \varepsilon_2 w \\
\dot{y}_i &= z_i \\
\dot{z}_i &= -\alpha z_i - y_i + |x_i| - 1 \\
\dot{w} &= -\lambda w + \frac{\varepsilon_1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i .
\end{aligned}
$$

$\alpha = 0.6; \quad \lambda = 1$

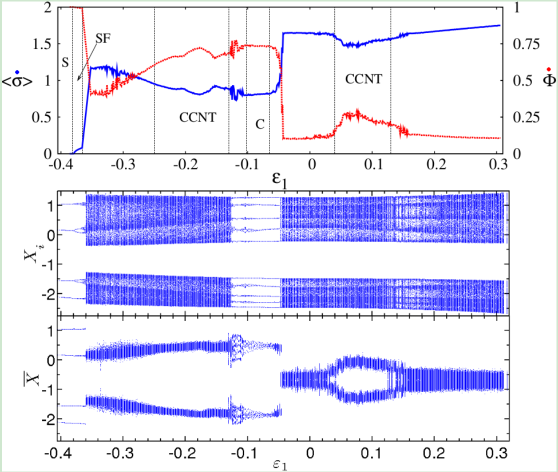
$\langle\sigma\rangle$ en el plano $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$



Φ en el plano $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

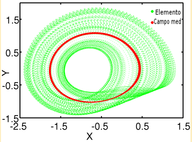


Comportamientos colectivos de osciladores de Sprott con campo ambiental unidimensional.

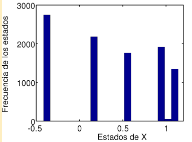


con $\varepsilon_2 = |\varepsilon_1|$; S = Sincronización; SF = Sincronización en fase; C = Clusters; CCNT = Comportamiento colectivo no trivial

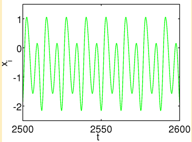
Comportamiento colectivo no trivial



Clusters



Sincronización

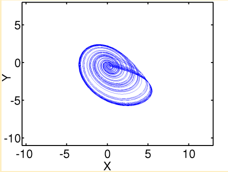


Osciladores de Rössler con campo ambiental caótico.

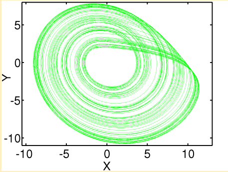
$$
\begin{cases}
\dot{x}_i &= -y_i - z_i \\
\dot{y}_i &= x_i + \alpha y_i \\
\dot{z}_i &= \beta + z_i(x_i - \kappa) + \varepsilon_2 z_a
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dot{x}_a &= -y_a - z_a \\
\dot{y}_a &= x_a + \alpha_a y_a \\
\dot{z}_a &= \beta_a + z_a(x_a - \kappa_a) + \varepsilon_1 \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} z_i \right)
\end{cases}
$$

Ambiente

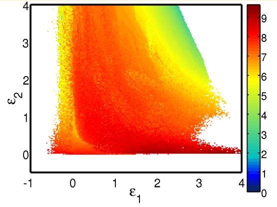


Elementos

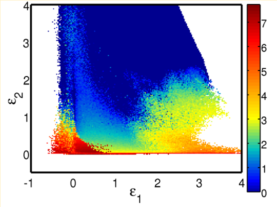


$$
\begin{array}{llllllllll}
\alpha & = & 0.1 & ; & \beta & = & 0.1 & ; & \kappa & = 18 \;; \\
\alpha_a & = & 0.432 & ; & \beta_a & = & 2.06 & ; & \kappa_a & = 4.0 \;;
\end{array}
$$

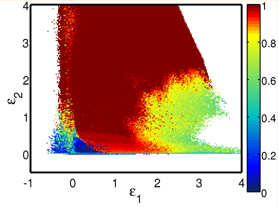
$\langle \delta \rangle$ en el plano $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$



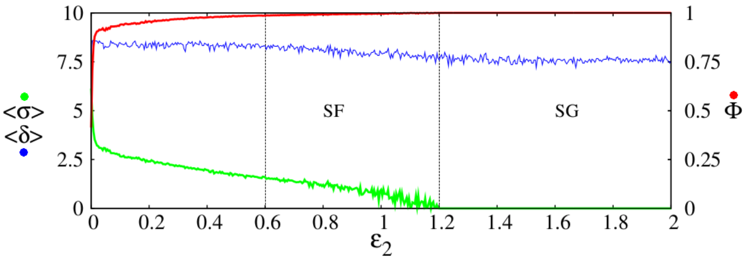
$\langle \delta \rangle$ en el plano $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$



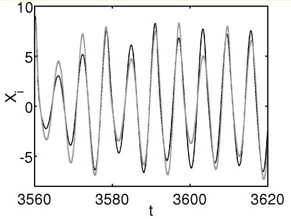
$\langle \delta \rangle$ en el plano $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$



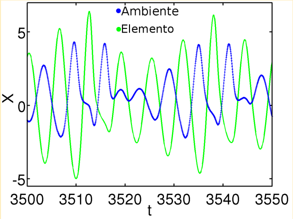
Comportamientos colectivos de osciladores de Rössler con campo ambiental caótico.



Sincronización en fase



Sincronización generalizada

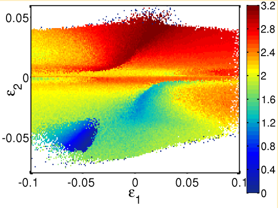


Osciladores de Sprott con campo ambiental caótico.

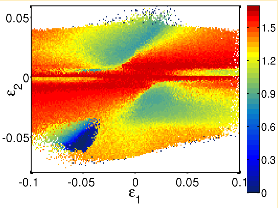
$$
\left\{
\begin{aligned}
\dot{x}_i &= y_i + \varepsilon_2 x_a \\
\dot{y}_i &= z_i \\
\dot{z}_i &= -\alpha z_i - y_i + |x_i| - 1
\end{aligned}
\right.
\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\dot{x}_a &= y_a + \varepsilon_1 \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \right) \\
\dot{y}_a &= z_a \\
\dot{z}_a &= -\alpha_a z_a - y_a + |x_a| - 1
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 0.6 \quad ; \\
\alpha_a &= 0.6212 \quad ;
\end{aligned}
$$

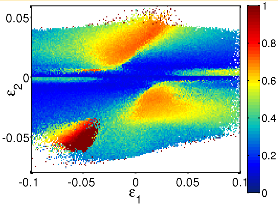
$\langle \delta \rangle$ en el plano $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$



$\langle \delta \rangle$ en el plano $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

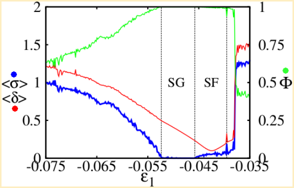


$\langle \delta \rangle$ en el plano $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

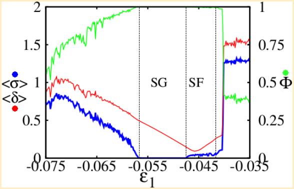


Comportamientos colectivos de osciladores de Sprott con campo ambiental caótico.

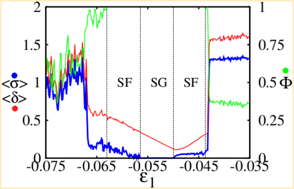
$\varepsilon_2 = -0.050$



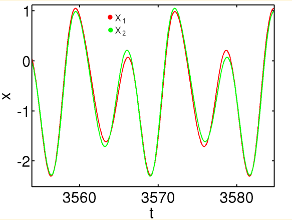
$\varepsilon_2 = -0.054$



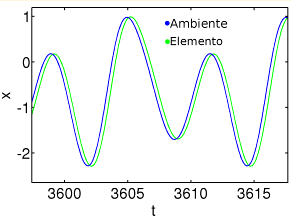
$\varepsilon_2 = -0.058$



Sincronización en fase



Sincronización generalizada



Conclusiones.

- Hemos propuesto un esquema general para estudiar sistemas de N osciladores que presentan interacciones globales en su diversas formas.
- Mostramos que las cantidades estadísticas Φ y $\langle\sigma\rangle$, las proyecciones de las órbitas y las secciones de Poincaré permiten caracterizar los comportamientos colectivos en sistemas con acoplamiento ambiental.
- Obtuvimos varios comportamiento en sistemas con acoplamiento ambiental unidimensional como comportamiento colectivo no trivial y clusters. Hasta donde tenemos conocimiento, estos fenómenos no han sido reportados en trabajos anteriores (¡$N = 2$!).
- Sincronización inducida por un campo ambiental unidimensional solamente ocurre en la forma de estados periódicos.
- Sistemas sujetos a un campo ambiental tridimensional, de la forma de un flujo caótico puede presentar comportamientos de sincronización generalizada con el ambiente y sincronización en fase entre los elementos.
- Estos comportamiento son inducidos por el ambiente, y no ocurren en los sistemas autónomos. Nuestros resultados indican que los efectos de un campo ambiental son robustos respecto a la forma de la dinámica de los elementos.

Para el futuro

Un conjunto de osciladores considerado como ambiente de otro conjunto. i.e. dos poblaciones en interacción.