Funciones de varias variables.
(problemas selectos)

Jesús Alfonso Pérez Sánchez

Mérida-Venezuela

2001

Índice general

1. Vectores y Geometría 2

2. Límites, continuidad,derivadas parciales 10

3. Máximos y Mínimos 14

4. Integración 19

5. Respuestas e Indicaciones del capítulo 1 23

6. Respuestas e Indicaciones del capítulo 2 33

7. Respuestas e Indicaciones del capítulo 3 41

8. Respuestas e Indicaciones del capítulo 4 64

Bibliografía 81

Introducción

Presentamos aquí, una lista de problemas pensados como un **complemento** a un curso normal de funciones de varias variables.

Muchos de ellos han sido inquietudes de nuestros alumnos en diversas oportunidades; otros, los hemos seleccionado con un fin esclarecedor de algún teorema del curso. En todo caso, constituyen un pequeño reto, para fijar conceptos y aplicar los teoremas.

Capítulo 1

Vectores y Geometría

Notaciones:

vectores unitarios en $\mathbb{R}^2$:

$$\overrightarrow{i} = <1, 0>,$$
$$\overrightarrow{j} = <0, 1>$$

vectores unitarios en $\mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{i} = <1, 0, 0>; \quad \overrightarrow{j} = <0, 1, 0>; \quad \overrightarrow{k} = <0, 0, 1>$$

Longitud de un vector:

$$\overrightarrow{v} = <x, y>; \qquad \|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\overrightarrow{w} = <x, y, z>; \qquad \|\overrightarrow{w}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Producto interno de vectores:

$\overrightarrow{v_1} \;=< x_1, y_1 >, \quad \overrightarrow{v_2} \;=< x_2, y_2 >,$

$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} \;=\; x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

Por otro lado, $\quad \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} \quad$ viene dado también por:

$\overrightarrow{v_2}$

θ

$\overrightarrow{v_1}$

0

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} \;=\; \|\overrightarrow{v_1}\| \cdot \|\overrightarrow{v_2}\| \cos\theta$$

Análogamente, en el caso de vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{w_1} \;=< x_1, y_1, z_1 >, \qquad \overrightarrow{w_2} \;=< x_2, y_2, z_2 >$$

$$\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{w_2} \;=\; x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \;=\; \|\overrightarrow{w_1}\| \cdot \|\overrightarrow{w_2}\| \cos\theta$$

$\overrightarrow{w_2}$

θ

$\overrightarrow{w_1}$

0

En otra notación:

$$\overrightarrow{w_1} \;=\; x_1\,\overrightarrow{i} + y_1\,\overrightarrow{j} + z_1\,\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{w_2} \;=\; x_2\,\overrightarrow{i} + y_2\,\overrightarrow{j} + z_2\,\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{w_2} \;=\; x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Producto Vectorial:

Sean: $\overrightarrow{v} \; = < x_1, y_1, z_1 >$

$\overrightarrow{w} \; = < x_2, y_2, z_2 >$

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \;=\; \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$=\; (y_1z_2 - y_2z_1)\,\overrightarrow{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\,\overrightarrow{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\,\overrightarrow{k}$$

También:

$\overrightarrow{w}$

θ

0 $\overrightarrow{v}$

$$\|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\| \;=\; \|\overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{w}\|\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Problemas:

1.- Son dados los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$, tales que:

$$\|\overrightarrow{a}\| = 5 \qquad y \qquad \|\overrightarrow{b}\| = 12$$

.

i) ¿Cuál es el valor máximo que puede tomar $\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|$?

ii) ¿Cuál es el valor mínimo que puede alcanzar $\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|$?

iii) En el caso $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$, ¿Cuánto vale $\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|$?

2.- Dados los puntos $(0,0)$, $(3,4)$, $(m,4)$ y $(\lambda,0)$, hallar los valores de m y λ, de manera que dichos puntos sean vértices de un paralelogramo, cuyas diagonales sean perpendiculares.

3.- Hallar dos vectores unitarios paralelos al vector $\overrightarrow{v}$, el cual tiene origen en $(-1,5,3)$, mientras que su extremo final es el $(0,3,1)$. Encontrar un par de vectores unitarios que sean perpendiculares a $\overrightarrow{v}$ y, además, paralelos al $< 1, 1, -\frac{1}{2} >$.

4.- Hallar el volumen del **prisma**, una de cuyas bases es el triángulo de vértices: $(0,0,1)$, $(2,0,0)$, $(0,-1,0)$; la otra base está en el plano $x - 2y + 2z + 8 = 0$

Nota: prisma: poliedro limitado por dos **polígonos congruentes**, situados en planos paralelos (bases) y por tantos paralelogramos como lados tienen las bases.

prisma
triangular

5.- Son dados: el plano α, de ecuación $-2x + 2y - z = 5$,

y la recta $L : \dfrac{x}{-5} = \dfrac{y-5}{-4} = \dfrac{z-5}{2}$.

Probar que L está contenida en α.

Hallar la recta L',

que pasa por $(2, -2, -4)$ y es perpendicular al plano α.

(Llamemos P_0 al pie de L').

Encontrar L'', recta (en α) que pasa por P_0 y que, además,

es perpendicular a L.

Designemos por P_1, a la intersección de L'' con L.

Finalmente, demostrar que la recta determinada por un punto arbitrario de L' y el punto P_1, es perpendicular a L.

6.- **Rescate Fantástico:**

Dos helicópteros H_a y H_b han venido viajando juntos.

En un determinado instante (llamémoslo $t_0 = 0$) cada uno escoge una trayectoria.

$H_a : x = 10 + 300t, \quad y = -5 + 352,5t, \quad z = -5 - 57,5t$

$H_b : x = 10 + 690t, \quad y = -5 + 705t, \quad z = -5 + 9t,$

(las coordenadas están medidas en Kms y t en horas).

Debido a fallas, H_b detiene su vuelo en el punto $(700, 700, 4)$, aterriza en el punto $(700, 700, 0)$.

Más tarde, se comunica con H_a. Este último percibe que el problema de H_b ocurrió una hora atrás y se dirige a auxiliarlo, a una velocidad de $200\frac{Kms}{h}$. ¿En cuánto tiempo llegará a su objetivo?

7.- Suponga que dos aviones describen trayectorias de vuelo dadas por:

$$A_1 : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = -2 + 7t \end{cases} , \qquad A_2 : \begin{cases} x = -3 + s \\ y = 2 - 4s \\ z = 1 + 6s \end{cases}$$

Probar que los aviones no chocarán.

8.- Hallar las ecuaciones simétricas de la recta L, la cual contiene al origen y es perpendicular al plano de las rectas:

$$L' : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-2}$$

$$L'' : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 - 4t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$$

9.- Un punto móvil se desplaza, en línea recta, en el espacio, de manera que en el instante $t_0 = 0$, sus coordenadas son:

$$x \ = \ 0, \qquad y \ = \ -5, \qquad z \ = \ 3;$$

en el instante $t_1 = 1$ sus coordenadas son:

$$x \ = \ 1, \qquad y \ = \ 0, \qquad z \ = \ 4.$$

Si se sabe que el punto móvil no choca con el plano

$6x - 2y + mz \ = \ d, \qquad$ con $\qquad d \ \neq \ 22,$

¿Cuánto vale m?

10.- Dados los puntos:

$A \ = \ (a_1, a_2, a_3); \qquad B \ = \ (b_1, b_2, b_3) \qquad$ y $\qquad C \ = \ (c_1, c_2, c_3),$

tales que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \ = \ 0,$$

probar que A, B y C pertenecen a un plano que pasa por el origen.

Sugerencia: considerar los vectores:

$\overrightarrow{A} \ = < a_1, a_2, a_3 >, \quad \overrightarrow{B} \ = < b_1, b_2, b_3 >, \quad \overrightarrow{C} \ = < c_1, c_2, c_3 >.$

Interpretar el determinante indicado, como:

$$\overrightarrow{A} \cdot \left(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}\right).$$

Luego, en el caso $\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C} \neq \overrightarrow{0}$, considerar el plano que pasa por el origen y tiene a $\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}$ como vector normal. (Si $\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C} = \overrightarrow{0}$, la solución es trivial).

Capítulo 2

Límites, continuidad,derivadas parciales

1) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6y^2}{x^{12}+y^4}, & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

¿Posee f alguna discontinuidad?

2) Sea $f(x,y) = x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{\operatorname{sen}(x^2y)}$, con $(x,y) \neq (0,0)$.

Hallar $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$.

Sugerencia: no emplear las reglas de derivación.

3) He aquí un ejemplo de una función que es diferenciable en un punto, pero sus derivadas parciales no son continuas en ese punto:

Sea $\quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Hallar $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y},$ y probar que no son continuas en $(0,0)$.

Demostrar, usando la definición, que f es diferenciable en $(0,0)$.

(En verdad, f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$).

4) Recordemos que la expresión $\dfrac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^3}$ significa que f ha sido derivada cinco veces: tres veces con respecto a y, dos veces con respecto a x (¡en ese orden!).

Usar un importante teorema, para hallar, en forma breve: $\dfrac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^3}$, si $f(x,y) = xe^{\operatorname{arctg} y}$.

5) Un cisne se encuentra en la superficie de un lago; el fondo de éste tiene por ecuación:

$$f(x,y) = -250 - 2x^2 - 3y^2$$

Si el cisne está ubicado en el punto $(2,1)$,

¿En cuál dirección debe nadar, para que **la profundidad debajo de él** disminuya lo más rápido posible?

¿En cuál dirección no cambia la profundidad?.

6) **¿Dónde está el error?**

Sea $\quad w = f(x,y,z) \quad$ y $\quad z = g(x,y)$.

Por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \qquad (*)$$

Como x e y son variables independientes, se tiene $\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$

Así, llegamos a:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

o sea, $\frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ $(**)$

En particular, si $w = 2x+y+3z$ y $z = \frac{1}{3}x+y,$ $(**)$

conduce a: **1=0**.

7) Demostrar que todo plano tangente al cono

$(z-1)^2 = x^2 + (y-7)^2,$ pasa por el punto $(0,7,1)$.

8) Supongamos que la elevación de una colina es dada por:

$f(x,y) = 200 - 4x^2 - y^2.$

¿En cuál dirección correrá el agua de lluvia, en el punto situado sobre el $(1,2,192)$?

9) Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$ una función derivable.

Consideremos

$$f(x,y) = g(x^2+y^2).$$

Probar que $\vec{\nabla} f(a,b)$ es paralelo a $a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$.

10) Una partícula que viaja con velocidad constante,

$3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, pasa por el punto $(0, 1, 1)$

y, después, choca con la superficie:

$$z = -x^2 + 6x - 9$$

La partícula rebota, con un ángulo de reflexión igual al ángulo de incidencia. Suponiendo que no pierde rapidez (celeridad),

¿Cuál es la velocidad de la partícula, después del rebote?

Capítulo 3

Máximos y Mínimos

1.- A un lado de un río – de $1Km$ de ancho – hay una central eléctrica.

Al otro lado, $3Kms$ corriente arriba, un centro comercial; tender cable por tierra cuesta $3000Bs$ por metro y tenderlo bajo el agua, $5000Bs$ por metro.

¿Cuál es el tendido más económico, desde la central hasta el centro comercial? (usar multiplicadores de Lagrange).

$3Km$

x

*centro comercial

$1Km$ y

2.- Hallar el punto, de la esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 27$, más cercano al punto $(1, 1, 1)$. ¿y el más alejado?

3.- Probar que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$f(x, y) = 5xe^y - x^5 - e^{5y}$ tiene sólo un punto crítico, el cual es un máximo local, pero no un máximo absoluto.

4.- ¿Para cuáles valores de k está garantizado – mediante el criterio del Hessiano – que $f(x, y) = x^2 + kxy + y^2$ tendrá:

a) en $(0, 0)$ un punto de silla?

b) en $(0, 0)$ un mínimo local?

¿Qué ocurre en el caso en el cual el criterio del Hessiano no permite, directamente, clasificar un punto crítico de f?

5.-

a) Probar que el valor máximo de $x^2y^2z^2$, sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, es:

$$\left(\frac{r^2}{3}\right)^3.$$

b) Usar la parte (a) para demostrar que para números no negativos x, y, z se cumple:

$$(xyz)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{x + y + z}{3}.$$

6.- La figura muestra un semicírculo adosado a un rectángulo. Si el área está fijada y el perímetro es mínimo, o si el perímetro está fijado y el área es máxima, usar multiplicadores de Lagrange, para concluir que la longitud del rectángulo es el doble de su altura.

h

l

7.- En relación a un sistema de coordenadas cartesianas, una persona está en el origen, en el interior de una plaza, cuyo contorno tiene por ecuación:

$$3y^2 + 4xy + 6x^2 \; = \; 140$$

La persona quiere salir de la plaza y caminar lo menos posible.

¿A cuál punto ser debe dirigir?

8.- Al tratar de **ajustar** una recta $y \; = \; mx + b$ a un conjunto de datos numéricos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \cdots, (x_n, y_n)$, usualmente se elige la recta que **minimiza** la suma de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos a la recta. En otras palabras, se desea encontrar los valores de m y b, tales que, sea mínimo el valor de:

$$w \; = \; (mx_1 + b - y_1)^2 + (mx_2 + b - y_2)^2 + \cdots + (mx_n + b - y_n)^2.$$

Probar que el objetivo se consigue, si:

$$
\begin{aligned}
m \sum_{i=1}^{n} x_i + bn &= \sum_{i=1}^{n} y_i \ , \\
m \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i
\end{aligned}
\qquad (*)
$$

Luego, la recta (llamada recta de regresión o recta de predicción) se determina al resolver $(*)$ $\quad$ (m y b son las incógnitas).

Hallar la recta de regresión, en el caso indicado en la figura:

y $\qquad$ $(2,3)$

3

$(0,1)$

x

$(-2,0)$ $\qquad$ 2

9.- Demostrar que de todos los triángulos con perímetro dado, el triángulo equilátero posee el área máxima.

Sugerencia: usar la fórmula de Herón, para el área de un triángulo de lados a, b y c :

$$S \ = \ \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

donde,

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

10.- Dentro de un triángulo, existe un punto P, tal que la suma de los cuadrados de sus distancias a los lados de dicho triángulo es mínima. Hallar dicho mínimo.

b $\quad z \quad$ y $\quad$ c

P $\quad x$

a

Sugerencia: minimizar $x^2 + y^2 + z^2$, con la condición:

$$\frac{ax}{2} + \frac{bz}{2} + \frac{cy}{2} = A$$

(A es el área del triángulo).

Capítulo 4

Integración

1) Evaluar:

a.- $\displaystyle\int_0^2 \int_x^2 x\sqrt{1+y^3}\; dy\; dx$

b.- $\displaystyle\int_0^{\ln 10} \int_{e^x}^{10} \frac{1}{\ln y}\; dy\; dx \qquad (integral\ \ impropia)$

c.- $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\arccos y} \operatorname{sen} x\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}\; dx\; dy$

d.- $\displaystyle\int_0^1 \int_{i/2}^{1/2} e^{-x^2}\; dx\; dy$

e.- $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \frac{\operatorname{sen} y}{y}\; dy\; dx \qquad (integral\ \ impropia)$

Sugerencia: para resolver estas cinco integrales, invertir el orden de integración.

2) Hallar: $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2}\; dy\; dx\; dz$

3) Demostrar que: si D es el rectángulo: $x_0 \leq x \leq x_1, \quad y_0 \leq y \leq y_1$,

entonces:

$$\iint\limits_D \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}\; dx\; dy \;=\; F(x_1,y_1) - F(x_0,y_1) - F(x_1,y_0) + F(x_0,y_0).$$

Sugerencia: aplicar, **dos veces**, un teorema fundamental

(Asumir que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ son continuas).

4) Evaluar: $\displaystyle\iint_R \operatorname{sen}(9x^2 + 4y^2)\, dA$, donde,

R es la región en el primer cuadrante, acotada por la elipse

$$9x^2 + 4y^2 = 1.$$

Sugerencia: realizar un cambio de variables apropiado.

5) Evaluar: $\displaystyle\iint_R e^{y-2x}\, dA$, donde,

R es la región encerrada por:

$y = 2x - 1, \quad y = 2x + 1, \quad y = 2 - 2x, \quad y = 4 - 2x.$

Igual sugerencia que en (4).

6.- Calcular:

$$\int_C (2xy^3 - y^2 \cos x)\, dx + (1 - 2y \operatorname{sen} x + 3x^2y^2)\, dy,$$

donde, C es el arco de la parábola:

$x = \dfrac{\pi}{2} y^2$, de $P_1 = (0, 0)$ a $P_2 = \left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$.

Sugerencia: probar primero, que la integral de línea no depende del camino usado para ir de P_1 a P_2.

7.- Usar el teorema de Stokes, para calcular:

$$\oint_{\Gamma} (8x - 2y)\ dx + y\ dy + 3z\ dz,$$

donde, Γ es la frontera del triángulo equilátero, situado en el plano $-3x + \sqrt{3}z + 6 \ = \ 0$, de vértices:

$A \ = \ (2, 2, 0)$, $B \ = \ (2, 6, 0)$ y $C \ = \ (2 + \sqrt{3}, 4, 3)$

(la orientación de Γ es en el sentido de A para C, para B,

para A).

8.- Dado $\overrightarrow{F}(x, y, z) \ = \ xy^2 \overleftarrow{i} + yz\overrightarrow{j} + zx^2\overrightarrow{k}$, hallar el flujo de $\overrightarrow{F}$ a lo largo de S, donde, S es la superficie del sólido encerrado por los cilindros $x^2 + y^2 \ = \ 1$ y $x^2 + y^2 \ = \ 4$

y entre los planos $z = 1$ y $z = 3$.

Sugerencia: Usar el teorema de la divergencia.

9.- Sea C el segmento que va de (x_1, y_1) a (x_2, y_2).

Directamente se puede probar que:

$$\int_C -y\ dx + x\ dy \ = \ x_1y_2 - x_2y_1.$$

También se puede, usando el Teorema de Green. ¿Como?

10.-

a) Probar que una condición necesaria y suficiente para que $\oint_C \frac{\partial u}{\partial x}\ dy - \frac{\partial u}{\partial y}\ dx$ sea cero, para toda trayectoria cerrada, simple, C, en una región R (donde u es continua y tiene derivadas parciales, de orden dos, continuas),

es que $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

b) Probar que $\quad \displaystyle\oint_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} \neq 0$,

donde, C es la trayectoria indicada en la figura:

y

$(-1,1) = E$ $\qquad$ $D = (1,1)$

x

$B = (1,-1)$

$(-1,-1) = A$

Hallar u, tal que:

$$\oint_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \oint_C \frac{\partial u}{\partial x}\,dy - \frac{\partial u}{\partial y}\,dx,$$

y, además, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

¿Hay alguna contradicción de los resultados de la parte (b), con respecto a la parte (a)?

Capítulo 5

Respuestas e Indicaciones del capítulo 1

1) i)

$\overrightarrow{b}$

θ

0 $\quad \overrightarrow{a}$

$$
\begin{aligned}
\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|^2 &= \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \cdot \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = \\
&= \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b} = \\
&= \|\overrightarrow{a}\|^2 + 2\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\| \cos\theta + \|\overrightarrow{b}\|^2 = 169 + 120\cos\theta
\end{aligned}
$$

Luego, el valor máximo de $\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|^2$ se alcanza cuando $\theta = 0°$, y es: 289.

Así que, el valor máximo de $\left\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right\|$ es 17

ii) Cuando $\theta = 180°$,

$\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|^2$ toma su valor mínimo: 49.

Por lo tanto, el valor mínimo de $\left\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right\|$ es 7.

iii) Cuando $\theta = 90°$,

se tiene: $\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\| = 13$.

2) Un paralelogramo con diagonales perpendiculares es un **rombo**.

y

$(3,4)$ $(m,4)$

x

$(0,0)$ $(\lambda,0)$

Dicho rombo tiene sus lados de longitud: 5

Luego, $m = 8$, $\lambda = 5$.

3)

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$$

Si $\overrightarrow{w}$ es paralelo a $\overrightarrow{v}$, se tiene:

$$\overrightarrow{w} \;=\; \lambda\,\overrightarrow{i} - 2\lambda\overrightarrow{j} - 2\lambda\,\overrightarrow{k}$$

.

Si, además, $\overrightarrow{w}$ es unitario, se cumple:

$\lambda^2 + 4\lambda^2 + 4\lambda^2 \;=\; 1.$

O sea, $\lambda \;=\; \pm\dfrac{1}{3}.$

Así que:

$\overrightarrow{w} \;=\; \dfrac{1}{3}\overrightarrow{i} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{j} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{k}$ ó $\overrightarrow{w} \;=\; -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{i} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{j} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{k}$

Un vector $\overrightarrow{u} \;=\; a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j} + c\,\overrightarrow{k}$, unitario y perpendicular a $\overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j} - 2\,\overrightarrow{k}$, verifica:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 \;=\; 1 \\ \\ a - 2b - 2c \;=\; 0 \end{cases}$$

Si, además, $\overrightarrow{u}$ es paralelo al $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{k}$,

debe cumplirse: $a \;=\; b \;=\; -2c.$

Resolviendo el sistema indicado, se sigue:

$\overrightarrow{u} \;=\; \dfrac{2}{3}\overrightarrow{i} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{j} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{k}$ ó $\overrightarrow{u} \;=\; -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{i} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{j} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{k}.$

4)

plano:
$x - 2y + 2z + 8 = 0$

plano:
$x - 2y + 2z - 2 = 0$

Luego, la distancia entre dichos planos (altura del prisma) es:

$$\frac{|-2-8|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{10}{3}$$

Ahora, el área de una de las bases del prisma es:

$$\frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{2},$$

donde,

$A = (0,0,1), \qquad B = (2,0,0), \qquad C = (0,-1,0).$

Así que:

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}, \qquad \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k},$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3\overrightarrow{j} \ ,$$

volumen del prisma = área de la base $\times$ altura $= \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{10}{3} = 5$

5) Este es un caso ilustrativo del famoso teorema de las tres perpendiculares.

El punto $(0, 5, 5)$ pertenece a L y a α.

Además $< -5, -4, 2 > \cdot < -2, 2, -1 > = 0$.

Luego, L está contenida en α.

$$L' : \frac{x-2}{-2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+4}{-1}.$$

$P_0 = (0, 0, -5)$.

$$L'' : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -5 + 2t \end{cases}$$

$P_1 = (0, 5, 5)$.

Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$, un punto cualquiera de L'.

Entonces, $\overrightarrow{PP_1} \;=\; x_0\,\overrightarrow{i} + (y_0-5)\,\overrightarrow{j} + (z_0-5)\,\overrightarrow{k}\,.$

Luego.

$\overrightarrow{PP_1}\cdot(-5\,\overrightarrow{i} - 4\,\overrightarrow{j} + 2\,\overrightarrow{k}\,) \;=\; -5x_0 - 4(y_0-5) + 2(z_0-5) \;=$

$= \; -5x_0 - 4y_0 + 2z_0 + 10 \;=$

$= \; -5x_0 - 4(-x_0) + 2\left(\dfrac{x_0}{2} - 5\right) + 10 \;=\; 0$

(hemos usado las ecuaciones simétricas de L').

Conclusión: $\overrightarrow{PP_1} \perp L.$

6) Sea t_1 el tiempo transcurrido desde el instante de separación hasta el momento de la falla de H_b;

Entonces:

$$700 \;=\; 10 + 690t_1,$$

Luego, $t_1 \;=\; 1hora.$

Posición de H_a, cuando se dirige a auxiliar a H_b :

$$(10 + 300\cdot 2, -5 + 352, 5\cdot 2, -5 - 57, 5\cdot 2),$$

o sea, $(610, 700, -120).$

Su distancia a la posición del accidentado H_b es:

$$\sqrt{(610-700)^2 + (700-700)^2 + (-120)^2} \;=\; 150Kms$$

Luego, H_a se encuentra con H_b, al cabo de

$$\frac{150}{200} horas \;=\; \frac{3}{4} horas \;=\; 45 minutos.$$

7) Formamos el sistema:

$$\begin{cases} 3 - 2t \;=\; -3 + 5 \\ \\ 4 + t \;=\; 2 - 4s, \end{cases}$$

cuya solución es: $t \;=\; \frac{26}{7}$, $s \;=\; -\frac{10}{7}$.

Estos valores, sustituidos en: A_1, dan $z \;=\; 24$;

mientras que en A_2, se obtiene: $z \;=\; -\frac{53}{7}$.

8) Tenemos:

$$L \;:\; \frac{x}{a} \;=\; \frac{y}{b} \;=\; \frac{z}{c}.$$

Por otro lado, el plano de las rectas L' y L'' tiene,

como vector normal:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \;=\; \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} \;=\; 12\,\overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j} - 10\,\overrightarrow{k},$$

donde,

$$A \;=\; (1,2,3), \qquad\qquad \text{punto de} \quad \text{L'}$$

$$B \;=\; (3,4,5), \qquad\qquad \text{punto de} \quad \text{L''}$$

$$C \;=\; (4,0,7), \qquad\qquad \text{punto de} \quad \text{L''}$$

(Notar que L' y L'' son paralelas)

Luego, podemos tomar:

$$a \;=\; 6, \qquad b \;=\; -1, \qquad c \;=\; -5.$$

Así que:

$$L \;: \qquad \frac{x}{6} \;=\; \frac{y}{-1} \;=\; \frac{z}{-5}$$

9) las ecuaciones simétricas de la trayectoria del punto son:

$$\frac{x}{1} \;=\; \frac{y+5}{5} \;=\; \frac{z-3}{1}$$

Esta recta debe ser paralela al plano

$6x - 2y + mz \;=\; d.$

Luego, $< 1,5,1 > \cdot < 6,-2,m > \;=\; 0$

o sea, $m \;=\; 4$

Además, la condición $d \;\neq\; 22$ garantiza que dicha recta no está contenida en el plano dado.

10) En el caso $\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C} = a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j} + c\,\overrightarrow{k}$, con a, b y c,

no nulos a la vez, consideremos el plano α,

dado por:

$ax + by + cz = 0.$

Como $\overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) = 0$ (hipótesis), se tiene:

$a_1a + a_2b + a_3c = 0.$

Luego, A está en α.

Análogamente, como

$\overrightarrow{B} \cdot (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) = 0$ y $\overrightarrow{C} \cdot (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) = 0$,

resulta que B y C están en α.

Si es $\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C} = \overrightarrow{0}$ (Es decir, $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{C}$ son paralelos), analicemos el caso en el cual $\overrightarrow{A}$ no es paralelo a $\overrightarrow{B}$.

Como $\overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) = 0$, entonces, también:

$(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) \cdot \overrightarrow{C} = 0$ y estamos en una situación análoga a la probada.

Si $\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C} = \overrightarrow{0}$ y $\overrightarrow{A}(\neq \overrightarrow{0})$ es paralelo a $\overrightarrow{B}$

(luego, también, paralelo a $\overrightarrow{C}$),

consideramos el plano β, dado por:

$x + y - \dfrac{a_1 + a_2}{a_3} z = 0$ (Asumiendo que $a_3 \neq 0$).

Resulta que A, B y C están en β.

(Análogamente en el caso $a_2 \neq 0$ ó $a_1 \neq 0$).

Por último, si $\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C} = \overrightarrow{0}$ y $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{0}$, (suponiendo que $b_3 \neq 0$), consideramos el plano:

$$\gamma : \qquad x + y - \frac{b_1 + b_2}{b_3} z \; = \; 0.$$

De manera que, A,B y C están en γ.

P.D. Si tuviéramos: $\overrightarrow{A} \; = \; \overrightarrow{0} \; = \; \overrightarrow{B}$ y $c_3 \neq 0$,

entonces, A, B y C pertenecen al plano:

$$x + y - \frac{c_1 + c_2}{c_3} z \; = \; 0.$$

Capítulo 6

Respuestas e Indicaciones del capítulo 2

(1) Para $y = x^3$ nos queda:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^6 x^6}{x^{12}+x^{12}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

Luego, f no es continua en $(0,0)$. Este es el único punto de discontinuidad de f.

(2)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,0)-f(1,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)(1+h)^{-3}-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(1+h)^2}-1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2h-h^2}{h(1+h)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-2-h}{(1+h)^2} = -2$$

(3) Obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \;=\; \begin{cases} 2x\left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) - \dfrac{1}{x^2+y^2}\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)\right], (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \qquad\qquad , (x,y) \;=\; (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \;=\; \begin{cases} 2y\left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) - \dfrac{1}{x^2+y^2}\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)\right], (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \qquad\qquad , (x,y) \;=\; (0,0) \end{cases}$$

Vemos, entonces, que no existen los límites:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Por ejemplo, al acercarnos por el camino $y \;=\; x$, todas las expresiones involucradas tienen límite,

cuando $x \to 0$, excepto $\dfrac{1}{x}\cos\left(\dfrac{1}{2x^2}\right)$.

Por otro lado, f diferenciable en $(0,0)$ significa:

Dado $\epsilon > 0$, existen:

$\epsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ y $\epsilon_2(\Delta x, \Delta y)$, tales que:

$$f(\Delta x, \Delta y) \;=\; f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\Delta y +$$

$$+\, \epsilon_1(\Delta x, \Delta y)\cdot \Delta x + \epsilon_2(\Delta x, \Delta y)\cdot \Delta y,$$

con

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \epsilon_1(\Delta x, \Delta y) \;=\; 0 \;=\; \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \epsilon_2(\Delta x, \Delta y) \qquad (*)$$

En el presente caso, dado $\epsilon > 0$, debemos hallar ϵ_1 y ϵ_2, tales que:

$$[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] \operatorname{sen} \left(\frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right) = \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

Luego, basta tomar:

$$\begin{aligned} \epsilon_1(\Delta x, \Delta y) &= (\Delta x) \operatorname{sen} \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ \epsilon_2(\Delta x, \Delta y) &= (\Delta y) \operatorname{sen} \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \end{aligned}$$

Obviamente, se verifica $(*)$.

(4) Aplicamos el Teorema de Euler (teorema de la derivada mixta) el cual nos indica que podemos, en el presente caso, efectuar la derivación en el **orden** que consideremos apropiado.

Vamos, entonces, a hallar $\dfrac{\partial^5 f}{\partial y^3 \partial x^2}$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{\arctan y}$, resulta:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

Luego, $\quad \dfrac{\partial^5 f}{\partial y^3 \partial x^2} = 0$

(5)

z

y

x

Sea $\qquad z \;=\; -f(x,y).$

Queremos saber, en cuál dirección debe nadar el cisne para que z **disminuya** lo más rápidamente posible, en el punto $(2,1)$.

Sabemos que esta dirección viene dada por:

$$-\overrightarrow{\nabla} z(2,1) \;=\; -\frac{\partial z}{\partial x}(2,1)\,\overrightarrow{i} - \frac{\partial z}{\partial y}(2,1)\,\overrightarrow{j}$$

Como, $\dfrac{\partial z}{\partial x} \;=\; 4x; \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} \;=\; 6y,$

resulta:

$$-\overrightarrow{\nabla} z(2,1) \;=\; -8\,\overrightarrow{i} - 6\,\overrightarrow{j}.$$

Por otro lado, como. La derivada direccional de z, en $(2,1)$, en la dirección de un vector $\overrightarrow{v}$, es dada por: $\overrightarrow{v} \cdot (8\,\overrightarrow{i} + 6\,\overrightarrow{j})$, tenemos que z

no cambia (por lo tanto f tampoco), en $(2,1)$, si $\overrightarrow{v}$ es **perpendicular** a $8\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j}$.

O sea, si

$\overrightarrow{v} \;=\; \lambda(-3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}), \qquad \lambda \neq 0.$

(6) Se trata de un engaño causado por un abuso de notación. En $(*)$, siendo rigurosos, la $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ de la izquierda no es la misma que la $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ que aparecen en el segundo miembro.

Por ejemplo, si $w \;=\; x + y + z, \qquad z \;=\; 2x + y,$

Entonces, en verdad, $w \;=\; 3x + 2y$.

De modo que, el primer miembro de $(*)$ es igual 3.

Mientras que la $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ que aparecen (debido a una abusiva notación) en el segundo miembro de $(*)$ es igual a 1.

(7) Sea (x_0, y_0, z_0), un punto del cono dado, tal que

$(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 7, 1)$ (vértice del cono).

Consideremos $F(x, y, z) \;=\; (z-1)^2 - x^2 - (y-7)^2$

Luego, $\overrightarrow{\nabla} F(x_0, y_0, z_0) \;=\; -2x_0\overrightarrow{i} - 2(y_0 - 7)\overrightarrow{j} + 2(z_0 - 1)\overrightarrow{k}$.

De modo que, el plano tangente al cono, en el punto (x_0, y_0, z_0) es:

$-2x_0 x - 2(y_0 - 7)y + 2(z_0 - 1)z + d \;=\; 0.$

Como (x_0, y_0, z_0) está en dicho plano, resulta que la ecuación del mismo es:

$-2x_0 x - 2(y_0 - 7)y + 2(z_0 - 1)z + 2{x_0}^2 + 2(y_0 - 7)y_0 - 2(z_0 - 1)z_0 \;=\; 0.$

Sustituyendo, en el primer miembro, los valores

$x \;=\; 0, \quad y \;=\; 7, \quad z \;=\; 1,$ obtenemos:

$$-14(y_0-7)+2(z_0-1)+2{x_0}^2+2{y_0}^2-14y_0-2{z_0}^2+2z_0 \quad =$$

$$= \quad -28y_0+4z_0+2{x_0}^2+2{y_0}^2-2{z_0}^2+96 \quad =$$

$$= \quad 2\Big[{y_0}^2-14y_0+49+{x_0}^2-{z_0}^2+2z_0-1\Big] \quad =$$

$$= \quad 2\Big[(y_0-7)^2+{x_0}^2-(z_0-1)^2\Big] \quad = \quad 2\cdot 0 \; = \; 0$$

Conclusión: $(0,7,1)$ está en el plano tangente citado.

(8) El agua de lluvia correrá en la dirección del descenso más rápido (ley Física), o sea, en la dirección opuesta de $\overrightarrow{\nabla} f(1,2)$.

Como $\quad \overrightarrow{\nabla} f(1,2) \quad = \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)\,\overrightarrow{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)\,\overrightarrow{j}$,

la respuesta es:

el agua de la lluvia correrá, en el punto de la colina situado sobre el $(1,2)$, en la dirección indicada por el vector:

$8\,\overrightarrow{i} + 4\,\overrightarrow{j}$

(9) Sea $u \;=\; x^2+y^2$.

Luego, queda f como una función de u y u como una función x e y. Aplicando la regla de la cadena, se tiene:

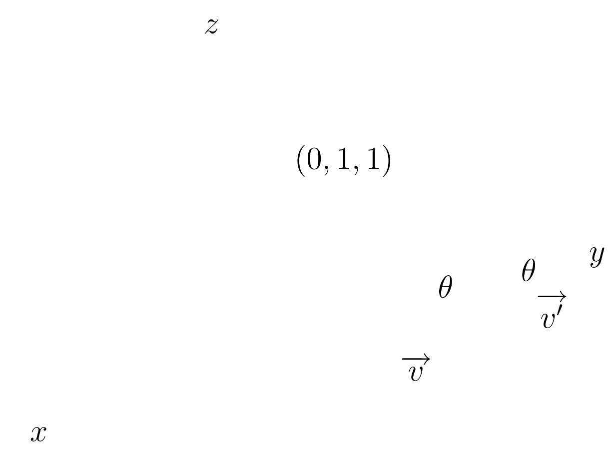
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad = \quad g'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \quad = \quad 2xg'(u).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad = \quad g'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \quad = \quad 2yg'(u).$$

Luego, $\overrightarrow{\nabla} f(a,b) \quad = \quad 2ag'(a^2+b^2)\,\overrightarrow{i} + 2bg'(a^2+b^2)\,\overrightarrow{j}$.

O sea, $\quad \overrightarrow{\nabla} f(a,b) \quad = \quad 2g'(a^2+b^2)\Big(a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j}\Big)$

(10)



Ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la partícula, antes del choque con el cilindro:

$$\begin{cases} x &= 3t \\ \\ y &= 1+4t \\ \\ z &= 1-t \end{cases}$$

P_0 : punto donde la partícula golpea al cilindro:

$1 - t \;\; = \;\; -9t^2 + 18t - 9$,

o sea, $t \;\; = \;\; 1$.

De manera que, el punto P_0 es $(3, 5, 0)$.

El plano en el cual ocurre el fenómeno del choque y rebote de la partícula, tiene como vector normal: $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$, donde

$\overrightarrow{v} \;=\; 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, y, $\overrightarrow{u}$ es un vector normal al cilindro,

en $(3, 5, 0)$.

o sea, $\overrightarrow{u} \;=\; \overrightarrow{\nabla} F(3, 5, 0)$, donde,

$F(x, y, z) \;=\; z + x^2 - 6x + 9$.

Luego, $\overrightarrow{u} \;=\; \overrightarrow{k}$. Por lo tanto, $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} = 4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$.

Así que, obtenemos, para el plano del choque y rebote, la ecuación:

$4x - 3y + 3 \;=\; 0 \qquad\qquad (*)$

Llamemos $\overrightarrow{v}' \;=\; a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$, a la velocidad de la partícula, después del rebote.

Sabemos que: $\overrightarrow{v}' \cdot \overrightarrow{k} \;=\; -\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{k}$, (aquí usamos que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión)

Luego, $c \;=\; 1$.

Por otro lado,

$\overrightarrow{v}' \perp (4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j})$ (pues $\overrightarrow{v}'$ es paralelo al plano dado por (*)).

Así, $\qquad 49 - 3b \;=\; 0$.

También, por hipótesis,

$a^2 + b^2 + c^2 \;=\; 3^2 + 4^2 + (-1)^2 \;=\; 26$.

Entonces, obtenemos: $a \;=\; \pm 3, \qquad b \;=\; \pm 4$.

Entonces, matemáticamente, hay dos opciones para $\overrightarrow{v}'$.

Una es:

$\overrightarrow{v}' \;=\; 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$

(La otra opción es: $\overrightarrow{v}' \;=\; -3\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \;=\; -\overrightarrow{v}$)

Capítulo 7

Respuestas e Indicaciones del capítulo 3

1.- Queremos minimizar la expresión:

$(3-x)3\cdot 10^6 + 5\cdot 10^6 y,$ bajo la condición: $x^2+1 \;=\; y^2.$

Consideramos:

$$F(x,y,\lambda) \;=\; 3\cdot 10^6(3-x) + 5\cdot 10^6 y + \lambda(x^2-y^2+1)$$

Luego,

$$F_x \;=\; -3\cdot 10^6 + 2\lambda x$$

$$F_y \;=\; 5\cdot 10^6 - 2\lambda y$$

$$F_\lambda \;=\; x^2-y^2+1$$

Formamos al sistema:

$$\begin{cases} -3 \cdot 10^6 + 2\lambda x &= 0 \\ \\ 5 \cdot 10^6 - 2\lambda y &= 0 \\ \\ x^2 - y^2 + 1 &= 0 \end{cases}$$

Así, $\qquad 3y \;=\; 5x.$

Sustituyendo en la última ecuación del sistema, obtenemos:

$x \;=\; \dfrac{3}{4}Km.$ (descartamos valores negativos de x e y).

Resulta: $y \;=\; \dfrac{5}{4}Km.$

El costo respectivo es: 13.000.000 Bs. Este es el costo mínimo, pues no aparecen más puntos críticos aceptables y los casos extremos:

$x \;=\; 0, \qquad y \;=\; 1;$

$x \;=\; 3, \qquad y \;=\; \sqrt{10},$

tienen un costo mayor: 14.000.000 Bs y $5\sqrt{10}$ millones de Bs, respectivamente.

2.- Deseamos minimizar:

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2, \qquad$ con la condición: $x^2+y^2+z^2 \;=\; 27.$

Sea:

$F(x,y,z,\lambda) \;=\; (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-27).$

Luego,

$$
\begin{aligned}
F_x &= 2(x-1)+2\lambda x \\
F_y &= 2(y-1)+2\lambda y \\
F_z &= 2(z-1)+2\lambda z \\
F_\lambda &= x^2-y^2+z^2-27
\end{aligned}
$$

Resolvemos el sistema

$$
\begin{cases}
2(x-1)+2\lambda x = 0 \\
2(y-1)-2\lambda y = 0 \\
2(z-1)+2\lambda z = 0 \\
x^2-y^2+z^2 = 27
\end{cases}
$$

De las tres primeras ecuaciones, se obtiene: $x = y = z$.

Sustituyendo en la última, resulta: $x = y = z = \pm 3$

De manera que se obtienen los puntos:

$(3,3,3) \qquad (-3,-3,-3)$.

Claro que el $(3,3,3)$ es el más cercano al $(1,1,1)$. El segundo, el más alejado del punto dado.

3.- $$\begin{aligned} f(x,y) &= 5xe^y - x^5 - e^{5y} \\ f_x(x,y) &= 5e^y - 5x^4 \\ \\ f_y(x,y) &= 5xe^y - 5e^{5y} \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 5e^y - 5x^4 = 0 \\ \\ 5xe^y - 5e^{5y} = 0 \end{cases}$$

De la 1^a ecuación, resulta: $e^y = x^4$.

Sustituyendo en la segunda, se sigue: $5x^5 - 5x^{20} = 0$.

O sea, $x^5(1 - x^{15}) = 0$

Pero $x \neq 0$ (pues $e^y = x^4$).

Luego, $x^{15} = 1$

Es decir, $x = 1$

Entonces, $y = 0$

Por otro lado,

$f_{xx}(x,y) = -20x^3$; $f_{yy}(x,y) = 5xe^y - 5e^{5y}$; $f_{xy} = 5e^y$.

Luego,

$H(1,0) = f_{xx}(1,0) \cdot f_{yy}(1,0) - f_{xy}^2(1,0) = (-20) \cdot (-20) - 25 = 375 > 0$.
($H(1,0)$ simboliza el Hessiano de f en $(1,0)$)

Como, además, $f_{xx}(1,0) \;=\; -20 < 0$,

se sigue que $(1,0)$ es un punto de máximo local para f.

Por otra parte,

$f(x,0) \;=\; 5x - x^5 - 1$

Así, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x,0) \;=\; +\infty$

Luego, $f(1,0)$ no es un máximo absoluto.

4.-

a) $f(x,y) \;=\; x^2 + kxy + y^2$

$$f_x(x,y) \;=\; 2x + ky$$

$$f_y(x,y) \;=\; kx + 2y$$

$$f_{xx}(x,y) \;=\; 2$$

$$f_{yy}(x,y) \;=\; 2$$

$$f_{xy}(x,y) \;=\; k$$

Luego, $H(0,0) \;=\; f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0) \;=$

$= \;4 - k^2.$

Como queremos $\quad H(0,0) < 0$,

obtenemos: $\quad 4 - k^2 < 0,$

o sea, $\quad |k| > 2.$

b) En este caso, debe ser $\quad 4 - k^2 > 0$. (ya tenemos $\; f_{xx}(0,0) > 0$)

Es decir, $\quad |k| < 2.$

Por otro lado, el sistema:

$$\begin{cases} 2x + ky &= 0 \\ \\ kx + 2y &= 0 \end{cases}$$

tiene solución no trivial, si, y sólo si,

$$\begin{vmatrix} 2 & k \\ \\ k & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(o sea, } k \pm 2\text{)}.$$

Luego, si (x_0, y_0) es un punto crítico, distinto del $(0,0)$, tenemos:

$H(x_0, y_0) \;=\; 4 - k^2 \;=\; 0.$

Pero como, en esa situación, es:

$f(x,y) \;=\; x^2 + 2xy + y^2 \quad$ ó $\quad f(x,y) \;=\; x^2 - 2xy + y^2,$

se tiene que los puntos de la recta $y = -x$ ó de la recta $y = x$ (según sea el caso), son puntos de mínimo de f.

5.- Consideremos:

a) $F(x, y, z, \lambda) \;=\; x^2y^2z^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - r^2).$

Resulta:

$$\begin{aligned} f_x &= 2xy^2z^2 + 2\lambda x \\ f_y &= 2yx^2z^2 + 2\lambda y \\ f_z &= 2zx^2y^2 + 2\lambda z \\ f_\lambda &= x^2 + y^2 + z^2 - r^2 \end{aligned}$$

Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} 2xy^2z^2 + 2\lambda x &= 0 \\ 2yx^2z^2 + 2\lambda y &= 0 \\ 2zx^2y^2 + 2\lambda z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \end{cases}$$

Multiplicando la 1^a ecuación por x, la 2^a por y, la tercera por z, sumando y tomando en cuenta la última ecuación, se obtiene:

$6x^2y^2z^2 + 2\lambda r^2 \quad = \quad 0$

Así que: $\qquad \lambda \quad = \quad -\dfrac{3x^2y^2z^2}{r^2}.$

Sustituyendo este valor de λ en la 1^a ecuación del sistema, resulta:

$xy^2z^2 - \dfrac{3x^3y^2z^2}{r^2} \quad = \quad 0.$

Luego, $\qquad \left(1 - \dfrac{3x^2}{r^2}\right) \cdot xy^2z^2 \quad = \quad 0$

De modo que: $\qquad x^2 \quad = \quad \dfrac{r^2}{3}.$

Realizando una labor análoga, con la 2^a y con la 3^a ecuación del sistema, se obtiene, respectivamente,

$$y^2 = \frac{r^2}{3}, \qquad z^2 = \frac{r^2}{3}.$$

El valor de $x^2y^2z^2$ que se obtiene es: $\left(\frac{r^2}{3}\right)^3$.

Dicho valor es máximo(el mínimo ocurre cuando una

de las variables x, y ó z es cero).

Si no fuera así, debería hacer otros puntos críticos, pues $x^2y^2z^2$ alcanza su máximo y su mínimo en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

b) Son dados x, y, z, no negativos.

Luego, podemos escribir:

$$x = x_0^2, \quad y = y_0^2, \quad z = z_0^2,$$

para alguna terna (x_0, y_0, z_0).

Sea $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r^2$.

Por lo probado en (a), se cumple:

$$x_0^2 \cdot y_0^2 \cdot z_0^2 \leq \left(\frac{r^2}{3}\right) = \left(\frac{x_0^2 + z_0^2 + z_0^2}{3}\right)^3.$$

O sea, $\qquad x \cdot y \cdot z \leq \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^3$

Es decir:

$$(x \cdot y \cdot z)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{x + y + z}{3}.$$

6.-

y

x

(i) Área de la figura:

$$A = xy + \frac{\pi x^2}{8} \qquad (1)$$

Perímetro de la figura:

$$P = x + 2y + \pi\frac{x}{2} \qquad (2)$$

Supongamos

$$xy + \frac{\pi x^2}{8} = A_0 \qquad (3)$$

Queremos minimizar $\qquad x + 2y + \pi\dfrac{x}{2}$.

Consideremos:

$$F(x, y, \lambda) = x + 2y + \pi\frac{x}{2} + \lambda\left(xy + \frac{\pi x^2}{8} - A_0\right).$$

Tenemos:

$$F_x = 1 + \frac{\pi}{2} + \lambda y + \frac{\lambda\pi x}{4}$$

$$F_y = 2 + \lambda x$$

$$F_\lambda = xy + \frac{\pi x^2}{8} - A_0.$$

Formamos el sistema:

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{\pi}{2} + \lambda y + \lambda \dfrac{\pi x}{4} & = & 0 \\ \\ 2 + \lambda x & = & 0 \\ \\ xy + \dfrac{\pi x^2}{8} - A_0 & = & 0 \end{cases}$$

De la 2^a ecuación, se sigue:

$$x \;=\; -\frac{2}{\lambda} \qquad (*)$$

Sustituyendo esta expresión de x, en la 1^a ecuación, obtenemos:

$$1 + \frac{\pi}{2} + \lambda y - \frac{\pi}{2} \;=\; 0$$

Es decir, $\quad y \;=\; -\dfrac{1}{\lambda} \qquad (**)$

Así, de $(*)$ y $(**)$ se deriva: $x \;=\; 2y$.

Reemplazando en la última ecuación del sistema, resulta:

$$x \;=\; 2\sqrt{\frac{2A_0}{4+\pi}} \qquad (4)$$

Por otro lado, despejando y en (3), sustituyendo en (2), queda:

$$P(x) \;=\; x + 2\frac{A_0}{x} - \frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{2}x$$

Luego,

$$P'(x) \;=\; 1 - 2\frac{A_0}{x^2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$$

$$P''(x) \;=\; 2\frac{A_0}{x^3}.$$

De manera que se cumple:

$$P'\left(2\sqrt{\frac{2A_0}{4+\pi}}\right) \;=\; 0 \text{ y } P''\left(2\sqrt{\frac{2A_0}{4+\pi}}\right) > 0.$$

Así, para el valor de x, dado por (4), el perímetro es mínimo.

(ii) Ahora, sea

$$x + 2y + \frac{\pi x}{2} \quad = \quad P_0 \qquad\qquad (5).$$

Queremos maximizar:

$$xy + \frac{\pi x^2}{8}$$

Introducimos: $\quad G(x, y, \lambda) = xy + \pi\frac{x^2}{8} + \lambda\left(x + 2y + \frac{\pi x}{2} - P_0\right).$
Luego,

$$\begin{aligned} G_x &= y + \frac{\pi x}{4} + \lambda + \lambda\frac{\pi}{2} \\ G_y &= x + 2\lambda \\ G_\lambda &= x + 2y + \frac{\pi x}{2} - P_0 \end{aligned}$$

Debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} y + \dfrac{\pi}{4}x + \lambda + \lambda\dfrac{\pi}{2} = 0 \\ x + 2\lambda = 0 \\ x + 2y + \dfrac{\pi x}{2} - P_0 = 0 \end{cases}$$

De la 2^a ecuación, obtenemos:

$$x = -2y \qquad (6)$$

Sustituyendo (6) en la 1^a ecuación, resulta:

$$y = -\lambda \qquad (7)$$

.

Así, de (6) y (7), obtenemos:

$$x = 2y.$$

Usando esta última igualdad en la 3^a ecuación del sistema, obtenemos:

$$x = \frac{2P_0}{4+\pi} \qquad (8)$$

Por otra parte, despejando y en (5) y usando (1), obtenemos:

$$A(x) = \frac{P_0}{2}x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{8}x^2.$$

Por lo tanto,

$$A'(x) = \frac{P_0}{2} - x - \frac{\pi}{4}x$$

$$A''(x) = -1 - \frac{\pi}{4}.$$

Así, podemos verificar que:

$$A'\left(\frac{2P_0}{4+\pi}\right) \;=\; 0 \quad \text{y} \quad A''\left(\frac{2P_0}{4+\pi}\right) < 0.$$

Es decir para x dado por (8), se tiene que el área de la figura es máxima.

Notemos que, tanto en el caso (i) como en el (ii) es:

$$x \;=\; 2y.$$

7.- Se trata de minimizar $x^2 + y^2$, con la condición:

$$3y^2 + 4xy + 6x^2 \;=\; 140$$

Sea

$$F(x, y, \lambda) \;=\; x^2 + y^2 + \lambda(3y^2 + 4xy + 6x^2 - 140).$$

Luego,

$$F_x \;=\; 2x + 4\lambda y + 12\lambda x$$

$$F_y \;=\; 2y + 6\lambda y + 4\lambda x$$

$$F_\lambda \;=\; 3y^2 + 4xy + 6x^2 - 140$$

Estudiemos el sistema:

$$
\begin{cases}
2x + 4\lambda y + 12\lambda x &= 0 \\
\\
2y + 6\lambda y + 4\lambda x &= 0 \qquad\qquad (*) \\
\\
3y^2 + 4xy + 6x^2 - 140 &= 0
\end{cases}
$$

Con las dos primeras, formamos:

$$
\begin{cases}
(1 + 6\lambda)x + 2\lambda y &= 0 \\
\\
2\lambda x + (1 + 3\lambda)y &= 0 \, .
\end{cases}
$$

Para que este último sistema tenga solución no trivial, se requiere que:

$$
\begin{vmatrix}
1 + 6\lambda & 2\lambda \\
\\
2\lambda & 1 + 3\lambda
\end{vmatrix}
= 0 \, ,
$$

o sea, $\quad \lambda = -\dfrac{1}{2} \quad$ ó $\quad \lambda = -\dfrac{1}{7}$

Para $\quad \lambda = -\dfrac{1}{2}$, se obtiene:

$$x = -2y.$$

Sustituyendo en la 3^a ecuación de $(*)$, se consigue:

$y = \pm\sqrt{\dfrac{20}{3}}, \qquad x = \mp 2\sqrt{\dfrac{20}{3}}.$

Por otro lado, para $\lambda = -\dfrac{1}{7}$,

resulta:

$$x = 2y.$$

Reemplazando en la 3^a ecuación de (*), se consigue:

$y = \pm 2, \quad x = \pm 4.$

Obtuvimos así, cuatro puntos críticos:

$\left(\sqrt{\dfrac{20}{3}}, -2\sqrt{\dfrac{20}{3}}\right), \quad \left(-\sqrt{\dfrac{20}{3}}, 2\sqrt{\dfrac{20}{3}}\right),$

$(4, 2), \quad (-4, -2).$

La expresión $x^2 + y^2$ es mínima para los dos últimos puntos.

8.- Sea $w = (mx_1 + b - y_1)^2 + \ldots + (mx_n + b - y_n)^2$

Entonces:

$$\frac{\partial w}{\partial b} = 2(mx_1 + b - y_1) + \ldots + 2(mx_n + b - y_n)$$

$$\frac{\partial w}{\partial m} = 2(mx_1 + b - y_1)x_1 + \ldots + 2(mx_n + b - y_n)x_n$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial b^2} = 2 + \ldots + 2 \qquad (n \text{ veces})$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial m^2} = 2x_1^2 + \ldots + 2x_n^2$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial m \partial b} = 2x_1 + \ldots + 2x_n$$

En forma abreviada:

$$\frac{\partial w}{\partial b} = 2m\sum_{i=1}^{n} x_i + 2nb - 2\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\frac{\partial w}{\partial m} = 2m\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial b^2} = 2n; \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial m^2} = 2\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2; \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial m \partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Sean:

$$A = \sum_{i=1}^{n} x_i; \quad B = \sum_{i=1}^{n} y_i;$$

$$C = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2; \quad D = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,.$$

Así, los puntos críticos de w cumplen:

$$\begin{cases} 2mA + 2nb - 2B = 0 \\ \\ 2mC + 2bA - 2D = 0. \end{cases}$$

O sea:

$$\begin{cases} Am + nb = B \\ \\ Cm + Ab = D. \end{cases} \qquad (\triangle)$$

El sistema $(\triangle)$ tendrá solución (única) si $A^2 - nC \neq 0$.

En tal caso, resulta:
$m \;=\; \dfrac{AB - nD}{A^2 - nC} \qquad ; \qquad b \;=\; \dfrac{AD - BC}{A^2 - nC}.$
Más adelante veremos que $A^2 - nC \leq 0$.

Por los momentos, asumiremos que $A^2 - nC < 0$.

Tenemos entonces:
$H\left(\dfrac{AD - BC}{A^2 - nC}, \dfrac{AB - nD}{A^2 - nC}\right) \;=\; 2n \cdot 2C - 4A^2 \;=\; 4(nC - A^2) > 0.$

Además, como $\dfrac{\partial^2 w}{\partial b^2} > 0$, concluimos, por el criterio del **Hessiano**, que el punto crítico hallado corresponde a un mínimo para w.

Para probar que $A^2 - nC \leq 0$, trabajaremos en $\mathbb{R}^n$.

Sean los vectores:

$\overrightarrow{u} \;= < x_1, x_2, \ldots, x_n >, \quad \overrightarrow{v} \;= < \dfrac{1}{\sqrt{n}}, \dfrac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \dfrac{1}{\sqrt{n}} > .$
Por la desigualdad de Cauchy - Schwarz,

$$|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| \leq \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\|. \qquad (\square)$$

Así que,
$$\left|\frac{x_1}{\sqrt{n}} + \frac{x_2}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{n}}\right| \leq \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2} \cdot 1$$

O sea, $\qquad \dfrac{|A|}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{C}.$

Luego, $\qquad A^2 \leq nC.$

Recordemos también, que en $(\square)$, hay igualdad si, y sólo si, $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son paralelos. Esto implica que $A^2 = nC$ ocurre si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son paralelos.

Pero entonces, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

De manera que los puntos dados están en una recta vertical.

En el caso indicado en la figura,

$$A = -2+0+2 = 0$$

$$B = 0+1+3 = 4$$

$$C = 4+0+4 = 8$$

$$D = 0+0+6 = 6$$

Luego, $m = \dfrac{0\cdot 4 - 3\cdot 6}{0^2 - 3\cdot 8} = \dfrac{3}{4}$,
$b = \dfrac{0\cdot 6 - 4\cdot 8}{0^2 - 3\cdot 8} = \dfrac{4}{3}$.

Luego, la recta de regresión es :

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{4}{3}.$$

y

3

x

2

9.- Equivalentemente, podemos maximizar:

$(p-x)\cdot(p-y)\cdot(p-z)$, con $x+y+z = 2p$. (x, y, z, *positivos*).

Recurramos a un problema más simple y clásico:

Hallar tres números positivos, cuya suma es dada, tales que su producto sea máximo.

Sean: w, t, s, **números positivos**, tales que:

$w+t+s = A$.

Se trata de ver para cuáles valores de w, t y s, se obtiene que

$w \cdot t \cdot s$ es máximo.

Consideremos:

$f(w,t) = wt(A-w-t) = wtA - w^2t - wt^2$.

Luego,

$$
\begin{aligned}
f_w &= tA - 2wt - t^2 \\
f_t &= wA - w^2 - 2wt \\
f_{ww} &= -2t \\
f_{tt} &= -2w \\
f_{tw} &= A - 2w - 2t.
\end{aligned}
$$

Formamos el sistema:

$$
\begin{cases}
tA - 2wt - t^2 = 0 \\
wA - w^2 - 2wt = 0.
\end{cases}
$$

Es decir,

$$
\begin{cases}
A - 2w - t = 0 \\
A - w - 2t = 0.
\end{cases}
$$

De aquí se obtiene: $t = w = \dfrac{A}{3}.$

Como:

$$H\left(\frac{A}{3},\frac{A}{3}\right) \;=\; \left(-\frac{2A}{3}\right)\left(-\frac{2A}{3}\right)-\left(-\frac{A}{3}\right)^2 \;=\; \frac{A^2}{3}>0,$$

y $\qquad f_{ww}\left(\frac{A}{3},\frac{A}{3}\right)<0,$ entonces;

$w\cdot t\cdot s$ es máximo, si $w \;=\; t \;=\; s \;=\; \dfrac{A}{3}.$

Ahora, aplicamos este resultado, con:

$$\begin{aligned} w &= p-x \\ t &= p-y \\ s &= p-z. \end{aligned}$$

El producto: $(p-x)(p-y)(p-z)$ es máximo, para:

$$p-x \;=\; p-y \;=\; p-z \;=\; \frac{p}{3}.$$

O sea, si

$$x \;=\; y \;=\; z \;=\; \frac{2p}{3}.$$

10.- Al minimizar $\qquad x^2+y^2+z^2,$

con la condición, $\qquad ax+bz+cy \;=\; 2A,$

podemos considerar la función:

$$f(x,y) \;=\; x^2+y^2+\left(\frac{2A-ax-cy}{b}\right)^2.$$

Por este camino puede probarse que f posee un único punto crítico, el cual corresponde a un mínimo.

Ahora, empleemos multiplicadores de Lagrange.

Sea

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(ax + bz + cy - 2A).$$

De modo que,

$$\begin{aligned} F_x &= 2x + \lambda a \\ F_y &= 2y + \lambda c \\ F_z &= 2z + \lambda b \\ F_\lambda &= ax + bz + cy - 2A. \end{aligned}$$

Formamos el sistema:

$$\begin{cases} 2x + \lambda a = 0 \\ 2y + \lambda c = 0 \\ 2z + \lambda b = 0 \\ ax + bz + cy - 2A = 0. \end{cases}$$

Conseguimos: $x = -\dfrac{\lambda a}{2}; \quad y = -\dfrac{\lambda c}{2}; \quad z = -\dfrac{\lambda b}{2}. \qquad (*)$

Sustituyendo estas expresiones en la última ecuación del sistema, resulta:

$$\lambda = -\frac{4A}{a^2+b^2+c^2}. \qquad (**)$$

Luego, usando $(*)$ y $(**)$, se sigue:

$$x^2+y^2+z^2 = \frac{\lambda^2 a^2}{4} + \frac{\lambda^2 c^2}{4} + \frac{\lambda^2 b^2}{4} =$$

$$= \frac{\lambda^2}{4}(a^2+b^2+c^2) = \frac{4A^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

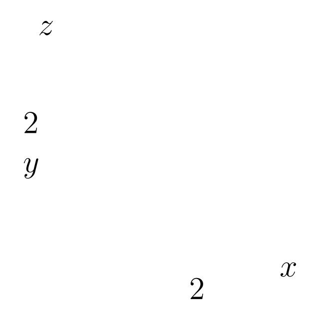
Por lo comentado al inicio, éste es el valor mínimo que buscábamos.

Capítulo 8

Respuestas e Indicaciones del capítulo 4

1)

a.) Sea $\quad I = \displaystyle\int_0^2 \int_x^2 x\sqrt{1+y^3}\, dy\, dx$



Luego, $\quad I = \displaystyle\int_0^2 \int_0^y x\sqrt{1+y^3}\, dx\, dy.$

Integral interna:

$$\int_0^y x\sqrt{1+y^3}\,dx \;=\; \sqrt{1+y^3}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^y \;=\; \frac{y^2}{2}\sqrt{1+y^3}.$$

Así,

$$I \;=\; \int_0^2 \frac{y^2}{2}\sqrt{1+y^3}\,dy \;=\; \frac{1}{9}(\sqrt{1+y^3})^3\bigg|_0^2 \;=$$

$$=\; \frac{1}{9}(27-1) \;=\; \frac{26}{9}.$$

b) y

10 $y = e^x$

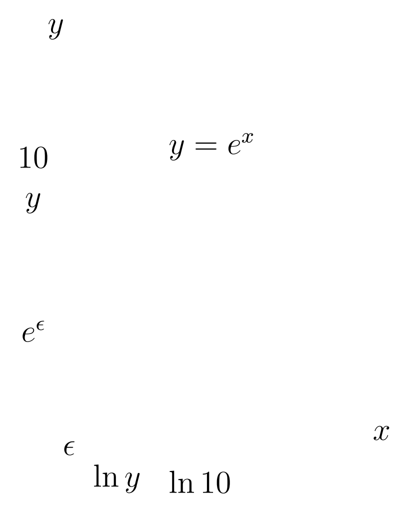
1

$\ln 10$ x

La integral interna es impropia, pues al aproximarnos al punto $(0,1)$,

$$\frac{1}{\ln y} \longrightarrow +\infty.$$

Vamos a considerar la nueva región:



Tenemos:

$$\int_{\epsilon}^{\ln 10} \int_{e^x}^{10} \frac{1}{\ln y}\, dy\, dx \;=\; \int_{e^\epsilon}^{10} \int_{\epsilon}^{\ln y} \frac{1}{\ln y}\, dx\, dy \;=$$

$$=\; \int_{e^\epsilon}^{10} \frac{\ln y - \epsilon}{\ln y}\, dy \;=\; \int_{e^\epsilon}^{10} \left(1 - \frac{\epsilon}{\ln y}\right) dy \;=$$

$$=\; 10 - e^\epsilon - \epsilon \int_{e^\epsilon}^{10} \frac{1}{\ln y}\, dy \qquad (*)$$

Ahora, tomamos límite, cuando $\epsilon \to 0^+$.

Veamos que: $\displaystyle \lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon \int_{e^\epsilon}^{10} \frac{1}{\ln y}\, dy \;=\; 0.$

En efecto:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \epsilon \int_{e^\epsilon}^{10} \frac{1}{\ln y}\, dy \;==\; \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_{e^\epsilon}^{10} \frac{1}{\ln y}\, dy}{\dfrac{1}{\epsilon}} \;=$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{-\dfrac{1}{\epsilon}\, e^\epsilon}{-\dfrac{1}{\epsilon^2}} \;=\; \lim_{\epsilon\to 0^+} \epsilon\, e^\epsilon \;=\; 0.$$

(Hemos usado la regla de $L'H\hat{o}pital$ y la fórmula de Leibniz).

Por lo tanto, de $(*)$ se sigue:

$$\int_0^{\ln 10} \int_{e^x}^{10} \frac{1}{\ln y}\, dy\, dx \;=\; 9.$$

c)

y

$y = \cos x$

1

x

$\frac{\pi}{2}$

$$I \;=\; \int_0^1 \int_0^{\arccos y} \operatorname{sen} x \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}\; dx\; dy \;=$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos x} \operatorname{sen} x \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}\; dy\; dx \;=$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \cos x \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}\; dx \;=\; \frac{1}{3}(\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x})^3\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \;=$$

$$= \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

d)

y

$y = 2x$

1

x

$\frac{1}{2}$

$$I \;=\; \int_0^1 \int_{y/2}^{1/2} e^{-x^2}\; dx\; dy \;=\; \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{2x} e^{-x^2}\; dy\; dx \;=$$

$$=\; \int_0^{\frac{1}{2}} 2xe^{-x^2}\; dx \;=\; -e^{-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} \;=\; 1 - e^{-\frac{1}{4}}.$$

e)

y

$y = x$

1

1

x

Consideremos la región de integración:

y

$y = x$

1

y

$\epsilon > 0$

ϵ

ϵ $\quad 1 \quad$ x

Resulta:

$$\int_\epsilon^1 \int_x^1 \frac{\operatorname{sen} y}{y}\, dy\, dx \;=\; \int_\epsilon^1 \int_\epsilon^y \frac{\operatorname{sen} y}{y}\, dx\, dy \;=$$

$$= \int_\epsilon^1 (y-\epsilon)\frac{\operatorname{sen} y}{y}\, dy \;=\; \int_\epsilon^1 \left(1 - \frac{\epsilon}{y}\right) \operatorname{sen} y\, dy \;=$$

$$= \int_\epsilon^1 \operatorname{sen} y\, dy - \epsilon \int_\epsilon^1 \frac{\operatorname{sen} y}{y} \;=$$

$$= \cos\epsilon - \cos 1 - \epsilon \int_\epsilon^1 \frac{\operatorname{sen} y}{y}\, dy.$$

Ahora, tomemos límite, cuando $\epsilon \to 0^+$.

Veamos que $\displaystyle \lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon \int_\epsilon^1 \frac{\operatorname{sen} y}{y}\, dy \;=\; 0.$

Como $\epsilon \le y \le 1$, se cumple:

$0 \leq \dfrac{\operatorname{sen} y}{y} \leq 1.$ De manera que:

$$0 \leq \epsilon \int_{\epsilon}^{1} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\, dy \leq \epsilon \cdot (1-\epsilon).$$

Luego, $\displaystyle \lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon \int_{\epsilon}^{1} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\, dy \;=\; 0.$

Así,

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{\operatorname{sen} y}{y}\, dy\, dx \;=\; \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\cos\epsilon - \cos 1 - \epsilon \int_{\epsilon}^{1} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\, dy \right) \;=$$

$$=\; 1 - \cos 1.$$

2)

z

$z = 1$

$(0,0,1)$

$(0,1,0)$

y

$(1,0,0)$

x

$y = x^2$

Cambiando el orden de integración, tenemos:

$$I \;=\; \int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2}\; dy\; dx\; dz \;=$$

$$=\; \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} 12xze^{zy^2}\; dx\; dy\; dz \;=\; \int_0^1 \int_0^1 6zye^{zy^2}\; dy\; dz \;=$$

$$=\; \int_0^1 (3e^z - 3)\; dz \;=\; 3(e-2).$$

3)

y_1

D

y_0

x_0 x_1

$$I \;=\; \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}\; dx\; dy$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}\; dx \;=\; \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right)\; dx \;=$$

$$=\; \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\bigg|_{x_0}^{x_1} \;=\; \frac{\partial F}{\partial y}(x_1,y) - \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y).$$

Luego,

$$I \;=\; \int_{y_0}^{y_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, y) - \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y) \right] \, dy$$

Así, aplicando, nuevamente, el Teorema Fundamental del Cálculo, se sigue:

$I \;=\; F(x_1, y) - \; F(x_0, y)|_{y_0}^{y_1} \;\; =$

$= \; F(x_1, y_1) - F(x_0, y_1) - F(x_1, y_0) + F(x_0, y_0).$

4)

y

$(0, \frac{1}{2})$

$(\frac{1}{3}, 0)$

x

$9x^2 + 4y^2 = 1$

$$I \;=\; \iint\limits_R \operatorname{sen}(9x^2 + 4y^2) \, dA.$$

Hagamos $\quad u \;=\; 3x \;$ y $\; v \;=\; 2y.$

Nueva región de integración:

v

$(0,1)$ $\quad u^2+v^2=1$

R' $\quad (1,0)$

u

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

Luego,

$$I = \iint\limits_{R'} \operatorname{sen}(u^2+v^2)\frac{1}{6}\, dv\, du.$$

Usando, ahora, coordenadas polares:

$I = \dfrac{1}{6}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \operatorname{sen} r^2 \;\; r \;\; dr \;\; d\theta =$

$= \dfrac{1}{12}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 1)\; d\theta = \dfrac{\pi}{24}(1-\cos 1).$

5) La región R es:

y $\quad y = 2x + 1$

$y = 2x - 1$

x

$y = 4 - 2x$

$y = 2 - 2x$

Haciendo: $\quad u \; = \; y + 2x, \quad v \; = \; y - 2x,$

la nueva región de integración es:

v

$v = 1$

u

$v = -1$

$u = 2 \qquad u = 4$

Tenemos:

$$x \; = \; \frac{u - v}{4}, \qquad v \; = \; \frac{u + v}{2} \; ,$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \; = \; \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \; .$$

Así, resulta:

$$\iint\limits_R e^{y-2x}\,dA \;=\; \int_2^4 \int_{-1}^1 e^v \frac{1}{4}\,dv\,du \;=$$

$$\frac{1}{4}\int_2^4 \left(e - \frac{1}{e}\right)\,du \;=\; \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

6) Sean: $\qquad M \;=\; 2xy^3 - y^2\cos x,$

$N \;=\; 1 - 2y\,\mathrm{sen}\,x + 3x^2y^2.$

Vemos que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \;=\; 6xy^2 - 2y\cos x \;=\; \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (*)$$

Esto se verifica, en particular, en el círculo de centro $(0,0)$ y radio 5.

Usando $(*)$, concluimos que.

$\int\limits_C M\,dx + N\,dy$, no depende de la trayectoria empleada de P_1 a P_2.

y

1 $\quad P_1$

Región simplemente conexa,

donde vale:

x

$P_0 \quad \frac{\pi}{2}$

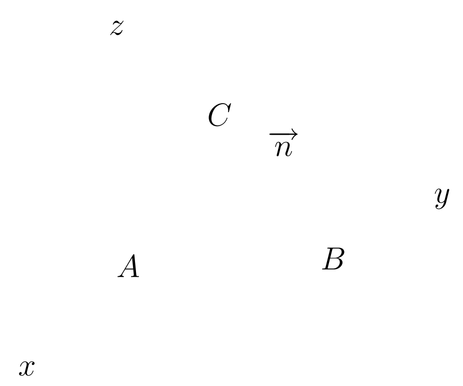
$$\frac{\partial M}{\partial y} \;=\; \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Usemos, entonces, la ruta indicada en la figura.

Luego, $\quad I = \int\limits_C M\,dx + N\,dy =$

$$0 + \int_0^1 (1 - 2y + \frac{3\pi^2}{4}y^2)\,dy = 1 - 1 + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4}.$$

7)



Tomamos: $\quad \overrightarrow{n} = \dfrac{-3\,\overrightarrow{i} + \sqrt{3}\,\overrightarrow{k}}{\sqrt{12}}.$

Podemos notar que la orientación de Γ es positiva.

Sea

$$\overrightarrow{F} = (8x - 2y)\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}.$$

Entonces:

$$rot\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 8x-2y & y & 3z \end{vmatrix} = 2\overrightarrow{k}.$$

Por el Teorema de Stokes, tenemos:

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S (2\overrightarrow{k}) \cdot \overrightarrow{n}\, dA = \iint_S dA$$

$= \text{ área del } \quad \triangle ABC = 4\sqrt{3}.$

8) $\phi = \iint_S (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n})\, dS = \iiint_V div\overrightarrow{F}\, dV =$

$$= \iiint_V (y^2 + z + x^2)\, dV.$$

z

$z = 3$

$z = 1$

y

x

Usando coordenadas cilíndricas, conseguimos:

$$\phi \;=\; \int_1^3 \int_0^{2\pi} \int_1^2 (r^2+z) r \; dr \; d\theta \; dz \;=$$

$$=\; 27\pi.$$

9) Sin pérdida de generalidad, supongamos:

$x_2 > x_1$ y , $y_2 > y_1$.

y_2 R

S

y_1 P Q

x_1 x_2 x

Consideremos el circuito Γ indicado en la figura.

Por el Teorema de Green,

$$\oint_\Gamma -y\;dx + x\;dy \;=\; \iint_S (1+1)\;dA \;=\; (x_2-x_1)(y_2-y_1). \qquad (*)$$

Pero,

$$\oint_\Gamma -y\;dx + x\;dy \;=$$

$$= \int_{\overline{PQ}} (-y\;dx + x\;dy) + \int_{\overline{QR}} (-y\;dx + x\;dy) - \int_C (-y\;dx + x\;dx) \;=$$

$$=\; -y_1(x_2-x_1) + x_2(y_2-y_1) - \int_C (-y\;dx + x\;dy).$$

Luego, usando $(*)$, obtenemos:

$$\int_C -y\, dx + x\, dy =$$

$$= -y_1x_2 + x_1y_1 + x_2y_2 - x_2y_1 - x_2y_2 + x_2y_1 + x_1y_2 - x_1y_1 =$$

$$= x_1y_2 - x_2y_1.$$

10)

a.- **Suficiencia:**

Usando el Teorema de Green, se sigue:

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \frac{\partial u}{\partial y}\, dx = \int_R \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dA =$$

$$= \int_R 0\, dA = 0.$$

Necesidad:

usar reducción al absurdo y de nuevo, el Teorema de Green.

b.-

$$\oint_C \frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2 + y^2} =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+1} + \int_{-1}^{1} \frac{dy}{1+y^2} + \int_{1}^{-1} \frac{-dx}{x^2+1} + \int_{1}^{-1} \frac{-dy}{1+y^2} =$$

$$= 2\pi.$$

Comparando las expresiones:

$$\frac{x\, dy}{x^2+y^2} \qquad \text{con} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\, dy,$$

$$\frac{-y\,dx}{x^2+y^2} \qquad \text{con} \qquad -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx,$$

vemos que una "buena" u es:

$$u \;=\; \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).$$

Es inmediato que: $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;=\; 0$$

¿Contradicción con a)?

No. Lo que sucede es que, **en el caso b**, R contiene al $(0,0)$, en el cual u no es continua.

Bibliografía

[1] Diomara Pinto. María *Cândida* Ferreira Morgado. Cálculo Diferencial e Integral de *Funcões* de várias variáveis.

[2] James Stewart. Cálculo Multivariable.

[3] Larson - Hostertler - Edwards. Cálculo. volumen 2.

[4] Robert T. Smith - Roland B. Minton. Cálculo. volumen 2.

[5] Thomas - Finney. Cálculo de varias variables.

[6] Schaum. Vector Analysis.

[7] Schaum. Advanced Calculus.