Lugares Geométricos

Jesús Alfonso Pérez Sánchez

Mérida-Venezuela

2001

Índice general

Introducción

En esta monografía hemos querido tratar un tema geométrico, el cual nos ofrece la oportunidad para aplicar muchos de los teoremas de los primeros cursos de Geometría Euclidiana. Por esta razón, consideramos el presente trabajo como un complemento a esos inicios en el mundo de la Geometría.

Al mismo tiempo, pensamos que los ejercicios sobre Lugares Geométricos contribuyen al desarrollo de la imaginación y capacidad creativa, durante el bosquejo o " adivinación "de la figura formada por los puntos que verifican las condiciones geométricas estipuladas en los respectivos enunciados.

En todo lo que sigue, la expresión **Lugar Geométrico** será denotada por: **L.G.**

Mientras que, $C(O; r)$ indicará la circunferencia de centro el punto O y radio r.

Otras notaciones que usaremos son:

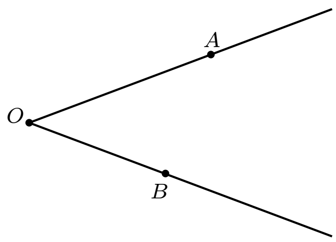
Para **la congruencia** o "igualdad " de los triángulos ABC y MNP :

$$\triangle ABC \cong \triangle MNP.$$

La semejanza, de los mismos, la escribiremos como:

$$\triangle ABC \sim \triangle MNP.$$

Un ángulo como el de la figura será denotado por: $\widehat{AOB}$.

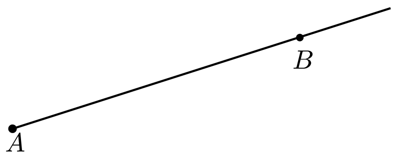


Su medida, la indicamos: $\measuredangle AOB$.

En cuanto a segmentos y rectas:

La recta determinada por los puntos A y B la simbolizaremos: $\overleftrightarrow{AB}$.

En tanto que el segmento de extremos A y B, lo identificaremos como $\overline{AB}$, llamando AB a su longitud. También, una semirrecta, como la de la figura, la indicaremos: $\overrightarrow{AB}$.



Finalmente, en el Apéndice, presentamos los principales Teoremas citados en los ejemplos y ejercicios.

P.S. Sugerimos al lector intentar la solución de los ejercicios y después, sí analizar las demostraciones dadas. Consideramos importante, el hallazgo de otros caminos, tal vez más sencillos e interesantes, sobre todo, en aquellas partes donde hemos usado Trigonometría y Geometría Analítica.

Capítulo 1

El método de los Lugares Geométricos

El método de los Lugares Geométricos.

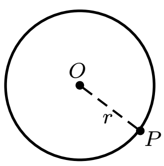
Consiste en la descripción de todo subconjunto de un plano, o del espacio, cuyos puntos poseen determinada propiedad geométrica, vale decir, satisfacen una misma condición geométrica.

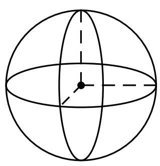
Ejemplos:

a.- El **L.G.** de todos los puntos de un plano que están a una distancia r de un punto dado, O, de dicho plano.

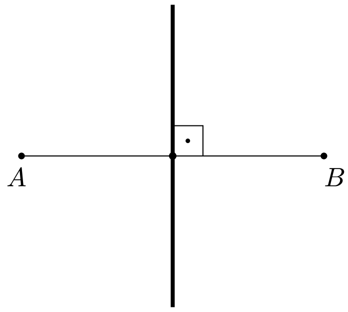
Se trata de la circunferencia de centro O y radio $r : C(O; r)$.

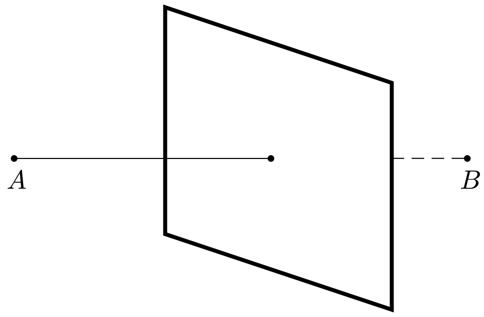
El **L.G.** análogo, en el espacio, es la esfera de centro O y radio r.



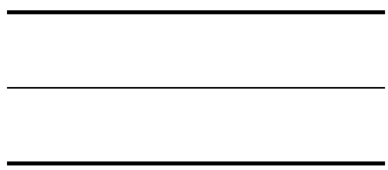


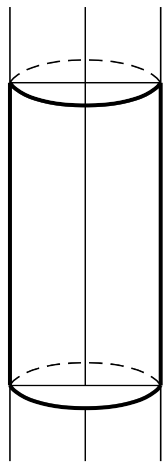
b.- En un plano, el **L.G.** de los puntos **equidistantes** de dos puntos, A y B, (de dicho plano), es la **mediatriz** de $\overline{AB}$ (recta perpendicular a $\overline{AB}$ y que pasa por el punto medio de dicho segmento). En el caso del espacio, el **L.G.** análogo es el plano perpendicular a $\overline{AB}$ y que pasa por el punto medio del citado segmento.



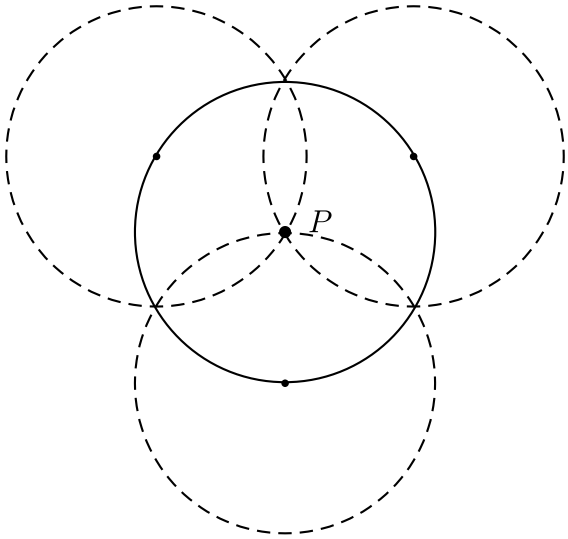


c.- El **L.G.** de todo los puntos de un plano, **equidistantes** de una recta l (de dicho plano), consiste de dos rectas paralelas a l. La situación similar, en el espacio, determina un **cilindro** que tiene como eje a la recta l.



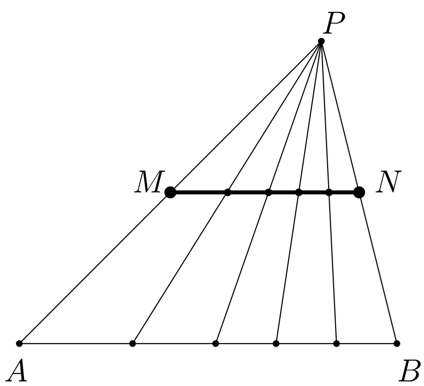


d.- En un plano, el **L.G.** de los centros de las circunferencias de radio r y que pasan por un punto P de dicho plano, es la circunferencia $C(P;r)$.

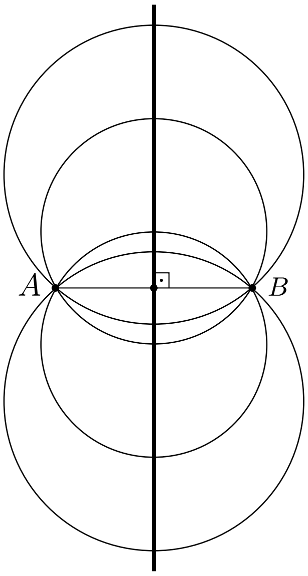


e.- En un plano, consideremos los puntos A, B y P, no alineados. Llamemos $\mathcal{C}$ al conjunto de todos los segmentos que tienen un extremo en $\overline{AB}$, mientras que el otro extremo es el punto P.

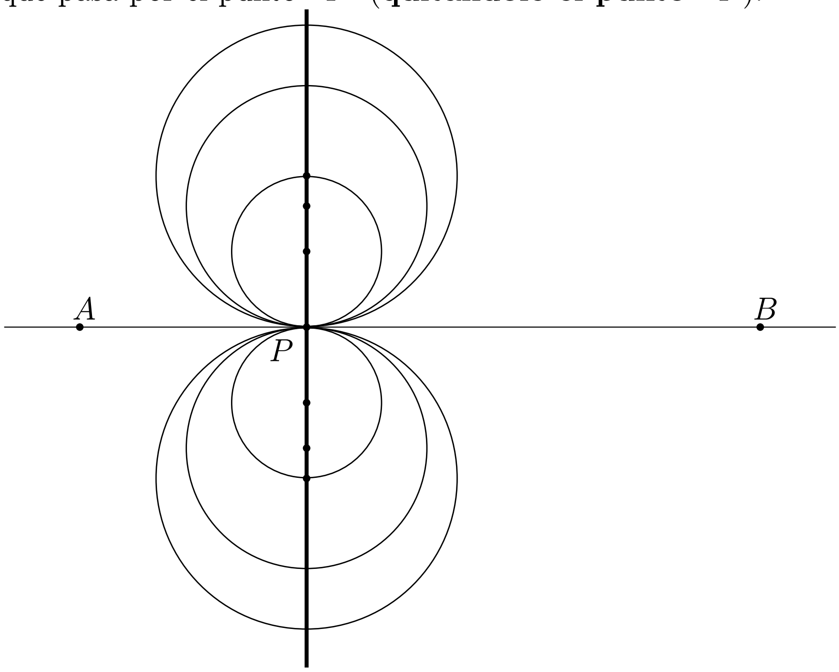
El **L.G** de los puntos medios de los elementos de $\mathcal{C}$ es $\overline{MN}$, donde, M es el punto medio de $\overline{AP}$ y N es el punto medio de $\overline{BP}$.



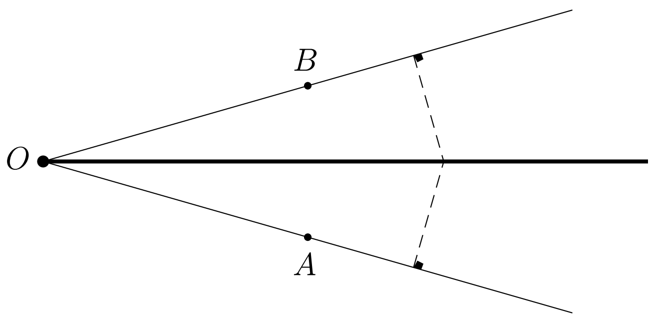
f.- En un plano, el **L.G**, de los centros de todas las circunferencias que pasan por dos puntos A y B, elegidos en dicho plano, es la mediatriz de $\overline{AB}$.



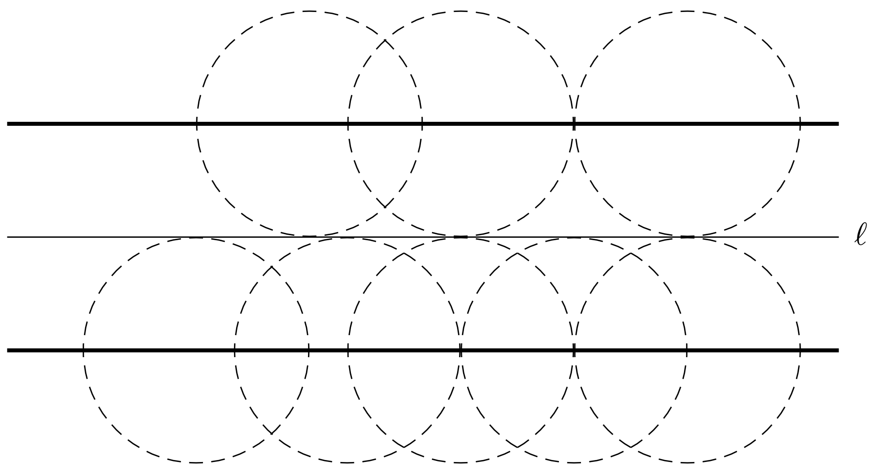
g.- En un plano, dado una recta $\overleftrightarrow{AB}$ y un punto P, de la misma, el **L.G.** de los centros de las circunferencias tangentes a $\overleftrightarrow{AB}$, en P, es **la recta perpendicular** a $\overleftrightarrow{AB}$ y que pasa por el punto P (**quitándole el punto** P).



h.- En un plano, dado el ángulo $\widehat{AOB}$, el **L.G.** de los puntos equidistantes de los lados $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, es la **bisectriz** del $\widehat{AOB}$.



i.- En un plano, el **L.G.** de los centros de todas las circunferencias, de radio r, tangentes a una recta dada, l, está compuesto por dos rectas, paralelas a l, a una distancia r de esta última.



En los ejemplos dados notamos que los **Lugares Geométricos** son prontamente reconocibles; en algunos casos, basta la definición de los elementos involucrados, para justificar lo afirmado. Pero, ha de quedar claro que para dejar bien establecido que una determinada figura es el **Lugar Geométrico** del cual se está hablando, debemos verificar que:

I) Todo punto de la figura cumple la condición geométrica enunciada.

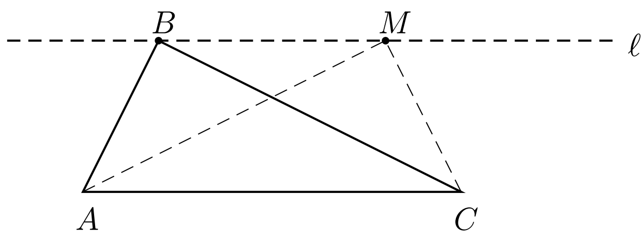
II) Todo punto que verifica la condición geométrica dada, pertenece a la figura.

Observación: En lo sucesivo, al aparecer los símbolos I y II nos referimos a lo que acabamos de enunciar. Por cierto, recomendamos analizar los ejemplos presentados, a la luz de dichos ítems.

EJERCICIOS:

1) Dado el $\triangle ABC$, hallar (en el plano que contiene a dicho triángulo), el **L.G.** de los puntos M, tales que las áreas de los triángulos ABM y BMC sean iguales.

Solución:



Notemos que los triángulos mencionados tienen $\overline{BM}$ como lado común. Así, tomando este lado como base, concluimos que si las áreas de los citados triángulos son iguales, entonces son iguales las alturas correspondientes - distancias de A y C a $\overleftrightarrow{BM}$, respectivamente - . En consecuencia, estamos buscando el **L.G.** de los puntos M, tales que:

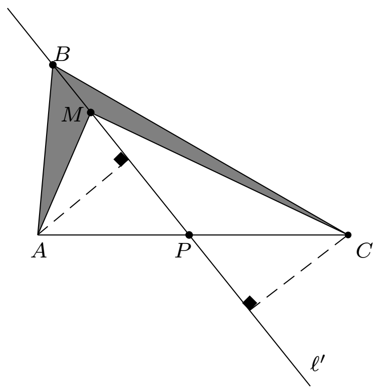
A y C equidisten de $\overleftrightarrow{BM}$ $\qquad (*)$

De inmediato percibimos que todos los puntos pertenecientes a la recta l la cual es paralela a $\overleftrightarrow{AC}$ y pasa por B - cumplen dicho requisito.

De manera que, l verifica $I)$.

Pero, todavía no sabemos si l es el **L.G.** buscado. Aún no hemos comprobado II), para dicha l.

Y si pensamos de nuevo en $(*)$ nos percataremos de que la recta l', determinada por B y por el punto medio de $\overline{AC}$, también está constituida por puntos, tales que se cumple $(*)$.



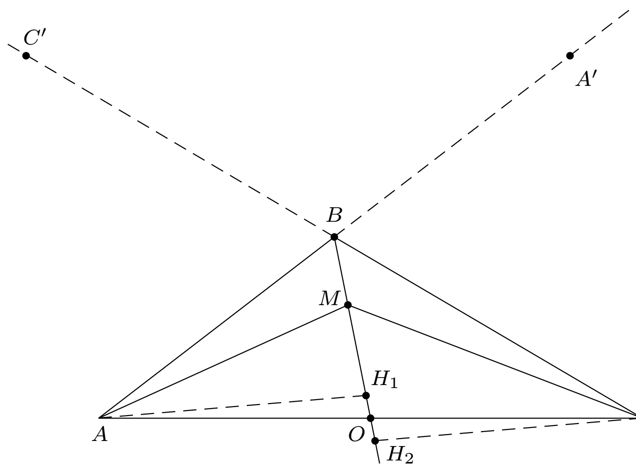
$$AP = PC$$

Luego, resulta que: para **todos** los puntos de la **unión** de l con l' se cumple I). (Aclaramos que, al admitir **triángulos degenerados** - es decir, de área cero - B está en el **L.G.** requerido).

Vemos ahora, que para los puntos de l ó de l', también se verifica II).

Prolonguemos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ y analicemos dos casos:

1°) Supongamos que M se encuentra en el interior del $\widehat{ABC}$ (análogamente, si es interior al $\widehat{A'BC}$).



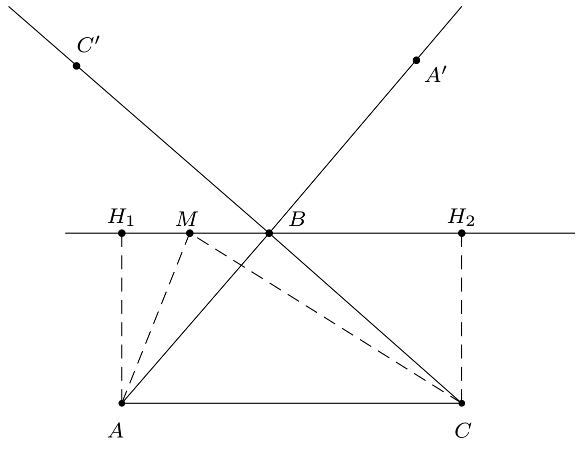
Como área del $\triangle ABM$ = área del $\triangle BMC$, resulta $AH_1 = CH_2$ (alturas).

Luego, comparando los **triángulos rectángulos** AH_1O y OH_2C (donde, 0 es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{BM}$ con $\overline{AC}$), obtenemos: $AO = OC$.

O sea, $\overline{BO}$ es la mediana, del $\triangle ABC$, que parte del vértice B. En otras palabras, M pertenece a l' (recta que pasa por B y por el punto medio de $\overline{AC}$).

2°) Asumamos que M es interior al $\widehat{ABC'}$ (o interior al $\widehat{A'BC}$)

Tenemos: área del $\triangle AMB$ = área del $\triangle MBC$, $\overline{AH_1}$ y $\overline{CH_2}$, alturas.

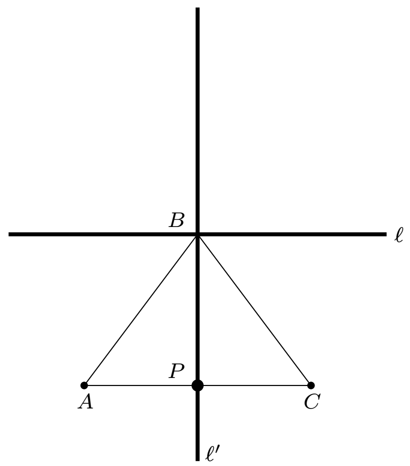


Luego, $AH_1 = CH_2$.

Más aún, el cuadrilátero AH_1H_2C es un rectángulo.

Por lo tanto, M está en la recta, paralela a $\overline{AC}$ y pasa por B, es decir, M pertenece a l.

En resumen, hemos comprobado $I)$ y $II)$ para la figura formada por la unión de l con l'. Es decir, que el conjunto formado por esas dos rectas constituye el **L.G.** procurado.

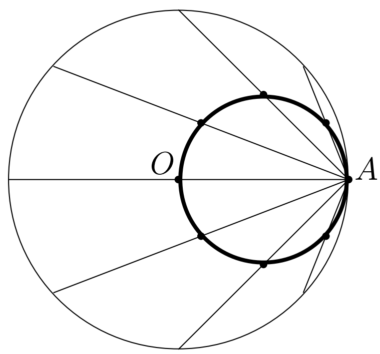


$$\ell \parallel \overleftrightarrow{AC}; \qquad AP = PC$$

2.- ¿Cuál es el **L.G.** de los puntos medios de todas **las cuerdas** de la $C(O;r)$, **cuyas** rectas que las contienen pasan por un punto dado, A?

Solución: Estudiemos **tres** casos.

1°) Si el punto A está situado sobre la circunferencia dada ...



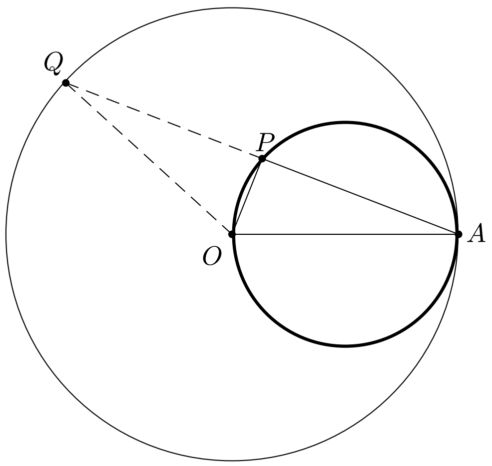
Por la construcción de algunos puntos del **L.G.** parece que se trata de la circunferencia de diámetro $\overline{OA}$. **¡ Probémoslo !**

I) Sea P un punto de la circunferencia de diámetro $\overline{OA}$. (Consideremos el caso $P \neq A$ y $P \neq 0$). (Si $P = 0$, entonces, trivialmente, P cumple I)).

Prolonguemos $\overline{AP}$ hasta cortar a la $C(O;r)$ en Q.

Probemos que $AP = PQ$.

Para ello, comparemos los triángulos OPQ y OPA. Se verifica:



$\overline{OP}$, lado común

$OQ = OA = r$

$\sphericalangle OPA = 90°$

(Apéndice, T_2)

Luego, por T_4 (Ver apéndice), resulta:

$$\triangle OPQ \cong \triangle OPA.$$

En particular, $AP = PQ$.

Si admitimos que cada punto de una circunferencia constituye una "cuerda trivial" de la misma, entonces en el caso $P = A$, se verifica I), obviamente. Conclusión: todo punto de la figura propuesta (circunferencia de diámetro $\overline{OA}$) posee la propiedad citada (o sea, cumple el requisito o condición geomértrica, es decir, I) está probado).

II) Sea $\overline{AQ}$, cuerda de la $C(O;r)$, con P, punto medio de $\overline{AQ}$.

Veamos que P está en la circunferencia de diámetro $\overline{OA}$.

En los casos $P = 0$ ó $Q = P = A$, trivialmente se tiene lo afirmado.

Supongamos, entonces, $P \neq A$ y $P \neq 0$.

Comparemos los triángulos OPQ y OPA.

Resulta:

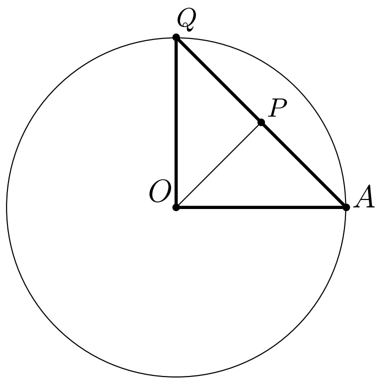
$PQ = PA$ (hipótesis)

$\overline{OP}$, lado común

$OQ = OA = r$

Así, por T_3 (Apéndice),

$\triangle OPQ \cong \triangle OPA$



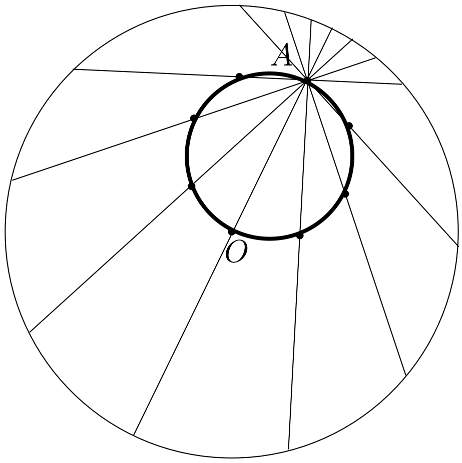
Luego, $\measuredangle OPA = 90°$.

Esto último implica - usando T_2, apéndice - que P está en la circunferencia de diámetro $\overline{OA}$.

Por $I)$ y $II)$, queda probado que el **L.G.** buscado es la circunferencia de diámetro $\overline{OA}$.

Observación: la $C(O;r)$ y el **L.G.** resultante son tangentes en A (¿Por qué?).

2°) Si el punto A es interior al círculo de centro O y radio $r \ldots$



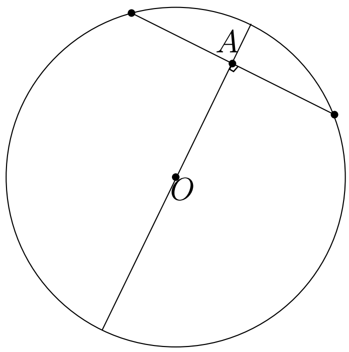
Conjetura:

El L.G. buscado es la circunferencia de diámetro $\overline{OA}$

I) Sea P, punto de la circunferencia de diámetro $\overline{OA}$.

Si consideramos el diámetro, de la $C(O;r)$, que pasa por O y A, obtenemos inmediatamente que O es punto medio de una cuerda (que pasa por A) de la $C(O;r)$. Así, en el caso $P = O$, queda probado I).

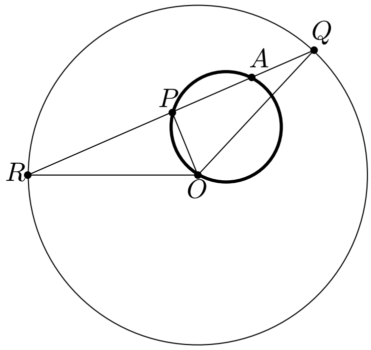
Si $P = A$, basta trazar la **cuerda** - de la $C(O;r)$ - que pasa por A y es perpendicular a $\overline{OA}$ y usar T_4 (Apéndice), para concluir que A es punto medio de dicha **cuerda.**



Luego, para $P = A$

queda también demostrado I)

Sea, entonces, P, perteneciente a la circunferencia de diámetro $\overline{OA}$, con $P \neq A$ y $P \neq 0$.



Prolonguemos $\overline{PA}$, hasta cortar a la $C(O;r)$ en R y Q.

Comparemos los triángulos ROP y POQ :

$$\overline{OP}, \quad \text{lado común.} \qquad OR = OQ = r, \qquad \measuredangle OPR = \measuredangle OPQ,$$

pues $\widehat{OPR}$ y $\widehat{OPQ}$ son adyacentes y, además,

$\measuredangle OPQ = \measuredangle OPA = 90°$ (T_2, Apéndice)

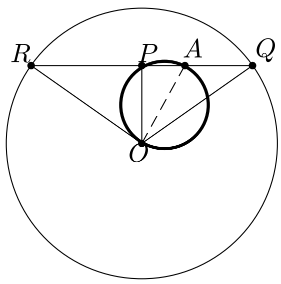
Luego, usando T_4 (Apéndice), tenemos:

$\triangle ROP \cong \triangle POQ$.

En consecuencia, $RP = PQ$, o sea, P es el punto medio de la cuerda $\overline{RQ}$.

II) Sea P, ($P \neq O$ y $P \neq A$) punto medio de la cuerda $\overline{RQ}$ con R y Q en la $C(O;r)$, mientras que A pertenece a $\overline{RQ}$.

Afirmamos que:



$\triangle RPO \cong \triangle QPO$

En efecto: $RP = PQ$ (hipótesis)

$\overline{PO}$, lado común; $OR = OQ = r$

Luego, $\angle OPR = \angle OPQ$.

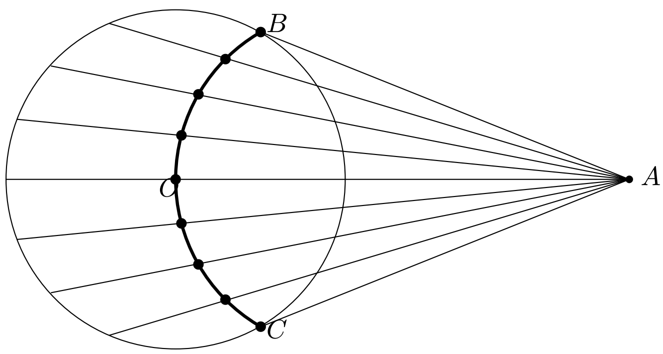
Como, además, $\widehat{OPR}$ y $\widehat{OPQ}$ son adyacentes, cada uno mide $90°$. En particular, $\measuredangle OPA = 90°$. Aplicando entonces T_2 (Apéndice), concluimos que P está en la circunferencia de diámetro $\overline{OA}$.

Los casos $P = A$ ó $P = O$, son triviales.

En vista de $I)$ y $II)$, queda establecido que el **L.G.** solicitado es la circunferencia de diámetro $\overline{OA}$.

3°) Si el punto A es exterior al círculo de centro O y radio $r \ldots$

Exploración:

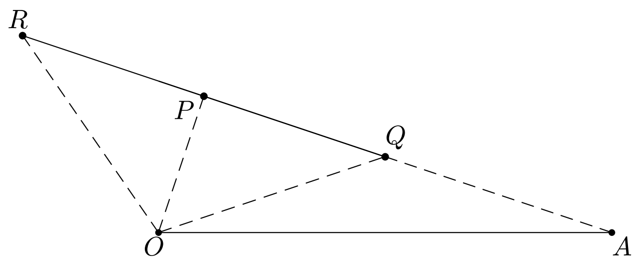


Conjetura: El **L.G.** requerido es el arco BOC, de la circunferencia de diámetro $\overline{OA}$, con B y C, las intersecciones de esta última circunferencia con la $C(O; r)$.

Prueba:

I) Si $P = B$ ó $P = C$, entonces, P es el punto medio de una cuerda (en la $C(O; r)$), cuya "prolongación" pasa por A (recordar que admitimos "cuerdas triviales": aquellas de longitud cero).

Sea, entonces, P, un punto del arco BOC (arco de la circunferencia de diámetro $\overline{OA}$), tal que $P \neq B$ y $P \neq C$.



Consideremos la cuerda $\overline{RQ}$ (en la $C(O;r)$) tal que su prolongación pasa por A y, además, P está en $\overline{RQ}$.

Comparando los triángulos OPR y OPQ, tenemos:

$\overline{OP}$, lado común.

$OR = OQ = r$

$\widehat{OPR}$ y $\widehat{OPQ}$: adyacentes.

Pero, $\widehat{OPQ} = \widehat{OPA} = 90°$ (T_2, Apéndice)

Luego, $\widehat{OPR} = \widehat{OPQ}$ (ambos son rectos).

Así, $\triangle OPR \cong \triangle OPQ$ (T_4, Apéndice).

En particular, $RP = PQ$.

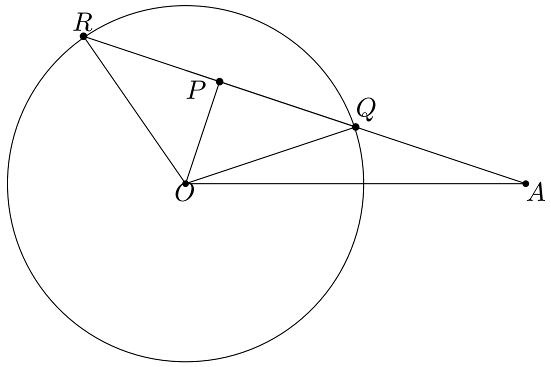
O sea, P es el punto medio de la cuerda $\overline{RQ}$.

II) Sea P, tal que: existe una **cuerda** $\overline{RQ}$ (de la $C(O;r)$), cuya prolongación pasa por A, y, además, **su** punto medio es P.

Queremos probar que P está en la circunferencia de diámetro $\overline{OA}$.

Si $P = B$ o $P = C$, no hay nada que probar. Sea, entonces, $P \neq B$ y $P \neq C$.

Analicemos los triángulos OPR y OPQ. Ellos tienen:



$\overline{OP}$, lado común

$OR = OQ = r$

$RP = PQ$ (hipótesis)

Así, $\triangle OPR \cong \triangle OPQ$ (T_3, Apéndice).

En particular, $\measuredangle OPR = \measuredangle OPQ$.

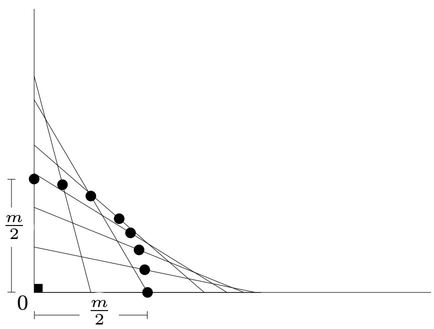
Ahora, tomando en cuenta que $\widehat{OPR}$ y $\widehat{OPQ}$ son adyacentes, concluimos que $\measuredangle OPQ = 90°$. Por lo tanto, $\measuredangle OPA = 90°$. Finalmente, mediante T_2 (Apéndice), llegamos a que: P está en la circunferencia de diámetro $\overline{OA}$.

De manera que, por $I)$ y $II)$, afirmamos que la conjetura es la solución.

Nota: En este tercer caso presentado, ¿Qué ocurre con el **L.G.**, a medida que A se aleja de la $C(O; r)$?

3.- Un segmento, de longitud m, se mueve entre los lados de un ángulo recto, deslizándose sus extremos por los lados del ángulo. Hallar el **L.G.** del punto medio del segmento, en su deslizamiento.

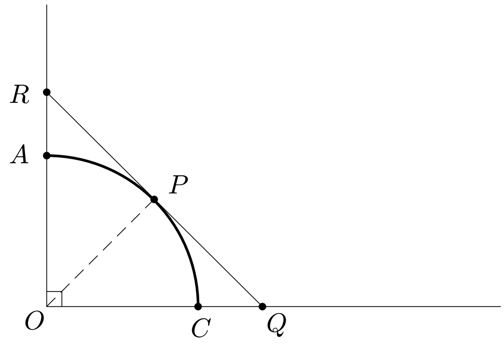
Exploración:



Conjetura: El **L.G.** es un arco de la $C(O; \frac{m}{2})$, correspondiente a un ángulo central de $90°$.

Prueba:

I) Sea P un punto del arco AC, de la $C(O; \frac{m}{2})$.



Si $P = A$ ó $P = C$, se verifica, trivialmente, lo que queremos probar. En el caso general, con centro en P y radio $\dfrac{m}{2}$, tracemos una circunferencia. Esta cortará a $\overrightarrow{OA}$ en un punto R y a $\overrightarrow{OC}$ en un punto Q (¿Por qué?). Unamos P con R y, también, con Q. Resulta que los triángulos OPQ y OPR son isósceles. Luego, se cumple:

$$\measuredangle OPR \;=\; 180° - 2 \cdot \measuredangle AOP \;\;;\;\; \measuredangle OPQ \;=\; 180° - 2 \cdot \measuredangle POC.$$

De modo que:

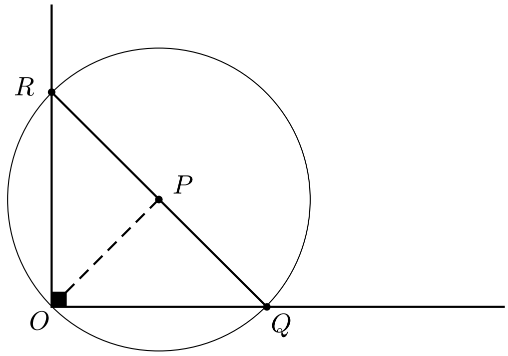
$$\measuredangle OPR + \measuredangle OPQ \;=\; 360° - 2(\measuredangle AOP + \measuredangle POC) \;=\; 180°.$$

Conclusión: $\widehat{OPR}$ y $\widehat{OPQ}$ son adyacentes.

Por lo tanto R, P y Q están alineados.

En otras palabras, $\overline{RQ}$ representa una posición del segmento dado, en su proceso de deslizamiento, con P como su punto medio.

II) Sea P el punto medio del **segmento dado**, en una de **sus** posiciones al deslizarse. Probemos que la distancia de P a O es $\dfrac{m}{2}$. Para ello, basta recordar que, en todo **triángulo rectángulo**, el punto medio de la hipotenusa es **su** circuncentro (intersección de las mediatrices de sus lados).



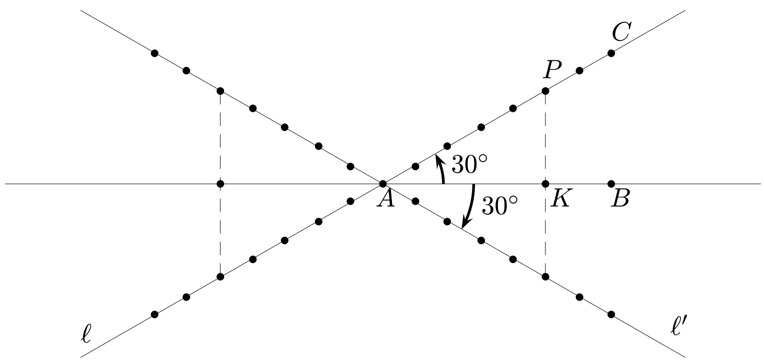
O sea, P es el circuncentro del $\triangle ROQ$. En otras palabras, P es el centro de la circunferencia circunscrita al $\triangle ROQ$. En consecuencia, $PO = PR = PQ = \dfrac{m}{2}$.

Por $I)$ y $II)$, se sigue que el arco AC es el **L.G.** buscado.

Sugerencia: enfocar este ejercicio, utilizando los recursos de la geometría analítica.

4.- Dado un segmento $\overline{AB}$, encontrar el **L.G.** de P, el cual se mueve en un plano dado, que pasa por $\overline{AB}$, y de manera que la distancia de $\boldsymbol{P}$ a $\overline{AB}$ sea la mitad de **su** distancia al punto A.

Bosquejo:



Hipótesis: El **L.G.** pedido consiste en dos rectas que resultan al girar - con centro de giro en A - la recta $\overleftrightarrow{AB}$, un ángulo de $30°$. Si el giro es en el sentido horario se obtiene la recta l', si es en el sentido antihorario se llega a la recta l.

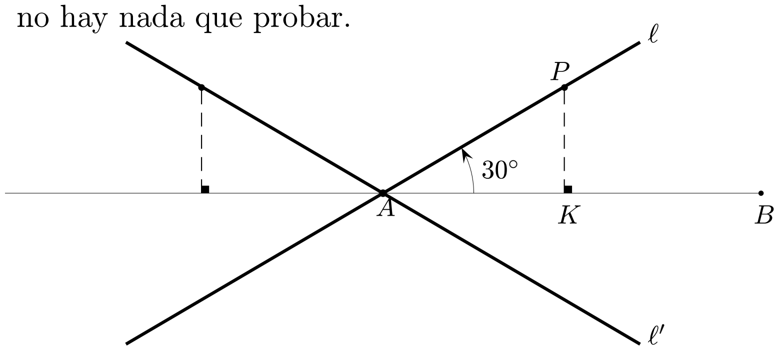
II) Obviamente el punto A pertenece al **L.G:** indicado. Sea, entonces, $P \neq A$, tal que $PK = \dfrac{1}{2}PA$. (Tomamos P en $\overrightarrow{AC}$, los otros casos son análogos).

En el triángulo rectángulo AKP : $sen\widehat{KAP} = \dfrac{PK}{PA} = \dfrac{1}{2}$.

Luego, $\measuredangle KAP = 30°$.

I) Sea P, un punto de l o de l'.

Si $P = A$, no hay nada que probar.



Supongamos $P \neq A$.

Se cumple: $\dfrac{1}{2} = sen30° = \dfrac{PK}{PA}$.

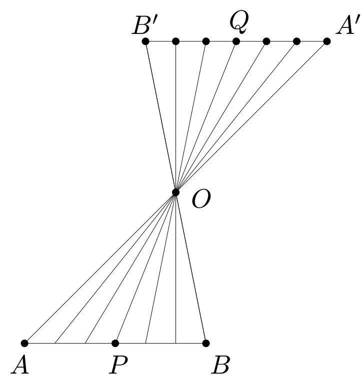
Luego, $PK = \dfrac{1}{2}PA$. Es decir, P verifica la condición geométrica estipulada.

En vista de $I)$ y $II)$, se sigue que la unión de l con l' es el **L.G.** pedido.

Nota: En esencia, lo que hemos utilizado es la propiedad: En todo triángulo rectángulo, cuyos ángulos agudos valen, respectivamente, $30°$ y $60°$, se cumple que el cateto menor tiene una longitud igual a la mitad de la correspondiente a la hipotenusa.

5.- En un plano, sean: $\overline{AB}$ un segmento y 0, un punto que no está en $\overline{AB}$. Se une 0 a un punto P, en $\overline{AB}$, y se prolonga $\overline{PO}$, hasta Q, de manera que $OP = OQ$. A medida que P recorre $\overline{AB}$, ¿Cuál es el **L.G.** de Q?

Exploración:



Afirmación: El **L.G.** en cuestión es un segmento paralelo a $\overline{AB}$ y de igual longitud que éste.

Precisando: Si A' es el simétrico de A, respecto a 0, y B' es el simétrico de B, respecto a 0, entonces el **L.G.** buscado es $\overline{B'A'}$.

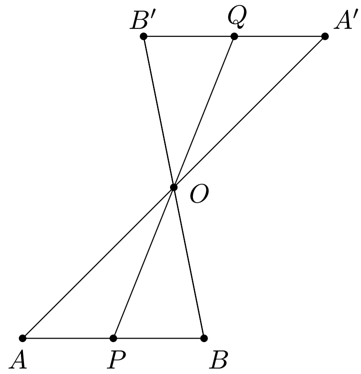
Notemos que como $\triangle ABO \cong \triangle B'OA'$ (T_3, Apéndice), resulta $B'A' = AB$ y $\overline{B'A'} \parallel \overline{AB}$.

Prueba:

I) Sea Q un punto de $\overline{B'A'}$. Prolonguemos $\overline{QO}$ hasta cortar $\overline{AB}$, en P (Notar que como Q está entre B' y A', entonces P queda entre A y B). Debemos probar que $OP = OQ$. Comparemos los triángulos $OA'Q$ y APO :

$OA = OA'$

(A y A' son simétricos respecto a 0)



$\widehat{AOP}$ y $\widehat{QOA'}$ son opuestos por el vértice.

$\widehat{OAP}$ y $\widehat{OA'Q}$ son alternos internos entre paralelas cortadas por $\overline{AA'}$.

Luego, por (T_3, Apéndice), $\triangle OA'Q \cong \triangle APO$.

En particular, $OP = OQ$.

II) Sea Q, el punto simétrico (respecto a 0) de P, punto de $\overline{AB}$. Queremos probar que Q está en $\overline{B'A'}$.

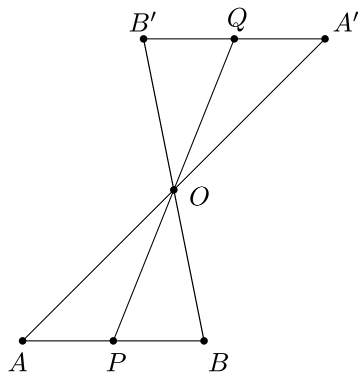
Si $Q = B'$ ó $Q = A$, no hay nada que probar. Supongamos, entonces, $Q \neq A'$ y $Q \neq B'$. (Ello implica, a su vez, que $P \neq A$ y $P \neq B$).

Comparemos los triángulos $OA'Q$ y APO.

Se cumple:

$OA = OA'$ (por construcción)

$OP = OQ$ (por hipótesis)



$\widehat{AOP}$ y $\widehat{QOA'}$ son opuestos por el vértice.

Entonces, por T_3 (Apéndice), resulta:

$$\triangle OA'Q \cong \triangle APO.$$

De ahí, obtenemos: $\measuredangle QA'O = \measuredangle OAP$, es decir, $\measuredangle QA'O = \measuredangle OAB$. Utilizando T_5 (Apéndice), se sigue: $\overline{QA'} \parallel \overline{AB}$.

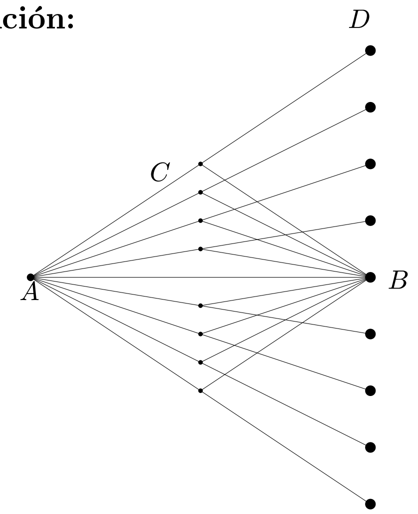
Pero, también, $\overline{B'A'} \parallel \overline{AB}$. Así que mediante el Quinto postulado de Euclides, llegamos a que Q está en $\overleftrightarrow{B'A'}$. Como, además, P está entre A y B, se tiene que Q está entre B' y A' (Usar, por ejemplo, el método de reducción al absurdo y los teoremas T_5 y T_6 del Apéndice).

Conclusión: Q pertenece a $\overline{B'A'}$.

6.- En un plano, consideremos la familia de los triángulos isósceles que tienen por base $\overline{AB}$. Llamemos C al tercer vértice en uno cualquiera de dichos triángulos.

Prolonguemos $\overline{AC}$ hasta D, de forma que $CD = CB$. ¿Cuál es el **L.G.** de D?

Exploración:



Conjetura: El **L.G.** solicitado es la recta l (perpendicular a $\overline{AB}$, en B), menos el punto B.

Prueba:

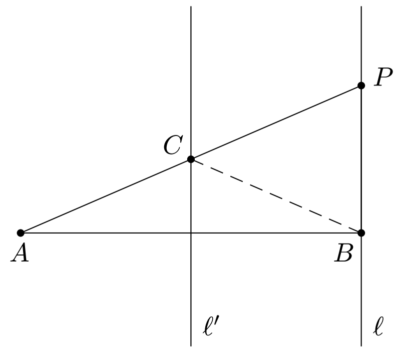
I) Sea P, punto de l, $P \neq B$.

Consideremos l', la mediatriz de $\overline{AB}$.

Resulta que $\overline{AP}$ intersecta a l' es un punto C.

(¿Por qué?). Por otro lado, como C está en l',

entonces el $\triangle ABC$ es isósceles. (∗)



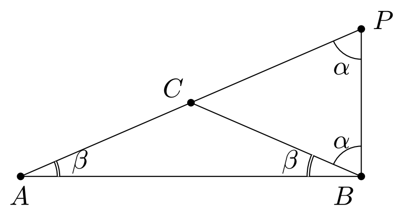
Ahora, aplicando T_7 (Apéndice), se deduce que $AC = CP$. Esto, junto con (∗), nos permite concluir que: $CP = CB$.

Así, P cumple la condición requerida.

II) Supongamos que P ha sido obtenido siguiendo las indicaciones del ejercicio; debemos probar que P está en l.

Sean α y β tales que:

$\measuredangle CAB = \measuredangle ABC = \beta$; $\quad \measuredangle CPB = \measuredangle PBC = \alpha$.



Resulta: $\measuredangle PCB = 2\beta$

(T_6, Apéndice)

$\measuredangle ACB = 2\alpha$

Pero, $\widehat{PCB}$ y $\widehat{ACB}$ son adyacentes.

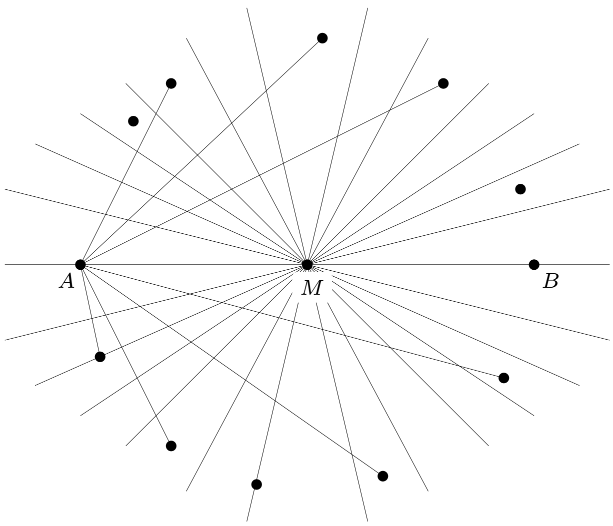
Luego, $\quad 2\beta + 2\alpha \ = \ 180°,$

es decir, $\quad \alpha + \beta \ = \ 90°.$

Por lo tanto, $\quad \overline{PB} \perp \overline{AB}$, lo cual significa que P está en l.

7.- En un plano, dados dos puntos: A y M, hallar el **L.G.** de los puntos A', respectivamente, simétricos de A en relación a las rectas que pasan por M.

Exploración:



Hipótesis: El **L.G.** buscando es la $C(M; AM)$.

Demostración:

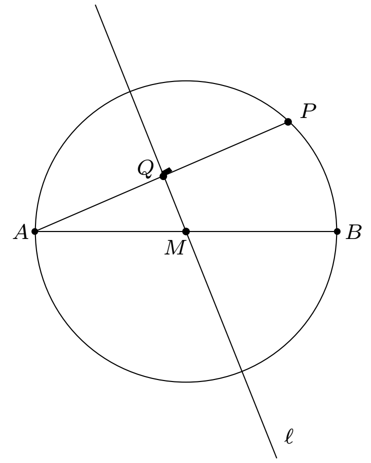
I) Sea P, punto de la $C(M; AM)$.

Si $P = A$, consideramos la recta determinada por A y M, para concluir que P verifica la propiedad requerida.

Si $P = B$, donde, $\overline{AB}$ es diámetro de la $C(M; AM)$, consideremos $\overleftrightarrow{QM}$, perpendicular a $\overline{AB}$. Tenemos así, que P es simétrico de A, respecto de $\overleftrightarrow{QM}$.

Sea, entonces, P, punto de la $C(M; AM)$, con $P \neq A$ y $P \neq B$.

Tracemos la perpendicular, l, a la cuerda $\overline{AP}$, por su punto medio Q. Resulta que ***l* pasa por *M*** puesto que M equidista de A y P.

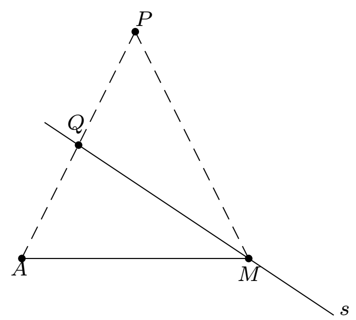


Como, además, P es el simétrico de A, respecto a l, concluimos que P cumple la condición estipulada.

II) Sea P, simétrico de A, respecto a una recta s que pasa por M.

Si $P = A$, entonces, trivialmente, se cumple que P está en la $C(M; AM)$. Supongamos $P \neq A$.

La recta s corta a $\overline{AP}$ en un punto Q (¿ Por qué?). Comparemos los triángulos rectángulos MQP y AQM.



$\overline{QM}$, lado común

$QP = QA$ (A y P son simétricos, respecto a s)

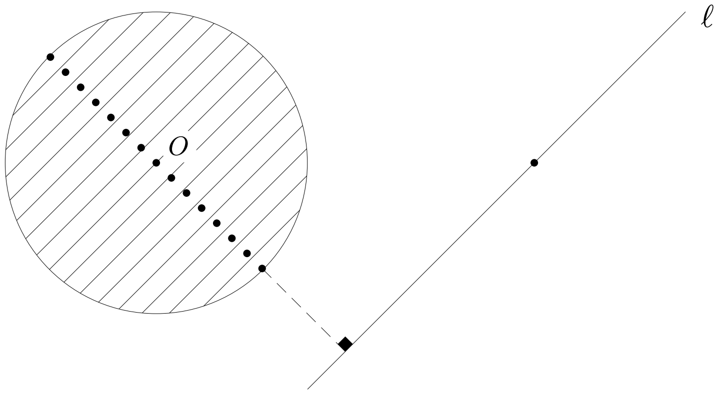
Luego, por T_4 (Apéndice), se sigue que $\triangle MQP \cong \triangle AQM$.

En consecuencia, $PM = AM$, o sea, P está en la $C(M; AM)$.

8.- En un plano,

¿Cuál es el **L.G.** de los puntos medios de todas las cuerdas - de una $C(O; r)$ - paralelas a una recta dada, l?

Exploración:



Conjetura: El **L.G.** es el diámetro perpendicular a l (No se incluyen los extremos de dicho diámetro).

Prueba:

I) Sea P, un punto del interior de $\overline{AB}$, donde, $\overline{AB}$ es diámetro de $C(O; r)$, con $\overline{AB} \perp l$.

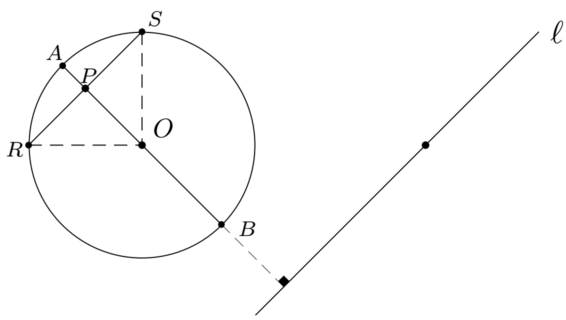
Por P, tracemos $\overline{RS}$, cuerda perpendicular a $\overline{AB}$.

Respecto a los triángulos RPO y OPS, notamos:

$\overline{OP}$, lado común;

$OS = OR = r$

$\measuredangle RPO = \measuredangle OPS = 90^\circ$



Luego, por T_4 (Apéndice): $\triangle RPO \cong \triangle OPS$.

Se cumple, así, que: $PR = PS$.

O sea, P es el punto medio de la cuerda $\overline{RS}$, la cual es paralela a l (¿Por qué?).

II) Sea P el punto medio de $\overline{RS}$ (cuerda de $C(O;r)$, paralela a l).

Consideremos el diámetro de $C(O;r)$ que pasa por P

(Llamémoslo $\overline{AB}$).

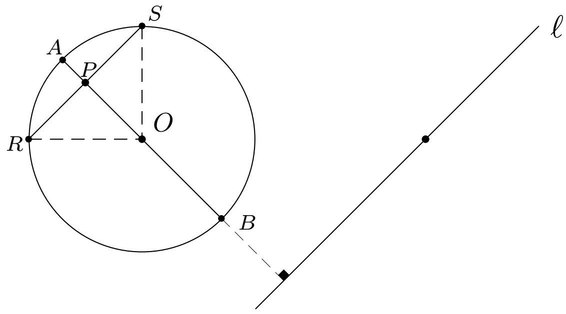
Veamos que $\overline{AB} \perp l$.

Los triángulos ROP y POS, tienen:

$\overline{OP}$, lado común;

$RP = PS$ (hipótesis)

$OR = OS = r$



Entonces, por T_3 (Apéndice) se tiene: $\triangle ROP \cong \triangle POS$.

En particular, $\measuredangle RPO = \measuredangle OPS$.

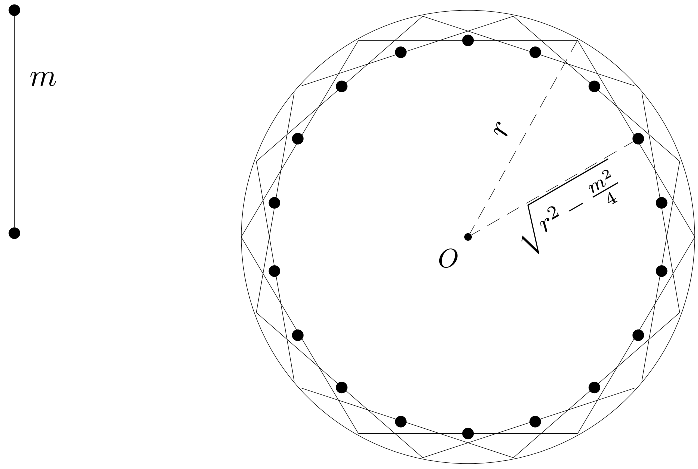
Como $\widehat{RPO}$ y $\widehat{OPS}$ son, además, adyacentes, se sigue que:

$$\measuredangle RPO = \measuredangle OPS = 90°.$$

Así, $\overline{AB} \perp \overline{RS}$. Si, ahora, usamos que $\overline{RS} \parallel l$, podemos concluir que $\overline{AB} \perp l$.

9.- Encontrar el **L.G.** de los puntos medios de todas las cuerdas, de longitud dada, m, que se pueden construir en la $C(O;r)$. (Asumimos que $m < 2r$).

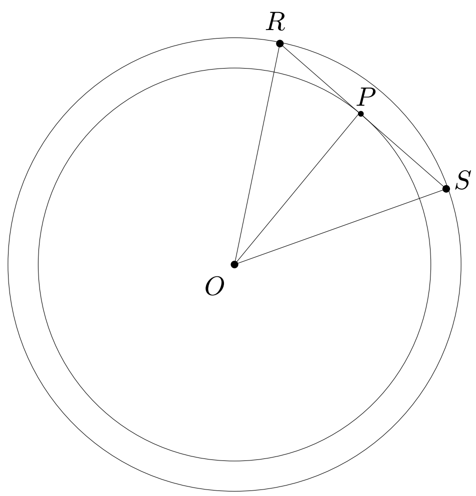
Exploración:



Conjetura: El **L.G.** pedido es la $C\left(O; \sqrt{r^2 - \dfrac{m^2}{4}}\right)$.

Prueba:

I)



Sea P, punto de la $C\left(O; \sqrt{r^2 - \dfrac{m^2}{4}}\right)$.

Por P, tracemos la cuerda - de la $C(O;r)$ - $\overline{RS}$, perpendicular a $\overline{OP}$. Examinando los triángulos rectángulos OPR y OPS : $\overline{OP}$ lado común;

$OS = OR = r$.

De manera que por T_4 (Apéndice), se sigue que:

$\triangle ORP \cong \triangle OPS$.

En particular, $PR = PS$.

Por otra parte, mediante el teorema de Pitágoras, obtenemos:

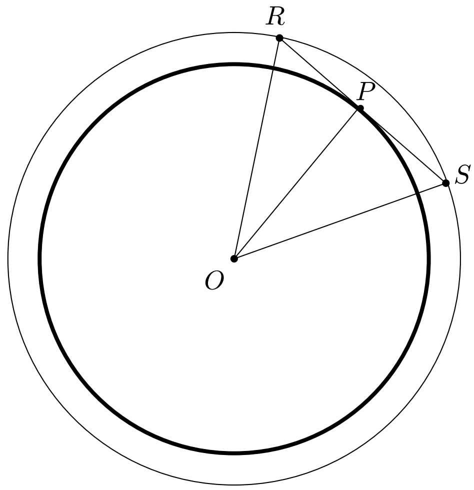
$$PS \;=\; \sqrt{r^2 - OP^2} \;=\; \sqrt{r^2 - \left(r^2 - \frac{m^2}{4}\right)} \;=\; \frac{m}{2}.$$

Así que, $RS = m$.

Conclusión: P es el punto medio de la cuerda $\overline{RS}$, cuya longitud es m.

II) Sea P, punto medio de la cuerda $\overline{RS}$, con R y S en la $C(O;r)$ y $RS \;=\; m < 2r$.

En los triángulos OPR y OPS, se cumple:



$\overline{OP}$, lado común;

$OS = OR = r$

$PR = PS$ (por construcción)

Usamos, entonces, T_3 (Apéndice), para obtener que:

$\triangle OPR \cong \triangle OPS.$

De ahí, se consigue que: $\measuredangle OPS \;=\; \measuredangle OPR \;=\; 90°.$

Aplicando el Teorema de Pitágoras, en el $\triangle OPS$, resulta:

$$OP \;=\; \sqrt{OS^2 - PS^2} \;=\; \sqrt{r^2 - \frac{m^2}{4}}.$$

Luego, P está en la $C\left(O; \sqrt{r^2 - \frac{m^2}{4}}\right)$.

Nota: ¿Qué ocurre en el caso $m \;=\; 2r$?

10.- En la $C(O;r)$ consideremos una cuerda $\overline{AB}$, de longitud c. Denotemos por τ, a la familia de **todos** los triángulos inscritos en la $C(O;r)$, con $\overline{AB}$ como lado común a todos ellos y con su tercer vértice en un mismo semi-plano, respecto a $\overleftrightarrow{AB}$. Hallar:

a) El **L.G.** de los circuncentros de los elementos de $\mathcal{T}$.

b) El **L.G.** de los baricentros de los elementos de $\mathcal{T}$.

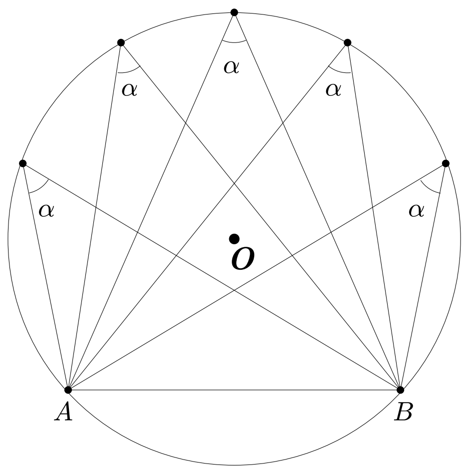
c) El **L.G.** de los ortocentros de los elementos de $\mathcal{T}$.

d) El **L.G.** de los incentros de los elementos de $\mathcal{T}$.

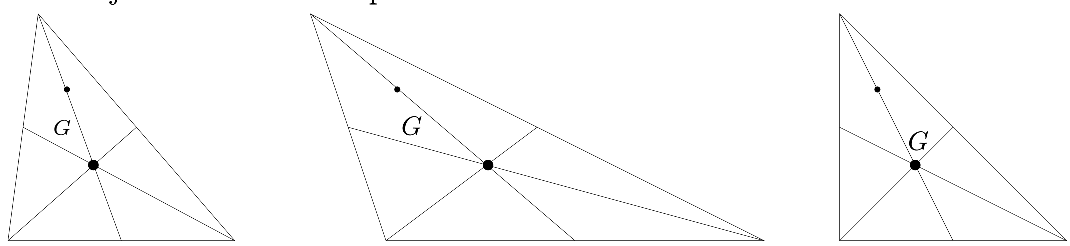
Solución:

a) Recordemos que el **circuncentro** de un triángulo es el punto de intersección de las mediatrices de sus lados y, equivalentemente, es el centro de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo. En el caso que estamos considerando, todos los triángulos tienen el mismo circuncentro: el punto 0.

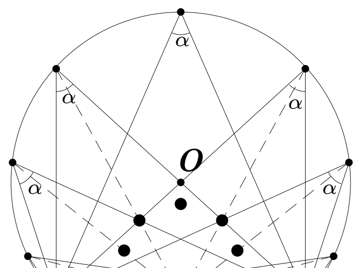
Luego, el **L.G.** buscando es el punto 0.



b) Vale recordar que para ubicar el **baricentro** (intersección de las medianas), G, de un triángulo dado, basta considerar una mediana cualquiera, del mismo, dividir está en tres partes iguales y elegir (en dicha mediana) el punto de división más alejado del vértice respectivo.



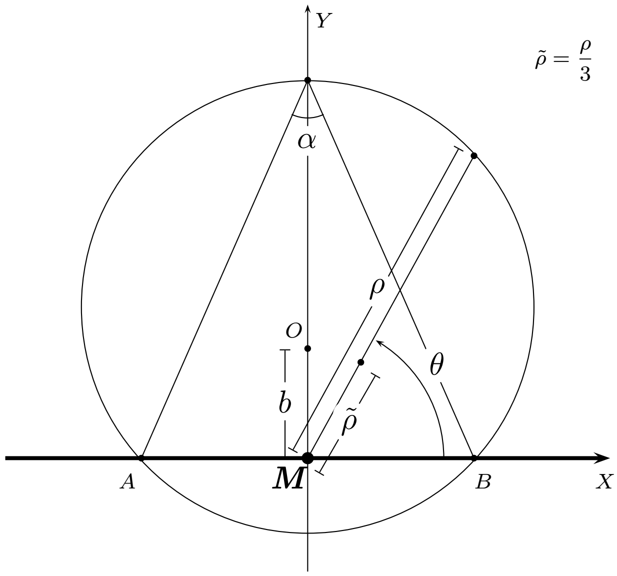
Bosquejo de L.G.:

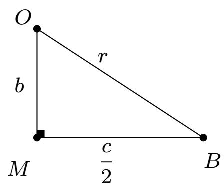


Conjetura provisoria: un arco de circunferencia, sin incluir sus extremos.

Consideremos, en primera instancia, el caso $\alpha < 90°$, para informarnos más sobre dicho **L.G.**.

Usaremos coordenadas polares, tomando como **polo:** el punto medio, M, de $\overline{AB}$. El eje polar será $\overleftrightarrow{AB}$.





Hemos llamado b : **a la distancia de** O **a** M. Utilizando el **sistema de coordenadas cartesianas** XMY, tenemos:

$O = (0, b)$; ecuación de la $C(O; r)$:

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

o sea,

$$x^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2.$$

Así que, en coordenadas polares, resulta:

$$\rho^2 - 2b\rho \operatorname{sen} \theta = r^2 - b^2,$$

es decir,

$(\rho - b \operatorname{sen} \theta)^2 \; = \; r^2 - b^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta \; = \; \dfrac{c^2}{4} + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta.$

Entonces, $\qquad \rho \; = \; b \operatorname{sen} \theta \pm \sqrt{\dfrac{c^2}{4} + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta}.$

Por inspección, queda:

$$\rho \; = \; b \operatorname{sen} \theta + \sqrt{\frac{c^2}{4} + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \qquad (*).$$

De manera que, $(*)$ es la ecuación de la $C(O; r)$, en coordenadas polares.

Por otro lado, la ecuación del **L.G.** solicitado, es, en coordenadas polares: $\tilde{\rho} \; = \; \dfrac{\rho}{3}$, con $0 < \theta < \pi$ $\quad$ (θ en radianes) y

ρ dado por $(*)$.

Así,

$$\tilde{\rho} \; = \; \frac{b \operatorname{sen} \theta}{3} + \frac{\sqrt{\dfrac{c^2}{4} + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}{3} \qquad (**).$$

Pasando $(**)$ a coordenadas cartesianas, después de simplificar, obtenemos:

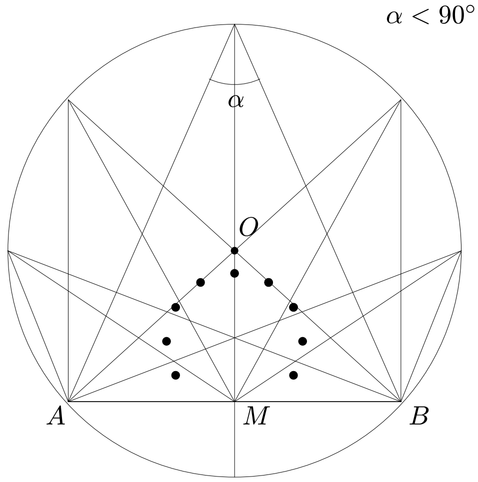
$$9(x^2 + y^2) - 6by \; = \; \frac{c^2}{4}.$$

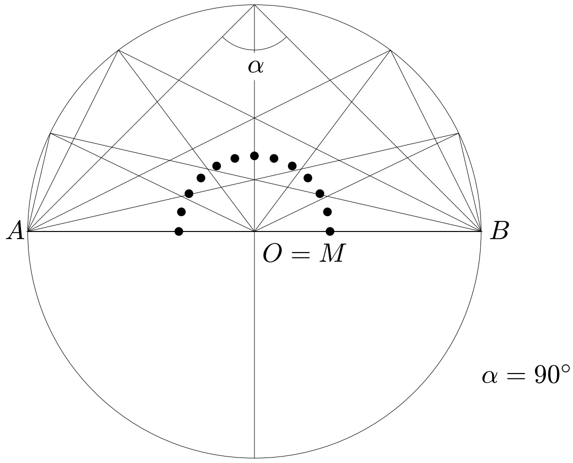
Es decir:

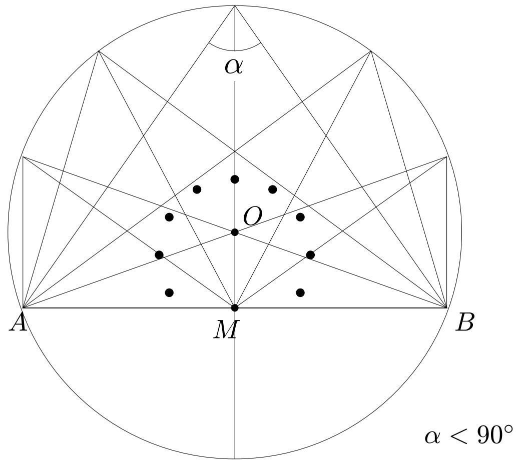
$$x^2 + \left(y - \frac{b}{3}\right)^2 \; = \; \frac{c^2 + 4b^2}{36}.$$

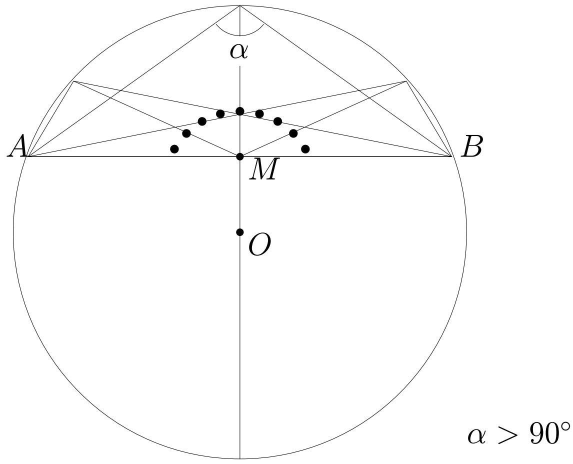
Por lo tanto, el **L.G.** procurado está en la $C\left(\left(0; \dfrac{b}{3}\right); \dfrac{\sqrt{c^2 + 4b^2}}{6}\right)$.

Antes, de indicar la conjetura definitiva, veamos algunos dibujos:









Observación: En el caso $\alpha > 90°$, en lugar de $(*)$, se obtiene, para la $C(O; r)$:

$$\rho \;=\; -b \operatorname{sen}\theta + \sqrt{\frac{c^2}{4} + b^2 \operatorname{sen}^2\theta}.$$

Entonces, el **L.G.** solicitado, en este caso, está en la circunferencia de centro $\left(0; -\dfrac{b}{3}\right)$ y radio $\dfrac{\sqrt{c^2+4b^2}}{6}$.

(El trabajo algebraico es análogo, sólo hay que notar, que, ahora, se tiene: $O \;=\; (0, -b)$).

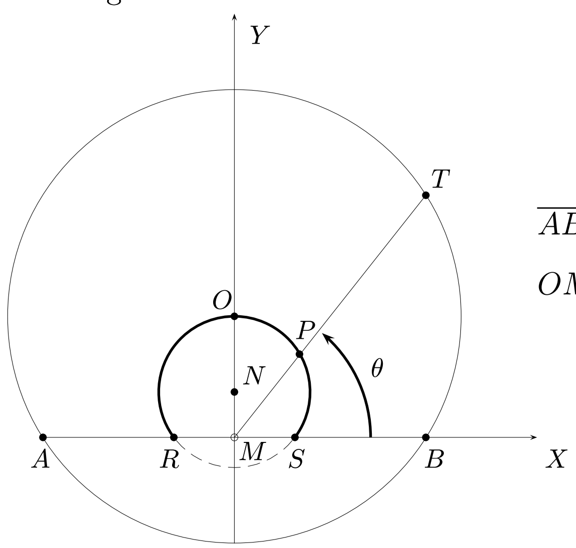
Conjetura definitiva: El **L.G.** en cuestión es un arco de la circunferencia de radio igual a $\dfrac{\sqrt{c^2+4b^2}}{6}$ (c es la longitud del lado dado, $\overline{AB}$, y b es la distancia de O al punto medio de $\overline{AB}$), y con centro en el punto $\left(O, \dfrac{b}{3}\right)$ - caso $\alpha \leq 90°$ - ó $\left(O, -\dfrac{b}{3}\right)$ - caso $\alpha > 90°$ -.

(Recordar que las coordenadas cartesianas de los puntos considerados, se refieren al sistema XMY).

Nota: El arco que constituye el **L.G.** no incluye puntos de $\overline{AB}$. También, el **L.G.** está contenido en el mismo semiplano, respecto a $\overleftrightarrow{AB}$, en donde se hallan los triángulos considerados (elementos de $\mathcal{T}$).

A continuación, nos referiremos al caso $\alpha < 90°$ (los otros casos son análogos).

Consideremos la figura:



$\overline{AB}$, lado de longitud c

$OM = b,\; NM = \dfrac{b}{3},\; MS = \dfrac{c}{6}$

Con centro en N y radio NS, hemos trazado una circunferencia y hemos ignorado el arco que queda "por debajo" de $\overline{AB}$.

Afirmamos que el **L.G.** es el otro arco, quitándole, además, los puntos R y S.

Notemos que la $C(N;NS)$ tiene, en coordenadas cartesianas, la ecuación:

$$x^2 + (y - \frac{b}{3})^2 \; = \; \frac{b^2}{9} + \frac{c^2}{36},$$

lo cuál, en coordenadas polares, se reduce a:

$$\rho \; = \; \frac{b}{3}\operatorname{sen}\theta + \frac{\sqrt{\dfrac{c^2}{4} + b^2 \operatorname{sen}^2\theta}}{3} \qquad (***).$$

(Recordar que los sistemas de coordenadas, a los cuales nos referimos, son los especificados en seguida de la conjetura provisoria).

Comparando $(*)$ y $(***)$, concluimos que: al trazar, por M, **un rayo** que forme un ángulo θ (medido en el sentido anti-horario) con $\overline{MB}$, el mismo cortará a la $C(N;NS)$ y a la $C(O;r)$, en los puntos P y T, respectivamente, tales que $MP \; = \; \frac{1}{3}MT$.

Ahora, la prueba de la conjetura definitiva es sencilla.

I) Sea P, un punto de la $C(N;NS)$, en el mismo semiplano, respecto a $\overleftrightarrow{AB}$, que N. (Ver figura anterior). Prolongamos $\overline{MP}$, hasta cortar la $C(O;r)$ en T.

   Por $(*)$ y $(***)$, se tiene:

$$MP \; = \; \frac{1}{3}MT.$$

   Así que, P es el baricentro del $\triangle ABT$.

   Como, evidentemente, el $\triangle ABT$ está en τ, podemos concluir que P está en el **L.G.**.

II) Sea P, el baricentro del $\triangle ABT$, elemento de τ (T está en la $C(O;r)$ y $\overline{AB}$ es cuerda de la $C(O;r)$).

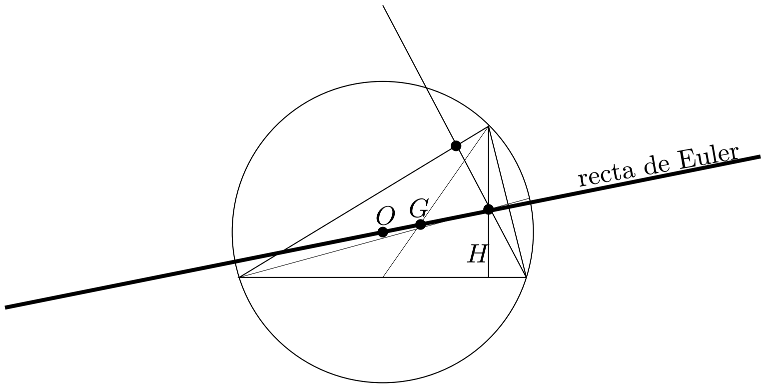
Dado que M es el punto medio de $\overline{AB}$, entonces $\overline{TM}$ es mediana del $\triangle ABT$ y $MP = \dfrac{1}{3}MT$.

Esto significa, a la luz de $(*)$ y $(***)$, que P está en la $C(N;NS)$.

Obviamente, $P \neq A$, $P \neq B$ y P está en el semiplano, respecto a $\overline{AB}$, que contiene a los elementos de $\mathcal{T}$.

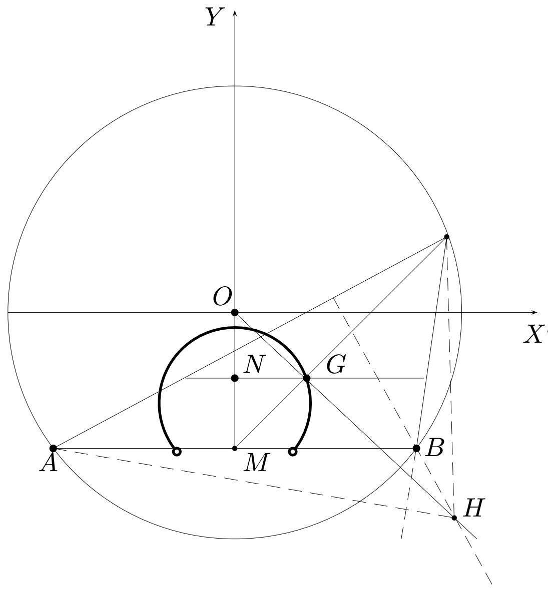
c) Aprovecharemos el **L.G.** hallado en b), junto con el T_8 (Apéndice): En todo triángulo, el circuncentro (O), baricentro (G) y el ortocentro (H), están contenidos en una recta (recta de Euler) y, además,

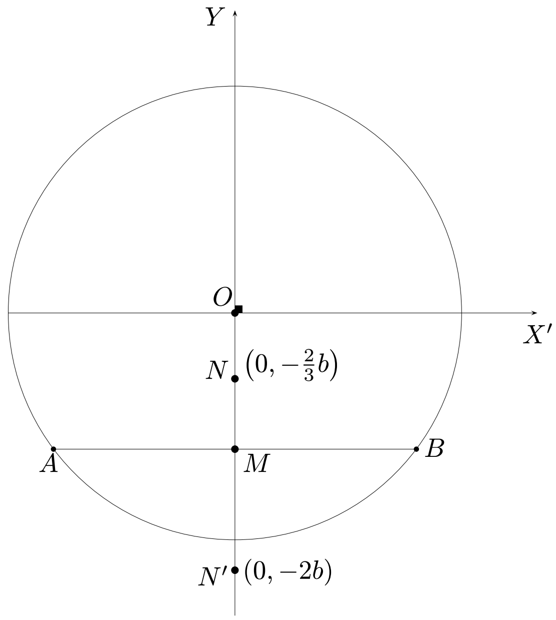
$GH = 2OG$. $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ ()



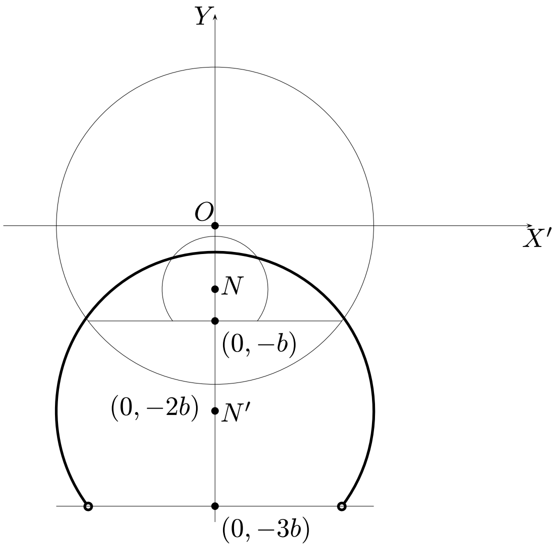
Recordemos que cada triángulo en $\mathcal{T}$, tiene al punto O como su circuncentro. Notemos, también, que, en vista de (), hallar el **L.G.** de los ortocentros de los elementos de $\mathcal{T}$, equivale a encontrar la " imagen homótetica " del arco de la $C(N;NS)$ hallado en b) tomando como centro de homotecia: el punto O, y como razón de homotecia: 3.

Resultará, entonces, otro arco de circunferencia, con radio: el triple de NS; y con centro: la imagen homotética del punto N. (Llamémosla N').





(Para que coincidan el centro de homotecia y el origen de coordenadas, introducimos el nuevo sistema YOX').

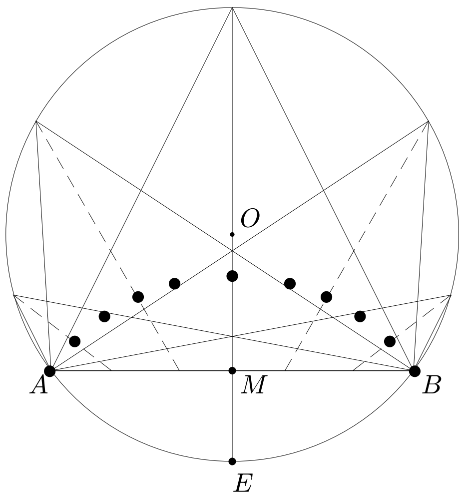


Ecuación del **L.G.** (en relación al sistema YOX'):

$$x^2 + (y+2b)^2 \ = \ \frac{c^2+4b^2}{4} \quad , \qquad\qquad y > -3b.$$

Nota: Los casos: $\alpha > 90°$ ó $\alpha \ = \ 90°$, se tratan en forma similar.

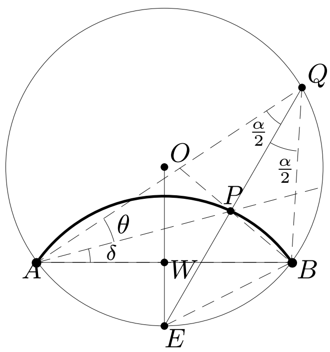
d) **Exploración:**



Conjetura: El **L.G.** buscando es un arco de circunferencia (por arriba de la cuerda $\overline{AB}$), de centro E y radio EB. ($\overline{OE}$ es el radio perpendicular a $\overline{AB}$)

Prueba:

I) Sea P, punto de la $C(E;EB)$, en el mismo semiplano - respecto a $\overleftrightarrow{AB}$ - que O. Prolonguemos $\overline{EP}$, hasta cortar la $C(O;r)$, en Q.



Comparando los triángulos AWO y BWO, se obtiene (utilizando T_4, Apéndice) que $\measuredangle AOW = \measuredangle WOB$. Inmediatamente se sigue que $\widehat{AE}$ y $\widehat{EB}$ tienen la misma medida. Entonces, usamos T_1 (Apéndice) para deducir que $\overline{QE}$ es bisectriz del $\widehat{AQB}$. (1)

Denotemos: $\measuredangle BAP = \delta$; $\measuredangle OAP = \theta$;
$\measuredangle AQB = \alpha$.

Tenemos que: $\measuredangle BAP + \measuredangle OAP = \measuredangle BAQ$.

Luego, $\measuredangle BAQ = \delta + \theta$.

Así, por T_1 (Apéndice), es: $\measuredangle PEB = \delta + \theta$. $(*)$

Ahora bien, como el $\triangle PEB$ es isósceles, resulta:

$2\measuredangle PBE + \measuredangle PEB = 180^\circ$ $(**)$

Pero, $\measuredangle PBA = \measuredangle PBE - \measuredangle ABE$. $(***)$

También, por T_1 (Apéndice), $\measuredangle ABE = \dfrac{\alpha}{2}$.

Así que, usando $(*)$, $(**)$ y $(***)$, se llega a:

$$\measuredangle PBA = 90^\circ - \frac{\delta}{2} - \frac{\theta}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

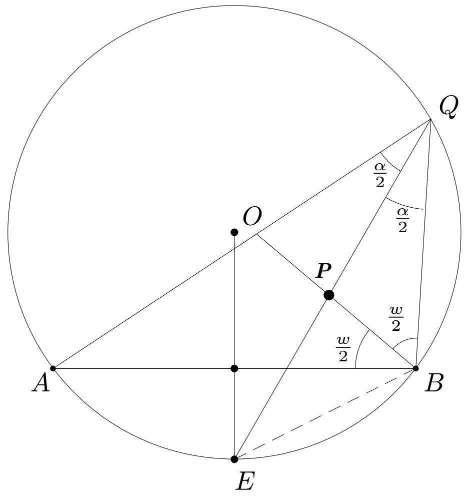
Por otro lado, $\measuredangle ABQ + \delta + \theta + \alpha = 180^\circ$.

O sea, $\measuredangle ABQ = 2\measuredangle PBA$.

Conclusión: $\overline{PB}$ es bisectriz del $\widehat{ABQ}$. (2)

De manera que, de (1) y (2), se sigue que P es el incentro del $\triangle ABQ$.

II) Sea P, el incentro del $\triangle ABQ$, elemento de τ.



Tracemos $\overline{OE}$, radio perpendicular a $\overline{AB}$.

Se tiene: $\measuredangle ABE = \dfrac{\alpha}{2}$ (T_1 Apéndice).

Luego, $\measuredangle PBE = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\omega}{2}$.

Pero, $\measuredangle EPB = \dfrac{\omega}{2} + \dfrac{\alpha}{2}$ (T_6 Apéndice).

Entonces, el $\triangle EBP$ es isósceles.

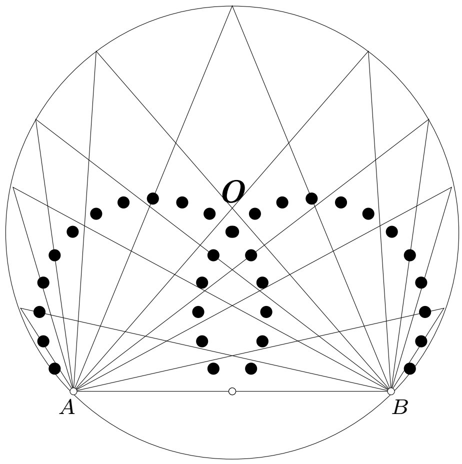
De manera que, $PE = BE$.

Es decir, P está en la $C(E; EB)$.

11) Consideremos, nuevamente, los triángulos de la familia τ, del ejercicio 10).

En cada triángulo, fijémonos en los puntos medios de los lados (exceptuando el $\overline{AB}$). ¿ Cuál es el **L.G.** de tales puntos?

Exploración:



Conjetura: El **L.G.** buscando consiste en **dos arcos** de circunferencia, de diámetros $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, respectivamente, y **contenidos** en el mismo semiplano - respecto a $\overleftrightarrow{AB}$ - que O (circuncentro de cada triángulo de τ).

Prueba:

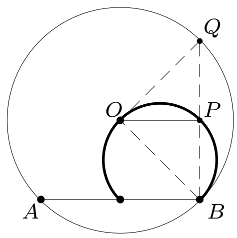
I) Sea P, punto de la circunferencia de diámetro $\overline{OB}$, en el mismo semiplano - respecto a $\overleftrightarrow{AB}$ - que O.

Si $P = O$, no hay nada que probar. Supongamos, entonces, $P \neq O$.

Prolonguemos $\overline{BP}$, hasta cortar la $C(O;r)$, en Q.

Respecto a los triángulos OBP y OPQ, tenemos:

$\overline{OP}$, lado común



$OB = OQ = r$

$\measuredangle OPQ = \measuredangle OPB = 90°$,

pues el $\widehat{OPQ}$ y el $\widehat{OPB}$ son adyacentes, y el $\widehat{OPB}$ está inscrito en una semicircunferencia (T_2, Apéndice).

Entonces, usando T_4 (Apéndice), resulta que:

$$\triangle OBP \cong \triangle OPQ.$$

En particular, $\quad PB = PQ.$

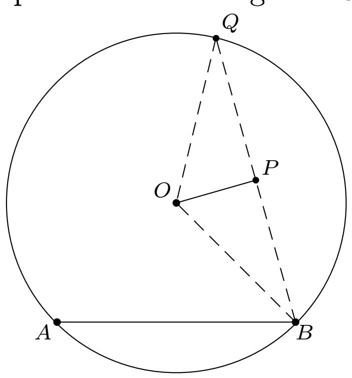
Es decir, P es el punto medio de $\overline{BQ}$, lado del $\triangle ABQ$

(el cual está en τ).

En forma similar, se procede en el caso en el cual P está en la circunferencia de diámetro $\overline{OA}$.

II) Sea P, punto medio de $\overline{BQ}$, con Q en la $C(O;r)$ y, además, con P y Q, en el semiplano - respecto a $\overleftrightarrow{AB}$ - que contiene a O.

Comparemos los triángulos OPQ y OBP. Poseen:



$\overline{OP}$, lado común

$PQ = PB$ (hipótesis)

$OQ = OB = r$

Así que, por T_3 (Apéndice), se sigue que:

$$\triangle OPQ \cong \triangle OBP.$$

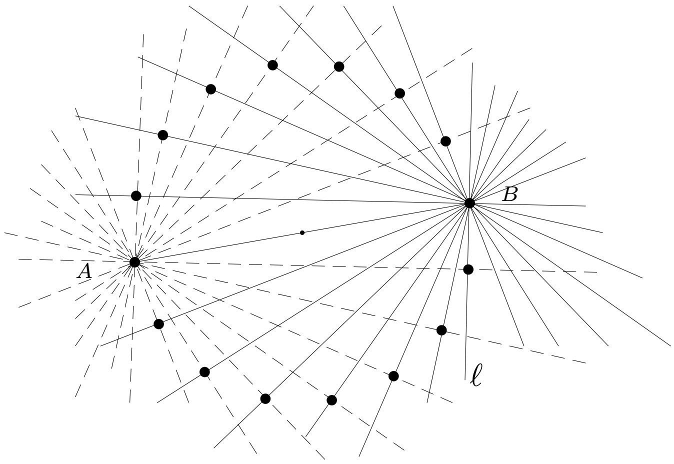
De ahí se deduce que los ángulos **(adyacentes)** $\widehat{OPQ}$ y $\widehat{OPB}$, tienen la misma medida.

De manera que $\measuredangle OPB = 90°$; lo cual significa (T_2, Apéndice) que: P está en la circunferencia de diámetro $\overline{OB}$.

Análogamente se trata el caso en el cual P es el punto medio de $\overline{AQ}$, con Q en la $C(O;r)$ y con P y Q, en el mismo semiplano - respecto a $\overleftrightarrow{AB}$ - que O.

12) En un plano, hallar el **L.G.** de los piés de las perpendiculares trazadas desde el punto A hasta las rectas que pasan por otro punto dado, B.

Exploración:



Conjetura: El **L.G.** solicitado es la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$.

Prueba:

I) Sea P, punto de la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$.

Si P coincide con B, consideramos la recta l, que pasa por B y es perpendicular a $\overline{AB}$.

Si $P = A$, utilizamos $\overleftrightarrow{AB}$ y trazamos la perpendicular, por A, a $\overleftrightarrow{AB}$.

Vemos así, que en ambos casos, P tiene la propiedad enunciada.

Sea, entonces, $P \neq A$ y $P \neq B$.

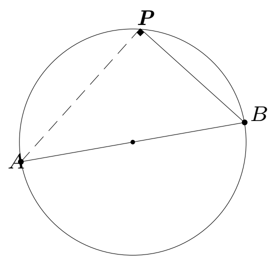
Como $\measuredangle APB = 90°$ (T_2, Apéndice),

tenemos que $\overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{PB}$.

Luego, en este último caso, P también posee la propiedad requerida.

II) Sea P - punto del plano dado - con la propiedad de ser pié de una perpendicular, trazada desde A, a una recta que pasa por B.

Supongamos, además, $P \neq A$ y $P \neq B$.



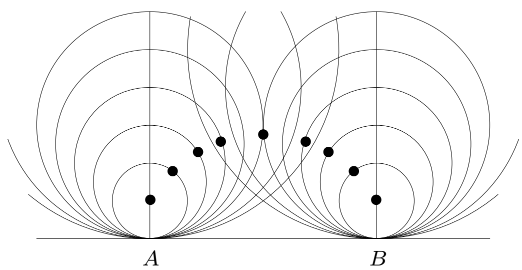
(En caso contrario, no hay nada que probar).

Por la hipótesis, tenemos que: $\measuredangle APB = 90°$.

Así que, por T_2 (Apéndice), P pertenece a la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$.

13) En un plano, consideremos la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y la familia de pares de circunferencias, que son tangentes entre sí y, además, tangentes, respectivamente, a $\overleftrightarrow{AB}$, en A y B. Hallar el **L.G.** de los puntos de tangencia de las circunferencias citadas.

Exploración:

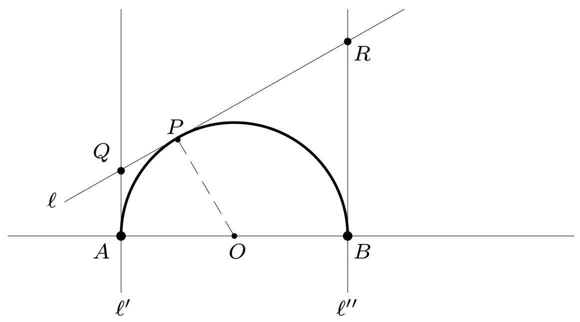


Conjetura: El **L.G.** pedido es la parte, de la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$, situada en el mismo semiplano - respecto a $\overleftrightarrow{AB}$ - que los pares de circunferencia considerados. (El semiplano superior, en nuestra figura).

Prueba:

I) Sea P, punto de la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$, ubicado en el semiplano superior (respecto a $\overleftrightarrow{AB}$).

Llamemos 0, al punto medio de $\overline{AB}$. Tracemos:



ℓ, perpendicular a $\overline{OP}$, en P

ℓ', perpendicular a $\overline{AB}$, en A

ℓ'', perpendicular a $\overline{AB}$, en B

Resulta que:

l y l' se cortan en un punto Q (diferente de A); l y l'' se intersectan en un punto R (distinto de B).

Tenemos entonces, que $\overline{QP}$ y $\overline{QA}$ son tangentes a la $C\left(O;\dfrac{AB}{2}\right)$.

Luego, por T_9 (Apéndice), se sigue que $QP = QA$.

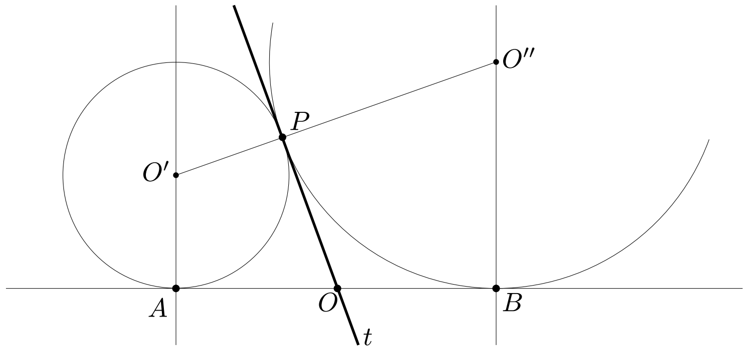
Así mismo, $\overline{RP}$ y $\overline{RB}$ son tangentes a la $C\left(O;\dfrac{AB}{2}\right)$.

De modo que, aplicando, nuevamente, T_9 (Apéndice), obtenemos: $RP = RB$.

Vemos entonces, que la $C(Q;QA)$ y la $C(R;RB)$ forman un par de la familia considerada en el enunciado, y tienen a P como punto de tangencia (Ver T_{10}, Apéndice).

II) Sea P, un punto, en el semiplano superior - respecto a $\overleftrightarrow{AB}$ - y verificando la propiedad enunciada.

Trazamos t, perpendicular a $\overline{O'O''}$, en P.



O sea, t es la tangente común, en P, de la $C(O';O'P)$ y la $C(O'';O''P)$.

Resulta que, t corta a $\overleftrightarrow{AB}$ en un punto O (¿Por qué?)

Por otro lado, notemos que:

$$\overline{OA} \quad \text{y} \quad \overline{OP} \qquad \text{son tangentes a la} \qquad C(O';O'P),$$

$$\overline{OP} \quad \text{y} \quad \overline{OB} \qquad \text{son tangentes a la} \qquad C(O'';O''P).$$

Así, usando T_9 (Apéndice), concluimos que:

$$OA = OP \qquad \text{y} \qquad OP = OB.$$

Es decir, O es el punto medio de $\overleftrightarrow{AB}$ y P está en la $C\left(O;\dfrac{AB}{2}\right)$.

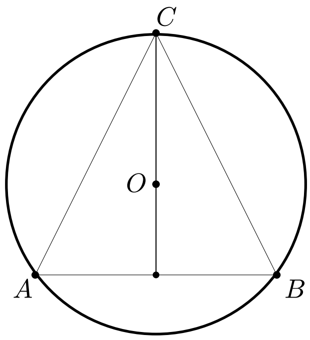
En otras palabras, P está en el **L.G.** indicado en la conjetura.

14) Sea ABC, un triángulo **equilátero**; hallar, en el plano de dicho triángulo, el **L.G.** de los puntos P, tales que: la distancia de P a uno de los vértices del triángulo, es igual a la suma de las distancias del mismo punto, P, a los otros dos vértices.

Exploración: Notamos que, trivialmente, cada vértice del $\triangle ABC$ pertenece al **L.G.**

Como los puntos A, B y C pertenecen a la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$, nos asalta la curiosidad sobre otros puntos de dicha circunferencia, en relación a la propiedad requerida.

Vamos a ver que el **L.G.** buscado está constituido por **todos** los puntos de dicha circunferencia.



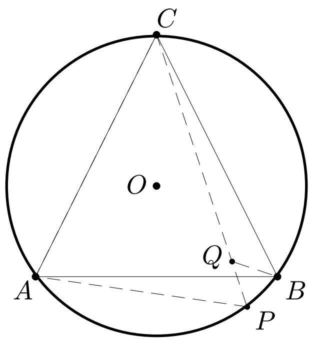
I) En primer lugar, recordemos que en un triángulo equilátero, sus puntos notables coinciden, es decir, el ortocentro, el incentro, el baricentro y el circuncentro son un mismo punto (denotémoslo por: O). En segundo lugar, si llamamos m, a la longitud del lado del triángulo equilátero ABC, obtenemos, para el radio de la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$, el valor: $\dfrac{m\sqrt{3}}{3}$. (Ver: T_{12}, Apéndice).

Sea, entonces, P, punto de la $C\left(O; \dfrac{m\sqrt{3}}{3}\right)$.

Si P coincide con alguno de los vértices del $\triangle ABC$, es inmediato que P está en el **L.G.**

Sin pérdida de generalidad, supongamos que P es interior al $\widehat{ACB}$.

Probaremos que $\qquad PA + PB = PC.$



A partir del vértice C, sobre el segmento $\overline{CP}$, construimos $\overline{CQ}$, con longitud igual a PA (¿Por qué eso es posible?).

Comparando los triángulos CQB y APB, se tiene:

$$AB = CB = m,$$

$$PA = CQ \qquad \text{(por construcción)} \qquad (*)$$

$$\measuredangle QCB = \measuredangle PAB \qquad T_1, \text{(Apéndice)}.$$

Así que, $\triangle CQB \cong \triangle APB$ (T_3, Apéndice).

En particular, $QB = PB$.

O sea, el $\triangle QPB$ es isósceles.

Pero, $\measuredangle QPB = \measuredangle CAB = 60°$ (T_1, Apéndice).

De manera que, el $\triangle QPB$ resulta equilátero.

En particular, $QP = PB$ $(**)$.

Luego, si usamos $(*)$ y $(**)$, obtenemos:

$$PC = PQ + QC = PB + PA.$$

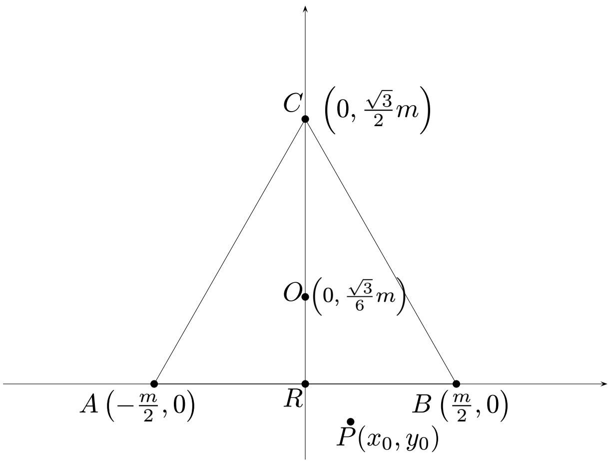
II) Sea P, punto en el plano determinado por A, B y C - vértices de un triángulo equilátero (**de lado** m) - tal que:

$PC = PA + PB$ (los otros casos son análogos). Queremos probar que P está en la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$, o sea, la $C\left(O; \dfrac{m\sqrt{3}}{3}\right)$.

Llamemos R al punto medio de $\overline{AB}$.

Elegimos un sistema de coordenadas cartesianas, con $\overleftrightarrow{AB}$, como eje de las abscisas, en tanto que $\overleftrightarrow{CR}$ es el eje de los ordenadas.

Sea $P = (x_0, y_0)$.



La ecuación de la $C\left(O; \dfrac{m\sqrt{3}}{3}\right)$ es:

$$x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{6}m\right)^2 = \frac{m^2}{3} \qquad (1).$$

Por hipótesis:

$$\sqrt{\left(x_0 + \frac{m}{2}\right)^2 + {y_0}^2} + \sqrt{\left(x_0 - \frac{m}{2}\right)^2 + {y_0}^2} = \sqrt{{x_0}^2 + \left(y_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}m\right)^2}.$$

Eliminando las raíces, y simplificando, se llega a:

$$\begin{aligned} &{x_0}^4 + {y_0}^4 - \frac{m^2}{2}{x_0}^2 + 2{x_0}^2{y_0}^2 - \frac{m^2}{6}{y_0}^2 + \frac{m^4}{16} \\ &- \frac{2\sqrt{3}}{3}m{x_0}^2 y_0 - \frac{2\sqrt{3}}{3}m{y_0}^3 + \frac{\sqrt{3}}{6}m^3 y_0 = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Ahora, si $P = (x_0, y_0)$, estuviese en la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$, sería:

$${x_0}^2 + {y_0}^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}my_0 - \frac{1}{4}m^2 = 0 \qquad (3).$$

"Sospechando" que al elevar (3) al cuadrado, se obtiene algo parecido a (2), lo hacemos y comprobamos que se llega, exactamente, a (2).

Así que, (2) se puede escribir:

$$\left({x_0}^2 + {y_0}^2 - \frac{\sqrt{3}}{3} m y_0 - \frac{1}{4} m^2\right)^2 \;=\; 0.$$

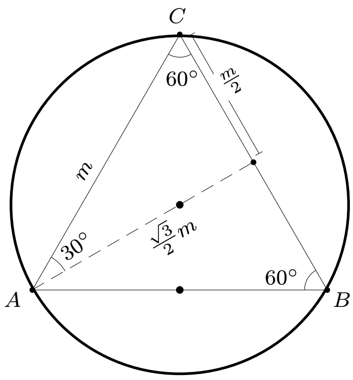
O sea,

$${x_0}^2 + {y_0}^2 - \frac{\sqrt{3}}{3} m y_0 - \frac{1}{4} m^2 \;=\; 0.$$

En otras palabras, $P = (x_0, y_0)$ está en la $C\left(O; m\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ - circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$ - .

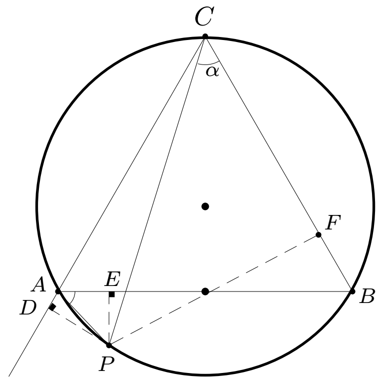
15) Dado un triángulo equilátero ABC, hallar, en el plano de dicho triángulo, el **L.G.** de los puntos P, tales que, la suma de los cuadrados de sus distancias a los lados del $\triangle ABC$ (de longitud m) sea igual a $\dfrac{3}{4}m^2$.

Exploración: Al buscar algunos puntos que estén en el **L.G.** encontramos que los vértices del $\triangle ABC$ cumplen la propiedad. En verdad, el **L.G.** no es otro que la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$.



I) Sea P, punto de la circunferencia que pasa por A, B y C.

(Supongamos $P \neq A$, $P \neq B$ y $P \neq C$). Desde P, trazamos perpendiculares a $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BC}$.



Llamemos D, E y F, a los piés de dichas perpendiculares, respectivamente. Sea $\measuredangle PCB = \alpha$.

Entonces, $\measuredangle PAB = \alpha$ (T_1, Apéndice).

También, por T_1, $\measuredangle APC = 60°$.

Por otro lado, $\measuredangle DCP = 60° - \alpha$.

Ahora, usando T_{11} (Apéndice), en el $\triangle APC$, obtenemos:

$$\frac{m}{\operatorname{sen} 60°} = \frac{PC}{\operatorname{sen}(60° + \alpha)}.$$

Luego, $PC = \dfrac{2m}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}(60° + \alpha)$.

Por otra parte, en el triángulo rectángulo DPC, se cumple:

$$PD = PC \cdot \operatorname{sen}(60° - \alpha).$$

Así, llegamos a:

$$PD = \frac{2m}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}(60° + \alpha) \cdot \operatorname{sen}(60° - \alpha) \qquad (1).$$

Mientras, en el $\triangle PFC$, se verifica:

$PF = PC \cdot \operatorname{sen} \alpha$.

O sea: $\quad PF = \dfrac{2m}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}(60^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{sen}\alpha \qquad (2)$

En el $\triangle APE$, se cumple: $\quad PE = AP \operatorname{sen}\alpha$.

Y, si aplicamos T_{11} (Apéndice), en el $\triangle APC$,

se sigue: $\quad \dfrac{AP}{\operatorname{sen}(60^\circ - \alpha)} = \dfrac{m}{\operatorname{sen} 60^\circ}$.

De manera que:

$PE = \dfrac{2m}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}(60^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{sen}\alpha \qquad (3)$

Elevando (1), (2) y (3), al cuadrado, sumando y simplificando, resulta:

$$PD^2 + PF^2 + PE^2 = \frac{3}{4}m^2.$$

II) Sea P, **un punto**, en el plano del triángulo equilátero ABC (de lado m), y que cumple la condición del enunciado.

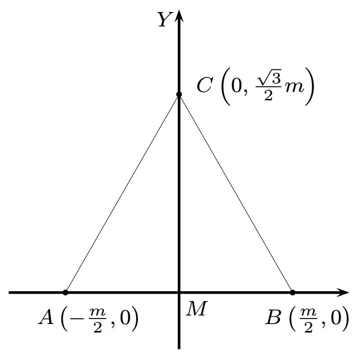
Adoptaremos el sistema de coordenadas cartesianas, cuyo eje de las abscisas es $\overleftrightarrow{AB}$; mientras que el eje de las ordenadas es $\overleftrightarrow{MC}$, con M, punto medio de $\overline{AB}$.

Tenemos entonces:

Ecuación de $\overleftrightarrow{AB}$: $\quad y = 0$

Ecuación de $\overleftrightarrow{AC}$: $\quad y - \sqrt{3}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}m = 0$

Ecuación de $\overleftrightarrow{BC}$: $\quad y + \sqrt{3}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}m = 0$



Recordemos que: dada una recta t, de ecuación $ax + by + c = 0$, y un punto $P = (x_0, y_0)$, la distancia de P a t, viene dada por:

$$\frac{|\ ax_0 + by_0 + c\ |}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Aplicando esto a nuestro caso y, usando la condición enunciada, se sigue:

$$ {y_0}^2 + \frac{\left| y_0 - \sqrt{3}x_0 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}m \right|^2}{4} + \frac{\left| y_0 + \sqrt{3}x_0 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}m \right|^2}{4} = \frac{3}{4}m^2. $$

Desarrollando y simplificando, se llega a:

$$ {x_0}^2 + {y_0}^2 - \frac{2\sqrt{3}}{6}my_0 = \frac{m^2}{4}. $$

Completando cuadrados, finalmente resulta:

$$ {x_0}^2 + \left(y_0 - \frac{\sqrt{3}}{6}m \right)^2 = \frac{m^2}{3} \qquad (\blacktriangle). $$

Pero $(\blacktriangle)$ significa que $P = (x_0, y_0)$, pertenece a la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$ (Ver (1), ejercicio 14).

16) En un plano, son dados:

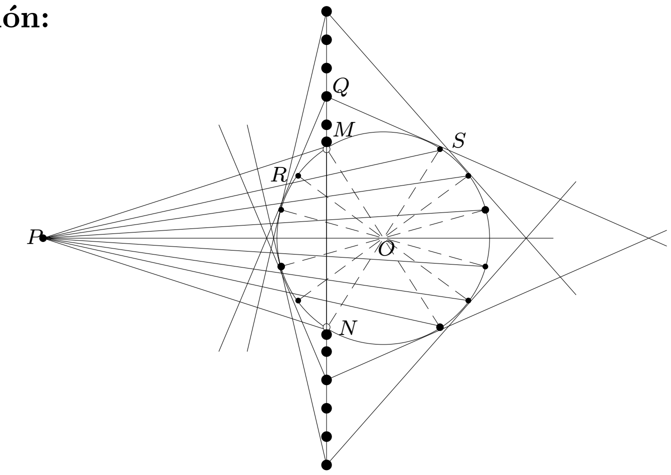
La $C(O; r)$ y un punto P, tal que la distancia de P a O es mayor que r. Se traza una secante que no pase por O desde P a la circunferencia. Esta última tiene en común, con la secante, los puntos

R y S, por los cuales se dibujan sendas tangentes a la $C(O; r)$.

Dichas tangentes se intersectan en Q.

¿Cuál es el **L.G.** de Q, a medida que se muda de secante y se repite el proceso?

Exploración:



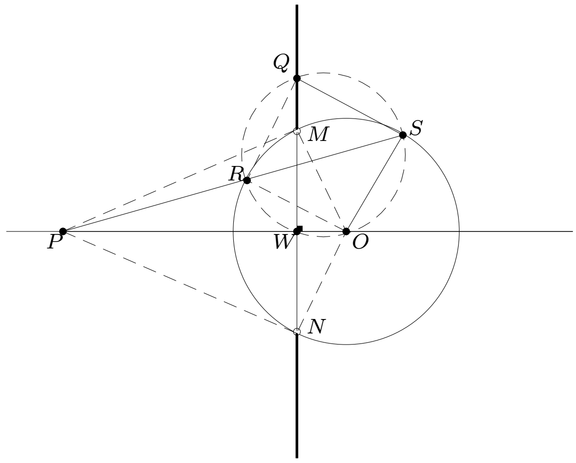
Conjetura: Sean M y N, los puntos de contacto de las tangentes, trazadas desde P a la $C(O;r)$. Entonces, el **L.G.** solicitado es $\overleftrightarrow{MN}$, quitándole $\overline{MN}$.

Prueba:

I) Sea Q, punto en $\overleftrightarrow{MN}$ y que no está en $\overline{MN}$.

Por Q, trazamos $\overline{QS}$, tangente a la $C(O;r)$, en S.

Resulta que $\overline{PS}$ intersecta a la $C(O;r)$ en R. Probemos que $\overline{QR}$ es tangente a la $C(O;r)$, en R. (equivalentemente, $\overline{QR} \perp \overline{OR}$).



Tenemos: $\overline{MN} \perp \overline{OP}$ (Ver T_{13}, Apéndice).

Llamemos W, al punto de intersección de $\overleftrightarrow{MN}$ con $\overleftrightarrow{OP}$.

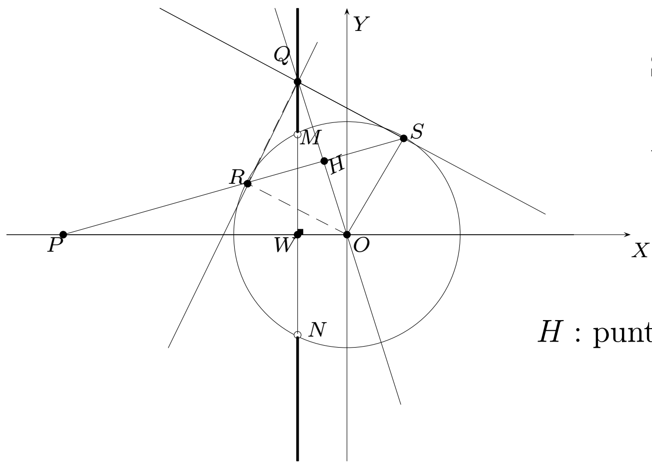
Ahora, según el segundo teorema de T_{14} (Apéndice). Los puntos Q, S, O, W están en la circunferencia de diámetro $\overline{OQ}$. Veamos que R, también, pertenece a dicha circunferencia (Notar que esto último significa - mediante T_2, Apéndice - que $\overline{QR} \perp \overline{OR}$).

En caso contrario, aparecería un punto R' (distinto de R, en la circunferencia de diámetro $\overline{OQ}$ y en $\overline{PS}$) y se tendría:

$\measuredangle OR'S = \measuredangle ORS$ (lo cual es absurdo, a la luz de T_6, Apéndice).

II) Sea Q, punto con la propiedad indicada en el enunciado, o sea, obtenido mediante el proceso allí especificado.

Introduzcamos el sistema de coordenadas cartesianas, cuyo eje de las ordenadas es la recta que pasa por O y es perpendicular a $\overline{OP}$. Mientras que $\overleftrightarrow{OP}$ es el eje de las abscisas.



Sean: $R = (x_1, y_1)$, con $y_1 \neq 0$.

$P = (-d, 0)$, $Q = (x_0, y_0)$

H : punto de intersección de $\overleftrightarrow{OQ}$ con $\overleftrightarrow{RS}$.

Resulta que: $\overleftrightarrow{OQ} \perp \overleftrightarrow{RS}$ $(*)$.

Veámoslo: los triángulos rectángulos ORQ Y OSQ, poseen:

$\overline{OQ}$, lado común; $OS = OR = r$.

Luego, por T_4 (Apéndice), se cumple:

$$\triangle ORQ \cong \triangle OSQ.$$

En particular, $\measuredangle ROQ = \measuredangle QOS$ $(**)$.

Ahora, en los triángulos ROH y HOS, se tiene:

$\overline{OH}$, lado común.

$OS = OR = r$.

$\measuredangle ROH = \measuredangle HOS$ (por $(**)$).

Así, por T_3 (Apéndice), se sigue que:

$$\triangle ROH \cong \triangle HOS.$$

Luego, los ángulos RHO y OHS miden lo mismo. Como, además, son adyacentes, concluimos que

$\measuredangle RHO = \measuredangle OHS = 90°$.

Es decir, $(*)$ es cierto.

Ahora bien, Q es la intersección de $\overleftrightarrow{OH}$ con $\overleftrightarrow{RQ}$. $(\blacktriangle)$.

Como las ecuaciones de dichas rectas son, respectivamente,

$$y = -\frac{x_1 + d}{y_1}x \qquad \text{(usar } (*)\text{)}.$$

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1) \qquad , \qquad (\overline{RQ} \perp \overline{OR}).$$

Para el punto de intersección, se cumple:

$$-\frac{x_1 + d}{y_1}x = y_1 - \frac{x_1}{y_1}(x - x_1),$$

lo cual resulta en:

$${y_1}^2 + {x_1}^2 = -dx.$$

O sea, $\quad x = -\dfrac{r^2}{d}$.

De modo que, según ($\blacktriangle$), debe ser: $x_0 = -\dfrac{r^2}{d}$.

Por otro lado, la ecuación de $\overleftrightarrow{MN}$ es: $x = -\dfrac{r^2}{d}$.

(Ver al final de T_3 - Apéndice - y tomar en cuenta que $\overleftrightarrow{MN}$ es vertical y está a la izquierda de OY)

Conclusión: $Q = (x_0, y_0)$ está en la recta $\overleftrightarrow{MN}$.

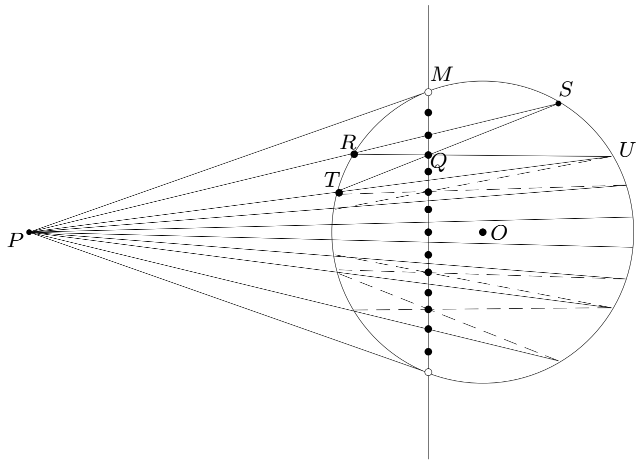
17) En un plano, son dados: $C(O; r)$ y un punto P, tal que $OP > r$.

Desde P, trazamos una pareja de secantes, las cuales cortan a la $C(O; r)$ en los puntos R, S y T, U, respectivamente.

$\overline{RU}$ y ST se cortan en Q.

Hallar el **L.G.** de Q, al variar las parejas de secantes y repetir el proceso.

Exploración:

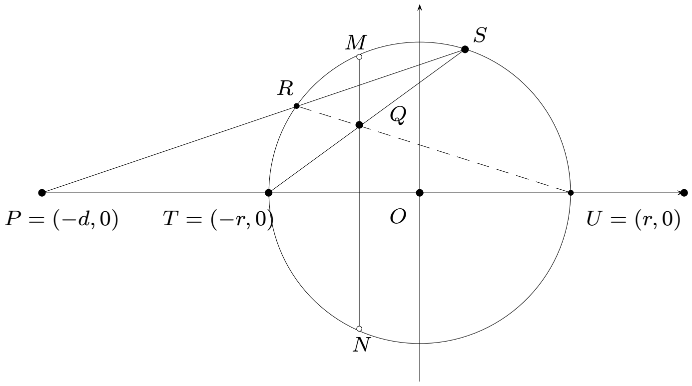


Conjetura: El **L.G.** consiste en la cuerda $\overline{MN}$ (sin sus extremos), con $\overline{PM}$ y $\overline{PN}$, tangentes a la $C(O; r)$.

Prueba:

I) Sea Q, punto de $\overline{MN}$, con $Q \neq M$ y $Q \neq N$.

Consideremos el sistema de coordenadas cartesianas en el cual $\overleftrightarrow{PO}$ es el eje de las abscisas, con O, como origen de coordenadas.



Entonces, Q es el punto dado por:

$$\left(-\frac{r^2}{d}, y_0\right), \quad \text{con} \qquad -\frac{r}{d}\sqrt{d^2-r^2} < y_0 < \frac{r}{d}\sqrt{d^2-r^2}.$$

(Recordar que la ecuación de $\overleftrightarrow{MN}$ es: $x = -\dfrac{r^2}{d}$. (Ver T_{13}, Apéndice)).

Consideremos el caso $y_0 > 0$.

Para simplicidad, hagamos $\dfrac{r^2}{d} = c$.

La ecuación de $\overleftrightarrow{TQ}$ es:

$$y = \frac{y_0}{r-c}(x+r) \qquad (*)$$

Luego, resolviendo el sistema formado por $(*)$ y $x^2+y^2 = r^2$, obtenemos:

$$S = \left(\frac{1-\sigma}{1+\sigma}r, \frac{2\sqrt{\sigma}}{1+\sigma}r\right) \quad , \qquad \text{con} \qquad \sigma = \frac{{y_0}^2}{(r-c)^2}.$$

Por otro lado, la ecuación de $\overleftrightarrow{QU}$ es:

$$y = -\frac{y_0}{r+c}(x-r) \qquad (**).$$

Entonces, del sistema de ecuaciones constituido por $(**)$ y $x^2 + y^2 = r^2$, llegamos a que:

$R = \left(\dfrac{\beta - 1}{\beta + 1} r, \dfrac{2\sqrt{\beta} r}{\beta + 1}\right)$, donde $\beta = \dfrac{{y_0}^2}{(r+c)^2}$.

Ahora bien, para probar que Q posee la propiedad requerida, basta demostrar que P, R y S están alineados. Esto significa, tomando en cuenta sus respectivas coordenadas, que se tiene (Ver T_{16}, Apéndice):

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\beta-1}{\beta+1} r & \dfrac{2\sqrt{\beta}}{\beta+1} r & 1 \\ \\ \dfrac{1-\sigma}{1+\sigma} r & \dfrac{2\sqrt{\sigma}}{1+\sigma} r & 1 \\ \\ -d & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplicando la 3ra columna por d y, luego, sumándola a la 1ra columna, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\beta-1}{\beta+1} r + d & \dfrac{2\sqrt{\beta}}{\beta+1} r & 1 \\ \\ \dfrac{1-\sigma}{1+\sigma} r + d & \dfrac{2\sqrt{\sigma}}{1+\sigma} r & 1 \\ \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Así que, lo que queremos probar, se reduce a verificar que:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\beta-1}{\beta+1} r + d & \dfrac{2\sqrt{\beta}}{\beta+1} r \\ \\ \dfrac{1-\sigma}{1+\sigma} r + d & \dfrac{2\sqrt{\sigma}}{1+\sigma} r \end{vmatrix} = 0. \qquad ()$$

Desarrollando este determinante, simplificando e introduciendo les expresiones para β y σ, resulta que $()$ se convierte en:

$$\frac{r+d}{r+c} + \frac{r-d}{r-c} = 0.$$

Pero esta última igualdad es cierta, como se puede comprobar al sustituir c por $\dfrac{r^2}{d}$.

De modo que, Q está en el **L.G.**

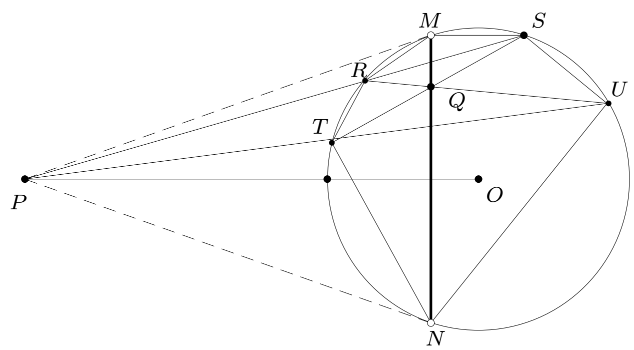
Análogamente se prueba el caso $y_0 < 0$.

Si $y_0 = 0$, se considera cualquier cuerda - que no pase por Q - y cuya prolongación pase por P.

Luego, se traza la cuerda simétrica (a la anterior), respecto a $\overline{OP}$. (Ver T_{23}, Apéndice, Teorema 3).

II) Sea Q, punto interior del círculo de centro O radio r, con la propiedad del enunciado, o sea, Q se obtiene como intersección de $\overline{RU}$ y $\overline{TS}$, con $\overline{RS}$ y $\overline{TU}$, cuerdas de la $C(O;r)$, cuyas prolongaciones pasan por P.

Sean M y N, los puntos de contacto de las tangentes a la $C(O;r)$, trazadas desde P.



Al comparar los triángulos PSM y PRM, se verifica:

$\measuredangle PMR = \measuredangle MSR$ (T_1, Apéndice).

$\measuredangle MPR = \measuredangle MPS$ (ángulo común).

Así, $\triangle PSM \sim \triangle PRM$ (T_7, Apéndice).

En particular,

$$\frac{PM}{PR} = \frac{MS}{RM} \qquad (1).$$

Análogamente, $\triangle PNT \sim \triangle PNU$, pues:

$\measuredangle PNT = \measuredangle PUN$ (T_1, Apéndice).

$\measuredangle TPN = \measuredangle UPN$ (ángulo común).

Luego,

$$\frac{PU}{PN} = \frac{NU}{NT} \qquad (2).$$

Respecto a los triángulos PTR y PUS, tenemos:

$\measuredangle RPT = \measuredangle SPU$ (ángulo común).

$$\measuredangle RSU = \frac{\overset{\frown}{RNU}}{2} = \frac{360^\circ - \overset{\frown}{RMSU}}{2} =$$

$$= 180^\circ - \frac{\overset{\frown}{RMSU}}{2} = 180^\circ - \measuredangle RTU = \measuredangle PTR.$$

Luego, usando nuevamente T_7 (Apéndice), se sigue:

$$\triangle PTR \sim \triangle PUS.$$

Así:

$$\frac{PS}{PT} = \frac{SU}{RT} \qquad (3)$$

De (1), (2) y (3), obtenemos:

$$\frac{PM \cdot RM}{PR \cdot MS} = 1; \qquad \frac{PU \cdot NT}{PN \cdot NU} = 1; \qquad \frac{PT \cdot SU}{PS \cdot RT} = 1 \qquad (4)$$

Multiplicando, miembro a miembro, las igualdades en (4) y tomando en cuenta que:

$$PM = PN \qquad (T_9,\ \text{Apéndice})$$

$$PU \cdot PT = PR \cdot PS \qquad (T_{18},\ \text{Apéndice})$$

llegamos a:

$$\frac{RM \cdot NT \cdot SU}{MS \cdot NU \cdot RT} = 1 \tag{5}$$

Pero (5) es, según T_{17} ((c), Apéndice), condición suficiente para que $\overline{MN}$, $\overline{RU}$ y $\overline{ST}$ sean **concurrentes.**

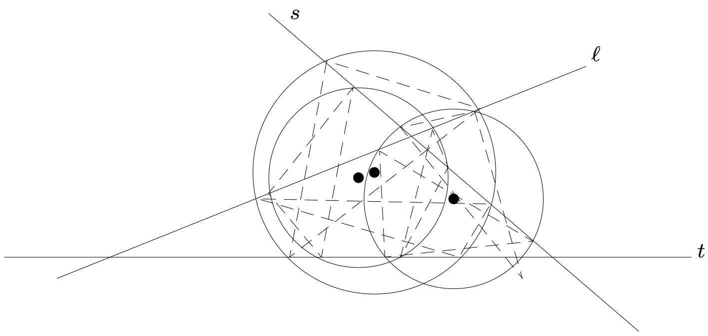
Luego, Q está en $\overline{MN}$.

Nota: El resultado de este ejercicio proporciona un método para el trazado de las tangentes a la $C(O;r)$, desde un punto situado en el plano de dicha circunferencia y a una distancia de O, mayor que r.

18) En un plano, consideremos tres rectas: l, s y t - **no concurrentes** - y que se cortan en pares.

    Hallar el **L.G.** de los centros de las circunferencias circunscritas de todos los triángulos posibles, con vértices en las citadas rectas.

Exploración:

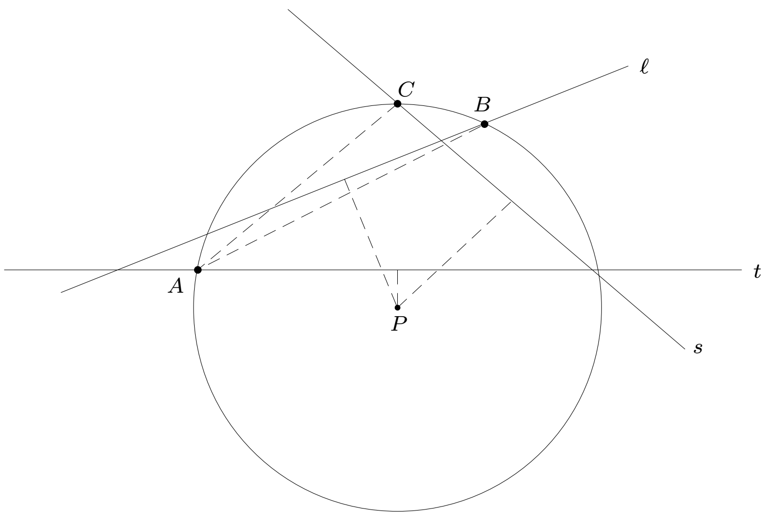


No se “ vislumbra ” una figura familiar.

Observemos que si P es cualquier punto del plano dado y r es un número, mayor que la distancia de P a cada recta dada, entonces la $C(P;r)$ corta a cada una de las rectas consideradas en el ejercicio.

Así que, es simple obtener un triángulo con un vértice en l, otro en s y el tercer vértice en t, de manera que P sea el cincuncentro de dicho triángulo.

Luego, el **L.G.** es ... todo el plano.



P es el circuncentro del $\triangle ABC$.

19) Veremos ahora, un caso en el cual la " exploración " o " bosquejo " del **L.G.** es difícil de realizar. La propiedad - condición geométrica dada - es transformada en otra más simple (consecuencia de la primera), y continuamos el proceso hasta la aparición de un lugar " familiar ".

Dado el $\widehat{AOB}$ y un punto P en su interior, se trazan, desde P, las perpendiculares a los lados del ángulo citado. Sean C y D, los piés de dichas perpendiculares.

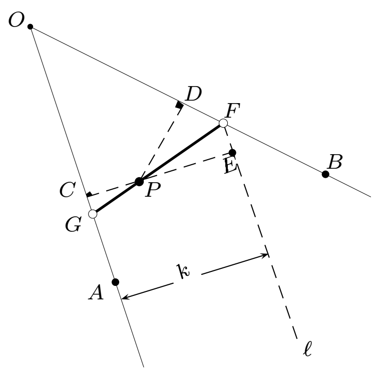
¿ Cuál es el **L.G.** de P si $PC + PD = k$, siendo k una constante positiva, fijada?

Solución: Sea P, un punto con las características citadas.

Prolongamos $\overline{CP}$ hasta E, de modo que $PE = PD$. $\quad (*)$

Resulta así, $\quad k = PC + PD = PC + PE$, o sea, $\quad CE = k$.

Notamos, entonces, que, al variar P, el segmento $\overline{CE}$ conserva una longitud constante, igual a k.



En otras palabras, E está en una recta, l, paralela a $\overleftrightarrow{OA}$, trazada a la distancia k.

Denotemos por F, a la intersección de l con $\overrightarrow{OB}$. Sea G el punto de corte de $\overrightarrow{FP}$ con $\overrightarrow{OA}$.

Pero, de $(*)$ se sigue que P equidista de $\overline{OF}$ y de $\overline{FE}$. Luego, P está en la bisectriz $\overrightarrow{FG}$, del $\widehat{DFE}$. (Ver ejemplo (h)).

Ahora bien, observemos que todos los puntos de la bisectriz considerada - interiores al $\widehat{AOB}$ - poseen la propiedad del enunciado.

Así que, el **L.G.** buscado es $\overline{FG}$, sin sus extremos.

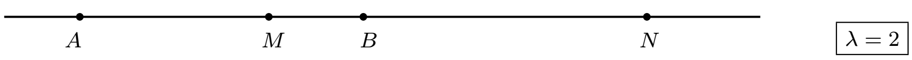
Nota: El lector puede verificar, que si, en lugar de prolongar $\overline{CP}$, lo hace con $\overline{DP}$ y procede análogamente, se llega al mismo resultado.

20) Para presentar el próximo **L.G.** necesitamos las siguientes definiciones:

Si en una recta l, son dados los puntos A, M, B, N, tales que: M está entre A y B; B está entre M y N,

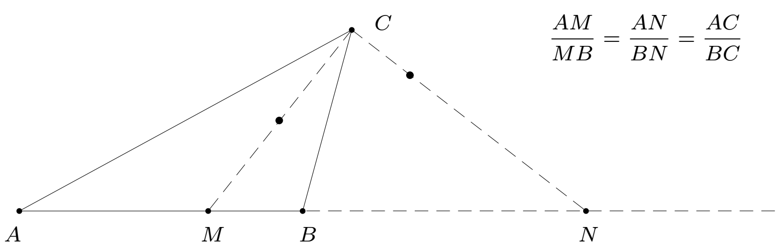
con $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{BN} = \lambda$, se dice que A, M, B, N, son **conjugados armónicos** y que $\overline{AB}$ **ha quedado dividido armónicamente** - por los puntos M y N - en la razón λ.

Ejemplo:



También, dado un triángulo ABC, se cumple que: la bisectriz de un **ángulo** interior y la del ángulo exterior adyacente dividen al **lado opuesto**, armónicamente, en la razón de los **otros dos lados.**

(Ver T_{19}, Teorema 5, Apéndice)



Observación: Notar que $\overline{MC} \perp \overline{CN}$ y, por lo tanto, C está en la circunferencia de diámetro $\overline{MN}$.

Dado un segmento $\overline{AB}$ y un número positivo λ, la circunferencia que tiene por diámetro el segmento $\overline{MN}$, tal que M y N dividen armónicamente - en la razón λ - al segmento $\overline{AB}$, es llamada **circunferencia de Apolonio** (asociada a $\overline{AB}$ y a λ).

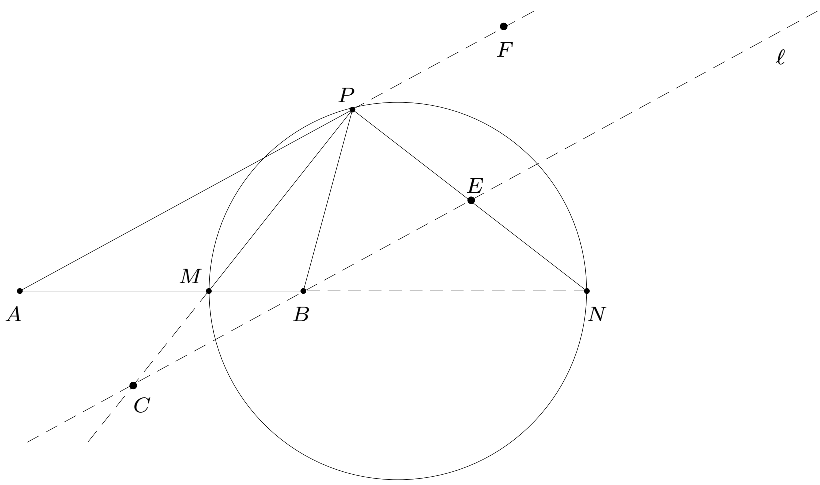
Son dados: un plano (en el cual se considera un segmento $\overline{AB}$) y un número positivo λ.

Hallar el **L.G.** de P, sabiendo que en el $\triangle ABP$ se cumple: $\dfrac{AP}{BP} = \lambda$.

Solución: En vista de la observación inmediatamente antes de la definición de **circunferencia de Apolonio** (asociada a $\overline{AB}$ y a λ), intuimos que dicha circunferencia tiene algo que ver con el **L.G.** solicitado. En verdad, veremos que dicha circunferencia, quitándole sus puntos de corte con $\overleftrightarrow{AB}$, es el **L.G.** procurado.

I) Sea $\overline{AB}$, dividido armónicamente - en la razón λ - por los puntos M y N.

Sea P un punto de la circunferencia de diámetro $\overline{MN}$, con $P \neq M$, y $P \neq N$.



Por B, trazamos l, paralela a $\overleftrightarrow{AP}$.

Prolongamos $\overline{PM}$, hasta C, en l.

Sea E, la intersección de l con $\overline{PN}$.

Usando el paralelismo de l y $\overleftrightarrow{AP}$, se obtiene:

$$\triangle AMP \sim \triangle CBM,$$

$$\triangle ANP \sim \triangle BNE.$$

Así que:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{CB} \tag{1}$$

$$\frac{AN}{BN} = \frac{AP}{BE} \tag{2}$$

Además,

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{BN} = \lambda \qquad \text{(hipótesis)} \tag{3}$$

De (1), (2) y (3), se sigue:

$$CB = BE \tag{4}$$

Por otro lado, $\measuredangle CPE = \measuredangle MPN = 90^\circ$ (T_2, Apéndice).

Luego, $\triangle CPE$ es rectángulo, que - por (4) - tiene a B como punto medio de la hipotenusa, es decir, B es su circuncentro. Así que,

$$CB = BE = BP. \tag{5}$$

De manera que, de (5), (1) y (3), se sigue:

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AP}{CB} = \frac{AM}{MB} = \lambda.$$

II) Sea P, en el plano dado, tal que en el $\triangle ABP$ se cumple:

$$\frac{PA}{PB} = \lambda \qquad (*).$$

Sean M y N, en $\overrightarrow{AB}$, tales que A, M, B y N, son conjugados armónicos (con razón λ).

Tenemos que: M está entre A y B;

B está entre M y N.

Además, $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{BN} = \lambda \qquad (**)$

Utilizando $(*)$ y $(**)$, obtenemos:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{PA}{PB} \qquad (***)$$

$$\frac{AN}{BN} = \frac{PA}{PB} \qquad (****)$$

Ahora bien, mediante T_{19} (Apéndice, teorema 2),

de $(***)$ y $(****)$ se concluye que:

$\overline{PM}$ es bisectriz del $\widehat{APB}$,

$\overline{PN}$ es bisectriz del $\widehat{BPF}$.

Luego (por T_{20}, Apéndice), resulta:

$$\measuredangle MPN = 90^\circ.$$

Así que, por T_2 (Apéndice), deducimos que P está en la circunferencia de diámetro $\overline{MN}$

(por hipótesis, $P \neq M$ y $P \neq N$).

Por la escogencia de M y N, sabemos que la circunferencia citada es la circunferencia de Apolonio (asociada a $\overline{AB}$ y λ).

El nombre de Apolonio, en el **L.G.** que acabamos de analizar, se refiere al gran geómetra griego, de Pérgamo, siglo III a.C, famoso por su introducción y clasificación de **las cónicas** como secciones planas de conos de revolución. Para el análisis de dichas curvas (parábolas, elipses, hipérbolas), como lugares geométricos, consultar libros de Geometría Analítica.

Capítulo 2

Ejercicios Propuestos

1) En un plano,

   ¿ Cuál es el **L.G** de los centros de las circunferencias de radio r (dado) tangentes a un a recta l, dada?

2) En un plano,

   ¿ Cuál es el **L.G** de los centros de las circunferencias - de radio r - y que pasa por un punto A, dado?

3) En un plano,

   ¿ Cuál es el **L.G** de los puntos medios de los segmentos que unen un punto dado, A, a todos los puntos de la $C(O; r)$, si:

   (a) $OA > r$?

   (b) $OA < r$?

   (c) $OA = r$?

4) En un plano,

¿ Cuál es el **L.G** de los centros de las circunferencias tangentes a dos rectas paralelas, dadas?

¿ Y si las rectas dadas son secantes?

5) En un plano, son considerados un punto P y una recta l. Hallar el **L.G.** de los puntos, de dicho plano, que están a r unidades del punto P y a k unidades de la recta l.

(Analizar los diferentes casos, según sean: la distancia de P a l y los valores r y k).

6) Hallar el **L.G.** de los puntos del espacio, equidistantes de tres puntos dados: M, N, P (no alineados).

¿Y en el caso en el cual M, N y P están alineados?

7) Hallar el **L.G.** de los puntos del espacio, que están a una distancia d, de los planos α y β, los cuales se intersectan.

8) Hallar el **L.G.** de los piés de las perpendiculares trazadas desde el punto A, a todas las rectas, en el espacio, que pasan por otro punto, dado, B.

9) En un plano, son dados: una circunferencia y una recta l, que no se intersectan.

Por un punto A, en l, se trazan las dos tangentes a la circunferencia.

La recta l', determinada por los puntos de contacto de las tangentes mencionadas, corta al diámetro perpendicular a l, en un punto M.

Hallar el **L.G.** de M, a medida que A varía en l.

10) Hallar el **L.G.** de los puntos de un plano dado, tales que las tangentes trazadas desde estos puntos a una circunferencia fijada, formen entre sí, un $\hat{\theta}$ dado $(0 < \theta < \pi)$.

11) Hallar, en un plano dado, el **L.G.** de los puntos, desde los cuales dos circunferencias dadas son vistas bajo el mismo ángulo $\hat{\theta}$.

12) En un plano, uno de los lados - no paralelos - de un trapecio, es dado. Se conocen, también, las longitudes a y b, de las bases.

¿ Cuál es el **L.G.** del punto de intersección de las diagonales?

¿ Cuál es el **L.G.** del punto medio del lado desconocido?

13) Una escuadra de madera se mueve, en un plano, de manera que los vértices de sus ángulos agudos se mantienen en los lados de un ángulo recto dado.

¿ Cuál es el **L.G.** del vértice del ángulo recto de la escuadra?

14) En un plano, es dado el ángulo agudo AOB. Hallar el **L.G.** del cuarto vértice de un **cuadrado**, si dos de **sus** vértices están sobre el lado $\overrightarrow{OA}$, y el tercero, sobre el $\overrightarrow{OB}$.

15) En un plano, es dado un triángulo ABC.

¿ Cuál es el **L.G.** de los centros de los rectángulos inscritos en el $\triangle ABC$, si uno de los lados de cada rectángulo debe estar en $\overline{AB}$?

16) Dado el $\triangle ABC$, en el cual $AC = BC$, hallar, en dicho triángulo, el **L.G.** de los puntos P, cuya distancia a $\overline{AB}$ es igual a la media geométrica de las distancias a los otros dos lados.

17) En un plano, son dados: una recta l y un punto B, fuera de ella.

Hallar el **L.G.** de los vértices C, de los cuadrados $ABCD$, si el vértice A está en l.

18) En un plano, es dada una circunferencia, en la cual son trazados dos diámetros, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, perpendiculares entre sí; sea P (distinto de A y B) punto de la circunferencia. $\overleftrightarrow{PA}$ corta a $\overleftrightarrow{BD}$ en el punto E. La recta que pasa por E y es paralela a $\overleftrightarrow{AC}$, intersecta a $\overleftrightarrow{PB}$, en M. Hallar el **L.G.** de los puntos M.

19) En un plano, es dada una circunferencia, en la cual se eligen dos puntos, fijos, B y C.

A es un punto variable, de la misma circunferencia $(A \neq C)$. Hallar el **L.G.** de los piés de las perpendiculares - trazadas por el punto medio de $\overline{AB}$ - a $\overleftrightarrow{AC}$.

20) En un plano, son dados los puntos A y B, fuera de una recta l, tales que $\overleftrightarrow{AB}$ es paralela a l. Hallar el **L.G.** de los centros de las circunferencias que pasan por A, B y, además, intersectan a l.

    ¿ Y en el caso en el cual $\overleftrightarrow{AB}$ no es paralela a l?

21) Demostrar que, en un plano, el **L.G.** de los puntos cuya diferencia de los cuadrados de sus distancia a dos puntos fijos, A y B, es igual a una cantidad constante k^2, es una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$.

22) En un plano, son dadas dos rectas paralelas. Por un punto equidistante de ellas es trazada una recta, la cual las corta en los puntos M y N, respectivamente. Hallar el **L.G.** de los puntos P, tales que los triángulos MNP sean equiláteros.

23) En un plano, son dados una recta l y un punto A, fuera de ella. Consideremos un punto B, cualquiera, de l.

    Hallar el **L.G** de los puntos M, tales que ABM sea triángulo equilátero.

24) En un plano, son dados: una semirrecta $\overrightarrow{OX}$ y un punto A, en dicha semirrecta. Se considera otra semirrecta OY. Enseguida, se traza la circunferencia que es: tangente a $\overrightarrow{OX}$, en A, y, además, tangente a $\overrightarrow{OY}$, en B.

    ¿ Cuál es el **L.G.** del punto B, a medida que $\overrightarrow{OY}$ gira alrededor de O?

25) En un plano, son dados: una circunferencia y la tangente t, en un punto A de dicha circunferencia. Desde un punto M de la curva dada se traza la perpendicular a t. Llamemos B, al pié de dicha perpendicular. Prolongamos $\overline{MB}$ hasta M', tal que $BM' = MB$.

    ¿ Cuál es el **L.G.** de M', si M recorre la circunferencia dada?

26) En un plano, son dadas: la $C(O;r)$ y la $C(O';r')$, (disjuntas). Se trazan los radios: $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{O'A'}$, paralelos y del mismo sentido.

¿ Cuál es el **L.G.** del punto medio, M, de $\overline{AA'}$, al variar la dirección común de los radios?

27) En un plano, es dada una circunferencia.

Por un punto A, de la misma, se traza la tangente t. Dado un número positivo λ, se eligen, sobre t, a partir del punto A y a cada lado, los puntos M y M', tales que: $AM' = AM = \lambda$.

¿ Cuál es el **L.G.** de los puntos M y M', a medida que A recorre la circunferencia citada?

28) En un plano, ¿ cuál es el **L.G** de los puntos cuya diferencia de distancias a dos rectas secantes, dadas, es igual a una longitud k?

(Notar la semejanza con el ejercicio - resuelto - número 19).

29) En un plano, ¿ Cuál es el **L.G.** del baricentro de un triángulo ABC, con $\overline{BC}$ fijo, mientras que, la mediana $\overline{AA'}$ - que parte de A - tiene una longitud dada, k?

30) En un plano, ¿ Cuál es el **L.G.** del vértice C, de un triángulo ABC, cuyo lado $\overline{AB}$ es fijo y cuya mediana $\overline{AA'}$ - que parte de A - tiene una longitud dada, m?

31) En un plano, son dados: una circunferencia $C(O;r)$ y un segmento $\overline{AA'}$. Por cada punto M de la circunferencia, se traza un segmento $\overline{MM'}$, tal que: $MM' = AA'$ y $\overrightarrow{MM'}$ es paralelo a $\overrightarrow{AA'}$ - y del mismo sentido -.

¿ Cuál es el **L.G.** del punto M'?

32) En un plano dado, consideremos la $C(O;r)$. Sea P, punto del plano.

Llamemos d a la distancia de P a O.

Se llama **potencia de** P con relación a la $C(O;r)$, al número

$d^2 - r^2$.

¿ Cuál es el **L.G.** de los puntos potencia igual a -16, con respecto a la $C(O;5)$?

33) Probar que, en un plano, el **L.G.** de los puntos cuya suma de los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos, A y B, es igual a una cantidad constante k^2

$\left(\text{con } k^2 \geq \dfrac{AB^2}{2}\right)$ es la $C\left(M; \sqrt{\dfrac{k^2}{2} - \dfrac{AB^2}{4}}\right)$, donde, M es el punto medio $\overline{AB}$.

34) En un plano, es dada la $C(O;r)$ y un punto A, tal que $OA > r$.

Sea B un punto arbitrario de la circunferencia dada. Llamemos P a la intersección de la mediatriz de $\overline{AB}$ con la tangente, en B, a la $C(O;r)$.

Hallar el **L.G.** de los puntos P, al variar B en la $C(O;r)$.

Sugerencia: usar el ejercicio 21.

35) Probar que, en un plano, el **L.G.** de los puntos de igual potencia con respecto a dos circunferencias - no concéntricas - es una recta perpendicular a la línea de los centros (ver ejercicio 32).

(Dicha recta se llama **el eje radical** de las dos circunferencias).

36) En un plano, se considera la familia de paralelogramos $ABCD$, con $\overline{AB}$ base común a todos ellos, y también, **la medida del ángulo de vértice** A es la misma, en todos los miembros de la familia (digamos α).

Hallar el **L.G.** de la intersección de las diagonales.

37) En un plano, se da una recta $\overleftrightarrow{XY}$ y un punto A en ella.

   i) ¿ Cuál es el **L.G.** de los centros de las circunferencias tangentes a $\overleftrightarrow{XY}$, en el punto A?

ii) ¿ Cuál es el **L.G.** de los extremos de los diámetros - de las circunferencias de la parte i) - paralelos a $\overleftrightarrow{XY}$?

38) En un plano, son dadas: una circunferencia y una recta l, las cuales no se intersectan. Se elige un punto, A, de la circunferencia y se hace girar ésta alrededor de A. En cada una de sus posiciones se trazan las tangentes paralelas a l.

Hallar el **L.G.** de los puntos de contacto.

39) En un plano, son dados: la $C(O; r)$ y un punto A, tal que $OA > r$.

Hallar el **L.G.** del vértice M del triángulo equilátero ANM, si el vértice N está en la circunferencia dada.

40) En un plano, hallar el **L.G.** de los centros de las circunferencias que cortan a cada una de dos circunferencias - no concéntricas - dadas, en puntos diametralmente opuestos.

Sugerencia: usar el ejercicio 21.

41) En un plano, son elegidos los puntos A y B. Sea C un punto, fuera de $\overleftrightarrow{AB}$, arbitrario.

Por B, trazamos l, perpendicular a $\overleftrightarrow{CB}$; escogemos, en l, el punto D, tal que:

$BD = CB$; D está en el mismo semiplano que C, respecto a $\overleftrightarrow{AB}$.

Por A, trazamos l', perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$.

Tomamos, en l', el punto E, tal que:

$EA = AC$; E está en el mismo semiplano que C, respecto a $\overleftrightarrow{AB}$.

Sea P, el punto medio de $\overline{ED}$.

Hallar el **L.G.** de P, a medida que C varía, en uno de los semiplanos determinado por $\overleftrightarrow{AB}$.

42) En un plano, sea l una recta. En ella elegimos un punto O como origen de coordenadas cartesianas, cuyo eje de las ordenadas es la recta l', perpendicular a l en O. Consideramos, ahora, el punto fijo $A = (0, 10)$. Para cada $x \neq 0$, sean: $B = (x, 0)$, $B' = (x, 15)$. Hallar el **L.G.** de los puntos P, tales que P es la intersección de $\overline{AB}$ con $\overline{OB'}$.

43) En un plano, es dado un **paralelogramo** $ABCD$. Hallar el **L.G.** de los puntos de intersección de las diagonales de los paralelogramos inscritos en el paralelogramo $ABCD$.

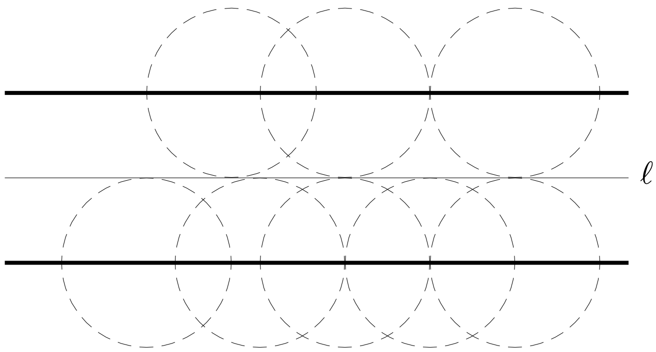
44) Idem. que en el ejercicio anterior, pero, ahora, $ABCD$ es un **trapecio**.

45) **Reto:** Idem. que en el ejercicio 42, reemplazando el paralelogramo $ABCD$ por un **cuadrilátero** (convexo) $ABCD$, cualquiera.

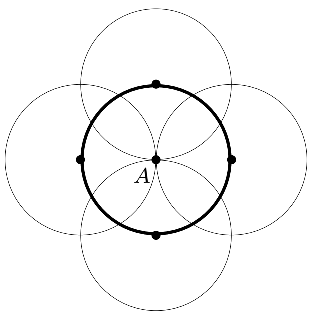
Capítulo 3

Respuestas e Indicaciones

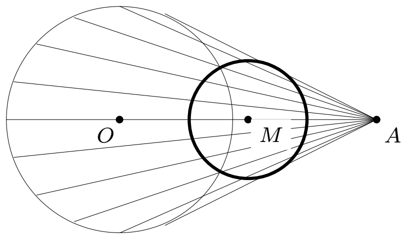
1.- Dos rectas, paralelas a l, y una distancia de ella, igual a r.



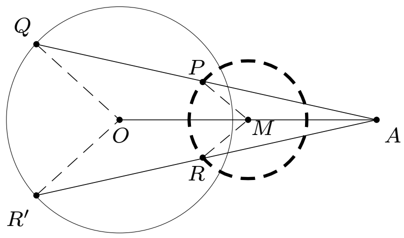
2.- Es la $C(A;r)$.



3.- a) Es la $C\left(M;\dfrac{r}{2}\right)$, donde, M es el punto medio de $\overline{OA}$.



Si P es el punto medio de $\overline{AQ}$, entonces, PM es $\dfrac{r}{2}$. (teorema 5 del T_5, Apéndice).



Recíprocamente, si R está en la $C\left(M;\dfrac{r}{2}\right)$. Prolongamos $\overline{AR}$, hasta R', tal que $RR' = RA$.

Usamos, nuevamente, el teorema 5 del T_5 (Apéndice), para obtener:

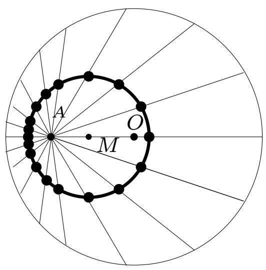
$OR' = 2RM = r$.

Luego, R es el punto medio de un segmento cuyos extremos son: el punto A y un punto de la $C(O;r)$.

La prueba, en los casos b) y c), es análoga.

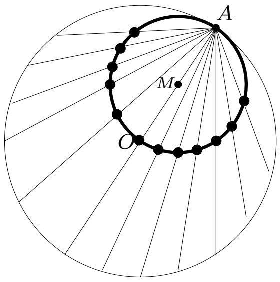
b) Es la $C\left(M;\dfrac{r}{2}\right)$.

M punto medio de $\overline{OA}$.



Es la $C\left(M;\frac{r}{2}\right)$; M punto medio de $\overline{OA}$.

c)

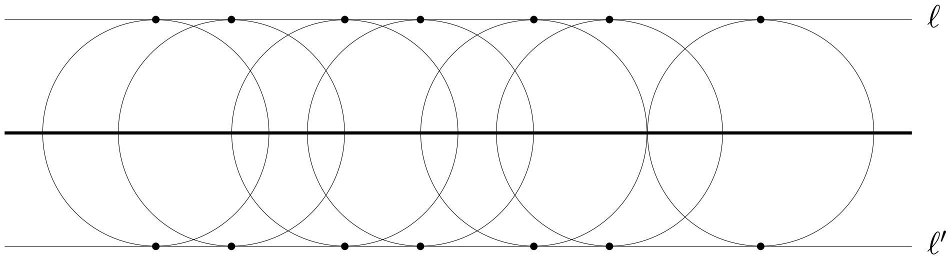


Es la $C\left(M; \frac{r}{2}\right)$

(A es incluido en el L.G., pues admitimos segmentos triviales - los que se reducen a un solo punto-)

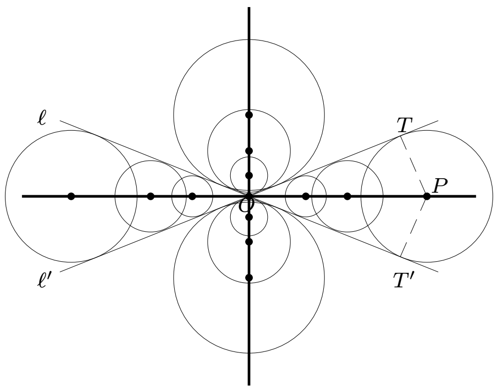
M es el punto medio de $\overline{OA}$

4.-



El **L.G.** es una recta paralela a las rectas dadas, equidistante de las mismas.

Si las rectas dadas son secantes, el **L.G.** consiste de las bisectrices de los ángulos que dichas rectas forman, quitándoles su punto de intersección.



Al comparar los triángulos rectángulos OTP y $OT'P$, resulta, por T_4 (Apéndice),

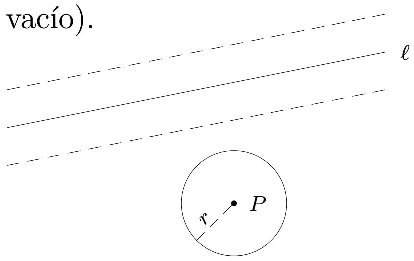
$$\triangle OTP \cong \triangle OT'P.$$

5.- El **L.G.** puede ser vacío ó un conjunto de 1, 2, 3 ó 4 puntos.

Sea d la distancia de P a l.

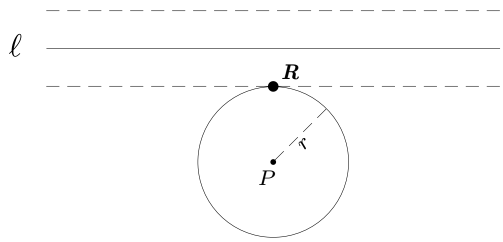
Caso: $\boldsymbol{d}$ **-** $\boldsymbol{r > k}$

L.G.$= \emptyset$ (conjunto vacío).



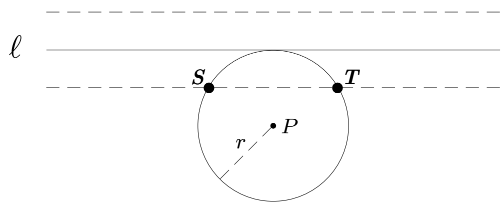
Caso: $\boldsymbol{d}$ **-** $\boldsymbol{r = k}$

L.G.$= \{R\}$.



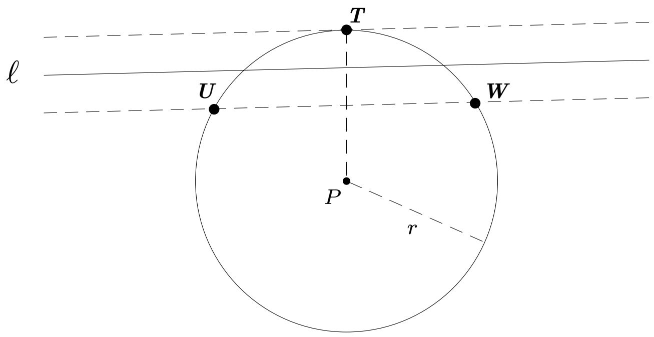
Caso: $\boldsymbol{0 < d}$ **-** $\boldsymbol{r < k}$

L.G.$= \{S, T\}$.



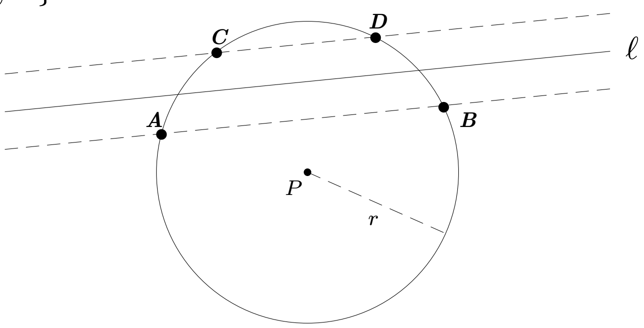
Caso: $\boldsymbol{r = d + k}$

L.G.$= \{U, W, T\}$.



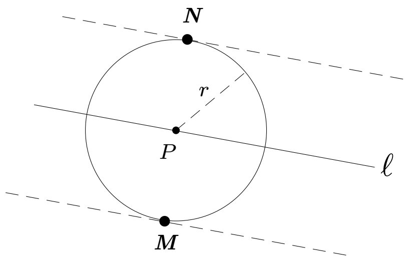
Caso: $\boldsymbol{r > d + k}$

L.G.$= \{A, B, C, D\}$.



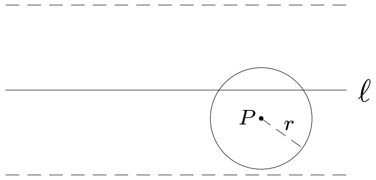
Otros casos: $\boldsymbol{d=0, \quad r=k}$

L.G.$= \{M, N\}$.



$\boldsymbol{0 < r - d < k}$

L.G.$= \emptyset$.



6.- Es la recta perpendicular al plano determinado por los puntos

M, N y P, y que pasa por el circuncentro del triángulo MNP.

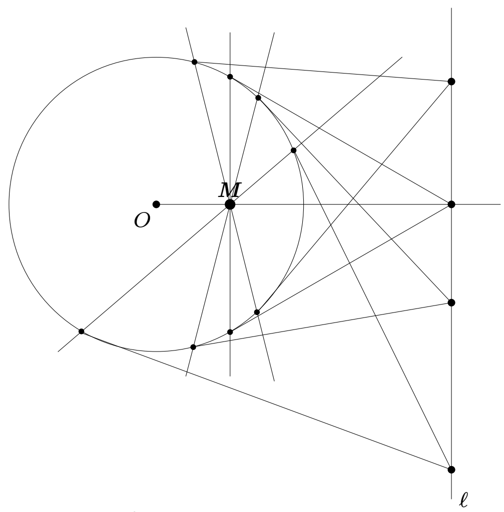
Si los puntos dados estuviesen alineados, el **L.G.** sería el conjunto vacío.

7.- El **L.G.** está formado por 4 rectas, resultantes de las intersecciones de los planos bisectrales - de los ángulos entre los planos α y β - y los dos planos paralelos al plano α (a una distancia d de este último).

8.- El **L.G.** es la esfera de diámetro $\overline{AB}$.

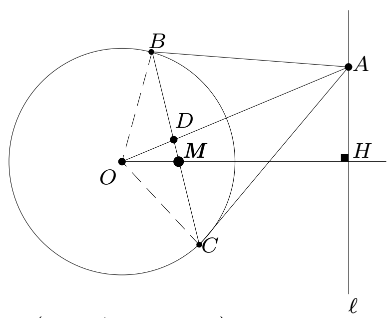
(Es el análogo - en el espacio - del ejercicio - resuelto - 12)

9.- **Exploración:**



El **L.G.** consiste en un solo punto.

Veamos:



$\overline{OH} \perp \ell$

$\triangle OAB \cong \triangle OAC$ $\quad$ (T_4, Apéndice).

$\triangle ODB \cong \triangle ODC \quad (T_3$, Apéndice).

Resulta, así, que el $\triangle BDO$ es rectángulo.

Usando T_7 (Apéndice), se sigue que:

$\triangle BDO \sim \triangle OBA$.

Luego, $\dfrac{OB}{OD} = \dfrac{OA}{OB}$.

O sea, $r^2 = OD \cdot OA$ $\qquad (*)$.

Análogamente, $\triangle ODM \sim \triangle OHA$.

De modo que: $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{OD}{OH}$.

Es decir, $OD \cdot OA = OM \cdot OH$. $\qquad (**)$.

De $(*)$ y $(**)$, obtenemos: $OM = \dfrac{r^2}{OH}$.

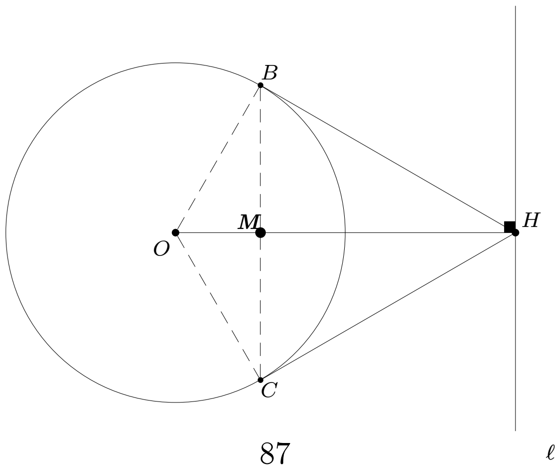
Conclusión: independientemente, del A, elegido en l, siempre se obtiene el mismo M, en $\overline{OH}$.

Afirmación: El **L.G.** pedido es el $\{M\}$, donde, M es el punto, entre O y H, tal que: $OM = \dfrac{r^2}{OH}$.

En efecto:

I) Sea M en $\overline{OH}$, tal que $OM = \dfrac{r^2}{OH}$ $\qquad (\blacksquare)$

Por M, tracemos la cuerda $\overline{BC}$, perpendicular a $\overline{OH}$.



Comparemos los triángulos OMB y OBH.

Tienen: $\measuredangle MOB = \measuredangle HOB$.

$$\frac{OM}{OB} = \frac{OB}{OH}. \qquad \text{(por}(\blacksquare)\text{)}$$

Luego, por T_7 (Apéndice): $\triangle OMB \sim \triangle OBH$.

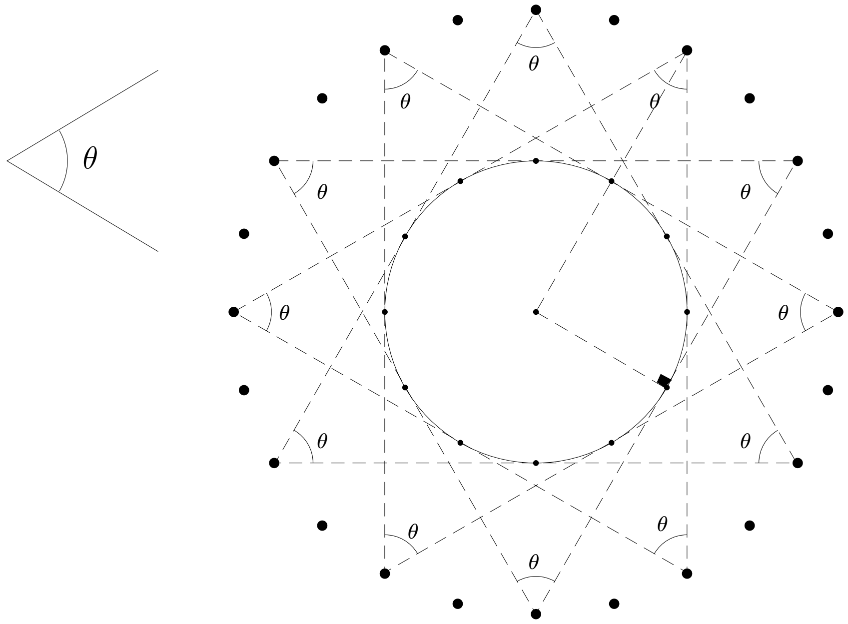
En particular, $\measuredangle OBH = 90°$.

Así, $\overline{HB}$ es tangente a la $C(O;r)$.

Análogamente, $\overline{HC}$ es tangente a la $C(O;r)$.

II) Es lo que hemos probado (inmediatamente antes de I)).

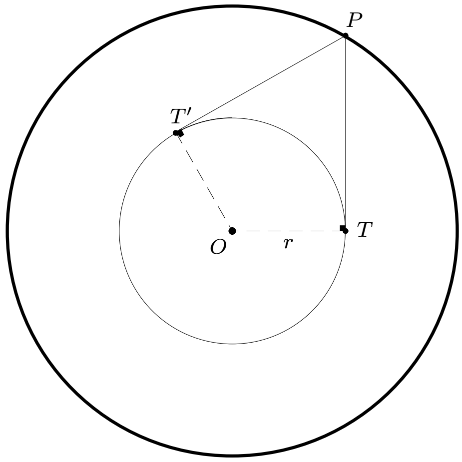
10.- **Exploración:** Sea $C(O;r)$ la circunferencia dada.



Conjetura: El **L.G.** es una circunferencia concéntrica con la dada y de radio $\dfrac{r}{\operatorname{sen}\frac{\hat{\theta}}{2}}$.

Prueba:

I) Sea P, punto de la $C\left(O; \dfrac{r}{\operatorname{sen}\dfrac{\widehat{\theta}}{2}}\right)$.



Tracemos $\overline{PT}$ y $\overline{PT'}$, tangentes a la $C(O; r)$.

Los triángulos rectángulos: OTP y $OT'P$ son congruentes (T_4, Apéndice).

En particular: $\measuredangle T'PO = \measuredangle OPT$. (∗).

Pero, $OP = \dfrac{r}{\operatorname{sen}\dfrac{\widehat{\theta}}{2}}$ y $r = OP \cdot \operatorname{sen}\widehat{OPT}$.

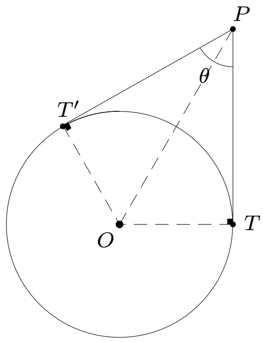
Luego, $\operatorname{sen}\widehat{OPT} = \operatorname{sen}\dfrac{\widehat{\theta}}{2}$.

Como $\widehat{OPT}$ y $\dfrac{\widehat{\theta}}{2}$ son agudos, concluimos que $\measuredangle OPT = \dfrac{\theta}{2}$.

Así que, de (∗) se sigue: $\measuredangle T'PT = \theta$.

II) Sea P, un punto del plano dado, tal que $\overline{PT'}$ y $\overline{PT}$ son tangentes a la $C(O; r)$, con:

T y T', puntos de tangencia y $\measuredangle T'PT = \theta$ $\qquad\qquad (**)$.



Comparando los triángulos rectángulos: OTP y $OT'P$, obtenemos:

$$\triangle OTP \cong \triangle OT'P.$$

En particular, $\measuredangle TPO = \measuredangle OPT'$.

De modo que, usando $(**)$ se sigue: $\quad \measuredangle OPT = \dfrac{\theta}{2}$.

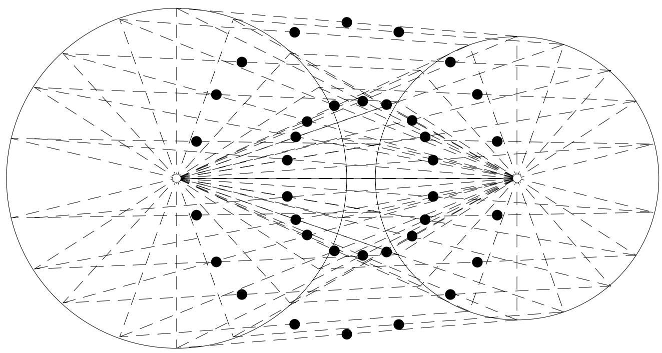
Por lo tanto,

$$OP = \frac{r}{\operatorname{sen} \widehat{\dfrac{\theta}{2}}}.$$

Es decir, P está en la $C\left(O; \dfrac{r}{\operatorname{sen} \widehat{\frac{\theta}{2}}}\right)$.

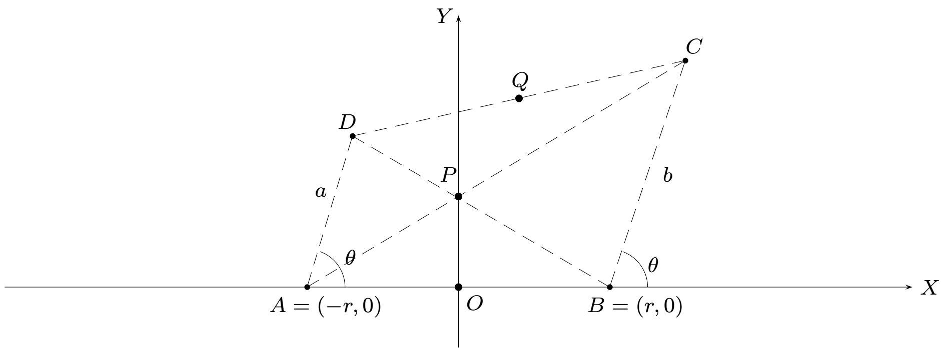
11) Usando el ejercicio anterior, el **L.G.** buscado es **la intersección** de dos circunferencias, respectivamente, concéntricas a las dadas. (El **L.G.** puede ser $\emptyset$, un conjunto unitario, ó un conjunto de dos puntos).

12) **Exploración:**



Conjetura: ambos lugares geométricos son circunferencias (quitándoles los puntos en $\overleftrightarrow{OX}$)

Prueba: Adoptaremos el sistema de coordenadas cartesianas en el cual el eje de las abscisas es la recta que contiene al lado - no paralelo - dado, mientras que el origen de coordenadas es el punto medio de dicho lado.



Resulta:

$$\begin{aligned} C &= (r + b\cos\theta, b\,\mathrm{sen}\,\theta) \\ D &= (-r + a\cos\theta, a\,\mathrm{sen}\,\theta) \\ Q &= (\frac{a+b}{2}\cos\theta, \frac{a+b}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta) \\ &\quad \text{(punto medio de}\overline{DC}\text{).} \end{aligned}$$

$$\text{Ecuación de}\overleftrightarrow{DB}: \quad y = \frac{a \operatorname{sen}\theta}{-2r + a\cos\theta}(x - r) \qquad (*).$$

$$\text{Ecuación de}\overleftrightarrow{AC}: \quad y = \frac{b \operatorname{sen}\theta}{2r + b\cos\theta}(x + r) \qquad (**)$$

De $(*)$ y $(**)$, obtenemos:

$$P = \left(\frac{ab\cos\theta + ar - br}{a+b}, \frac{ab\operatorname{sen}\theta}{a+b}\right) \qquad (***).$$

Ahora bien, las coordenadas del punto Q verifican:

$$\left(\frac{a+b}{2}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\operatorname{sen}\theta\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Es decir, $\quad Q \quad$ está en la $\quad C\left(O; \dfrac{a+b}{2}\right)$.

Por otro lado, dado un punto $\quad Q' = (x', y')$, en la $C\left(O; \dfrac{a+b}{2}\right)$, existe θ' $(0 < \theta' < 2\pi)$, que verifica:

$$x' = \frac{a+b}{2}\cos\theta'$$

$$y' = \frac{a+b}{2}\operatorname{sen}\theta'.$$

Luego, considerando los puntos:

$$\begin{aligned} C &= (r + b\cos\theta', b\operatorname{sen}\theta') \\ D &= (-r + a\cos\theta', a\operatorname{sen}\theta'), \end{aligned}$$

resulta: $ABCD$ es un trapecio, con $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, lados paralelos (formando con el eje $\overrightarrow{OX}$, un ángulo θ'); además, $DA = a \quad$ y $\quad CB = b$.

De modo que Q' está en el 2do **L.G.** pedido.

En fin, el **L.G.** del punto medio del lado desconocido es la $C\left(O;\dfrac{a+b}{2}\right)$, menos los puntos en el eje $\overleftrightarrow{OX}$.

En forma similar, llamando x e y, respectivamente, a la abscisa y a la ordenada del punto P, de $(***)$, se obtiene:

$$\left(x-\frac{a-b}{a+b}\cdot r\right)^2+y^2=\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}.$$

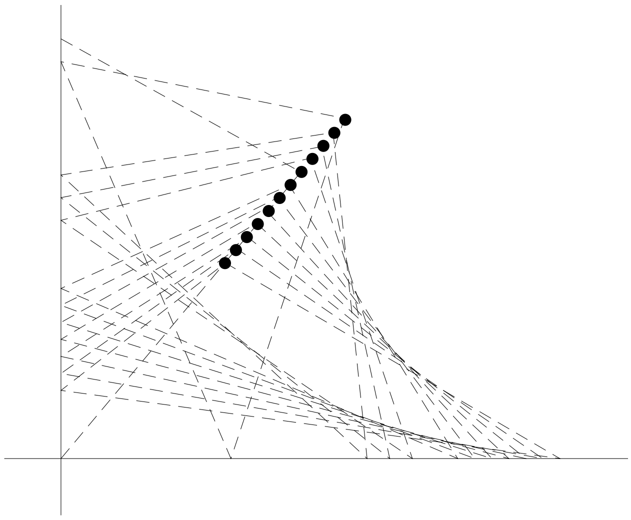
Es decir, P está en la

$$C\left(\left(\frac{a-b}{a+b}r,0\right);\frac{ab}{a+b}\right).$$

Análogamente al caso del punto Q, se prueba que todo punto de dicha circunferencia (exceptuando los de ordenada o) está en el 1er **L.G.** procurado.

Así, el **L.G.** de los puntos de intersección de las diagonales es la $C\left(\left(\dfrac{a-b}{a+b}r,0\right);\dfrac{ab}{a+b}\right)$, exceptuando los puntos sobre el eje $\overleftrightarrow{OX}$.

13) **Exploración:**

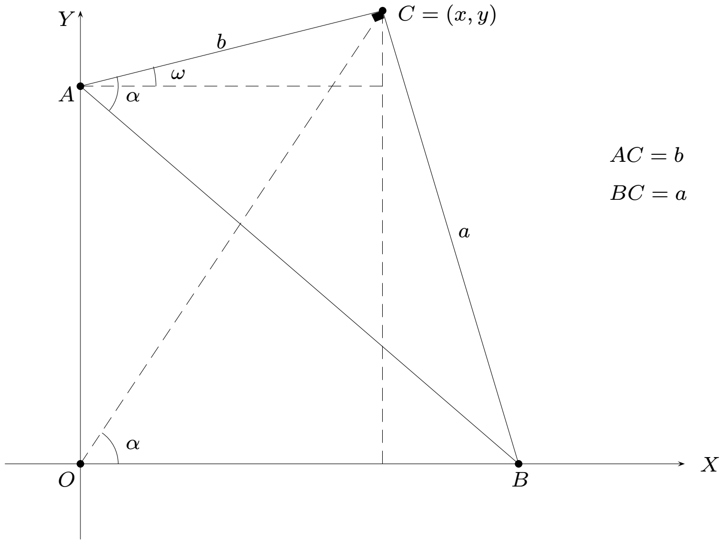


Conjetura: El **L.G.** es un segmento de recta.

Prueba: Por T_{14} (Apéndice), $OBCA$ es un cuadrilátero inscriptible.

Luego, por T_1 (Apéndice), $\quad \measuredangle BOC = \alpha$.

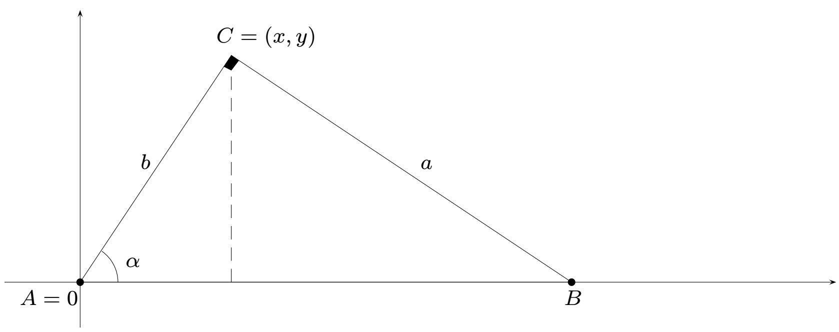
De modo que: $\quad \dfrac{y}{x} = \tan\alpha$.



Tenemos así, que C está en la recta de ecuación:

$y = (\tan\alpha) \cdot x = \dfrac{a}{b}x$.

Ahora bien, el valor mínimo de y, se obtiene cuando la escuadra está en la posición:

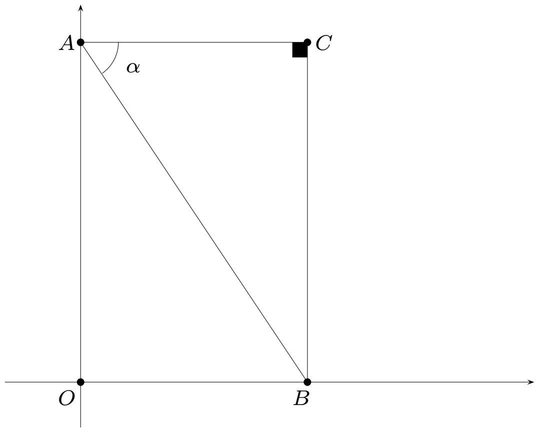


O sea, valor mínimo de $y : b\operatorname{sen}\alpha$

Luego, valor mínimo de $x : b\cos\alpha$

Para hallar los valores máximos de x e y, consideremos la figura del inicio de la prueba, de la cual se sigue: $\quad x = b\cos\omega.$

Como el valor mínimo de ω es 0, el valor máximo de x es b.



Así que, la conjetura queda (más precisa):

El **L.G.** es el conjunto de puntos (x, y), tales que:

$y = \dfrac{a}{b}x \qquad , \qquad \text{con} \qquad b\cos\alpha \leq x \leq b.$

Nos falta probar la parte I).

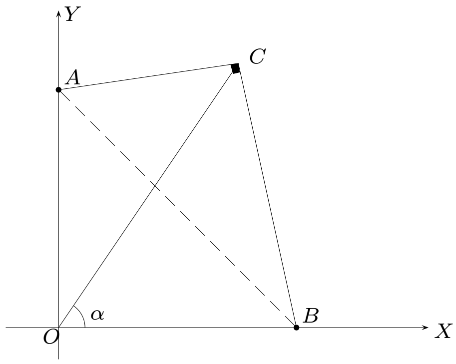
Sea, entonces, $C(x, y)$, tal que:

$y = \dfrac{a}{b}x \qquad , \qquad b\cos\alpha \leq x \leq b.$

(α ángulo agudo, con $\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$).

Con centro en C y radio b, tracemos un arco de circunferencia, que corta al eje OY en A (hemos elegido uno de los puntos de corte).

Ahora trazamos, por C, la perpendicular, l, a $\overline{AC}$. Tenemos que, l corta a $\overleftrightarrow{OX}$ en un punto B.



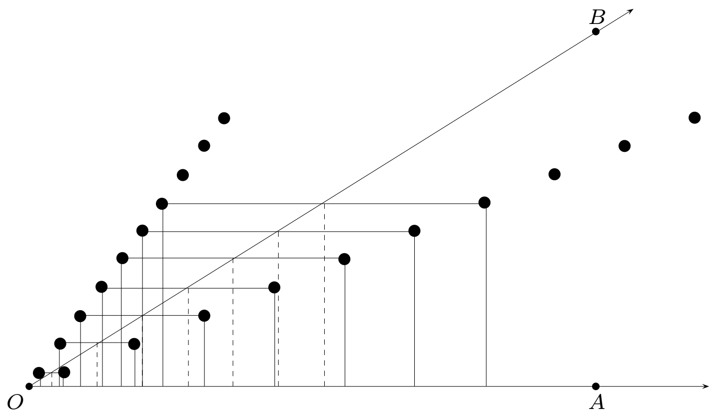
Por T_{14} (Apéndice), resulta que $OBCA$ es inscriptible.

Luego, por T_1 (Apéndice), se sigue:

$\measuredangle BAC = \alpha$.

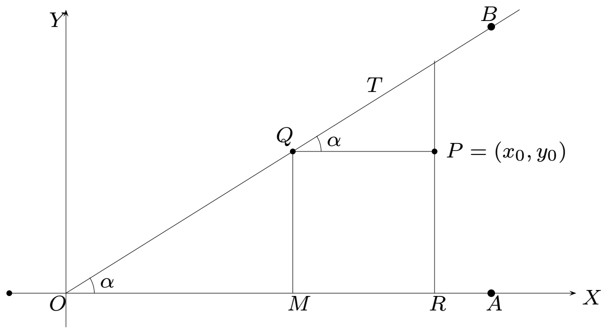
Es decir, el $\triangle ACB$ representa una de las posiciones en el movimiento de la escuadra.

14) **Explorando:**



Conjetura: El **L.G.** es la figura formada por dos semirrectas con origen en O (sin incluir este último).

Prueba:



Escogemos un sistema de coordenadas cartesianas, con origen O y $\overleftrightarrow{OA}$ como eje de las abscisas.

Se tiene: ecuación de $\overrightarrow{OB}$: $y = x \tan\alpha,\ x \geq 0$.

$QP = y_0$; $PT = x_0 \tan\alpha - y_0$; $PT = QP \tan\alpha$.

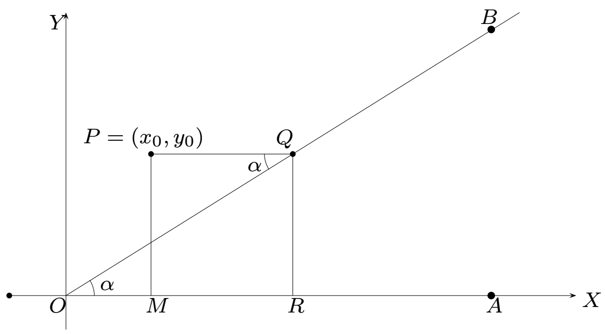
Así, $x_0 \tan\alpha - y_0 = y_0 \tan\alpha$,

o sea: $y_0 = \dfrac{\tan\alpha}{1+\tan\alpha} x_0$.

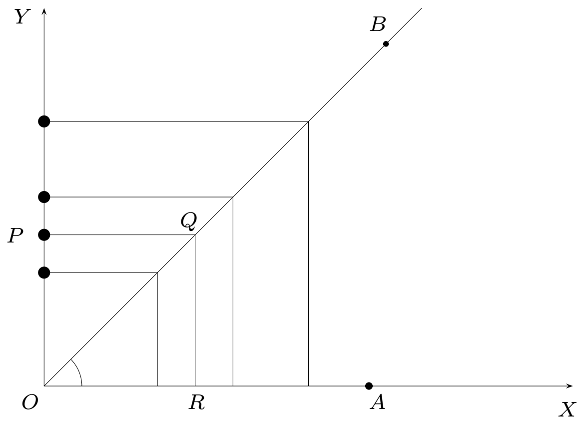
De modo que P está en la recta de ecuación: $y = \dfrac{\tan\alpha}{1+\tan\alpha} x$.

(Esto, para el caso en el cual P está en el interior del $\widehat{AOB}$).

Si P es exterior al $\widehat{AOB}$, se obtiene (análogamente) que P está en la recta de ecuación: $y = \dfrac{\tan\alpha}{1-\tan\alpha} x$ (si $\alpha \neq 45°$).



Si $\alpha = 45°$, P está en $\overrightarrow{OY}$.



De forma que: El **L.G.** buscado consiste de las semirrectas dadas por:

$$y = \frac{\tan\alpha}{1+\tan\alpha} \qquad , \qquad x > 0$$

ó

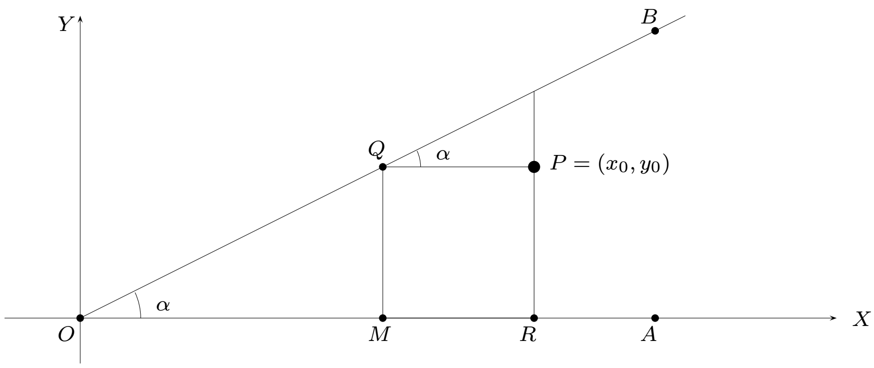
$$y = \frac{\tan\alpha}{1-\tan\alpha} \qquad , \qquad x > 0$$

(si $\alpha = 45°$, sustituir por: $x = 0$, $y > 0$)

Para tener la prueba completa, nos falta demostrar I).

Consideremos el caso: $P = (x_0, y_0)$, con

$$x_0 > 0 \qquad , \qquad y_0 = \frac{\tan\alpha}{1+\tan\alpha}x_0 \qquad (*)$$



Por P, trazamos $\overline{PR} \perp \overline{OA}$, $\overline{PQ} \parallel \overline{OA}$, $\overline{QM} \perp \overline{OA}$.

Resulta: $Q = \left(\dfrac{y_0}{\tan\alpha}, y_0\right)$.

Así que, usando $(*)$, se sigue:

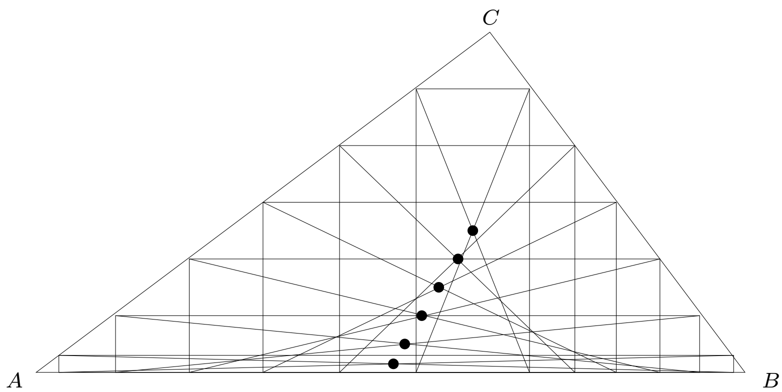
$$\begin{aligned} QP &= MR = x_0 - \frac{y_0}{\tan\alpha} = x_0 - \frac{x_0}{1+\tan\alpha} = x_0\left(1 - \frac{1}{1+\tan\alpha}\right) \\ &= \frac{\tan\alpha}{1+\tan\alpha}x_0 = y_0. \end{aligned}$$

O sea, $MRPQ$ es un cuadrado, como los considerados en el enunciado.

Los otros casos son similares.

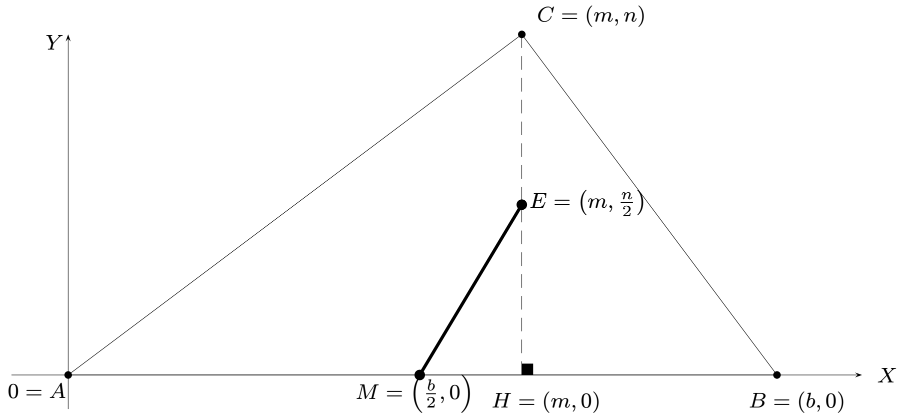
15) Consideremos el caso:

$$\measuredangle BAC \neq \measuredangle ABC \qquad \text{y} \qquad \measuredangle ABC \neq 90^\circ.$$



Conjetura: El **L.G.** es un segmento de recta.

Prueba: Adoptamos un sistema de coordenadas cartesianas con $\overleftrightarrow{AB}$ como eje de las abscisas y A como origen.



Ahora, la conjetura queda expresada así:

El **L.G.** es el segmento $\overline{ME}$ (sin sus extremos).

Nota: los puntos M y E han aparecido al considerar los "casos extremos" en la familia de rectángulos del enunciado.

Tenemos: ecuación de $\overline{ME}$. (sin sus extremos):

$$y = \frac{n}{2m-b}\left(x - \frac{b}{2}\right) \qquad , \qquad (*)$$

con: $\qquad 0 < y < \dfrac{n}{2}$

I) Sea P un punto (x_0, y_0), de $\overline{ME}$, con $P \neq M$ y $P \neq E$.

Por hipótesis:

$$y_0 = \frac{n}{2m-b}\left(x_0 - \frac{b}{2}\right) \quad , \quad 0 < y_0 < \frac{n}{2} \qquad (***)$$

Consideremos el rectángulo $RSTU$, en el cual:

$$R = \left(\frac{2my_0}{n}, 0\right) \quad ; \quad S = \left(\frac{2my_0 - 2by_0 + nb}{n}, 0\right) \quad ;$$

$$T = \left(\frac{2my_0 - 2by_0 + nb}{n}, 2y_0\right) \quad ; \quad U = \left(\frac{2my_0}{n}, 2y_0\right).$$

Este es un rectángulo inscrito en el $\triangle ABC$, con $\overline{RS}$ en $\overline{AB}$.

El centro de dicho rectángulo es el punto:

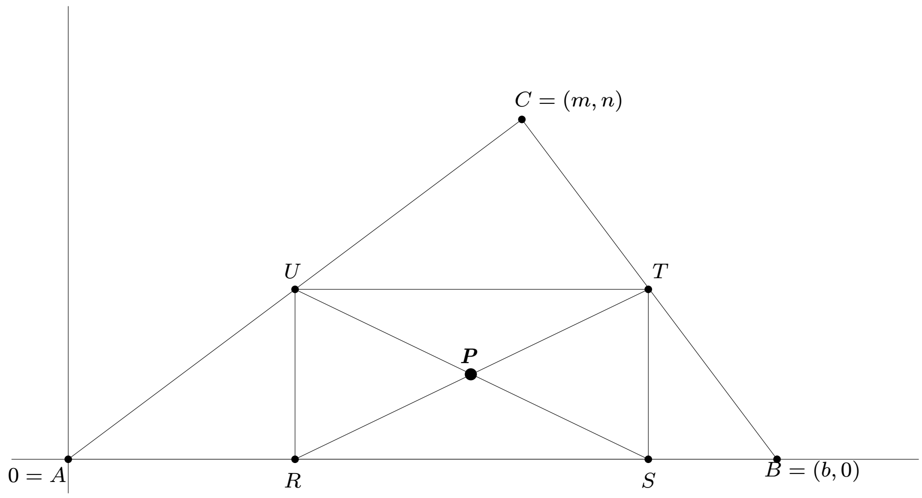
$$\left(\frac{\dfrac{2my_0}{n}+\dfrac{2my_0-2by_0+nb}{n}}{2}, \frac{2y_0+0}{2}\right),$$

o sea, $\left(\dfrac{4my_0-2by_0+nb}{2n}, y_0\right)$.

Usando $(***)$, la abscisa de este punto es x_0.

Conclusión: (x_0, y_0) es el centro de un rectángulo de la familia enunciada.

II) Sea $P=(x_0,y_0)$, centro de un rectángulo inscrito en el $\triangle ABC$, con uno de sus lados en $\overline{AB}$.



Ecuación de $\overleftrightarrow{AC}$: $\qquad y=\dfrac{n}{m}x.$

Luego, $\qquad U=\left(\dfrac{2my_0}{n}, 2y_0\right)$.

Ecuación de $\overleftrightarrow{BC}$: $\qquad y=\dfrac{n}{m-b}(x-b).$

Así,

$$T = \left(\frac{2my_0 - 2by_0 + nb}{n}, 2y_0 \right),$$

de modo que,

$$S = \left(\frac{2my_0 - 2by_0 + nb}{n}, 0 \right).$$

Ahora bien, P es el punto medio de $\overline{US}$, luego

$$x_0 = \frac{\frac{2my_0}{n} + \frac{2my_0 - 2by_0 + nb}{n}}{2},$$

o sea,

$$x_0 = \frac{4my_0 - 2by_0 + nb}{2n}. \qquad (**)$$

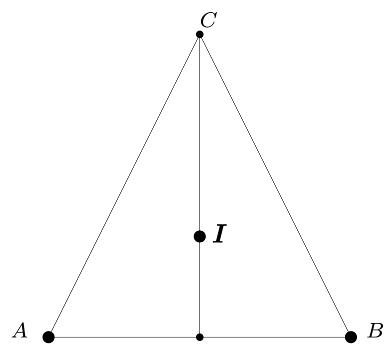
Usando (**), enseguida obtenemos que (x_0, y_0) verifica (*).

Es decir, P está en $\overline{ME}$ (con $P \neq M$ y $P \neq E$).

Si $\measuredangle ABC = 90°$, el **L.G.** es el segmento $\overline{ME}$ - sin sus extremos - donde, M es el punto medio de $\overline{AB}$ y E es el punto medio de $\overline{CB}$.

Si $\measuredangle BAC = \measuredangle ABC$, el **L.G.** es $\overline{ME}$ (quitándole los puntos M y E), donde: M es el punto medio de $\overline{AB}$ y E, el punto medio de $\overline{CM}$.

16)

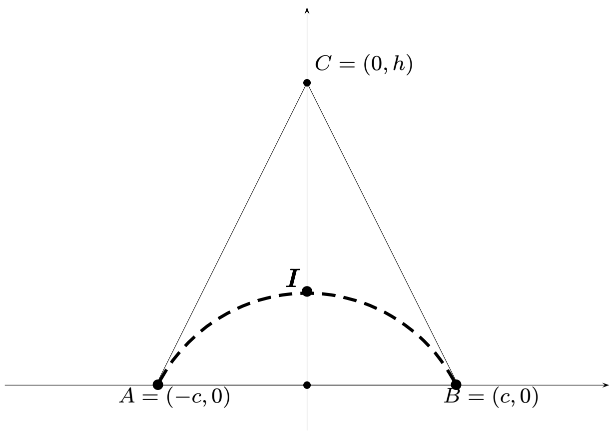


Reconocemos prontamente, que hay tres puntos que tienen la propiedad del enunciado:

A, B (en este caso dos de las distancias valen 0) y el incentro del $\triangle ABC$ (dicho punto equidista de los lados del triángulo).

Esto nos sugiere que averiguemos acerca de la circunferencia que pasa por dichos puntos.

Introduzcamos un sistema de coordenadas cartesianas, con $\overleftrightarrow{AB}$ como eje de las abscisas y la perpendicular, por C, a $\overleftrightarrow{AB}$, como eje de las ordenadas.



Resulta: el incentro $I = \left(0, \dfrac{ch}{c + \sqrt{c^2 + h^2}}\right)$ (¿Por qué?)

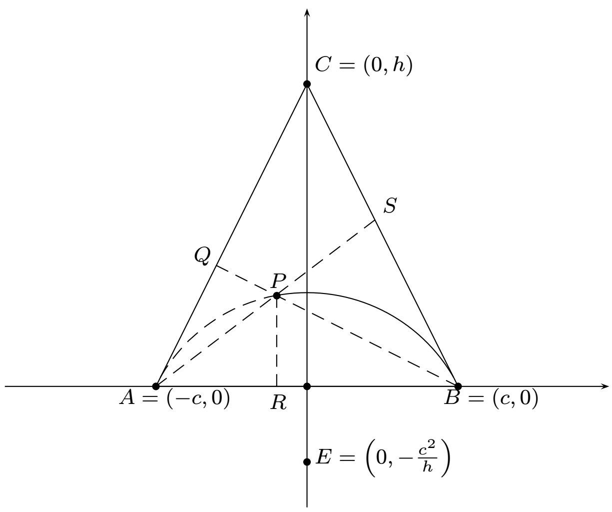
La ecuación de la circunferencia que pasa por A, B, I es:

$$x^2 + \left(y + \frac{c^2}{h}\right)^2 = c^2 + \frac{c^4}{h^2} \quad \text{(¿Por qué?)} \tag{*}$$

De modo que la conjetura es:

El **L.G.** es el arco de la circunferencia dada por $(*)$, con $y \geq 0$.

Preliminares:



Sea $E=\left(0,-\dfrac{c^2}{h}\right)$, es decir, E es el centro de la circunferencia dada por $(*)$.

Veamos que $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son tangentes a la circunferencia citada.

En efecto:

Pendiente de $\overleftrightarrow{AC}$: $\quad \dfrac{h}{c}$.

Pendiente de $\overleftrightarrow{AE}$: $\quad \dfrac{\frac{c^2}{h}}{-c}=-\dfrac{c}{h}$.

Luego, $\quad \overleftrightarrow{AC}\perp\overleftrightarrow{AE}$.

Pendiente de $\overleftrightarrow{BC}$: $\quad -\dfrac{h}{c}$.

Pendiente de $\overleftrightarrow{EB}$: $\quad \dfrac{\frac{c^2}{h}}{c}=\dfrac{c}{h}$.

Así, $\quad \overleftrightarrow{BC}\perp\overleftrightarrow{EB}$.

Ahora, sí estamos en condiciones de probar I).

I) Sea P, punto del $\triangle ABC$, en la circunferencia dada por $(*)$.

Además, suponemos $P\neq A$ y $P\neq B$ (El caso contrario es trivial).

Desde P, bajamos perpendiculares a los lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

Sean R, Q y S, los piés de dichas perpendiculares, respectivamente.

Como $\measuredangle QAP = \measuredangle PBR$ (T_1, Apéndice),

$\triangle AQP \sim \triangle BRP$ (T_7, Apéndice).

En particular: $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{QP}{PR}$. (1)

Análogamente, $\triangle ARP \sim \triangle BSP$.

Así, $\dfrac{PR}{PS} = \dfrac{AP}{PS}$. (2)

De (1) y (2), se obtiene: $PR^2 = QP \cdot PS$.

II) Sea $P = (x_0, y_0)$, en el $\triangle ABC$, tal que:

$$y_0{}^2 = m \cdot n, \qquad (**)$$

donde, m es la distancia de P a $\overline{AC}$ y n es la distancia de P a $\overline{AB}$.

Como la ecuación de $\overline{AC}$ es: $cy - hx - hc = 0$,

resulta: $m = \dfrac{|cy_0 - hx_0 - hc|}{\sqrt{c^2 + h^2}}$.

Análogamente, ya que la ecuación de $\overline{AB}$ es: $cy + hx - hc = 0$,

obtenemos: $n = \dfrac{|cy_0 + hx_0 - hc|}{\sqrt{c^2 + h^2}}$.

Luego, $(**)$ se escribe:

$$y_0{}^2 = \frac{|cy_0 - hx_0 - hc||cy_0 + hx_0 - hc|}{c^2 + h^2} \qquad (***)$$

Pero,

$$cy_0 - hx_0 - hc = c(y_0 - h) - hx_0 \leq 0$$

Además, $cy_0 + hx_0 - hc \leq 0$ (P está en el mismo semiplano que $(0, 0)$, respecto a la recta $cy - hx - hc = 0$).

Luego, $(***)$ - expresada sin las barras - es:

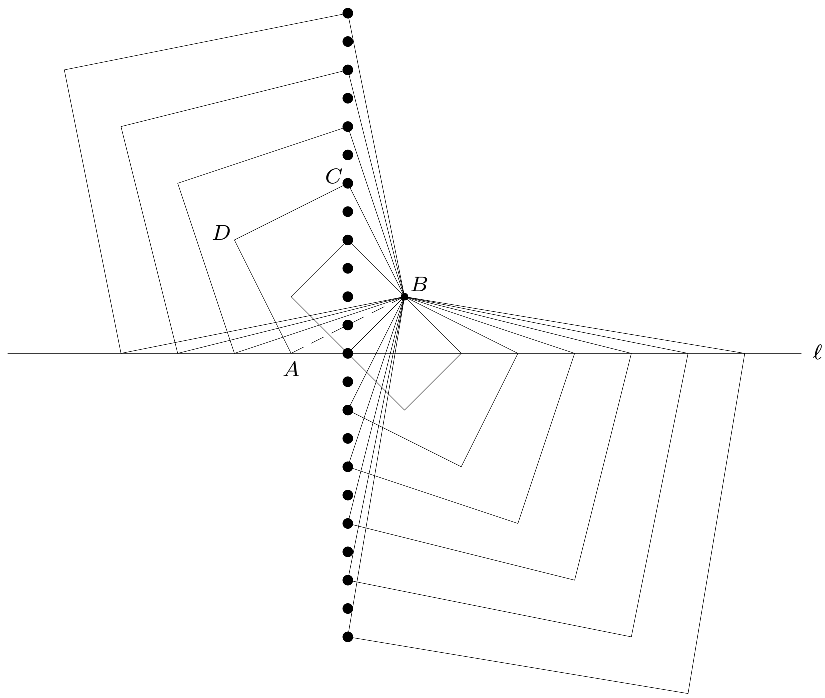
$$y_0^2 = \frac{(-cy_0 + hx_0 + hc) \cdot (-cy_0 - hx_0 + hc)}{c^2 + h^2},$$

lo cual - al desarrollar y simplificar - da:

$$x_0^2 + \left(y_0 + \frac{c^2}{h}\right)^2 = c^2 + \frac{c^4}{h^2}.$$

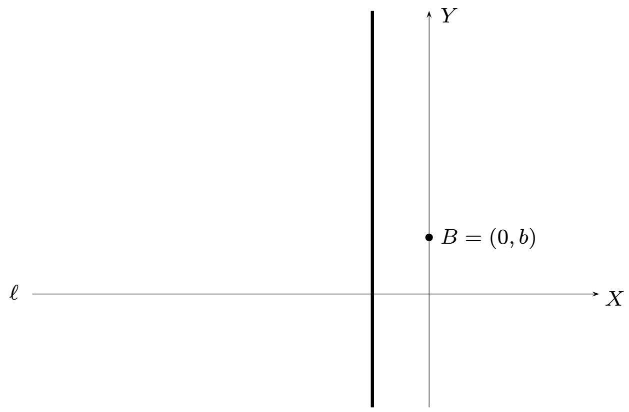
Es decir, $P = (x_0, y_0)$ cumple $(*)$. Además, $y_0 \geq 0$; luego, P está en el **L.G.**

17)



Conjetura: El **L.G.** es una recta perpendicular a l.

Prueba: Elegimos un sistema de coordenadas cartesianas cuyo eje de las abscisas sea la recta l y como eje de las ordenadas tomamos la recta perpendicular a l y que pasa por B.



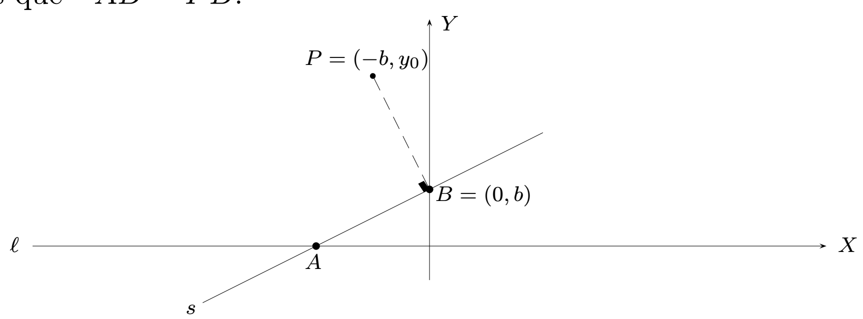
El **L.G.** es la recta de ecuación: $x = -b$, donde, b es la distancia de B a l.

I) Sea $P = (-b, y_0)$, con $y_0 \neq b$

Tracemos, por B, la perpendicular s, a $\overline{PB}$.

s corta a l, en A.

Veamos que $AB = PB$.



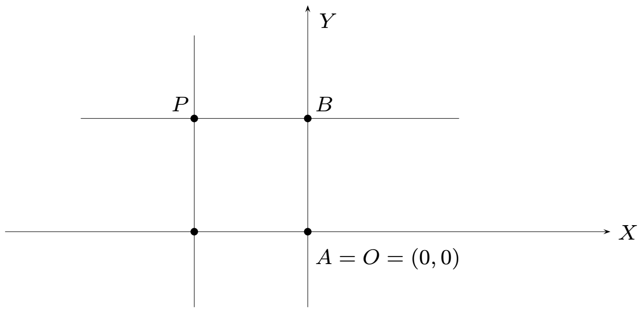
Ecuación de *s*: $y - b = \dfrac{b}{y_0 - b}\, x$.

Entonces, $A = (b - y_0, 0)$.

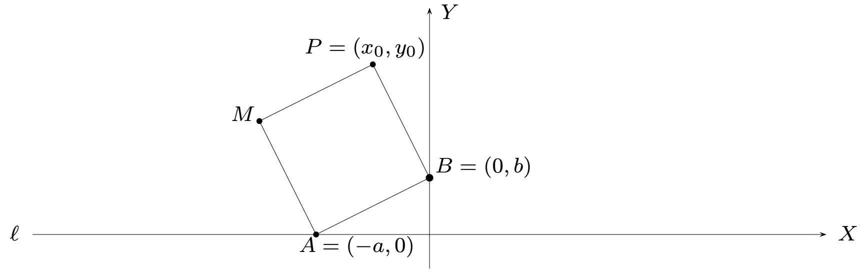
Luego, $AB = \sqrt{(y_0 - b)^2 + b^2} = PB$.

Es decir, P tiene la propiedad estipulada.

En el caso, $P = (-b, b)$, tomamos $A = (0, 0)$.



II) Sea P, punto del plano dado, tal que $ABPM$ es un cuadrado, con A en l.



Tenemos:

Ecuación de $\overleftrightarrow{AB}$: $\quad y = \dfrac{b}{a}(x+a)$

Ecuación de $\overleftrightarrow{PB}$: $\quad y - b = -\dfrac{a}{b}\,x$

Luego, $\quad y_0 - b = -\dfrac{a}{b}\,x_0.$

Por otro lado, $\quad \sqrt{{x_0}^2 + (y_0 - b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}.$

De modo que: $\quad \sqrt{{x_0}^2 + \dfrac{a^2}{b^2}{x_0}^2} = \sqrt{a^2+b^2}.$

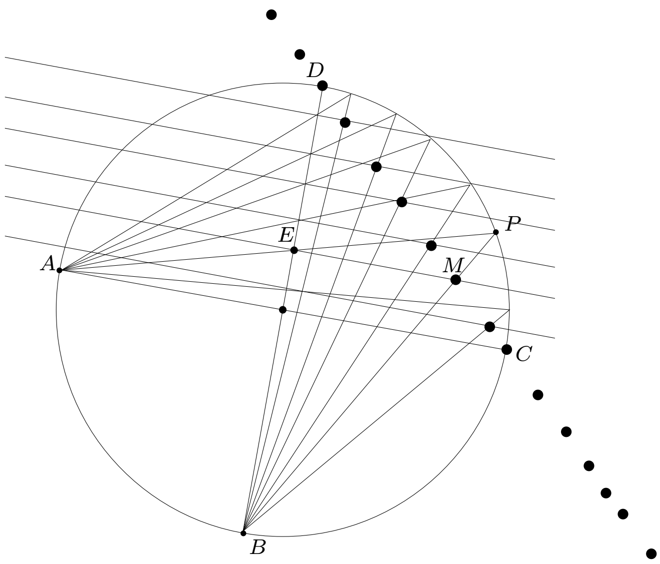
O sea, $\quad {x_0}^2 = b^2.$

Ahora bien, por la forma de construir los cuadrados, el punto P siempre tiene abscisa negativa.

Por lo tanto, queda:

$$x_0 = -b.$$

18)

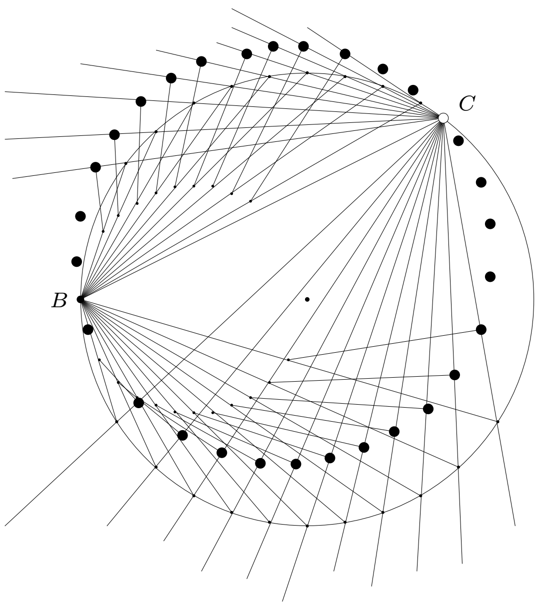


El **L.G.** es la recta $\overleftrightarrow{DC}$.

Indicación: Usar T_1 y T_{14} (Apéndice), para concluir que el cuadrilátero $EMPD$ es inscriptible. Luego, nuevamente, T_1 (Apéndice), para deducir que:

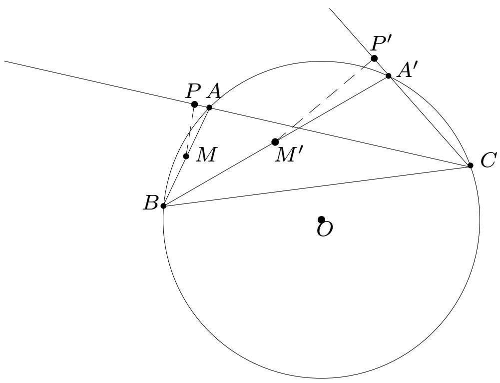
$$\measuredangle DME = \measuredangle DPE = \measuredangle DPA = 45°.$$

19)



El **L.G.** se obtiene de una circunferencia (que tiene a $\overline{BC}$ como cuerda) al quitarle el punto C.

En efecto:



Sean: A y A' (puntos en el mismo semiplano - respecto a $\overleftrightarrow{BC}$ -) en la circunferencia dada;

$$M: \text{ punto medio de } \overline{AB};$$

$$M': \text{ punto medio de } \overline{A'B};$$

$$P: \text{pié de la perpendicular} - \overleftrightarrow{MP} - \text{a } \overleftrightarrow{AC};$$

$$P': \text{pié de la perpendicular} - \overleftrightarrow{M'P'} - \text{a } \overleftrightarrow{A'C};$$

Usando T_1 (Apéndice), deducir que: $\triangle MPA \sim \triangle M'P'A'$. (Corolario 1, T_7)

De ahí se obtiene: $\triangle BPA \sim \triangle BP'A'$ (2do caso, T_7)

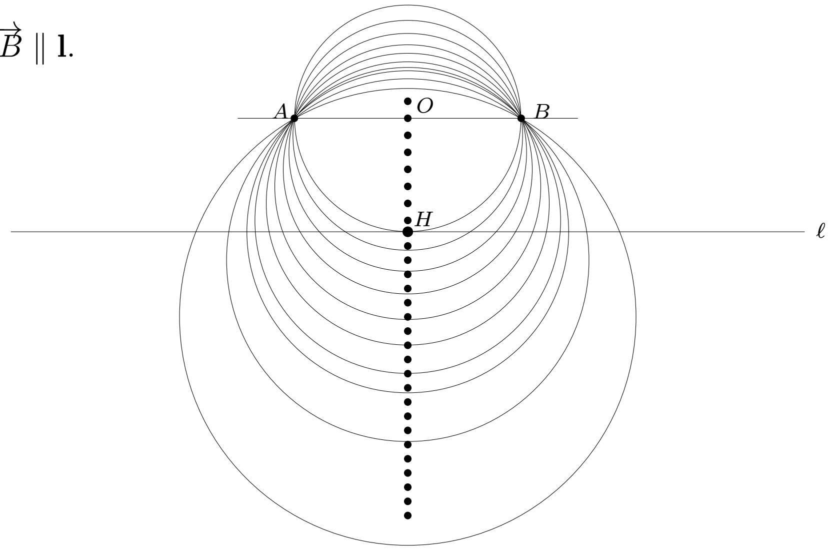
En particular, $\measuredangle BPA = \measuredangle BP'A'$.

Entonces, P y P' están en una circunferencia que tiene a $\overline{BC}$ como cuerda.

(Ver el concepto de arco capaz de un ángulo $-$ T_{21}, Apéndice $-$).

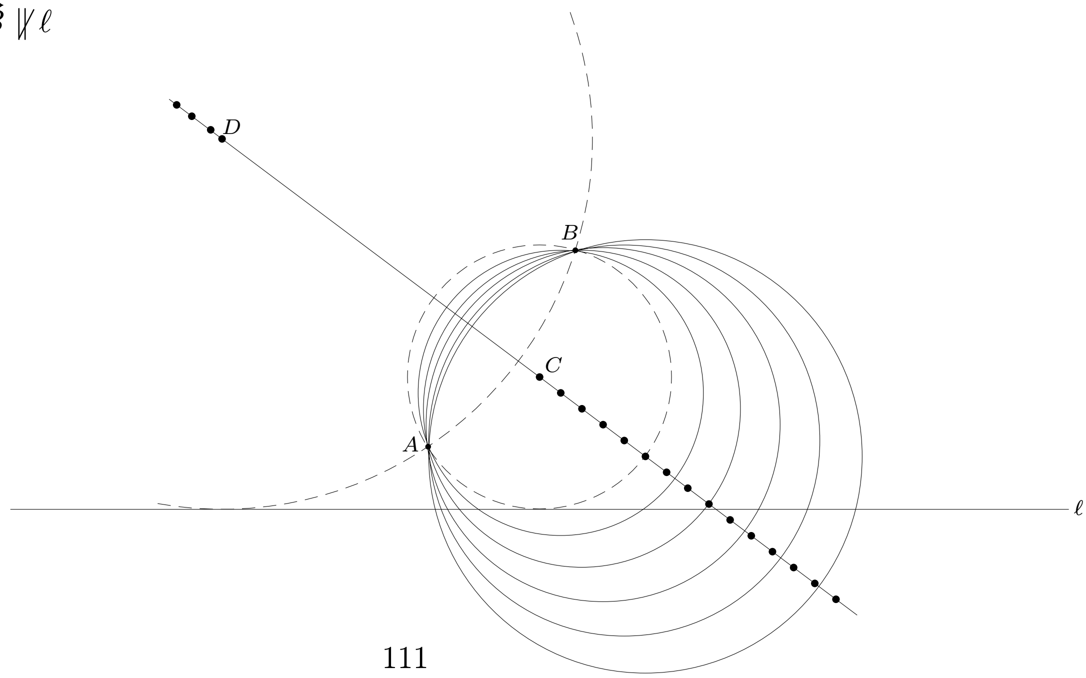
El centro de dicha circunferencia depende de la escogencia de los puntos B y C. Por ejemplo, si B y C son extremos de un diámetro de la circunferencia dada, el **L.G.** es dicha circunferencia (quitándole el punto C).

20) **Caso:** $\overleftrightarrow{AB} \parallel$ **l**.

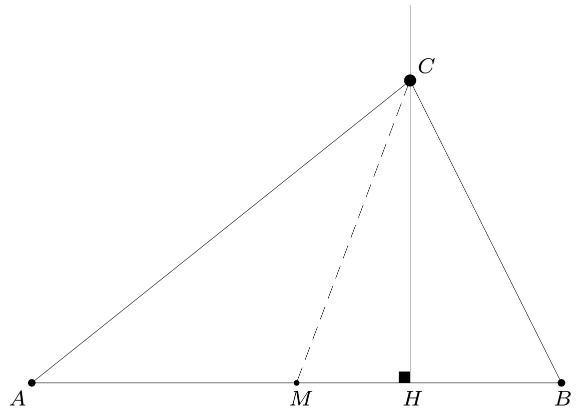


L.G: la semirrecta $\overrightarrow{OH}$ (contenida en la mediatriz de $\overline{AB}$), donde, H está en l y $OA = OB = OH$.

Caso: $\overleftrightarrow{AB} \nparallel \ell$



El **L.G.** es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, quitándole los puntos (interiores) del $\overline{DC}$, donde D y C son centros de circunferencias que pasan por A y B y, además, son tangentes a l.

21) 

Sean:
M: el punto medio de $\overline{AB}$.
C: un punto del Lugar Geométrico.
H: el pié de la perpendicular a $\overline{AB}$, trazada desde C.
Aplicando el teorema del coseno (T_{22}, Apéndice) en los triángulos AMC y CMB,

se obtiene: $\quad CA^2 - CB^2 = 2AB \cdot MH.$

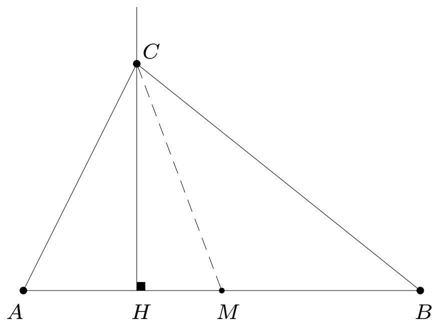
O sea, $\quad MH = \dfrac{k^2}{2AB}.$

Es decir, cualquiera que sea el punto que tomemos del **L.G.** su proyección ortogonal sobre $\overline{AB}$ es la misma.

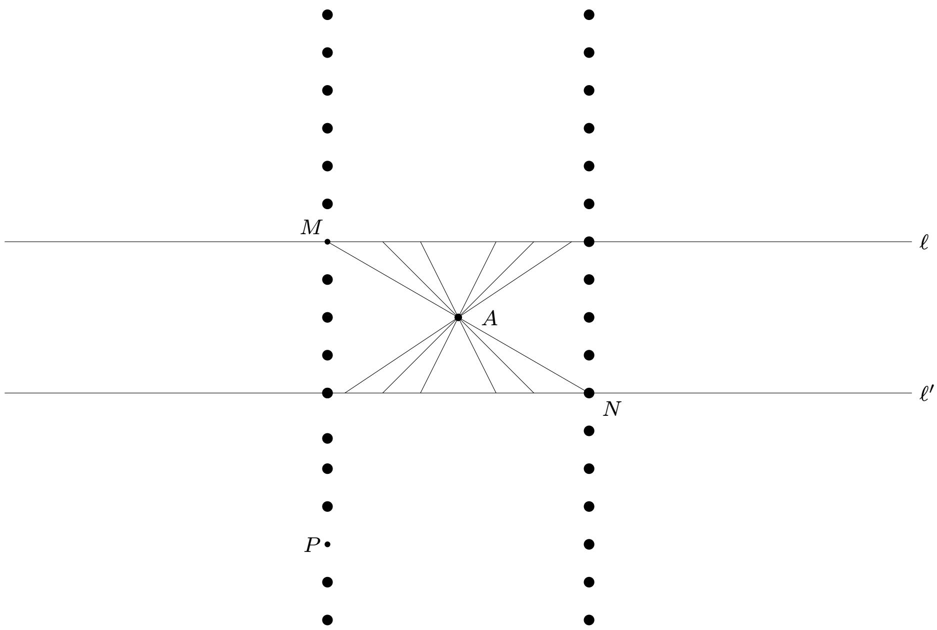
En otras palabras, los puntos del **L.G.** están sobre un perpendicular a $\overline{AB}$.

Recíprocamente ...

Nota: Análogamente ocurre si es el caso $CB^2 - CA^2 = k^2$.



22)

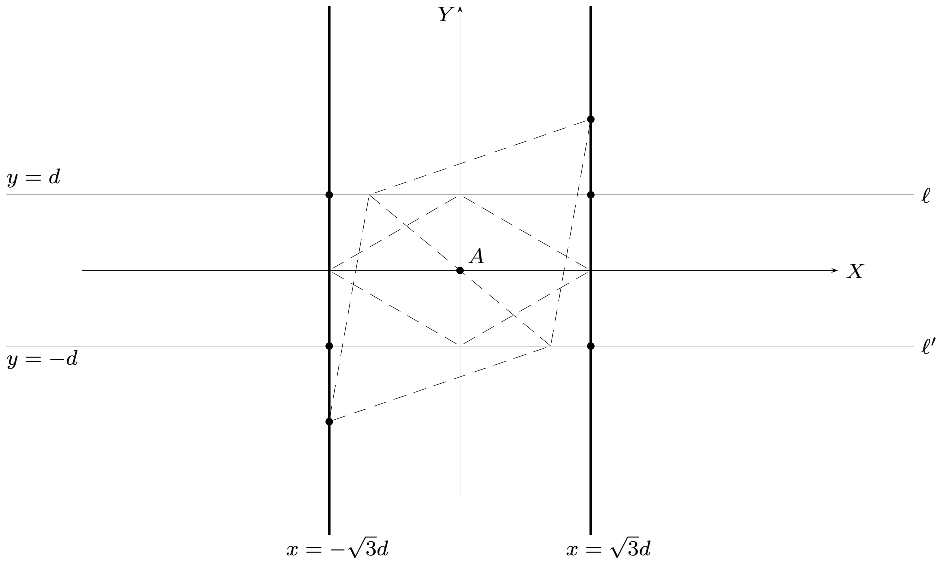


El **L.G.** está formado por dos rectas perpendiculares a las rectas dadas, simétricas respecto al punto A elegido.

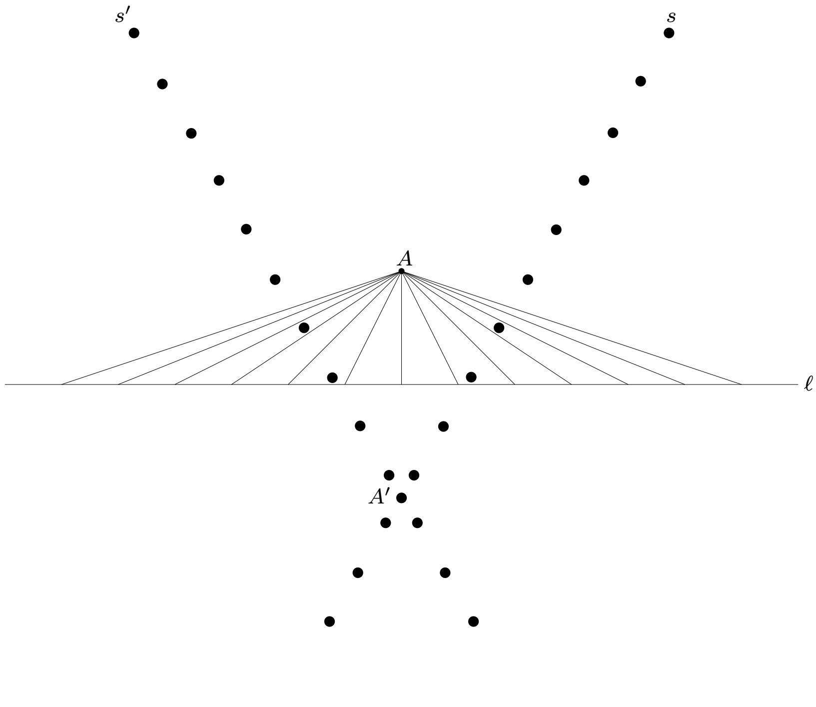
Sugerencia: Usar Geometría Analítica.

Escoger un sistema de coordenadas cartesianas, con origen en A (equidistante de l y l') y eje de las abscisas paralelo a las rectas l y l'; llamando $2d$ a la distancia entre las rectas dadas, resulta que el **L.G.** consiste de las rectas:

$x = \sqrt{3}d \qquad , \qquad x = -\sqrt{3}d$

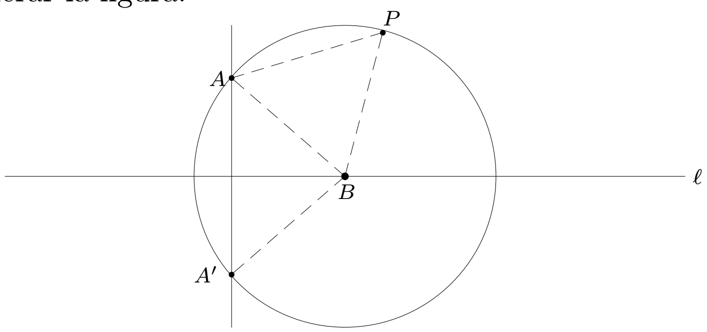


23)



El **L.G.** consiste de **dos rectas**, s y s', que pasan por el punto A', simétrico de A – respecto a l –. Además, las rectas del **L.G.** forman ángulos de $60°$, con la recta l. (La prueba se realiza para una ellas; para la otra, el trabajo es análogo).

Para II), considerar la figura:

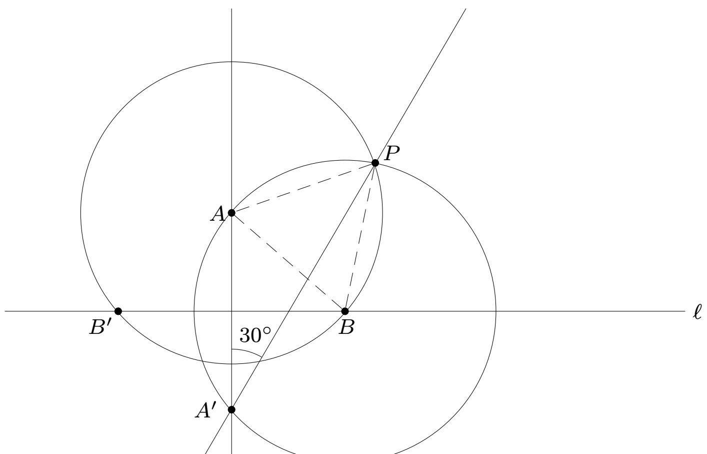


P : punto con la propiedad.

Usando T_1 (Apéndice), resulta: $\measuredangle PA'A = 30°$.

Para la parte I), considerar el caso en el cual PA es mayor que la distancia de A a l.

P punto de s.



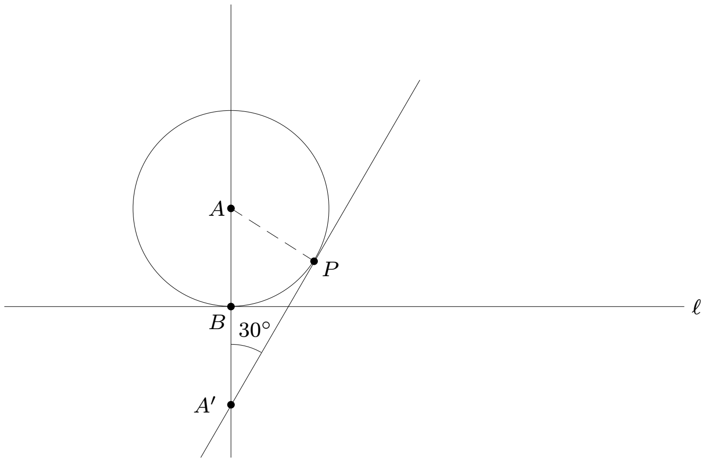
Con centro en A y radio AP, trazamos una circunferencia que corta a l en B y B';

con centro en B y radio BA, trazamos otra circunferencia.

Resultan: $\measuredangle ABP = 60^\circ$ (T_1, Apéndice).

Así, el $\triangle ABP$ es equilátero.

En el caso en el que PA es igual a la distancia de A a l, tenemos:

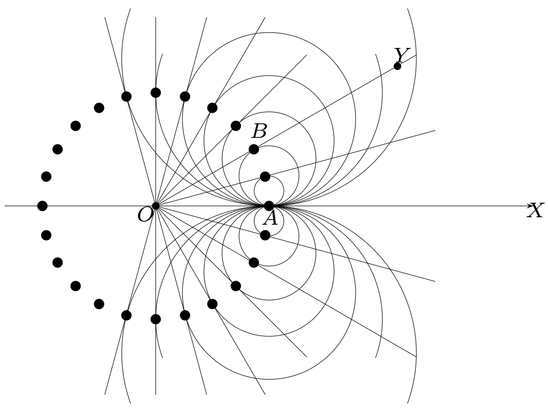


Como resulta $AP = \frac{1}{2}AA'$, el $\triangle A'PA$ es rectángulo.

(Aplicar T_{11}, Apéndice).

Luego, $\measuredangle BAP = 60^\circ$, y el $\triangle ABP$ es equilátero

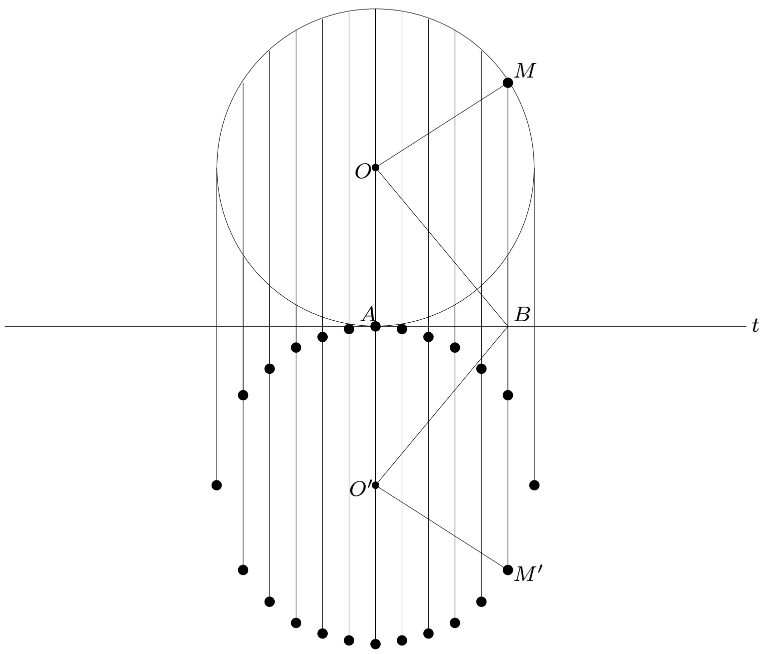
24)



El **L.G.** es la circunferencia de centro O y radio OA, quitándole el punto A y su diametralmente opuesto.

(En la prueba, es muy apropiado usar T_9, Apéndice).

25)



Se prolonga $\overline{OA}$ hasta O', tal que: $OA = O'A$.

Resultan:

$$\triangle OAB \cong \triangle O'AB,$$

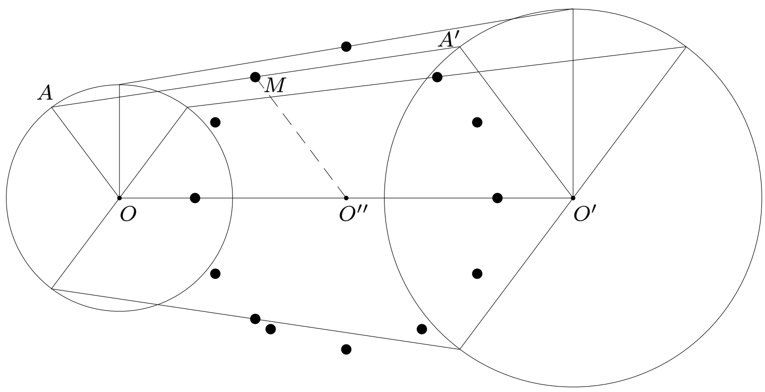
$$\triangle OMB \cong \triangle O'M'B.$$

(T_4, T_3, Apéndice).

En particular, $\quad O'M' = OM$.

El **L.G.** es la $C(O'; O'A)$.

26)



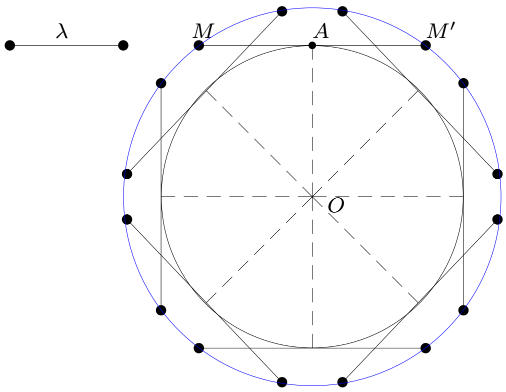
Llamando O'' al punto medio de $\overline{OO'}$, en el trapecio

$OO'A'A$ resulta:

$O''M = \dfrac{r+r'}{2}$ $\qquad\qquad$ (T_{23}, Apéndice).

Enseguida se prueba que el **L.G.** es la $C\left(O''; \dfrac{r+r'}{2}\right)$.

27)

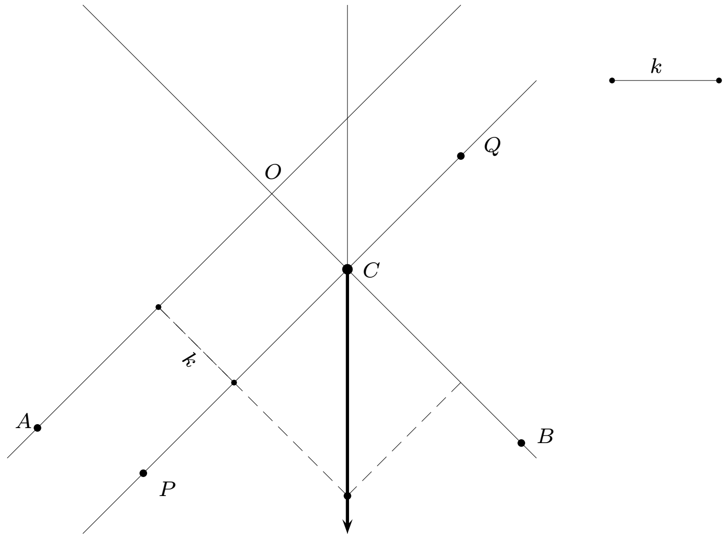


Sea $C(O;r)$ la circunferencia dada.

El triángulo rectángulo OAM tenemos: $\quad OM = \sqrt{r^2+\lambda^2}$.

De ahí se concluye rápidamente, que el **L.G.** es la $C(O;\sqrt{r^2+\lambda^2})$.

28)

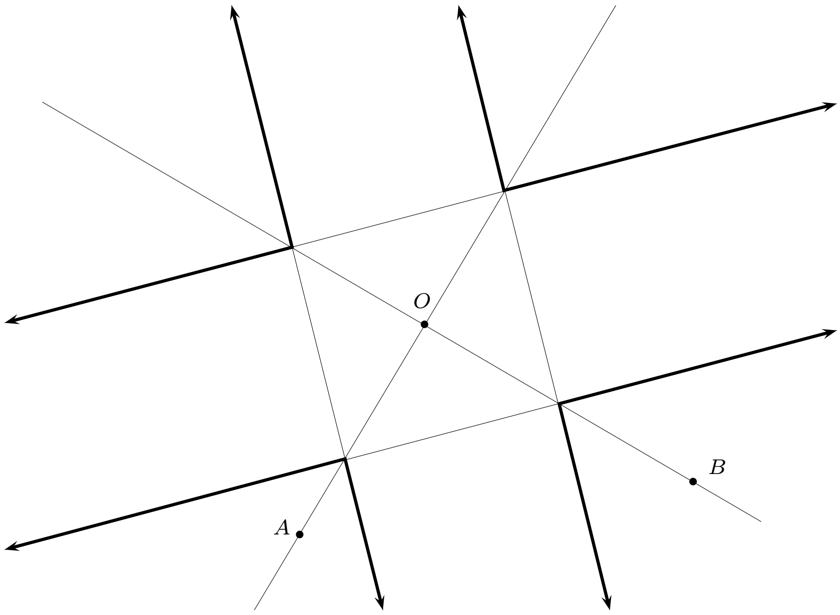


Análogamente a como se hizo en el ejercicio (resuelto) número 19, trazamos una paralela, $\overleftrightarrow{PQ}$, a $\overleftrightarrow{OA}$, a una distancia igual a k.

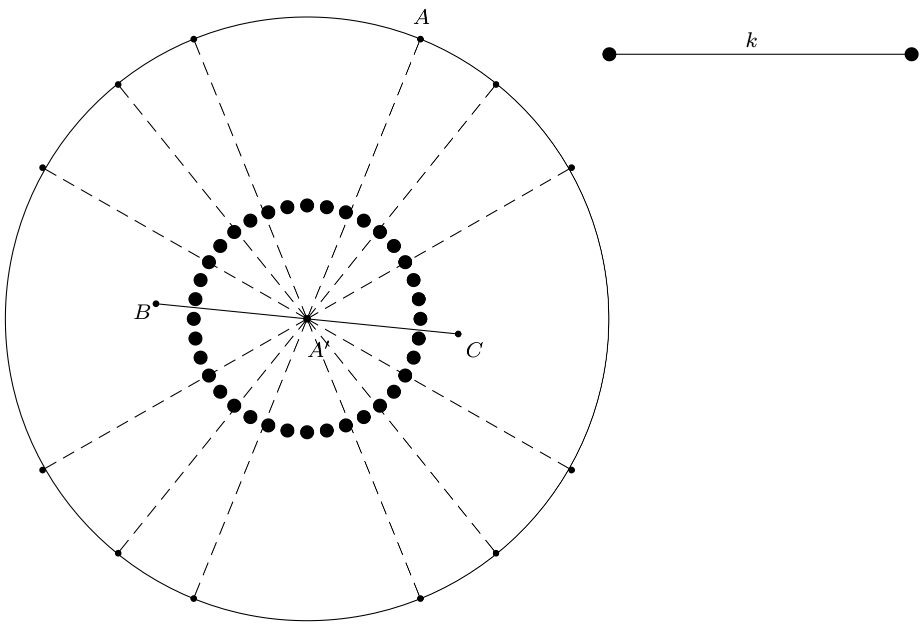
Sea C, la intersección de $\overleftrightarrow{PQ}$ con $\overleftrightarrow{OB}$.

Es sencillo verificar que los puntos de la bisectriz del $\widehat{PCB}$ cumplen la propiedad del enunciado.

Agotando las otras posibilidades de la escogencia de la paralela, a la distancia k, de una de las rectas dadas, el resultado final es que: el **L.G.** está constituido por 8 semirrectas, que están en las prolongaciones de los lados de un rectángulo, el cual tiene a O como punto de corte de sus diagonales.



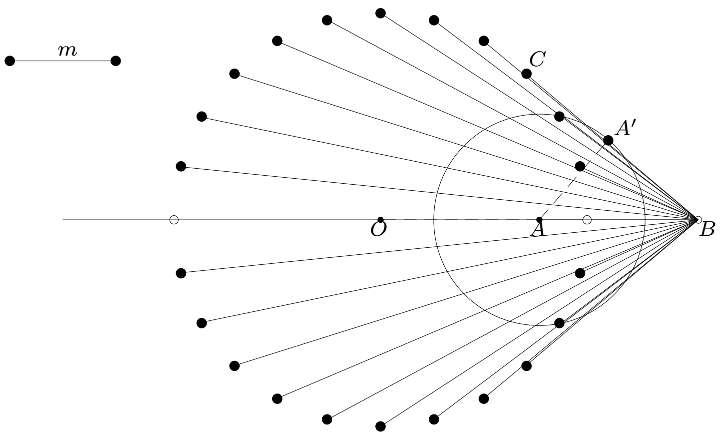
29)



El vértice A está en la $C(A'; k)$, donde A' es el punto medio de $\overline{BC}$.

Entonces, el **L.G.** es la $C\left(A'; \dfrac{k}{3}\right)$, exceptuando los puntos, de la misma, que están en $\overline{BC}$.

30)

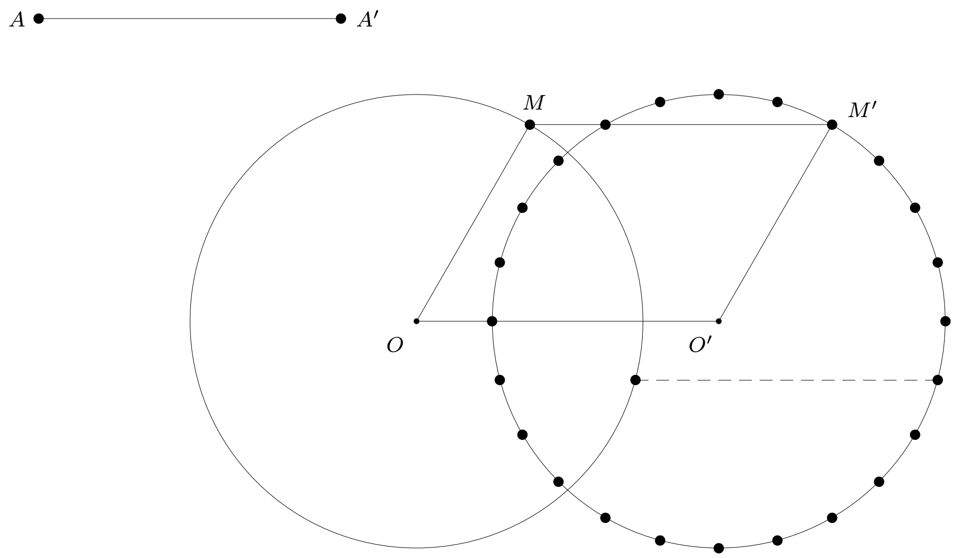


Si prolongamos $\overline{BA}$ hasta O, tal que $OA = AB$, resulta que: $OC = 2m$

(Aplicar al $\triangle OBC$, el corolario del T_7, Apéndice).

Así, el **L.G.** es la $C(O; 2m)$, exceptuando sus puntos que están en $\overleftrightarrow{AB}$.

31)



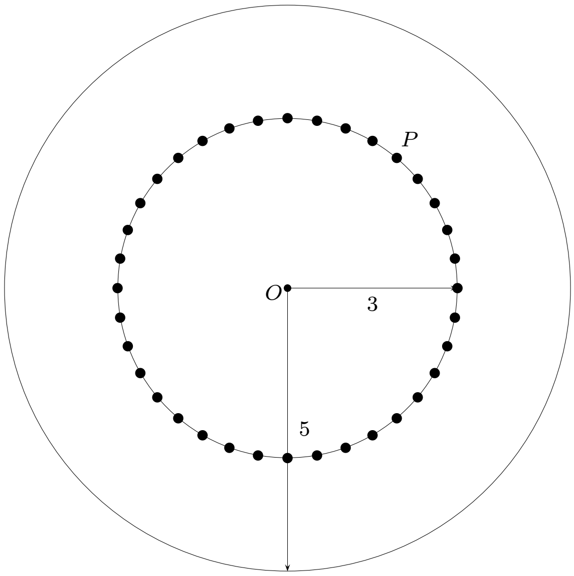
Trazamos $\overline{OO'}$, tal que $OO' = AA'$, $\overline{OO'} \parallel \overline{AA'}$ y $\overrightarrow{OO'}$ es del punto mismo sentido que $\overrightarrow{AA'}$.

Resulta que $OO'M'M$ es un paralelogramo

(Corolario del T_5, Apéndice)

El **L.G.** es la $C(O';r)$

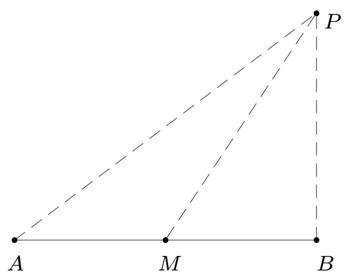
32)



Debe ser $\quad d^2 - 25 = -16.$

Luego el **L.G.** es la $C(O;3)$.

33)



Sea P tal que:

$$PA^2 + PB^2 = k^2;$$

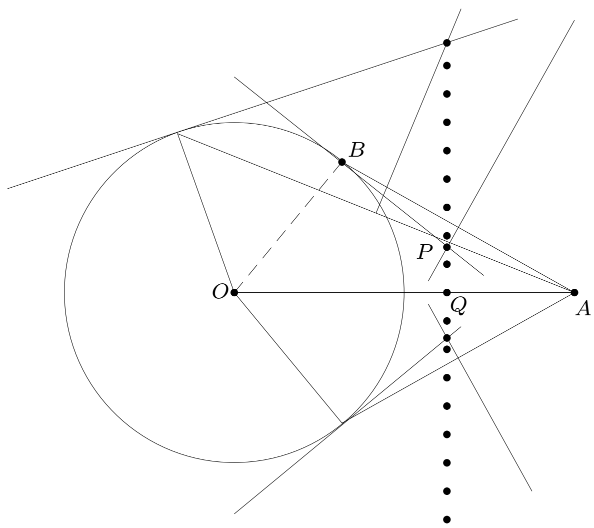
Aplicando T_{22} (Apéndice), a los triángulos AMP y MBP, y sumando, se tiene:

$PA^2 + PB^2 = 2PM^2 + \dfrac{AB^2}{2}$. $\qquad (*)$

Luego, $\quad PM = \sqrt{\dfrac{k^2}{2} - \dfrac{AB^2}{4}}$.

El recíproco es inmediato, usando $(*)$.

34)



Usando el Teorema de Pitágoras, tenemos:

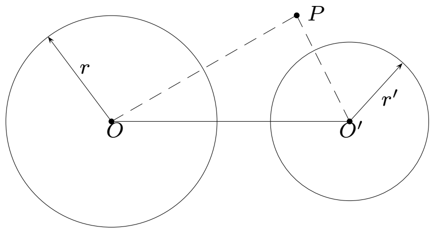
$$\boldsymbol{OP^2} - PA^2 = \boldsymbol{OB^2} + \boldsymbol{BP^2} - PA^2 = OB^2 = r^2.$$

Así que, usando el ejercicio 21, concluimos: El **L.G.** es la recta perpendicular a $\overline{OA}$, en el punto Q, tal que:

$$MQ = \frac{r^2}{2OA},$$

donde, M es el punto medio de $\overline{OA}$.

35)



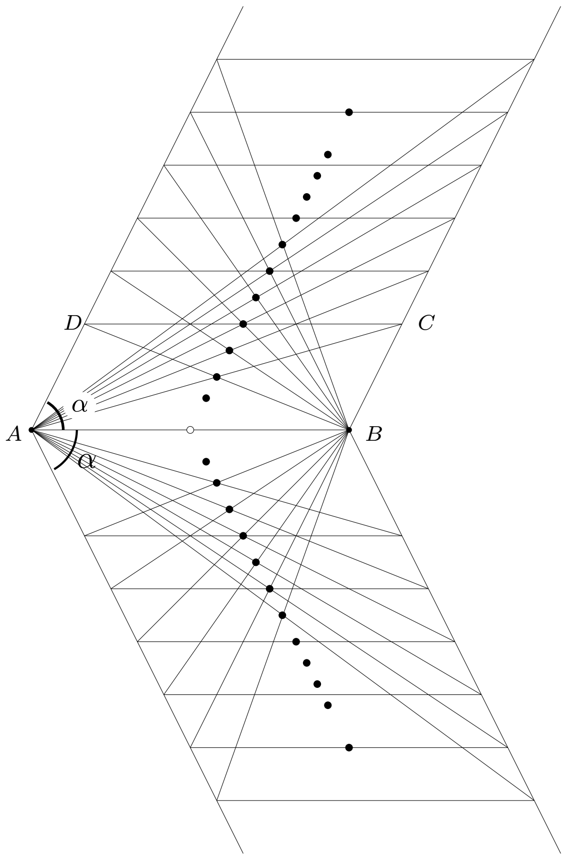
Supongamos (sin pérdida de generalidad) que $r > r'$.

Por hipótesis, tenemos:

$$OP^2 - r^2 = O'P^2 - r'^2.$$

Luego, $\quad OP^2 - O'P^2 = r^2 - r'^2$. Aplicando, entonces, el ejercicio 21, deducimos que el **L.G.** es una recta perpendicular a $\overline{OO'}$.

36)



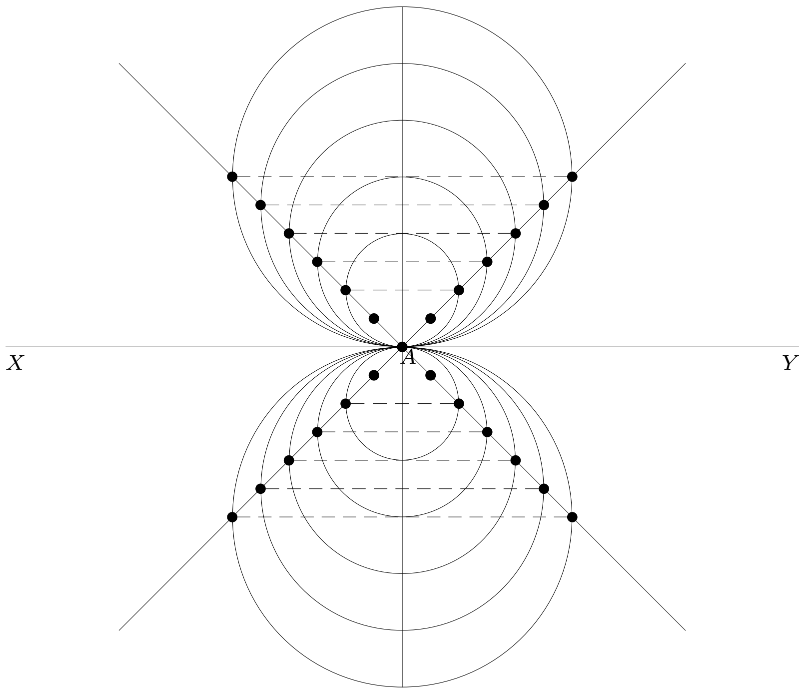
El **L.G.** está constituido por dos semirrectas cuyo origen es el punto medio de $\overline{AB}$ (excluyendo dicho origen), y que forman un ángulo de medida α, con $\overleftrightarrow{AB}$.

La prueba puede basarse en corolarios del T_7 (Apéndice) y el quinto postulado de Euclides.

37) i) Ver el ejemplo g.

La prueba se basa en la propiedad de perpendicularidad entre la tangente y el segmento que va del centro de la circunferencia al punto de tangencia.

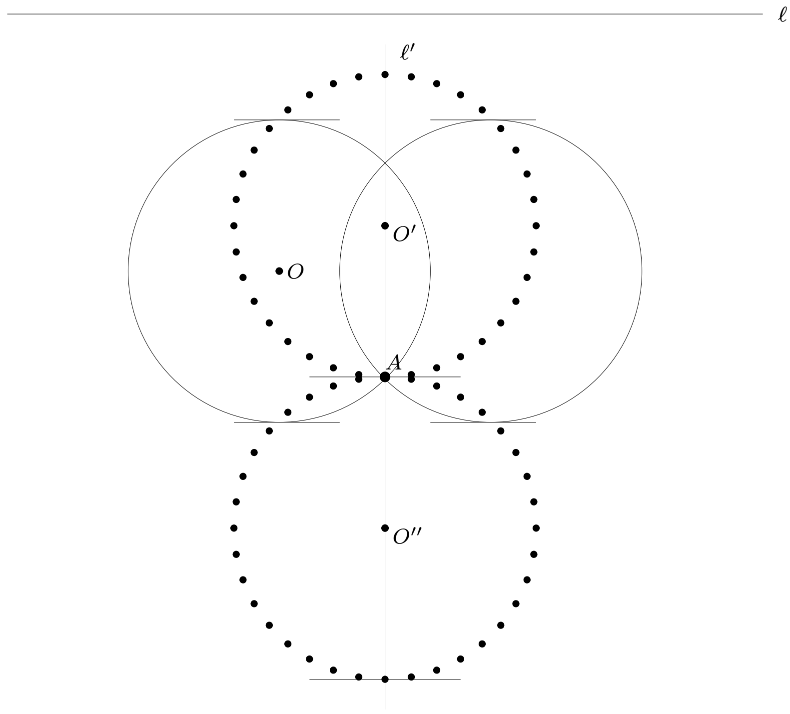
ii)



Usar la perpendicularidad de $\overleftrightarrow{XY}$ y l.

El **L.G.** está formado por las bisectrices de los ángulos entre la recta $\overleftrightarrow{XY}$ y su perpendicular por A (exceptuando el punto A mismo)

38)



$C(O;r)$: circunferencia dada; A, punto en la $C(O;r)$;

Por A, trazamos l', perpendicular a l.

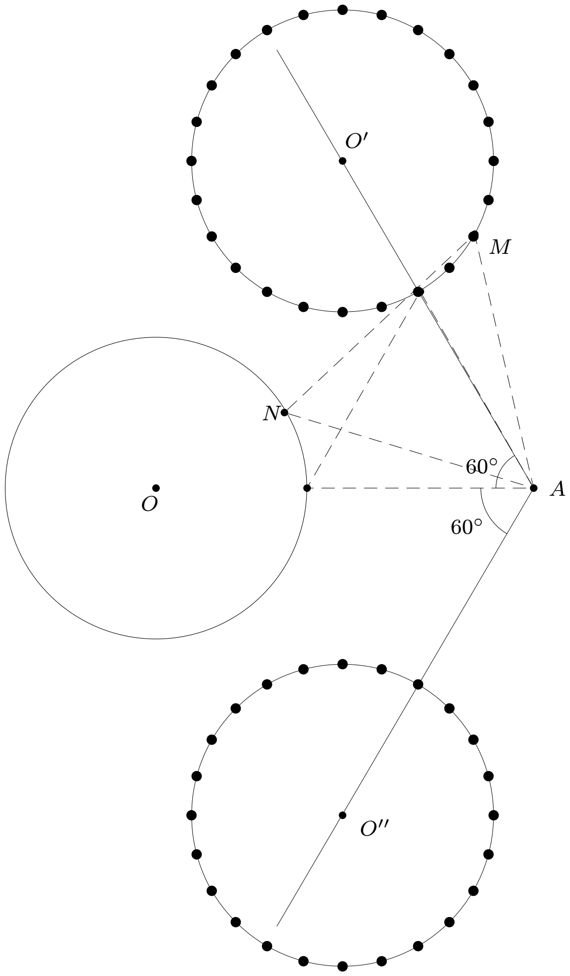
En l', tomamos O' y O'' tales que:

$AO' = AO'' = r$.

El **L.G.** es el conjunto de puntos de la $C(O';r)$, junto con los de la $C(O'';r)$.

En la prueba, nuevamente, es esencial usar la perpendicularidad del radio y la tangente, en el punto de contacto. También, usar algún teorema del T_5 (Apéndice).

39) Sea N en la $C(O;r)$.



L.G.: la unión de la $C(O';r)$ con la $C(O'';r)$, con O' y O'' como se especifica más adelante.

Trazamos $\overline{AM}$, tal que: $AM = AN$,

$\measuredangle NAM = 60°$ (en sentido horario)

Entonces: el $\triangle ANM$ resulta ser equilátero.

Al proceder análogamente, con cada punto de la $C(O;r)$, se obtiene una circunferencia de radio r y centro O', tal que

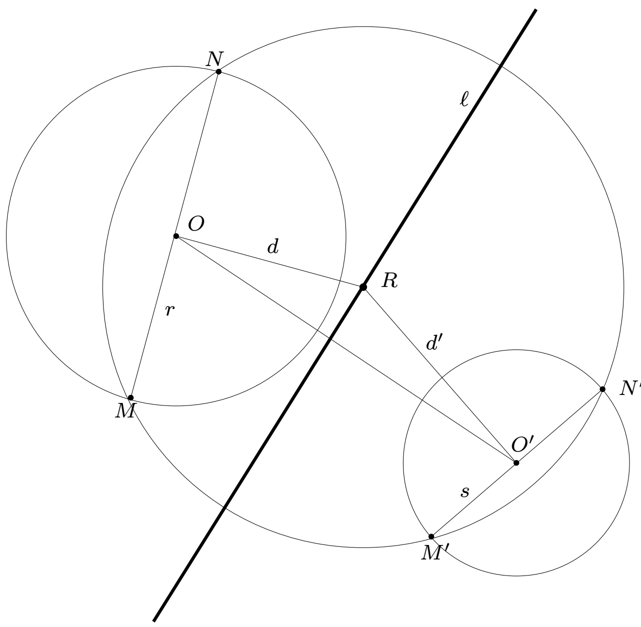
$\measuredangle OAO' = 60°$ (en el sentido horario) y $OA = AO'$.

Ahora, considerando $\measuredangle NAM = 60°$ (en sentido anti - horario), y procediendo en forma similar, resulta que M está en la $C(O'';r)$, tal que:

$\measuredangle OAO'' = 60°$ (en sentido anti - horario).

y $OA = AO''$.

40) $C(O;r)$, $C(O';s)$, dadas, con $r > s$.



Usando el corolario de T_4 (Apéndice), el Teorema de Pitágoras y el ejercicio 21, se vislumbra como **L.G.** a una recta perpendicular a $\overline{OO'}$.

Efectivamente, (ver figura):

$d^2 + r^2 = d'^2 + s^2$, o sea,

$d'^2 - d^2 = r^2 - s^2$.

Así que, una aplicación directa del ejercicio 21 nos dice que un punto R, con la propiedad enunciada, está en una recta, l, perpendicular a $\overline{OO'}$ (esto prueba la parte II)).

I) Sea R un punto de l.

Sabemos que $\quad d'^2 - d^2 = r^2 - s^2,$

o sea, $\quad d'^2 + s^2 = d^2 + r^2 \qquad (*).$

Por O tracemos la cuerda $\overline{MN}$, perpendicular a $\overline{OR}$.

Mientras que por O', trazamos la cuerda $\overline{M'N'}$, perpendicular a $\overline{O'R}$.

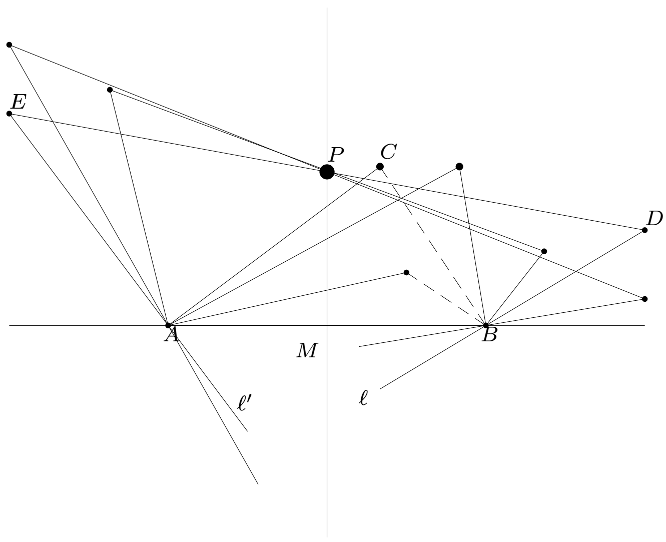
En realidad, $\overline{MN}$ y $\overline{M'N'}$ son diámetros de $C(O;r)$ y $C(O';s)$, respectivamente. Además, por T_4 (Apéndice), se cumple:

$MR = NR \qquad$ y $\qquad M'R = N'R.$

Pero, por $(*)$, se sigue. $\quad M'R = MR.$

Conclusión: R posee la propiedad de ser el centro de una circunferencia que corta a las dadas, en puntos diametralmente opuestos.

41)

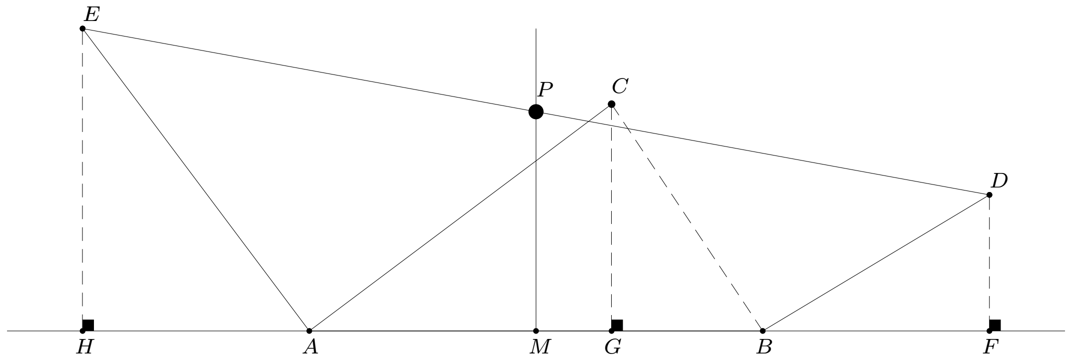


El **L.G.** consiste de un solo punto P, el cual está en el mismo semiplano respecto a $\overleftrightarrow{AB}$ en el cual ha variado C. Además, si M es el punto de $\overline{AB}$, se cumple:

$\overline{PM} \perp \overline{AB}$ y $PM = \dfrac{AB}{2}$.

Para la prueba de $I)$, tomar como punto de partida del proceso, o sea, C, el propio P.

Para la parte $II)$, considerar la siguiente figura:



Resulta que:

$\triangle BGC \cong \triangle BFD$

$(T_4$, Apéndice)

$\triangle AGC \cong \triangle AHE$

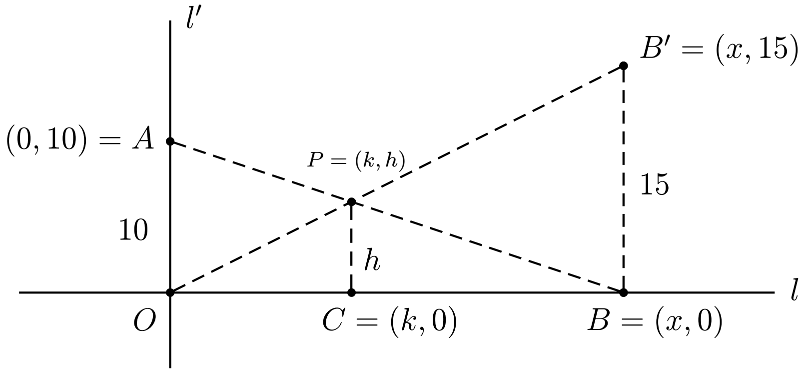
En particular, $FD = GB$; $AG = EH$.

Pero, $PM = \dfrac{EH + FD}{2}$ $(T_{23}$, Apéndice, teorema 1).

Luego, $PM = \dfrac{AG + GB}{2} = \dfrac{AB}{2}$.

También, $\overline{PM} \perp \overline{AB}$ $(T_{23}$, Apéndice, teorema 1).

42)



De la semejanza de los triángulos OCP y OBB', obtenemos:

$$\frac{15}{h} = \frac{x}{k} \tag{1}$$

Análogamente, como el $\triangle AOB$ es semejante al $\triangle PCB$, se sigue:

$$\frac{10}{h} = \frac{x}{x-k} \tag{2}$$

Ahora bien, de (**??**) se consigue:

$$\frac{15}{15-h} = \frac{x}{x-k} \tag{3}$$

Luego, de (**??**) y (**??**) se deduce:

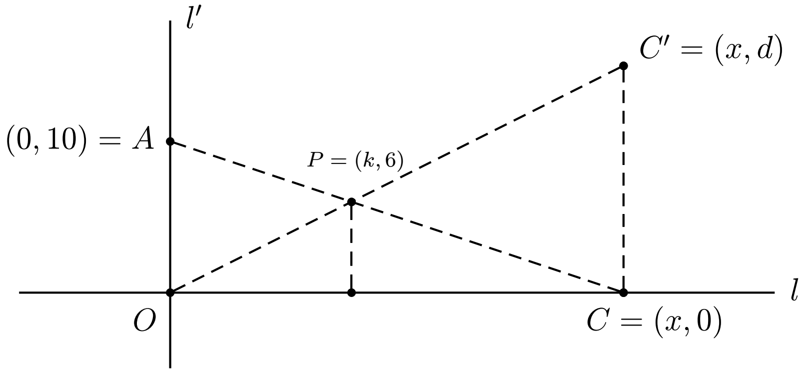
$$\frac{15}{15-h} = \frac{10}{h} \tag{4}$$

Resolviendo (**??**) se llega a:

$$h = 6.$$

En forma similar, dados: $A = (0, 10)$, $P = (k, 6)$, con $k \neq 0$, sea $C = (x, 0)$, la intersección de la recta $\overleftrightarrow{AP}$ con la recta l.

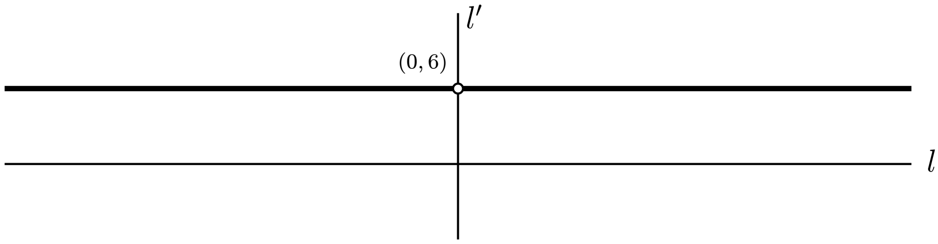
Consideremos, además, $C' = (x, d)$, la intersección de la recta $\overleftrightarrow{OP}$ con la perpendicular a l por C.



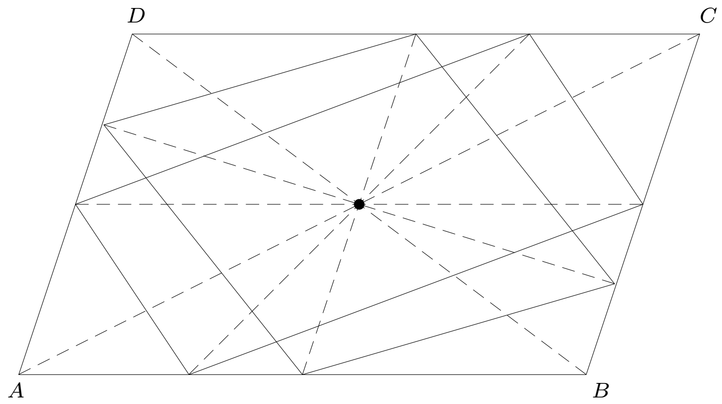
Obtenemos, procediendo como antes, que:

$$d = 15 \qquad \text{y} \qquad x = \frac{5}{2}k.$$

Conclusión: el **L.G.** es **la recta paralela a** l y que pasa por $(0, 6)$, quitándole precisamente, el punto $(0, 6)$.

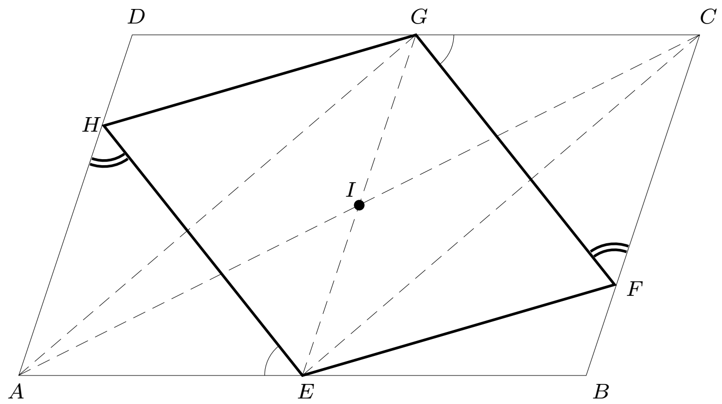


43)



El **L.G.** es el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo $ABCD$, dado.

En efecto, sea $EFGH$, paralelogramo inscrito en el paralelogramo $ABCD$.



Trazamos: $\overline{AC}$, $\overline{AG}$, $\overline{EC}$, $\overline{GE}$.

Llamemos I, al punto de intersección de $\overline{GE}$ con $\overline{AC}$.

Resulta:

$\triangle GFC \cong \triangle AEH$ (T_5 y T_3, Apéndice).

En particular, $AE = GC$.

Entonces, se sigue:

$\triangle AEI \cong \triangle GIC.$ (T_5 y T_3, Apéndice).

Así, $AI = IC$ y $GI = IE$.

Luego, I es el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo $EFGH$ y también, el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo $ABCD$.

La parte II) de la prueba es lo que acabamos de hacer. Para la parte I): sea I el punto medio de $\overline{AC}$; elijamos un punto H, entre A y D. Tracemos, por H, **la paralela** a $\overleftrightarrow{AC}$.

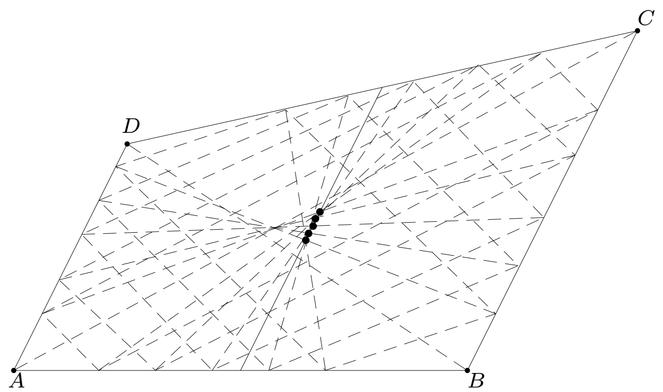
Llamando G a su punto de corte con $\overline{DC}$, prolongamos $\overline{GI}$ hasta E en $\overline{AB}$.

También, prolongamos $\overline{HI}$ hasta F, en $\overline{BC}$.

Enseguida se demuestra que $HEFG$ es un paralelogramo cuyo punto de corte de sus diagonales coincide con el punto I.

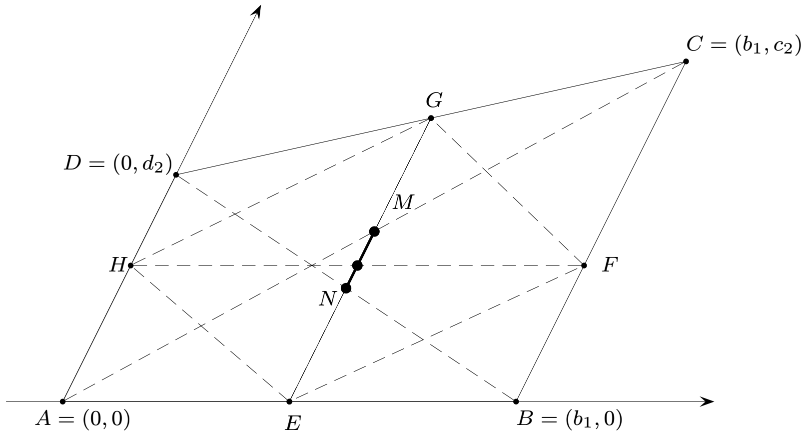
(Comparar los triángulos: AHI y IFC; Luego, HGD y IEB. Finalmente, HGI y EFI).

44)



El **L.G.** es un segmento de recta.

Elegimos un sistema de coordenadas (no necesariamente, cartesianas), con origen en A; eje de las primeras coordenadas: $\overleftrightarrow{AB}$; eje de las segundas: $\overleftrightarrow{AD}$.



Sea $EFGH$, un paralelogramo inscrito en el trapecio $ABCD$.

Tenemos:

$H = (0, \lambda d_2)$, para algún $0 < \lambda < 1$.

$E = (\mu b_1, 0)$, para algún $0 < \mu < 1$.

$G = (1-t)(0, d_2) + t(b_1, c_2)$, para algún $0 < t < 1$.

Es decir, $G = (tb_1, d_2 - td_2 + tc_2)$.

$F = (1-\theta)(b_1, c_2) + \theta(b_1, 0)$, para algún $0 < \theta < 1$.

O sea, $F = (b_1, c_2 - \theta c_2)$.

Como $EFGH$ es paralelogramo, obtenemos: punto medio de

$\overline{HF} =$ punto medio de $\overline{GE}$.

Luego,

$$\left(\frac{b_1}{2}, \frac{\lambda d_2 + c_2 - \theta c_2}{2}\right) = \left(\frac{\mu b_1 + tb_1}{2}, \frac{d_2 - td_2 + tc_2}{2}\right).$$

Así, la primera coordenada del punto de intersección de las diagonales de $EFGH$ es:

$$\frac{b_1}{2} \qquad (*).$$

La segunda coordenada, del mismo punto, es:

$$(1-t)\frac{d_2}{2}+t\cdot\frac{c_2}{2} \qquad (**).$$

Por otro lado, el punto medio de $\overline{AC}$ es:

$$M=\left(\frac{b_1}{2},\frac{c_2}{2}\right).$$

Mientras que, el punto medio de $\overline{BD}$ es:

$$N=\left(\frac{b_1}{2},\frac{d_2}{2}\right).$$

De manera que, cada punto del **L.G.** está en el segmento de extremos M y N.

(Usar $(*)$ y $(**)$)

Recíprocamente, si P es un punto del segmento $\overline{NM}$, con $P\neq N$ y $P\neq M$, entonces, existe $0<t<1$, tal que:

$$P=\left(\frac{b_1}{2},\frac{(1-t)d_2}{2}+\frac{tc_2}{2}\right).$$

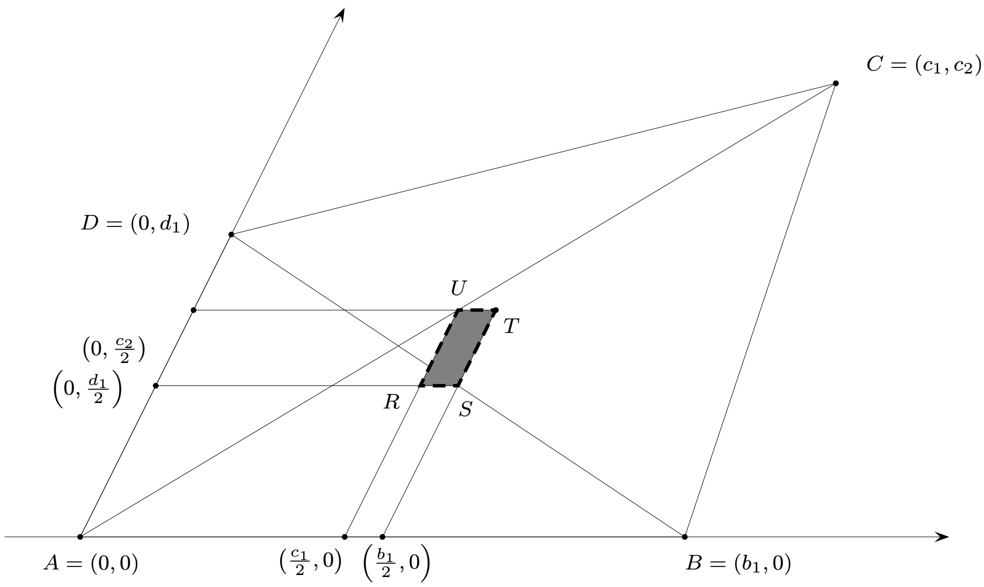
Tomando $\quad \mu=\lambda=\theta=1-t$,

es sencillo verificar que $EFGH$ es un paralelogramo, inscrito en el trapecio $ABCD$, y con el punto de corte de sus diagonales coincidente con P, donde,

$E=(\mu b_1,0)$, $\qquad F=(b_1,c_2-\theta c_2)$,

$G=(tb_1,d_2-td_2+tc_2)$, $\qquad H=(0,\lambda d_2)$.

45) En este caso general, sugerimos emplear un método análogo al usado en el ejercicio 43. El **L.G.** que se obtiene es una región del plano.



El **L.G.** es la región limitada por el paralelogramo $RSTU$ (no incluye los lados del mismo).

$$U \quad \text{es el punto medio de} \quad \overline{AC},$$

$$S \quad \text{es el punto medio de} \quad \overline{DB},$$

$$\overline{RU} \quad \text{y} \quad \overline{ST} \quad \text{son paralelos a} \quad \overline{AD},$$

$$\overline{UT} \quad \text{y} \quad \overline{RS} \quad \text{son paralelos a} \quad \overline{AB}.$$

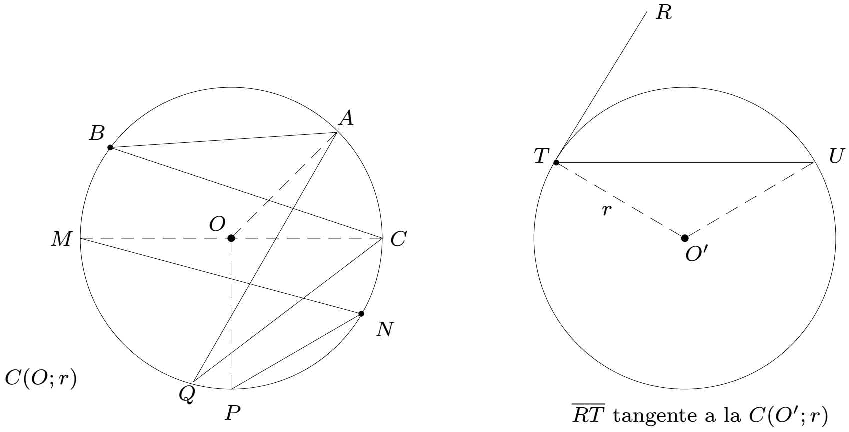
Capítulo 4

Apéndice

T_1. Teorema del ángulo Inscrito.

Definición: dada una circunferencia, todo ángulo cuyo vértice pertenece a dicha circunferencia y cuyos lados son cuerdas, es llamado ángulo **inscrito.**

Si uno de los lados es tangente a la circunferencia, mientras que el otro es una cuerda, el ángulo (con vértice en la circunferencia) es denominado **semi - inscrito.**



$\widehat{ABC}$, $\widehat{AQC}$ y $\widehat{MNP}$ son ángulos inscritos.

$\widehat{RTU}$ es un ángulo semi - inscrito.

A cada ángulo inscrito (respectivamente, semi - inscrito) le corresponde un **ángulo central.**

En los ejemplos indicados en la figura, tenemos:

$\widehat{AOC}$ es el ángulo central correspondiente al $\widehat{ABC}$.

$\widehat{MOP}$ es el ángulo central correspondiente al $\widehat{MNP}$.

$\widehat{TO'U}$ es el ángulo central del $\widehat{RTU}$.

Notar que al $\widehat{AQC}$ le corresponde el mismo ángulo central que al $\widehat{ABC}$.

Teorema: La medida de un ángulo inscrito (respectivamente, semi - inscrito) es igual a la mitad de la de su ángulo central correspondiente.

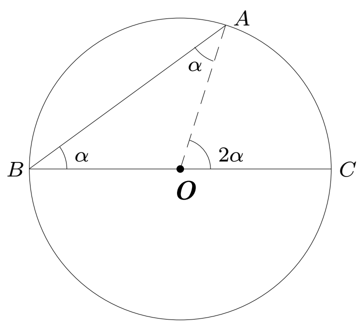
Así, refiriéndonos a los ejemplos citados, se tiene:

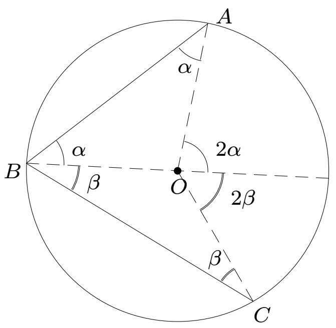
$\measuredangle ABC = \measuredangle AQC = \dfrac{\measuredangle AOC}{2}$.

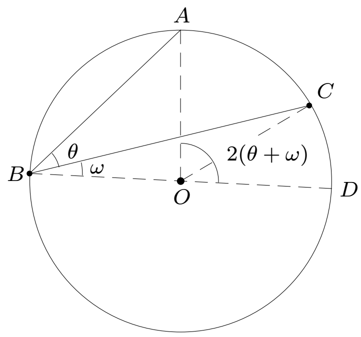
$\measuredangle MNP = \dfrac{\measuredangle MOP}{2}$.

$\measuredangle RTU = \dfrac{\measuredangle TO'U}{2}$.

La demostración del Teorema se realiza por casos:



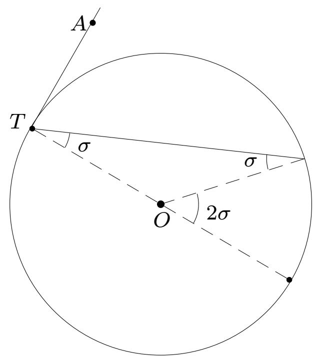




$\measuredangle COD = 2\omega$.

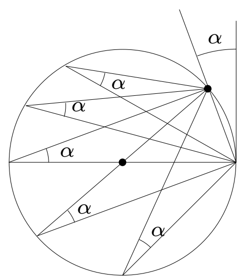
Luego, $\measuredangle AOC = 2\theta$.

Así, $\measuredangle ABC = \dfrac{\measuredangle AOC}{2}$.



$$\overline{AT} \perp \overline{OT}, \;\; \measuredangle TOC = 180^\circ - 2\sigma, \;\; \measuredangle ATC = 90^\circ - \sigma, \;\; o\ sea, \quad \measuredangle ATC = \frac{\measuredangle TOC}{2}.$$

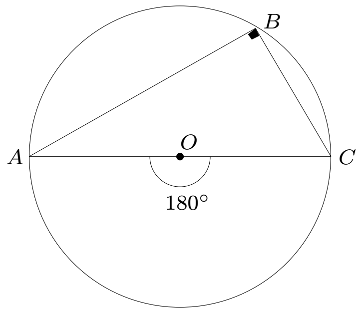
En particular, todos los ángulos inscritos o semi - inscritos, en una circunferencia dada, que " abarcan"el mismo arco, miden lo mismo.



T_2. **Caso de ángulos inscritos en una semicircunferencia.**

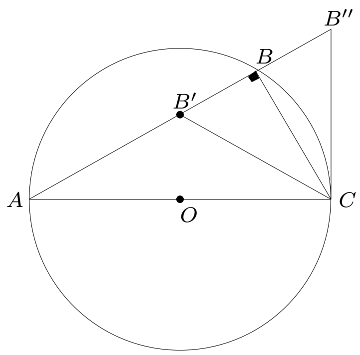
Teorema: Si $\widehat{ABC}$ es ángulo inscrito que "abarca" una semicircunferencia, entonces $\measuredangle ABC = 90°$.

Justificación: el ángulo central correspondiente mide 180°.



Observación: Si tomamos un punto B', en el interior de $\overline{AB}$, resulta que $\measuredangle AB'C > 90°$.

Mientras que si B'' está $\overleftrightarrow{AB}$ y B queda entre A y B'', se tiene: $\measuredangle AB''C < 90°$.



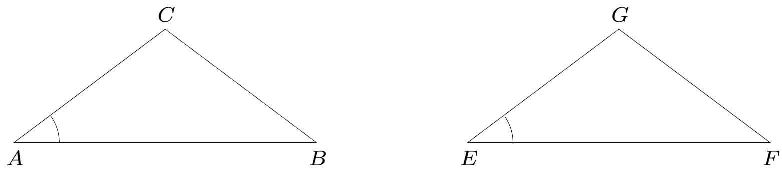
La razón de ello puede darse a través de T_6 (más adelante).

T_3. **Criterios de Congruencia de triángulos.**

Primer criterio: Dados los triángulos ABC y EFG, si $AB = EF$, $AC = EG$, y $\measuredangle BAC = \measuredangle FEG$, entonces: $\triangle ABC \cong \triangle EFG$.

Es decir, $AB = EF$, $AC = EG$, $BC = FG$, $\measuredangle BAC = \measuredangle FEG$, $\measuredangle ACB = \measuredangle EGF$, $\measuredangle ABC = \measuredangle EFG$.

Este criterio es conocido como LAL (lado - ángulo - lado).



Segundo criterio: Dados los triángulos ABC y EFG, si

$AB = EF$, $\measuredangle BAC = \measuredangle FEG$ y $\measuredangle ABC = \measuredangle EFG$,

entonces: $\triangle ABC \cong \triangle EFG$.

Este es el conocido criterio ALA (ángulo - lado - ángulo).

Tercer criterio: Sean los triángulos ABC y EFG, tales que:

$AB = EF$, $AC = EG$ y $BC = FG$.

Entonces, $\triangle ABC \cong \triangle EFG$.

Este es el criterio LLL (lado - lado - lado).

T_4. **Congruencia de triángulos rectángulos.**

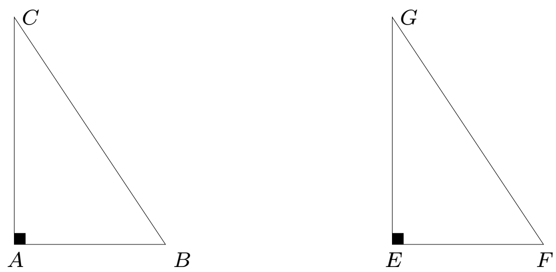
En un triángulo rectángulo, si conocemos uno de los ángulos agudos podemos hallar el otro (su complementario). También, conocidos dos de los lados es posible hallar el tercero (aplicando el Teorema de Pitágoras).

Por lo dicho, los criterios de congruencia, en el caso de triángulos rectángulos, son más sencillos.

Primer criterio: Dados los triángulos ABC (con $\measuredangle BAC = 90°$) y EFG (con $\measuredangle FEG = 90°$), si

$AB = EF$ y $AC = EG$,

entonces: $\triangle ABC \cong \triangle EFG$.



Segundo criterio: Dados los triángulos ABC (con ángulo recto en A) y EFG (con ángulo recto en E), si

$AB = EF$ y $\measuredangle ABC = \measuredangle EFG$,

entonces: $\triangle ABC \cong \triangle EFG$.

(Hay más posibilidades de presentar este segundo criterio. Lo que se exige en él, es que los triángulos tengan, respectivamente, "iguales": un lado y un ángulo agudo).

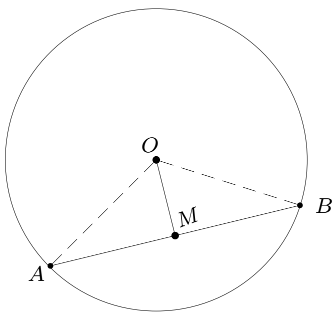
Tercer criterio: Dados los triángulos rectángulos ABC y EFG, si hay dos lados, en uno de ellos, respectivamente "iguales" a dos lados en el otro, entonces:

$$\triangle ABC \cong \triangle EFG.$$

Aplicación: Sea la $C(O; r)$.

Consideremos la cuerda $\overline{AB}$, tal que $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ (M punto de $\overline{AB}$).

Entonces, M es el punto medio de $\overline{AB}$.



En efecto, comparemos los triángulos rectángulos AMO y BMO.

Tienen: $OA = OB = r$.

$\overline{OM}$, lado común.

Así, por el Tercer Criterio, resulta: $\triangle AMO \cong \triangle BMO$.

En particular, $AM = MB$.

El recíproco también es cierto:

Sea la $C(O; r)$. En ella, consideremos la cuerda $\overline{AB}$, con M como su punto medio.

Entonces, $\overline{OM} \perp \overline{AB}$.

Efectivamente, comparando los triángulos AMO y BMO, se tiene:

$OA = OB = r$.

$\overline{OM}$, lado común.

$AM = MB$ (hipótesis).

Luego, por el Tercer Criterio (general), se sigue que:

$\triangle AMO \cong \triangle BMO$.

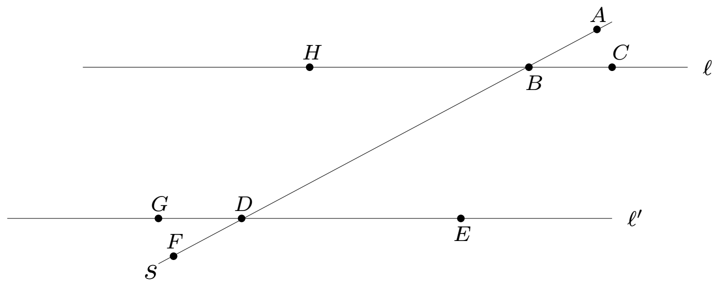
En particular, $\measuredangle AMO = \measuredangle BMO$.

Además, como $\widehat{AMO}$ y $\widehat{BMO}$ son adyacentes, se concluye que:

$\measuredangle AMO = \measuredangle BMO = 90°$.

Es decir, $\overline{OM} \perp \overline{AB}$.

T_5. **Ángulos entre paralelas.**



En un plano, sean las rectas l y l', cortadas por s.

$\widehat{HBD}$ y $\widehat{BDE}$ son llamados alternos internos.

Análogamente, $\widehat{GDB}$ y $\widehat{DBC}$.

$\widehat{ABC}$ y $\widehat{BDE}$ son denominados correspondientes.

Similarmente, $\widehat{DBC}$ y $\widehat{FDE}$.

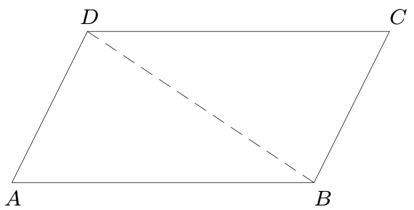
Tenemos:

1) $\measuredangle HBD = \measuredangle BDE$ si, y sólo si, $l \parallel l'$.

2) $\measuredangle ABC = \measuredangle BDE$ si, y sólo si, $l \parallel l'$.

Definición: un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.

Teorema 1: En un paralelogramo, lados y ángulos opuestos son congruentes.

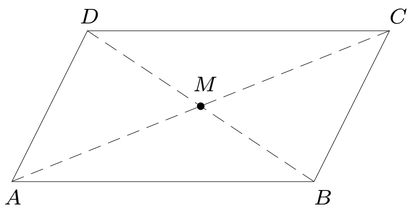


Basta comparar los triángulos ABD y DBC.

$AD = BC, \qquad DC = AB,$

$\measuredangle BAD = \measuredangle DCB, \qquad \measuredangle ADC = \measuredangle ABC.$

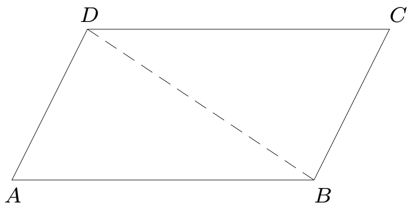
Teorema 2: Las diagonales de un paralelogramo se intersectan en un punto que es el punto medio de cada una de ellas.



Comparar los triángulos AMD y MBC.

También, ABM y DMC.

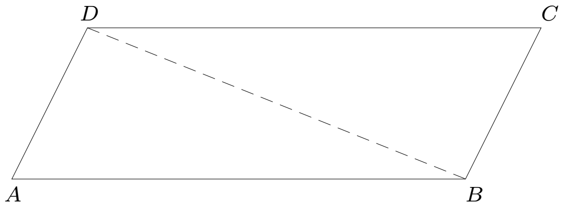
Teorema 3: Si los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.



$AB = DC, \quad AD = BC.$

Comparar los triángulos ABD y DBC.

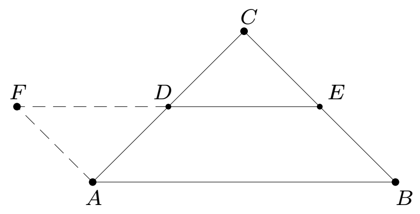
Teorema 4: Si dos lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes y paralelos, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.



$AB = DC, \quad \overline{AB} \parallel \overline{DC}.$

Comparar los triángulos $\quad ABD \quad$ y $\quad DBC$ (Usar 1) de T_5).

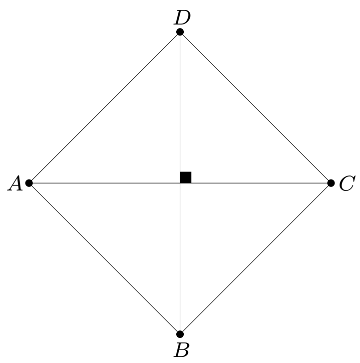
Teorema 5: El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulos es paralelo al **tercer lado** y tiene la mitad **de** su longitud.



Prolongar $\quad \overline{ED}$ hasta F, tal que:

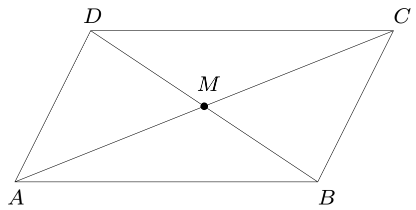
$FD = DE.$

Teorema 6: Un paralelogramo es un **rombo** (todos los lados son congruentes) si, y sólo si, sus diagonales son perpendiculares.



Terorema 7: En un plano,sea $ABCD$ un cuadrilátero, tal que, el punto medio de $\overline{DB}$ coincide con el punto medio de $\overline{AC}$.

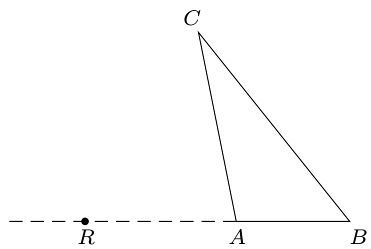
Entonces, $\quad ABCD \quad$ es un paralelogramo.



Comparar los triángulos AMD y MBC.

T_6. **Teorema del Ángulo Externo.**

Dado el triángulo ABC, los ángulos: $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$ y $\widehat{ACB}$, son llamados: ángulos internos del triángulo.



Un ángulo como el $\widehat{RAC}$ es llamado **ángulo externo** del triángulo ABC.

Sus lados son: un lado del triángulo dado y la prolongación de otro lado del mismo triángulo.

Teorema: La medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos que no le son adyacentes.

Refiriéndonos a la figura anterior, por ejemplo,

$\measuredangle RAC = \measuredangle ACB + \measuredangle ABC$ $\qquad (*)$.

La demostración es muy breve:

$\measuredangle RAC + \measuredangle CAB = 180°$. (ángulo adyacentes).

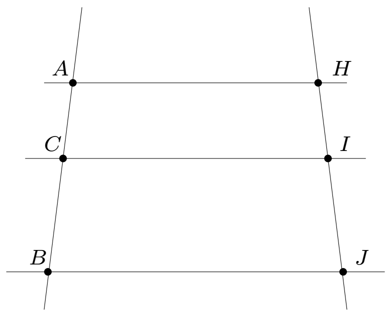
$\measuredangle CAB + \measuredangle ACB + \measuredangle ABC = 180°$ (suma de los ángulo internos de un triángulo).

Luego, restando miembro a miembro, se sigue $(*)$.

T_7. **Teorema de Tales. Semejanza de triángulos**

Teorema de Tales: (Primera forma).

Tres o más rectas paralelas cortadas por otras dos rectas cualesquiera, determinan en éstas, segmentos proporcionales.



$\overline{AH} \parallel \overline{CI} \parallel \overline{BJ}$.

Entonces: $$\frac{AC}{CB} = \frac{HI}{IJ}. \qquad (*).$$

Teorema de Tales: (Segunda forma).

Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos rectas secantes, dos segmentos cualesquiera determinados en una de las secantes, son entre sí, como los dos segmentos correspondientes determinados en la otra secante.

Refiriéndonos a la figura anterior:

$$\frac{AB}{CB} = \frac{HJ}{IJ} \qquad (**).$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{HJ}{HI} \qquad (***).$$

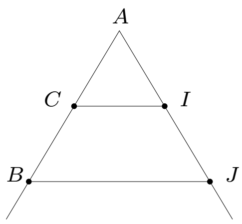
$(**)$ y $(***)$ pueden obtenerse a partir de $(*)$, por medio de una manipulación algebráica (composición de proporciones).

Análogamente, alternando los medios, en la proporción $(*)$ se llega a la tercera forma del Teorema de Tales:

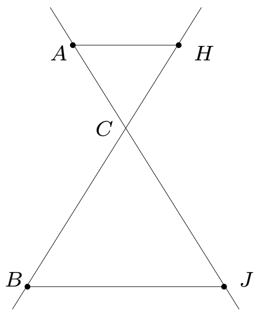
$$\frac{AC}{HI} = \frac{CB}{IJ} \qquad (****).$$

Al hacer referencia a un ángulo, el Teorema de Tales dice:

Si los lados de un ángulo, o sus prolongaciones más allá del vértice, son cortados por dos paralelas, dos segmentos cualesquiera determinados por ellas en uno de los lados, son entre sí como los dos segmentos correspondientes determinados en el otro.



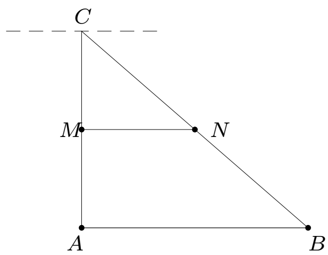
$$\frac{AC}{CB} = \frac{AI}{IJ}$$



$$\frac{BC}{CH} = \frac{JC}{CA}$$

El Teorema de Tales aplicado a un triángulo, dice:

Toda paralela a un lado de un triángulo determina, en los otros dos lados, segmentos proporcionales.



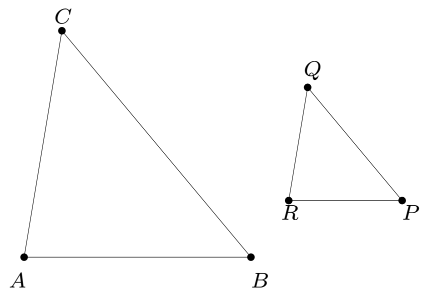
$\overline{MN} \parallel \overline{AB}$

$$\frac{CM}{MA} = \frac{CN}{NB}$$

Teorema: (Recíproco): Toda recta que determina segmentos proporcionales en dos lados de un triángulo, es paralela al tercer lado.

Definición: Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos respectivamente iguales, y sus lados **homólogos** proporcionales.

Lados homólogos son los que se oponen a un ángulos iguales.



$$\measuredangle ACB = \measuredangle RQP$$

$$\measuredangle CAB = \measuredangle QRP$$

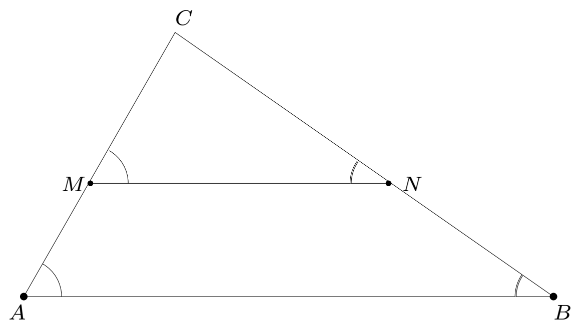
$$\measuredangle CBA = \measuredangle QPR$$

$$\frac{AB}{RP} = \frac{BC}{PQ} = \frac{AC}{RQ}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle RPQ$$

Usando el teorema de Tales y T_5, se prueba el siguiente:

Teorema: Toda paralela a un lado de un triángulo determina un segundo triángulo, semejante al primero.

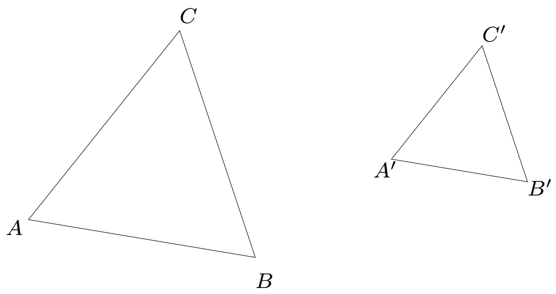


$$\overline{MN} \parallel \overline{AB}$$

$$\triangle MNC \sim \triangle ABC.$$

Casos de Semejanza de triángulos.

Primer caso: dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos, respectivamente, iguales.



$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$$

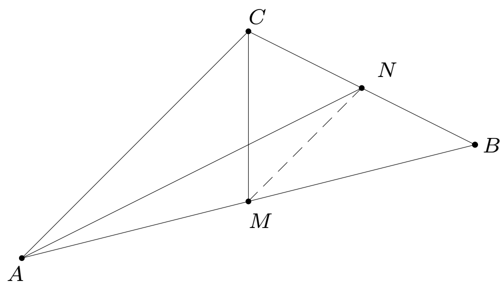
$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

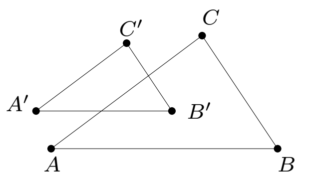
Corolario 1: Dos triángulos rectángulos son semejantes si un ángulo agudo de uno de ellos es igual a un ángulo del otro.

Corolario 2: Dos triángulos isósceles son semejantes cuando tienen, respectivamente, iguales: el ángulo del vértice o uno de los ángulos basales.

Corolario 3: Las medianas de un triángulo, se cortan en un mismo punto, que divide a cada mediana en la razón 1:2.



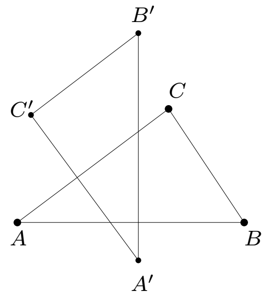
Corolario 4: Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus lados respectivamente paralelos o perpendiculares.



$$\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$$

$$\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$$

$$\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$$

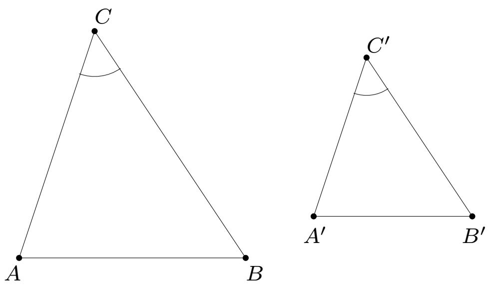


$$\overline{AB} \perp \overline{A'B'}$$

$$\overline{BC} \perp \overline{B'C'}$$

$$\overline{AC} \perp \overline{A'C'}$$

Segundo caso: Dos triángulos son semejantes si tienen sendos ángulos, respectivamente, iguales, comprendidos entre lados proporcionales.



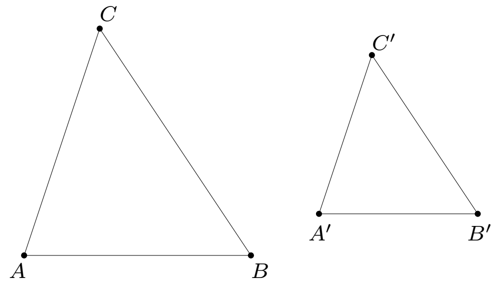
$$\measuredangle ACB = \measuredangle A'C'B'$$

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Corolario: dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen los catetos, respectivamente, proporcionales.

Tercer caso: Dos triángulos son semejantes si tienen los tres lados, respectivamente, proporcionales.



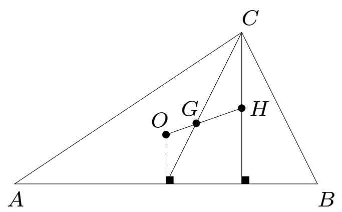
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Observación: En triángulos semejantes, a ángulos, respectivamente, iguales se oponen lados, respectivamente, proporcionales y, a lados, respectivamente, proporcionales, se oponen ángulos, respectivamente, iguales.

T_8. **Teorema:** Si un triángulo ABC no es equilátero, su circuncentro O, su baricentro G y su ortocentro H se encuentran en una recta (llamada recta de Euler). Además, $GH = 2OG$.

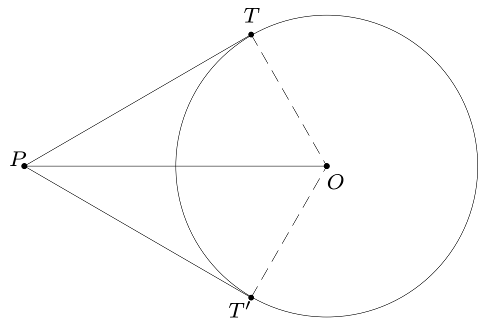
(Ver, Coxeter, Fundamentos de Geometría, página 40, 2a edición, editorial Limusa - Wiley, S.A).



T_9. En un plano, es dada la $C(O;r)$ y un punto P, tal que $PO > r$.

Desde P se trazan $\overline{PT}$ y $\overline{PT'}$, tangentes a la $C(O;r)$ en T y T', respectivamente.

Entonces: $PT = PT'$.

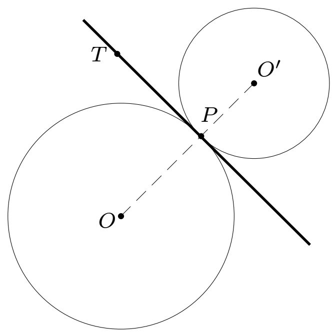


Comparando los triángulos rectángulos PTO y $PT'O$, resulta:

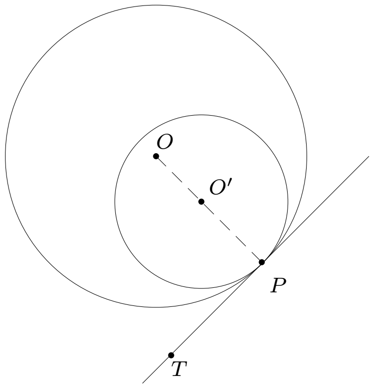
$$\triangle PTO \cong \triangle PT'O \qquad\qquad (T_4, \text{3er criterio}).$$

En particular: $\quad PT = PT'$.

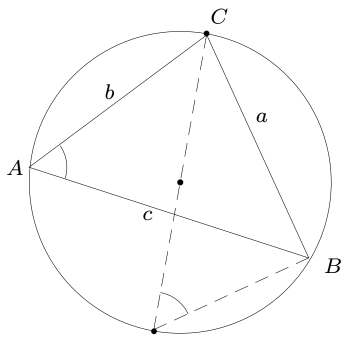
T_{10}. **Teorema:** En un plano son dadas las circunferencias $C(O; r)$ y $C(O'; r)$, tangentes en P. Entonces, O, P y O' están alineados (En consecuencia, la recta tangente (común) $\overleftrightarrow{PT}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{OO'}$).



Usar el hecho: en un plano, por cada punto de una recta pasa una, y sólo una, perpendicular a ella.

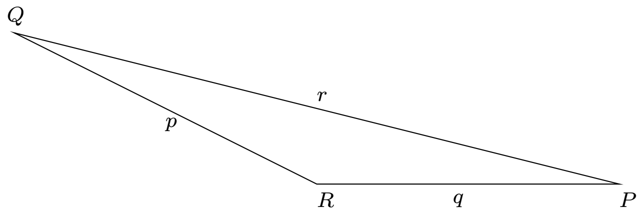


T_{11}. **Teorema del seno.** Los lados de un triángulo son, respectivamente, proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.



$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}$$

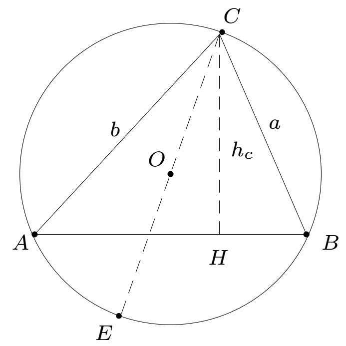
Como $\operatorname{sen}\widehat{A} = \dfrac{a}{2r}$, todas las razones anteriores valen $2r$.



$$\frac{r}{\operatorname{sen}\widehat{R}} = \frac{p}{\operatorname{sen}\widehat{P}} = \frac{q}{\operatorname{sen}\widehat{Q}}$$

T_{12}. Sea ABC un triángulo y $C(O;r)$ su circunferencia circunscrita.

Entonces, el producto de dos lados del triángulo es equivalente al producto de la altura (correspondiente al tercer lado) por $2r$.



Trazando $\overline{CE}$ y $\overline{AE}$, resulta:

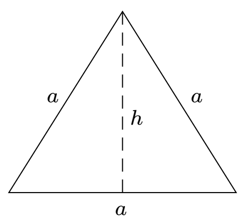
$$\triangle CAE \sim \triangle CHB$$

(Usar: T_1, T_2, corolario 1 del primer caso de semejanza).

Luego, $\dfrac{a}{2r} = \dfrac{h_c}{b}$.

o sea, $ab = h_c \cdot 2r$.

En el caso en el cual el $\triangle ABC$ es equilátero, se tiene:



$h = a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

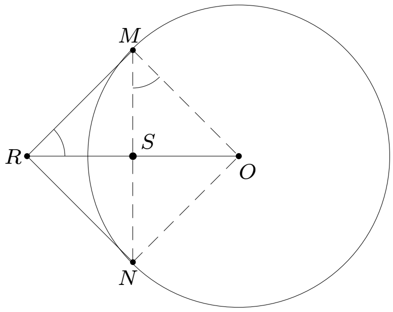
Luego, $r = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

T_{13}. En un plano, son dados:

la $C(O;r)$ y un punto R, tal que $RO > r$.

Se trazan $\overline{RM}$ y $\overline{RN}$, tangentes a la $C(O;r)$, con M y N los puntos de tangencia.

Entonces: $\overline{MN} \perp \overline{RO}$.



$\triangle ROM \cong \triangle RON$ (3er criterio) (usar T_9).

$\triangle SOM \cong \triangle SON$ (1er criterio).

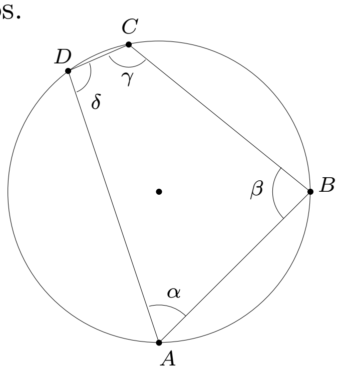
De ahí se obtiene:

$$\measuredangle MSO = \measuredangle NSO = 90^\circ$$

También, se sigue: $\measuredangle SRM = \measuredangle SMO = \alpha$

Luego, $OS = r \operatorname{sen} \alpha = r \cdot \dfrac{r}{OR} = \dfrac{r^2}{OR}$.

T_{14}. **Teorema:** En todo cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia, los ángulos opuestos son suplementarios.



$$\alpha + \gamma = 180^\circ, \qquad \beta + \delta = 180^\circ. \qquad \text{(usar: } T_1\text{)}$$

Teorema: (recíproco).

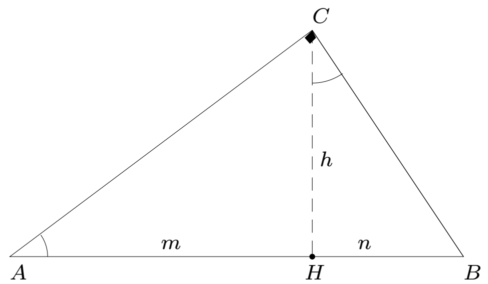
Todo cuadrilátero convexo cuyos ángulos opuestos son suplementarios, es inscriptible en una circunferencia.

(considerar la circunferencia que pasa por tres de los vértices del cuadrilátero y usar T_1, junto con la hipótesis, para concluir lo deseado).

Corolario 1: Todo rectángulo es siempre inscriptible en una circunferencia.

Corolario 2: Todo trapecio isósceles es inscriptible en una circunferencia.

T_{15}. Dado un triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa es **media proporcional** entre los segmentos en que divide a ésta.



$h^2 = m \cdot n.$

$\triangle AHC \sim \triangle CHB.$ (primer caso, corolario 1, T_7).

T_{16}. La condición necesaria y suficiente para que tres puntos de un plano estén alineados, es que sea nulo el determinante de la matriz que tiene la primera columna formada por las abscisas de estos puntos, la segunda columna constituida por las ordenadas correspondientes y la tercera por números 1.

Si $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ y $R = (x_3, y_3)$ están alineados, se tiene:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

y, recíprocamente.

T_{17}. a) Sea dado un triángulo ABC.

Sean A_1, B_1 y C_1, tres puntos en los segmentos

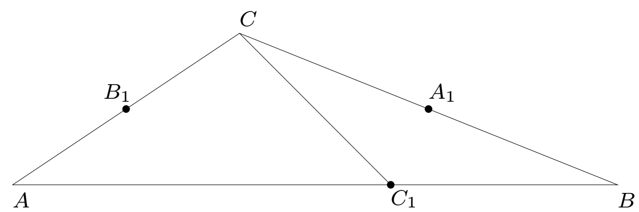
$\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$, respectivamente.

(Ninguno de los tres puntos citados es extremo de alguno de los segmentos nombrados).

Si $\quad R = \dfrac{AC_1}{C_1B} \cdot \dfrac{BA_1}{A_1C} \cdot \dfrac{CB_1}{B_1A} \quad$ y $\quad R^* = \dfrac{\operatorname{sen}\widehat{ACC_1}}{\operatorname{sen}\widehat{C_1CB}} \cdot \dfrac{\operatorname{sen}\widehat{BAA_1}}{\operatorname{sen}\widehat{A_1AC}} \cdot \dfrac{\operatorname{sen}\widehat{CBB_1}}{\operatorname{sen}\widehat{B_1BA}}$,

entonces: $\quad R = R^*$.

Demostración:



Tenemos: $\qquad \dfrac{\text{área del}\triangle ACC_1}{\text{área del}\triangle CC_1B} = \dfrac{AC_1}{C_1B} \qquad (*)$

También:

$$\frac{\text{área del}\triangle ACC_1}{\text{área del}\triangle CC_1B} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot CC_1 \operatorname{sen}\widehat{ACC_1}}{\frac{1}{2}BC \cdot CC_1 \operatorname{sen}\widehat{C_1CB}} \qquad (**)$$

Luego, de $(**)$ y $(**)$ se sigue:

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC \cdot \operatorname{sen}\widehat{ACC_1}}{BC \cdot \operatorname{sen}\widehat{C_1CB}} \qquad (1)$$

Análogamente, considerando las parejas de triángulos:

$$ABA_1 \quad , \quad AA_1C;$$

$$ABB_1 \quad , \quad BCB_1;$$

se obtienen:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB \cdot \operatorname{sen} \widehat{BAA_1}}{AC \cdot \operatorname{sen} \widehat{A_1AC}} \tag{2}$$

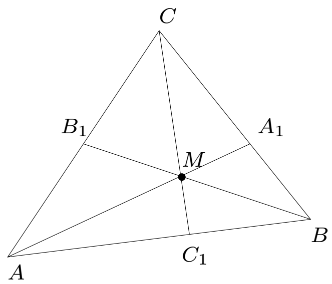
$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{BC \cdot \operatorname{sen} \widehat{CBB_1}}{AB \cdot \operatorname{sen} \widehat{B_1BA}} \tag{3}$$

Ahora, multiplicando, miembro a miembro, (1), (2) y (3), se llega a:

$$R = R^*.$$

b) Con las mismas hipótesis que en a), para que $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ y $\overline{CC_1}$ sean **concurrentes** es necesario y suficiente que $R = 1$.

Demostración: Supongamos que $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ y $\overline{CC_1}$, se intersectan en M.



Usando T_{11} (Apéndice):

$$\text{En el } \triangle AMC: \quad \frac{\operatorname{sen} \widehat{ACC_1}}{\operatorname{sen} \widehat{A_1AC}} = \frac{AM}{MC} \tag{4}$$

$$\text{En el } \triangle AMB: \quad \frac{\operatorname{sen} \widehat{BAA_1}}{\operatorname{sen} \widehat{B_1BA}} = \frac{MB}{AM} \tag{5}$$

$$\text{En el } \triangle BMC: \quad \frac{\operatorname{sen} \widehat{CBB_1}}{\operatorname{sen} \widehat{C_1CB}} = \frac{MC}{MB} \tag{6}$$

Multiplicando, miembro a miembro, (4), (5) y (6), obtenemos:

$$R^* = 1.$$

Por a), se sigue que $R = 1$.

Recíprocamente, supongamos $R = 1$, con A_1, B_1 y C_1, como en la parte a).

Trazamos $\overline{AA_1}$ y $\overline{BB_1}$.

Sea M_1 su punto de corte.

Trazamos $\overline{CM_1}$ y lo prolongamos hasta cortar a $\overline{AB}$, en C_2.

Por lo demostrado (necesidad), tenemos:

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1 \qquad (7).$$

Pero,

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1 \qquad (8).$$

Luego, de (7) y (8), se sigue:

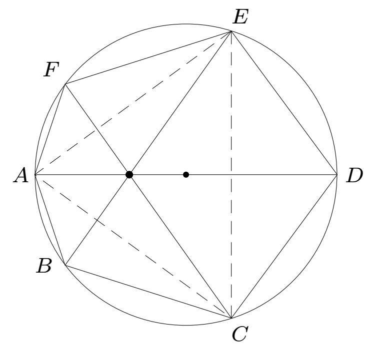
$$\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{AC_1}{C_1B} \qquad (9).$$

Como C_1 y C_2 se hallan en $\overline{AB}$, (9) quiere decir que C_1 y C_2 coinciden.

(Por ejemplo, de (9) se obtiene: $\dfrac{AC_2 + C_2B}{C_2B} = \dfrac{AC_1 + C_1B}{C_1B}\Bigg)$.

c) Para que las diagonales $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ del hexágono $ABCDEF$, inscrito en una circunferencia, concurran en un punto, es necesario y suficiente que:

$$AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA \qquad (\blacktriangle).$$



Necesidad: Consideremos el triángulo ACE.

Si llamamos r al radio de la circunferencia, sabemos por T_{11} (Apéndice), que:

$$\frac{\operatorname{sen}\widehat{FCA}}{FA} = 2r \quad ; \quad \frac{\operatorname{sen}\widehat{AEB}}{AB} = 2r$$

$$\frac{\operatorname{sen}\widehat{FCE}}{EF} = 2r \quad ; \quad \frac{\operatorname{sen}\widehat{EAD}}{DE} = 2r$$

$$\frac{\operatorname{sen}\widehat{BEC}}{BC} = 2r \quad ; \quad \frac{\operatorname{sen}\widehat{DAC}}{CD} = 2r$$

Usando estas igualdades se obtiene:

$$\frac{\operatorname{sen}\widehat{FCA}}{\operatorname{sen}\widehat{FCE}} \cdot \frac{\operatorname{sen}\widehat{BEC}}{\operatorname{sen}\widehat{AEB}} \cdot \frac{\operatorname{sen}\widehat{EAD}}{\operatorname{sen}\widehat{DAC}} = \frac{FA}{EF} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{DE}{CD}.$$

O sea: $R^* = \dfrac{FA \cdot BC \cdot DE}{EF \cdot AB \cdot CD}$ (▲▲).

(Ver a))

Luego, como $R^* = 1$ (Ver a) y b)), se sigue (▲).

Suficiencia: Nuevamente, consideramos el $\triangle ACE$, por cuyos vértices, están trazados $\overline{AD}$, $\overline{CF}$ y $\overline{EB}$.

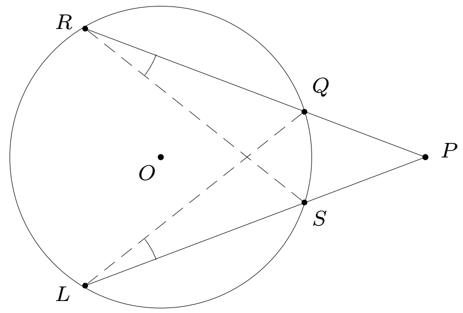
De (▲) se sigue que $R^* = 1$ (Ver (▲▲)).

Luego, $R = 1$ (Ver a)).

Entonces, por b), se sigue que $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son concurrentes.

T_{18}. En un plano, son dados: la $C(O; r)$ y un punto P, tal que: $OP > r$.

Son trazadas, por P, dos secantes a dicha circunferencia. Entonces, el producto de una secante por su segmento exterior, es igual al producto de la otra secante por su segmento exterior.



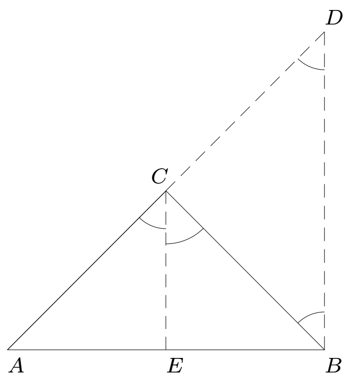
$PR \cdot PQ = PL \cdot PS.$

Basta trazar $\overline{RS}$ y $\overline{LQ}$.

Luego, notar que $\triangle RSP \sim \triangle QLP$.

(Primer caso, T_7).

T_{19}. **Teorema 1:** La bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide interiormente al lado opuesto, en la razón de los otros dos lados.



$\measuredangle ACE = \measuredangle ECB$.

Entonces:

$$\frac{EA}{EB} = \frac{CA}{CB}.$$

Para probarlo, trazar $\overline{BD} \parallel \overline{CE}$.

Prolongar $\overline{AC}$, hasta cortar $\overleftrightarrow{BD}$.

Usar el Teorema de Tales y el hecho que el $\triangle CBD$ es isósceles. (Aplicar T_5).

Teorema 2: (recíproco). (Ver figura anterior)

Si $\dfrac{EA}{EB} = \dfrac{CA}{CB}$, entonces, $\overline{CE}$ es bisectriz del $\widehat{ACB}$.

Para la prueba, se prolonga $\overline{AC}$, hasta D, tal que $CD = CB$.

Luego, se obtiene: $\dfrac{EA}{EB} = \dfrac{CA}{CB}$.

Así, $\overline{BD} \parallel \overline{CE}$.

(Recíproco del Teorema de Tales, aplicado a un triángulo, T_7).

Entonces,

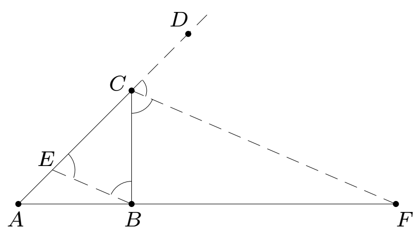
$\measuredangle ACE = \measuredangle ADB$ $\quad (T_5) \quad (*)$

$\measuredangle ECB = \measuredangle CBD$

Pero, el $\triangle CBD$ es isósceles. Luego, de $(*)$ se sigue:

$\measuredangle ACE = \measuredangle ECB$.

Teorema 3: La bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo, divide exteriormente el lado opuesto, en la razón de los otros dos lados.



$\measuredangle DCB$ ángulo externo del $\triangle ABC$.

$\measuredangle DCF = \measuredangle FCB$.

Entonces: $\dfrac{FA}{FB} = \dfrac{CA}{CB}$.

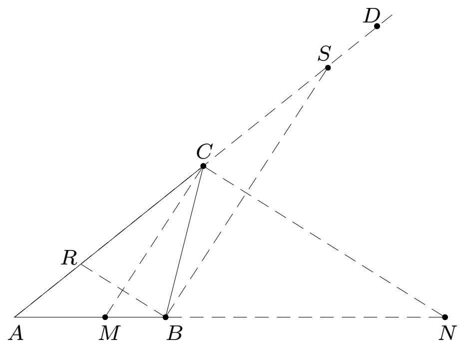
Trazar $\overline{BE} \parallel \overline{CF}$

Utilizar el Teorema de Tales y T_5.

Teorema 4: (recíproco)

Refiriéndonos a la figura anterior. Si se da la proporción
$\dfrac{FA}{FB} = \dfrac{CA}{CB}$, entonces $\overline{CF}$ es bisectriz del ángulo BCD.

Teorema 5: En un triángulo, la bisectriz de un ángulo interior y la del ángulo exterior adyacente, dividen al lado opuesto armónicamente, en la razón de los lados que comprenden el ángulo interno.



$\triangle ABC$, dado

$\measuredangle ACM = \measuredangle MCB.$

$\measuredangle BCN = \measuredangle NCD.$

Entonces: $$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{BN} = \frac{AC}{BC}. \qquad (1)$$

Para demostrarlo, trazar por B :

$\overline{BS} \parallel \overline{CM}$, $\overline{BR} \parallel \overline{CN}.$

Por el Teorema de Tales (T_7), resulta:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{CS} \quad , \qquad (2)$$

$$\frac{AB}{BN} = \frac{AR}{RC} \quad , \qquad (3)$$

Además, los triángulos BSC y BCR son isósceles (usar la hipótesis y T_5).

De manera que: $BC = CS$ y $RC = BC.$

Entonces, (2) y (3) se pueden escribir:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BC} \quad , \qquad (4)$$

$$\frac{AB}{BN} = \frac{AR}{BC} \quad , \qquad (5)$$

De (5) se sigue:

$$\frac{AB + BN}{BN} = \frac{AR + BC}{BC},$$

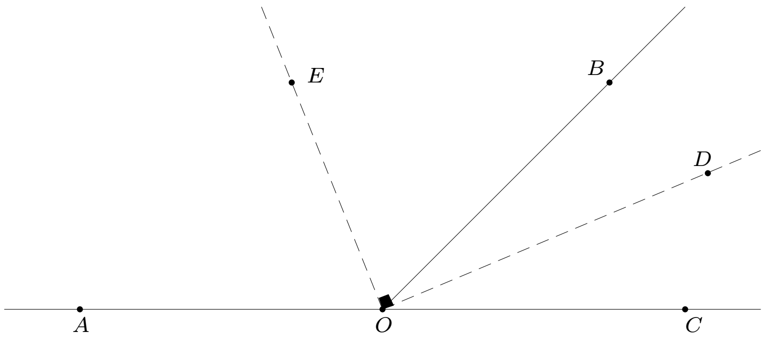
o sea, $\dfrac{AN}{BN} = \dfrac{AC}{BC}$ (6).

Finalmente, de (4) y (6), se obtiene:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{BN} = \frac{AC}{BC}.$$

Es decir, (1).

T_{20}. Las bisectrices de dos ángulos **adyacentes** son perpendiculares.



$\widehat{AOB}$ y $\widehat{BOC}$: son adyacentes.

$\measuredangle AOE = \measuredangle EOB \quad ; \quad \measuredangle BOD = \measuredangle DOC$

Entonces: $\measuredangle EOD = 90°$. (¿Por qué?)

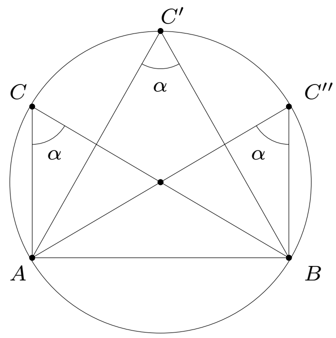
Nota: En particular, en el último teorema de T_{19} se tiene:

$\measuredangle MCN = 90°$.

T_{21}. **Arco capaz de un ángulo.**

Es el arco del segmento[1] en el cual se puede inscribir dicho ángulo.

Ángulo inscrito en un arco es el ángulo que tiene su vértice en dicho arco y cuyos lados pasan por los extremos del mismo arco.



El arco $ACC'C''B$ es el **arco capaz** del ángulo de medida α.

Problema: dado un ángulo de medida α y un segmento $\overline{AB}$, construir el arco capaz de dicho ángulo, sobre $\overline{AB}$ como cuerda.

Se traza l, la mediatriz de $\overline{AB}$.

Se construye $\widehat{ABE}$, con $\measuredangle ABE = \alpha$.

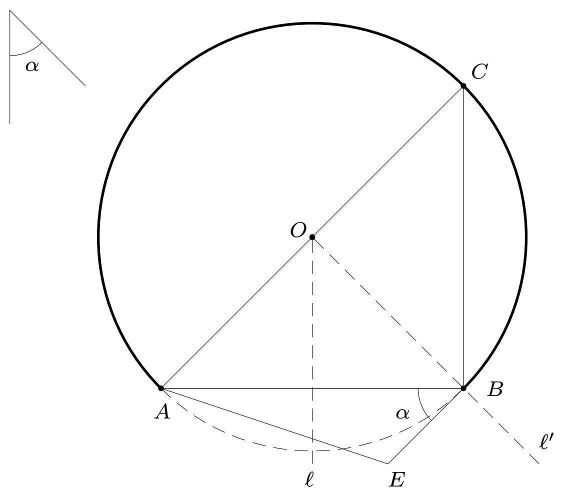
Se dibuja l', perpendicular a $\overleftrightarrow{BE}$, en B.

Llamemos O a la intersección de l con l'.

Con centro en O y radio OB, descríbase el arco ACB. Este es el arco capaz del ángulo dado.

Nota: C y E están en distintos semiplanos, respecto a $\overleftrightarrow{AB}$.

[1]segmento circular.

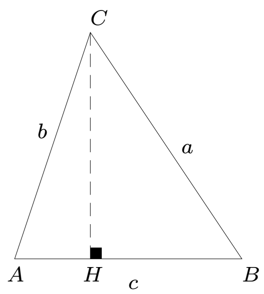


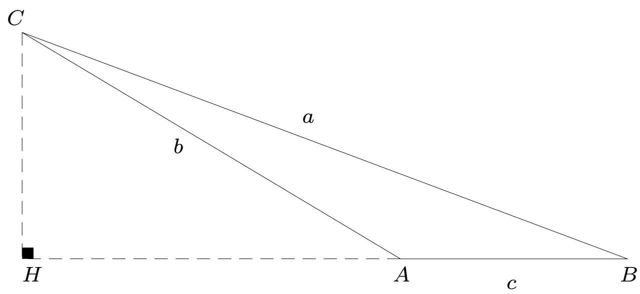
Notar que $\overline{BE}$ es tangente a la $C(O; OB)$;

$\measuredangle ACB = \alpha \qquad\qquad (T_1).$

T_{22}. **Teorema del Coseno.**

El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de dichos lados, por el coseno del ángulo que forman.





$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}.$$

La demostración se basa en el Teorema de Pitágoras (se trata la altura $\overline{CH}$).

Primero se trata el caso de triángulos acutángulos; a continuación el de obtusángulos.

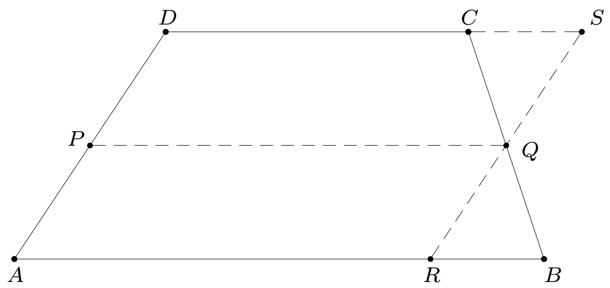
También se usa la identidad:

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha.$$

T_{23}. **Teorema 1:** Sea $ABCD$ un trapecio, con: $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, sus lados paralelos.

Llamemos P al punto medio de $\overline{AD}$; Q al punto medio de $\overline{BC}$.

Entonces: $\overline{PQ} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC}$, y $PQ = \dfrac{DC + AB}{2}$ $(*)$.



Para la prueba, trazar, por Q, la paralela a $\overleftrightarrow{AD}$.

Se forma entonces, el paralelogramo $ARSD$.

En particular, $RS = AD$.

Por otro lado, $\triangle CQS \cong \triangle RBQ$ (2do criterio, T_3).

Luego, $RQ = QS = \dfrac{1}{2}RS = \dfrac{1}{2}AD = AP$.

De manera que $ARQP$ es un paralelogramo (T_5).

Así, $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$.

También, $PQSD$ es un paralelogramo.

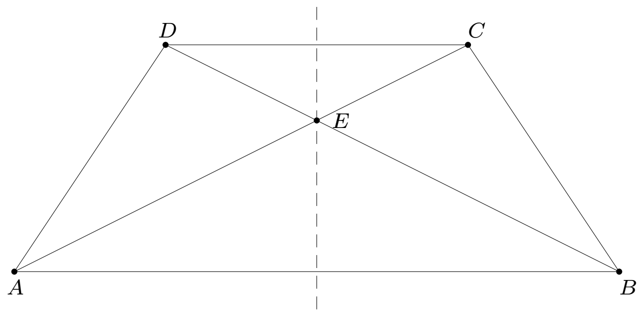
Tenemos entonces:

$PQ = DC + CS \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1)$

$PQ = AB - RB \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2).$

Sumando (1) y (2) se obtiene $(*)$.

Teorema 2: En un trapecio isósceles, las diagonales se cortan en un punto que está en la mediatriz de las bases.



$\overline{AB} \parallel \overline{DC} \qquad\qquad AD = BC.$

$\triangle ABD \cong \triangle ABC \qquad\qquad$ (1er criterio, T_3).

En particular, $\quad AC = DB.$

$\triangle ACD \cong \triangle DBC \qquad\qquad$ (3er criterio, T_3).

Así que, los triángulos DEC y ABE son isósceles.

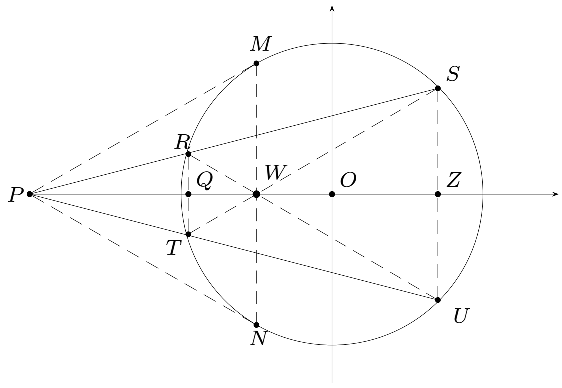
E pertenece entonces, a la mediatriz de $\overline{DC}$ y a la mediatriz de $\overline{AB}$.

Pero estas mediatrices, en verdad, coinciden. (¿ Por qué?).

Teorema 3: Sean:

$\overline{PM}$ y $\overline{PN}$, tangentes a la $C(O;r)$;

$\overline{RS}$ y $\overline{TU}$, cuerdas (simétricas, respecto a $\overleftrightarrow{PO}$) que, prolongadas pasan por P.



$$\measuredangle SPO = \measuredangle OPU.$$

Tesis: W (intersección de $\overleftrightarrow{RU}$ con $\overleftrightarrow{TS}$) está en $\overline{MN}$.

Prueba: Consideremos el sistema de Coordenadas Cartesianas, con O como origen y $\overleftrightarrow{PO}$ como eje de las abscisas.

Llamando: d, a la distancia de P a O;

$$m = \tan \widehat{SPO} = \tan \widehat{OPU},$$

obtenemos:

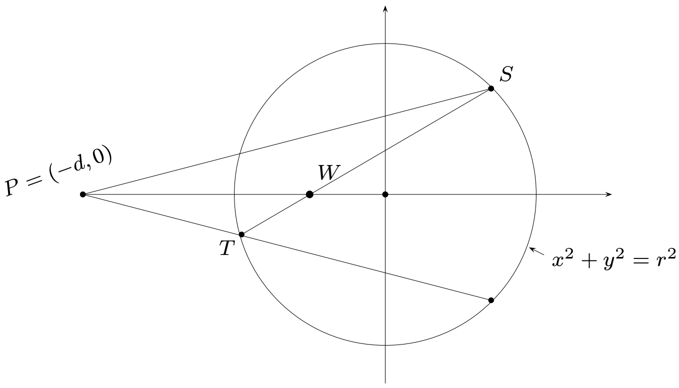
ecuación de $\overleftrightarrow{PS}$: $y = m(x+d)$ $(*)$

ecuación de $\overleftrightarrow{PU}$: $y = -m(x+d)$ $(**)$

El plan es el siguiente: hallaremos las coordenadas de S y T; luego, en la ecuación de $\overleftrightarrow{TS}$, haremos $y = 0$, para obtener la abscisa de W.

Notar que $TUSR$ resulta ser un trapecio isósceles (¿Por qué?)

Así, por el Teorema 2, de este T_{23}, el punto de intersección de $\overline{RU}$ con $\overline{TS}$, pertenece a $\overleftrightarrow{PZ}$, que es la mediatriz de $\overline{SU}$ y de $\overline{RT}$.



De $(*)$ y $x^2 + y^2 = r^2$, obtenemos que la abscisa de S es:

$$\frac{-m^2d + \sqrt{r^2 + m^2r^2 - m^2d^2}}{1 + m^2} \qquad (1).$$

(Llamémosla x^*).

Entonces, la ordenada de S es: $y^* = m(x^* + d)$

En tanto que, de $(**)$ y $x^2 + y^2 = r^2$, se consigue que la abscisa de T es:

$$\frac{-m^2d - \sqrt{r^2 + m^2r^2 - m^2d^2}}{1 + m^2} \qquad (2).$$

(Dentémosla por x^{**}).

Luego, la ordenada de T resulta: $y^{**} = -m(x^{**} + d)$.

Así, la ecuación de $\overleftrightarrow{TS}$ es:

$$y - m(x^* + d) = \frac{y^* - y^{**}}{x^* - x^{**}}(x - x^*).$$

Haciendo $y = 0$, usando (1) y (2), y simplificando, se llega a:

$$-r^2 - m^2r^2 = dx + m^2dx,$$

Es decir, $x = -\dfrac{r^2}{d}$.

Pero esto significa que W pertenece a $\overline{MN}$.

(Ver T_{13}).

Bibliografía

[1] Boris L. Bossio Vivas. *Matemáticas.* 4to curso. Distribuidora Escolar S.A. Venezuela.

[2] E.S. Cabrera y H.J. Medici. *Goemetría Analítica.* Librería del Colegio. Buenos Aires.

[3] G. Garcia Talavera. *Heurística Geométrica.* Limusa. Noriega Editores.

[4] G. Dorfeiev, M. Potatov, N. Rozov. *Temas Selectos de Matemáticas Elementales.* Editorial MIR.

[5] F.A. Lacaz Netto. *Lugares Geométricos Planos.* Livraria Nobel S.A. *São* Paulo.

[6] I. Shariguin. *Problemas de Geometría.* Editorial MIR.

[7] N.B. Vasiliev, V.L. Gutenmájer. *Rectas y Curvas.* Editorial MIR.

[8] Omer Cano. *Geometría.* Editorial La Salle. Chile.

[9] P. Abbott. *Geometría.* Editorial Pirámide S.A. Madrid.

[10] Pedro Toledo Carrero. *Elementos de Geometría y de Dibujo Lineal y a mano suelta.* Editorial Hermanos Belloso Rossell. Venezuela.

[11] Th. Caronnet. *Exercices de Géometrie.* Librairie Vuibert. Paris.