DESIGUALDADES

DESIGUALDADES LINEALES

En esta sección trataremos las desigualdades lineales en una variable. Ellas son las que se pueden escribir en la forma $ax+b>0$, $(\geq)$ donde a y b son constantes, $(a \neq 0)$. Resolver una desigualdad es conseguir todos los valores *x* que satisfacen está relación, el conjunto solución suele ser un intervalo.

Las desigualdades lineales surgen del planteamiento de determinados problemas, como por ejemplo, en una industria ¿cuántas unidades deberá producirse de un artículo si se desea tener utilidades semanales mayores a 10.000UM?. También son importantes en la resolución de determinados planteamientos matemáticos.

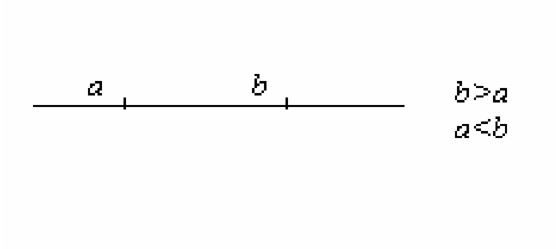
Repasemos algunos conceptos y resultados que nos serán de utilidad para puntualizar la resolución de desigualdades lineales.

Sean *a* y *b* dos números reales.

Al situarlos en la recta real, si *a* está a la izquierda de *b* entonces decimos que *a* es menor que *b* o equivalentemente podemos decir también que *b* es mayor que *a*.

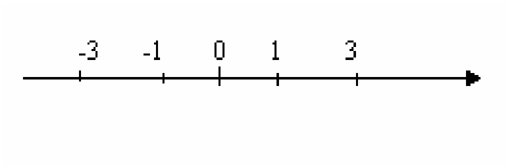
El símbolo $\leq$ significa menor o igual, en una expresión como $a \leq b$ significa que $a < b$ ó *a=b*.

El símbolo $\geq$ tiene un significado equivalente.



Podemos decir: $-3<-1$, $1<3$
$-1<0$ y $1>0$.

La expresión $a>0$ es equivalente a decir que *a* es positivo.



La expresión $a<0$ es equivalente a decir que *a* es ___________________ .

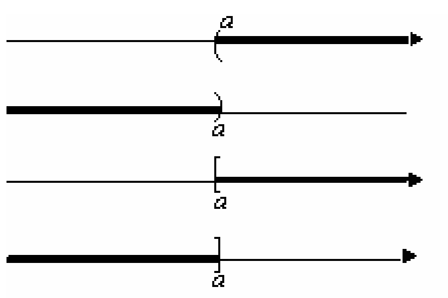
Recordemos que uno de los objetivos de esta sección es resolver desigualdades lineales con una variable. Es decir encontrar aquellos valores de *x* que satisfacen la desigualdad. Hay desigualdades lineales cuya solución es evidente:

1) $x>a$. La solución es el intervalo $(a,\ \infty)$

2) $x<a$. La solución es el intervalo $(-\infty, a)$

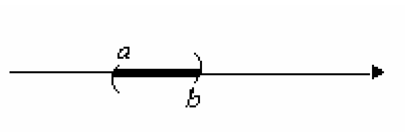
3) $x \geq a$. La solución es el intervalo $[a,\ \infty)$

4) $x \leq a$. La solución es el intervalo $(-\infty, a]$



Remarcamos que el corchete] significa que ese extremo está en el conjunto solución y el paréntesis) no está.

La expresión $a < x < b$ quiere decir que $a < x$ y $x < b$.
Observe que son dos desigualdades que se tienen que cumplir simultáneamente.
El conjunto de las x que satisfacen está proposición es el intervalo abierto (a,b).



Si tenemos una expresión como por ejemplo

$$-3 < x < 1,$$

normalmente la leemos como: x está entre -3 y 1.

Ejercicio de desarrollo.- Completar los espacios en blanco a fin que el texto tenga concordancia.

La expresión a__x__b quiere decir que a__x ___ x__b . El conjunto de las x que satisfacen está proposición es el intervalo [a,b]

Observación: Cuando escribimos un intervalo debemos asegurarnos que el número mayor es el extremo derecho del intervalo y el menor es el extremo izquierdo

Remarquemos lo siguiente:

Definición.- Una desigualdad lineal en la variable x es una proposición que puede ser escrita de la forma $cx+b>0$, (o bien $\geq$) donde c y b son constantes con $c \neq 0$. Resolver una desigualdad es conseguir todos los valores x que satisfacen esta relación.

La manera para resolver desigualdades lineales es llevarla a otra equivalente de la forma $x > a$ o cualquiera de las otras tres formas cuya solución es evidente: $x < a, x \geq a$ ó $x \leq a$. Para llevarla a alguna de estas tres formas debemos tener en cuenta ciertas reglas que enunciamos a continuación.

Regla 1.- Cuando un número real c se suma o se resta a ambos lados de una desigualdad, el sentido de la desigualdad no se altera:

$$\text{Si } a < b \text{ entonces } a + c < b + c \text{ y } a - c < b - c$$

Ejemplo 1.- a) 2<9, entonces 2+4<9+4.
b) La desigualdad 3x+1>2 es equivalente a 3x+1-1>2-1. Observe que esta expresión es equivalente a su vez a 3x>2-1. Normalmente esta regla la usamos como se indica:

Aplicación de la regla 1.- Si un número está sumando en un lado de la desigualdad pasa al otro lado restando sin cambiar el sentido de la desigualdad. Similarmente si un número está restando pasa al otro lado sumando sin cambiar el sentido de la desigualdad.

Regla 2.- Cuando multiplicamos o dividimos por un número real c **positivo** a ambos lados de una desigualdad, **el sentido** de la desigualdad **no se altera**:

$$\text{Si } a < b \text{ entonces } ac < cb \text{ y } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

Cuando multiplicamos o dividimos por un número real ***c*** **negativo** a ambos lados de una desigualdad, **el sentido** de la desigualdad **se cambia**:

$$\text{Si } a < b \text{ entonces } ac > cb \text{ y } \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

Ejemplo 2.-

a) -5<4 por la regla 2 tenemos que efectivamente $\frac{-5}{-5} > \frac{4}{-5}$, esto es $1 > -\frac{5}{4}$. También -5(-2)>4(-2): es decir 10>-8, lo cual sabemos es cierto y no la desigualdad en el otro sentido.

b) La desigualdad $-3x < 1$ es equivalente $\frac{3x}{-3} > \frac{1}{-3}$, es decir $x > -\frac{1}{3}$.

c) La desigualdad $\frac{x}{2} > 4$ es equivalente a $2\frac{x}{2} > 2 \cdot 4$, es decir $x > 8$

Aplicación de la regla 2.- Si un número positivo está multiplicando (dividiendo) un lado de la desigualdad pasa al otro lado dividiendo (multiplicando) sin cambiar el sentido de la desigualdad.
Si un número NEGATIVO está MULTIPLICANDO (dividiendo) un lado de la desigualdad pasa al otro lado dividiendo (multiplicando) y el sentido de la desigualdad SE INVIERTE.

Observe como utilizando la regla 2 logramos transformar en el ejemplo 2b y 2c desigualdades lineales en otras equivalentes cuya soluciones eran evidentes. Veamos ejemplos más complicados para resolver desigualdades lineales. Nuestra técnica se traduce en dejar sola la variable x.

Ejemplo 3.- Resolver $3(x-1) \leq 9$.
Solución:
Alternativa 1: Una estrategia a emplear es resolver primero los paréntesis distribuyendo el 3.

$$3x - 3 \leq 9.$$

Luego dejamos los términos en x en un lado y las constantes en el otro lado.

El 3 está restando pasa sumando sin alterar el sentido de la desigualdad

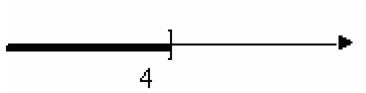
$$3x \leq 9+3$$

Ahora 3 está multiplicando, pasa dividiendo sin alterar el sentido de la desigualdad

$$x \leq \frac{12}{3}$$

$$x \leq 4\,.$$

Expresaremos la solución en términos de intervalos y geométricamente:
Conjunto solución $=(-\infty,4]$



Alternativa 2:

Esta alternativa pretende ilustrar que los procedimientos analíticos sugeridos en el despeje no son la única alternativa para despejar la variable.

Como 3 está multiplicando todo el miembro izquierdo entonces pasa dividiendo sin alterar el sentido de la desigualdad

$$x-1 \leq 3$$

1 está restando entonces pasa sumando sin alterar el sentido de la desigualdad

$$x \leq 3+1$$
$$x \leq 4\,.$$

Está claro que el conjunto solución concuerda con el calculado anteriormente, este el todos los números menores o iguales a 4.

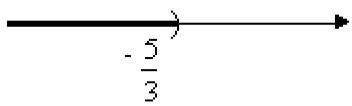
Ejemplo 4.- Resolver $-3x-1>4$. Dar la solución por intervalos y geométricamente.
Solución: 1 está restando pasa sumando:

$$-3x>5$$

-3 esta multiplicando, pasa dividiendo y por ser un número negativo, invierte el sentido de la desigualdad:

$$x<-\frac{5}{3}\,.$$

Así la solución de esta desigualdad es el intervalo $(-\infty,-\frac{5}{3})$, representada geométricamente por:



Ejemplo 5.- Resolver $4-3(x-2) \geq 2(x+3)$.
Solución: Resolvemos primero los paréntesis y luego agrupamos los términos en x de un lado y luego las constantes del otro lado:

$$4-3x+6 \geq 2x+6$$
$$-3x+10 \geq 2x+6$$
$$10-6 \geq 2x+3x$$
$$4 \geq 5x$$
$$\frac{4}{5} \geq x.$$

Esta expresión la podemos leer alternativamente como $x \leq \frac{4}{5}$. La solución es $(-\infty, \frac{4}{5}]$.

Ejercicio de desarrollo.- Resolver $1-\frac{3}{2}(x-1) > 2$. Dar la solución por intervalos y geométricamente.

DESIGUALDADES TRIVIALES

Algunas desigualdades triviales tienen como solución el conjunto vacio $\varnothing$ o bien toda la recta real **R**.

Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.- Resolver la desigualdad $\frac{1}{2}(1-2x)-3 \leq 2-x$

Solución: Se recomienda en en caso de desigualdades con fracciones. Multiplicar por el m.c.m. de los denominadores ambos lados de la desigualdad a fin de evitar trabajar con fracciones. En este caso el m.c.m. de los denominadores es 2

$$2\left[\frac{1}{2}(1-2x)-3\right] \leq 2[2-x]$$ Se distribuye el 2 y luego se simplifica.

$$(1-2x)-6 \leq 4-2x$$
$$-5 \leq 4$$

Esta desigualdad se cumple para cualquier valor de *x*. Por tanto el conjunto solución es **R.**

Ejemplo 2.- Resolver la desigualdad $5-2x \leq 2(2-x)$

Solución: Esta desigualdad es equivalente a

$$5-2x \leq 4-2x.$$

Esta última es equivalente a

$$5 \leq 4$$

Como no existe ningún *x* que satisfaga esta desigualdad entonces el conjunto solución es el vacío $\varnothing$. Alternativamente se dice que la desigualdad no tiene solución.

Ejercicio de desarrollo.-.- Resolver

a) $\frac{x-3}{4}-\frac{1-x}{3} \geq 1$

b) $\frac{3x-1}{3}+\frac{1-2x}{2}\geq 0$

c) $2\left(\frac{x+1}{2}-1\right)\geq x$

APLICACIÓN DE DESIGUALDADES EN EL CÁLCULO

Será importante posteriormente que el estudiante determine para determinadas expresiones algebraica cuales son los valores de la variable que hacen que la expresión esté bien definida y sea un número real.

Ejemplo 1.- Determine para cada expresión algebraica cuales son los valores de la variable que hacen que la expresión esté bien definida y sea un número real.

a) $\sqrt{3-2x}$ **;** **b)** $\frac{2}{\sqrt[4]{3x+6}}$

Solución:

a) Para que la expresión $\sqrt{3-2x}$ sea un número real el radicando debe ser mayor o igual a 0. En notación matemática esto es:

$$3-2x\geq 0$$

Esto es una desigualdad lineal la cual resolvemos:

$$-2x\geq -3$$

$$x\leq \frac{-3}{-2}$$

$$x\leq \frac{3}{2}$$

En conclusión $\sqrt{3-2x}$ está bien definida y es un número real en $(-\infty,\frac{3}{2}]$.

b) Tenemos también una raíz con índice par. Así que el radicando debe ser mayor o igual a cero a fin que sea un número real, pero no olvidemos que no podemos dividir entre 0, (la división entre 0 no está definida). $\sqrt[4]{3x+6}=0$, si y sólo si $3x+6=0$.

Así pues, la expresión $\frac{2}{\sqrt[4]{3x+6}}$ está bien definida y es un número real si y sólo si para aquellos valores de x que satisfacen la desigualdad: $3x+6>0$, cuya solución es $(-2,\infty)$.

En conclusión: $\frac{2}{\sqrt[4]{3x+6}}$ está bien definida y es un número real en $(-2,\infty)$.

DESIGUALDADES DE LA FORMA $a<cx+d<b$.

Ya hemos visto que este tipo de expresión es equivalente a:

$$a<cx+d \quad \text{y} \quad cx+d<b$$

Se pueden resolver ambas desigualdades y luego determinar la parte común de ambos conjuntos solución. Pero en general, es preferible resolverla simultáneamente. Ambos procedimientos lo ilustraremos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.- Resolver la desigualdad $7 \leq 2(3-x) \leq 9$

Solución:

Alternativa 1: (Resolver por separado y luego determinar la parte común de los conjuntos solución)

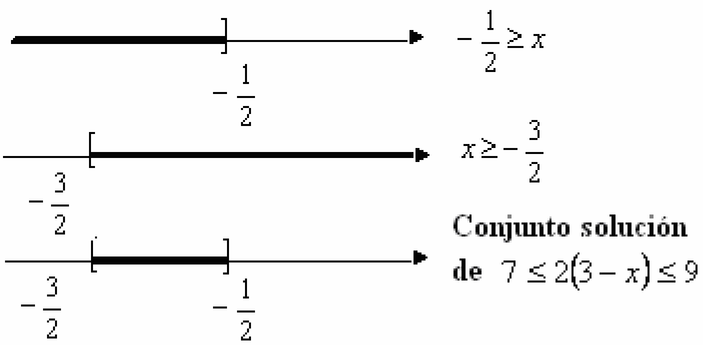
Esta doble desigualdad es equivalente a

$7 \leq 2(3-x)$ y $2(3-x) \leq 9$

Se resuelve cada una

$7 \leq 6-2x$	y	$6-2x \leq 9$	
$7-6 \leq -2x$	y	$-2x \leq 9-6$	
$1 \leq -2x$	y	$-2x \leq 3$	Se pasa -2 dividiendo
$\frac{1}{-2} \geq x$	y	$x \geq \frac{3}{-2}$	El sentido de la desigualdad se invierte
$-\frac{1}{2} \geq x$	y	$x \geq -\frac{3}{2}$	

El conjunto solución es la intersección de ambas soluciones. Gráficamente es la parte común de los conjuntos solución:



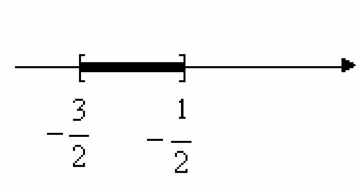
Alternativa 2: (Se trabaja simultáneamente las dos desigualdades.)

Despejaremos la x de la expresión del medio, optamos por distribuir el 2.

$7 \leq 2(3-x) \leq 9$	Resolvemos los paréntesis
$7 \leq 6-2x \leq 9$	Se resta 6 a cada miembro de las desigualdades
$7-6 \leq 6-2x-6 \leq 9-6$	
$1 \leq -2x \leq 3$	Dividimos cada miembro entre -2,
$-\frac{1}{2} \geq x \geq -\frac{3}{2}$	Recuerde que el sentido de las desigualdades se invierte

Podemos reescribir estas desigualdades de derecha a izquierda como $-\frac{3}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}$.

Conviene recordar que esta desigualdad se lee: x esta entre $-\frac{3}{2}$ y $\frac{1}{2}$ Así el conjunto solución es el intervalo cerrado $\left[-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right]$. La solución geométrica es



Ejercicio de desarrollo.- Resolver $3 < \frac{2}{3} - 2x < 5$

MÁS DESIGUALDADES DOBLES

Ejemplo 1.- Resolver la desigualdad $2x \leq 1 - x \leq 9$
Solución: Cuando la variable aparece en dos o más miembros de la desigualdad se resuelve usando la alternativa 1, esto es separando estas expresiones en dos desigualdades cuyas soluciones hay que interceptar.

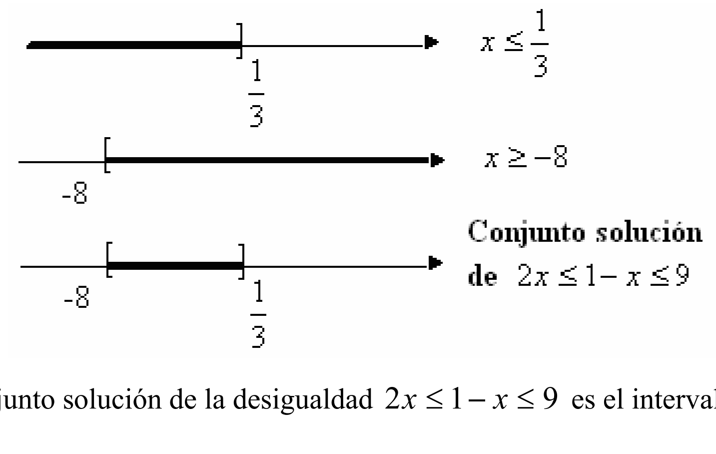
La desigualdad $2x \leq 1 - x \leq 9$ es equivalente a que

$$2x \leq 1 - x \quad \text{y} \quad 1 - x \leq 9$$

Resolvemos ambas sin olvidar que luego se tiene que calcular la intercepción de los conjuntos soluciones, esto es, conseguir la parte común de ambos conjuntos.

$$2x + x \leq 1 \quad \text{y} \quad -x \leq 9 - 1$$
$$3x \leq 1 \quad \text{y} \quad -x \leq 8$$
$$x \leq \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad x \geq -8$$

Graficar el conjunto solución de ambas desigualdad es un buen procedimiento para conseguir la parte común de ambos conjuntos soluciones



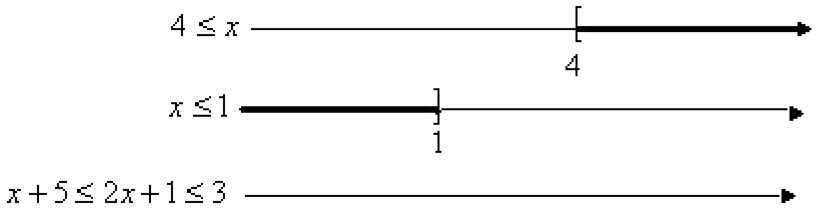
Concluyendo el conjunto solución de la desigualdad $2x \leq 1 - x \leq 9$ es el intervalo $[-8, \frac{1}{3}]$

Ejemplo 3.- Resolver la desigualdad $x + 5 \leq 2x + 1 \leq 3$
Solución: La desigualdad es equivalente a

$$x + 5 \leq 2x + 1 \quad \text{y} \quad 2x + 1 \leq 3$$

Resolviendo

$$4 \le x \quad \text{y} \quad x \le 1.$$



Como vemos el conjunto solución es el vacío: $\varnothing$, pues no hay puntos en comunes entre $[4,\infty)$ y $-(\infty,1]$.

APLICACIONES

CIENCIAS NATURALES

Ejemplo 1.-Las especificaciones para realizar unas pruebas a una muestra de campo es que debe ser mantenida entre los 34ºF y 60ºF. ¿Cuál es el rango de temperatura en centígrado que la muestra debe ser mantenida? $C = \frac{5}{9}(F-32)$

Solución: Las especificaciones escritas en términos de desigualdad son que

$$34 \le F \le 60$$

La idea es expresar la temperatura en Fahrenheit en función de la de centígrados y sustituirla en la expresión de arriba. Esta está dada por

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

Así que sustituyendo queda:

$$34 \le \frac{9}{5}C + 32 \le 60$$

Esta es la desigualdad que resolveremos:

$$34 - 32 \le \frac{9}{5}C + 32 - 32 \le 60 - 32$$

$$2 \le \frac{9}{5}C \le 28$$

$$10 \le 9C \le 140$$

$$\frac{10}{9} \le C \le \frac{140}{9}$$

CIENCIAS ECONÓMICAS

Ejemplo 1.-Un fabricante de un cierto artículo puede vender todo lo que produce a un precio de 5UM cada uno. Si existe mensualmente unos gastos fijos de 1.000UM y el costo de fabricación por artículo es de 3UM. ¿Cuántos artículos debería producir y vender con el fin de obtener utilidades de al menos 15.000UM al mes?

Solución: Como en todo problema debemos definir claramente la variable de interés. En este caso definimos q igual al número de artículos a producir y vender.

El costo total de producir q artículos es el costo fijo 1.000 más el costo variable que es 3 por número de artículos a producir. Es decir:

$$C_{total} = C_{fijo} + C_{\text{var}\,iable}$$

$$C_{total} = 1000 + 3q$$

El ingreso total es $5q$ (precio por cantidad). Como

Utilidad= Ingreso- Costo Total

$$=5q-(1000+3q)$$

Así

Utilidad= $2q$-1.000

La expresión: *obtener una utilidad de al menos* 1.500*UM* la podemos escribir en términos de desigualdad como

$$\text{Utilidad} \geq 1.500$$

Sustituyendo se obtiene

$$2q - 1000 \geq 1.500$$

Esto es una desigualdad lineal en la variable q la cual resolvemos con los métodos vistos:

$$2q \geq 500$$

$$q \geq 250$$

Terminamos dando una respuesta a la pregunta:

El fabricante deberá producir y vender por lo menos 250 artículos para obtener una utilidad de al menos 1500UM.

Ejemplo 2.- Una compañía de teléfonos ofrece dos planes para llamadas nacionales donde el valor del minuto es de 50UM . El primer plan vale 13.000UM al mes más el valor de los minutos consumidos. El segundo plan vale 26000UM al mes y le rebaja un 25% al valor de los minutos consumidos ¿A que tipo de clientes le conviene el segundo plan?

Solución: Definimos nuestra variable de interés como:

x número de minutos consumidos al mes.

Debemos expresar el valor de cada plan en términos de x.

Es claro que:

El costo del plan 1=13.000+50x.

El plan 2 tiene un 25% de descuento en el valor de los minutos. Esto es $50x - 0.25 \cdot 50x = 0.75 \cdot 50x = 37.5x$. Así

El costo del plan 2=26.000+37.5x.

Una vez que se ha logrado expresar ambos planes en términos de x planteamos nuestra pregunta

Costo del plan 2< Costo del plan 1

Sustituimos ahora en la desigualdad planteada

Costo del plan 2< Costo del plan 1

$$26.000+37.5x<13.000+50x$$

$$13.000<12.5x$$

$$1040<x$$

Damos ahora la respuesta a la pregunta:

Un cliente con un consumo mayor a los 1040 minutos al mes le conviene más el plan 2

EJERCICIOS

1) Resuelva las siguientes desigualdades:

1.1) $2x+1>5$; **1.2)** $2x+1\le 2-x$; **1.3)** $-\frac{1}{2}x+1\ge -\frac{3}{2}$;

1.4) $4-3x>4$; **1.5)** $\frac{1}{3}(1-2x)<4$; **1.6)** $2(3-x)\le 5-4x$;

1.7) $\frac{x-3}{3}-2<5x$; **1.8)** $-3(x-1)>4(1-x)$; **1.9)** $4x-\frac{1}{3}<5-2(3-x)$;

1.10) $\frac{1}{3}-2t<\frac{5+t}{2}$; **1.11)** $\frac{3}{2}\ge x-2\ge -\frac{3}{2}$; **1.12)** $4\ge 1-3x\ge 2$;

1.13) $2<\frac{1}{3}-2x<5$; **1.14)** $2\le 3(3-2x)\le 5$; **1.15)** $5>\frac{-3x-1}{2}>4$;

1.16) $1\le \frac{1}{3}-2x<3$; **1.17)** $\frac{1}{4}-\frac{t}{3}<\frac{5+t}{2}$; **1.18)** $5-2t\ge \frac{2-4t}{2}$;

1.19) $\frac{6x-1}{3}-2>2x$

2) Resuelva las siguientes desigualdades:

2.1) $1<2-x<2x$; **2.2)** $1\le x-2\le 3x-4$;

2.3) $3x-1\ge x-2\ge -5$ **2.4)** $2x\le 3x-1\le x+3$

3) Determine para cada expresión algebraica cuales son los valores de la variable que hacen que la expresión esté bien definida y sea un número real.

3.1) $\sqrt{\frac{1}{2}+3x}$; **3.2)** $\sqrt[4]{1-\frac{3x}{2}}$; **3.3)** $\frac{2}{\sqrt{1-x}}$; **3.4)** $\sqrt[3]{1+3x}$

PROBLEMAS DE CIENCIAS NATURALES

1)Se encontró que la relación entre la temperatura T (en grados centígrados) y la profundidad x (medidos en kilómetros) está dada por la siguiente relación:

$$T=30+25(x-3)$$

¿A qué profundidad la temperatura estará entre 100 y 200 grados centígrados?

2) Se encontró que la relación entre la temperatura T (en grados centígrados) y la altura h (medidos en metros) está dada por la siguiente relación:

$$\frac{9}{5}T=40-0.0056h$$

¿A qué altura la temperatura estará entre 0º y 10º grados centígrados?

PROBLEMAS DE ECONOMIA

1) Una persona desea invertir 20.000UM en dos bonos, una paga el 6% anual y la otra, de mayor riesgo, paga el 7.5% anual. Determine el monto mínimo que deberá colocar a la tasa de 7.5% para tener ingresos de al menos 1440 UM. (Resp.16.000 UM)

2) El costo de mantener una cuenta corriente en el banco A es 12UM por mes más 0.1 UM por cheque girado. El banco B cobra 10 UM por mes más 0.14UM por cheque girado. ¿A qué tipo de clientes le conviene abrir la cuenta con el banco A? (Resp. quienes emiten más 50 cheques).

3) Una compañía invierte 30.000UM de sus fondos a dos tasas de interés anual: 5% y 6.75%. Desea una ganancia anual de al menos 6.5%. ¿Cuál es la menor cantidad de dinero que debe invertir a la tasa de 6.75%? (Resp. 25.714)

4) Un fabricante tiene 2500 unidades de un producto cuyo precio unitario es de 4UM. El próximo mes el precio por unidad se incrementará en 0.5 UM. El fabricante quiere que el ingreso total recibido por la venta de las 2500 unidades no sea menor que 10750UM. ¿Cuál es el número máximo de unidades que puede ser vendido este mes? (Resp. 1000 unidades)

5) Suponga que una compañía le ofrece un puesto en ventas y que usted elija entre dos métodos para determinar su salario. Un método paga 12.600UM más un bono del 2% sobre sus ventas anuales. El otro método paga una sola comisión del 8% sobre sus ventas. ¿Para qué nivel de ventas anuales es mejor seleccionar el primer método?(Resp. Para ventas menores de 210.000)

6) Una compañía fabricará un total de 10.000 unidades de su producto entre las plantas A y B. La información disponible aparece a continuación

	PLANTA A	PLANTA B
Costo unitario por mano De obra y material	5 UM	5.50 UM
Costos fijos	30.000UM	35.000UM

Entre las dos plantas la compañía ha decidido asignar no más de 117.000 UM para costos totales. ¿Cuál es el número de unidades que puede producir la planta A? (Resp. Entre 6000 y 10.000)

7) Un fabricante de cartuchos de video vende cada uno a 20UM. El costo de fabricación es de 15UM. Los costos fijos mensuales son de 8000UM. El fabricante desea saber en sus primer mes cuántas unidades deberá vender a fijar de obtener utilidades? (Resp. Más de 160 cartuchos)

8) Una fábrica de bicicletas suele comprar las gomas del manubrio para la fabricación de las bicicletas a un precio de 3UM cada par. La fábrica está pensando en elaborar sus propias gomas. Estima que si las fabrica entonces los costos fijos de la empresa aumentarán 2300UM y el costo de fabricación de cada par será de 2.2UM. ¿Cuáles son los niveles de producción de bicicletas para los cuales el ahorro por la fabricación sea de al menos 1200 UM? (4375 bicicletas o más)

Respuestas

1.1) $(2, \infty)$; **1.2)** $(-\infty, \frac{1}{3}]$; **1.3)** $(-\infty, 5]$ **1.4)** $(-\infty, 0)$; **1.5)** $(-\frac{11}{2}, \infty)$;

1.6) $(-\infty, -\frac{1}{2}]$; **1.7)** $(-\frac{9}{14}, \infty)$; **1.8)** $(1, \infty)$; **1.9)** $(-\infty, -\frac{1}{3})$; **1.10)** $(-\frac{13}{15}, \infty)$; **1.11)** $[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}]$

1.12) $[-1, -\frac{1}{3}]$; **1.13)** $(-\frac{7}{3}, -\frac{5}{6})$; **1.14)** $[\frac{2}{3}, \frac{7}{6}]$; **1.15)** $(-\frac{11}{3}, -3)$; **1.16)** $(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}]$;

1.17) $[-\frac{27}{10}, \infty)$ **1.18)** **R** ; **1.19)** $\varnothing$; **2.1)** $(\frac{2}{3}, 1)$; **2.2)** $[-\frac{1}{2}, \infty)$; **2.3)** $[3, \infty)$; **2.4)** $\varnothing$

3.1) $[-\frac{1}{36}, \infty)$; **3.2)** $(-\infty, \frac{2}{3}]$; **3.3)** $(-\infty, 1)$; **3.4)** **R**

DESIGUALDADES CUADRÁTICAS

Una desigualdad en la variable x se llama cuadrática cuando la podemos escribir en la forma $ax^2 + bx + c > 0$ (≥ 0), en donde a,b y c son constantes con $a \neq 0$.

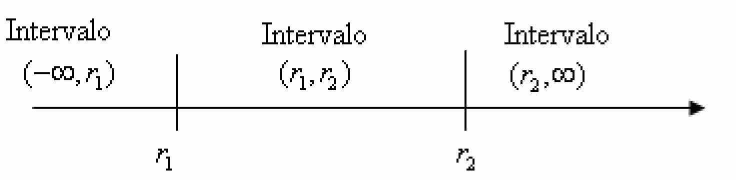
Para resolver esta desigualdad, es decir encontrar las x´s que la satisfacen, escribimos el lado izquierdo como el producto de dos expresiones lineales, esto es, factorizamos y examinamos el signo de los factores en los intervalos definidos por las raíces de los factores.

Observe que resolver una desigualdad del tipo

$$(x - r_1)(x - r_2) > 0$$

lo podemos interpretar como encontrar los valores de x tales que *el producto de los signos de los factores es positivo.*

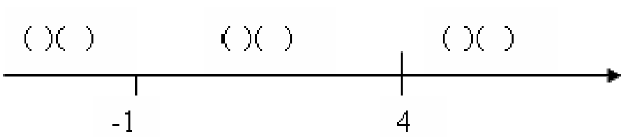
Por otro lado $(x - r_1)$ cambia de signo sólo en r_1. Efectivamente $x - r_1 > 0$ (lease $(x - r_1)$ positivo) si y sólo si $x > r_1$. Así que los únicos candidatos a cambio de signo en $(x - r_1)(x - r_2)$ son la raíces: r_1, r_2. Estos dos puntos definen tres intervalos en la recta real donde los factores no cambian de signo.



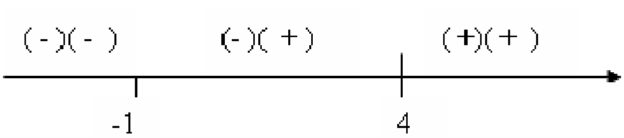
Es suficiente tomar un valor de prueba dentro de cada intervalo para averiguar el signo de cada factor en ese intervalo. Luego se multiplican los signos de los factores para obtener el signo de $(x - r_1)(x - r_2)$. Finalmente se averigua donde el producto de signo dio positivo.

Ejemplo 1.- Resolver la siguiente desigualdad cuadrática $x^2 - 3x - 4 > 0$.

Solución: Al tener la desigualdad en su forma canónica podemos factorizar como: (x-4)(x+1)



Colocamos las raíces de los factores en la recta real; en este caso –1 y 4. Estos números particionan la recta real en tres intervalos: $(-\infty,-1)$, $(-1,4)$ y $(4,\infty)$. En cada uno de ellos el signo de cada factor será el mismo. Colocaremos encima de cada intervalo dos pares de paréntesis en donde irá el signo del primer factor dentro del primer par de paréntesis y el signo del segundo factor dentro del segundo paréntesis.

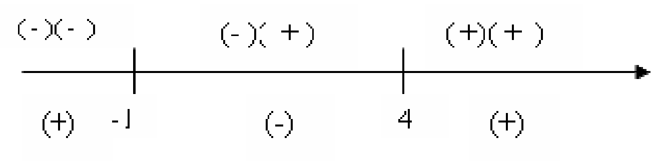


Entonces para determinar el signo de cada factor en cada intervalo usaremos valores de prueba pertenecientes a cada intervalo.

Para el intervalo $(-\infty,-1)$, usaremos como valor de prueba x=-10.

x+1=-9, pero sólo nos interesa el signo "-", igualmente x-4=-6, sólo colocaremos el "-".

En el intervalo (-1,4) podemos tomar como valor de prueba el 0, en este caso x+1 da "+" y x-4 da "-".



Debajo de cada intervalo colocaremos un par de paréntesis y dentro el signo resultante de la multiplicación de signos de los factores en el intervalo respectivo.
La solución a nuestra pregunta se basa en que intervalos el producto es estrictamente positivo, así concluimos que la solución es el conjunto $(-\infty,-1)$ U $(4,\infty)$.

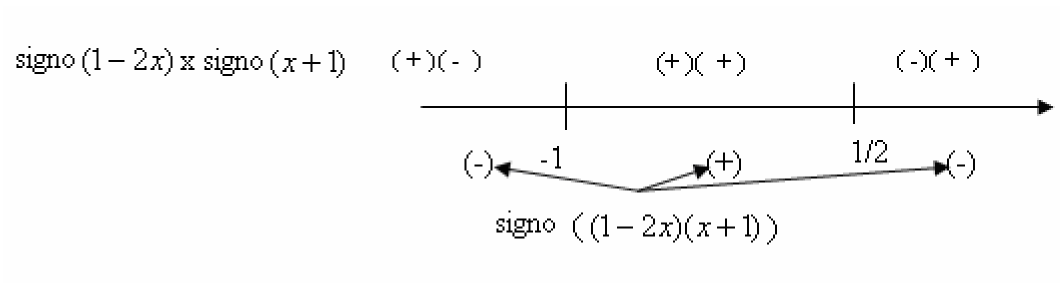
Concretemos los pasos a seguir para resolver desigualdades cuadráticas
1.- Escribir la desigualdad en su forma canónica: $ax^2+bx+c>0$ (<0; ≤ 0 ó ≥ 0).
2.- Factorizar el lado izquierdo. En caso que no se pueda la solución es trivial: **R o** $\varnothing$.
3.- Colocar las raíces de los factores en la recta real.
4.- Colocar dos pares de paréntesis encima de cada intervalo establecido por las raíces.
5.- Tomar valores de prueba, evaluar los factores en los valores de prueba y colocar el signo resultante en el paréntesis respectivo del factor.
6.- Debajo de cada intervalo definido por los factores colocar un par de paréntesis, realizar la multiplicación de signo de arriba y colocar el resultado en el paréntesis de abajo.
7.- Responder la pregunta. Por ejemplo si la desigualdad es <0, colocar los intervalos en donde el signo dio negativo. Análogamente en los demás casos.

Ejemplo 2.- Resolver la desigualdad $1 \geq 2x^2 + x$.
Solución:
Paso 1: $-2x^2 - x + 1 \geq 0$.
Paso 2: (Factorizar): Vamos a factorizar usando el método de las raíces. Usted puede chequear que las raíces de $-2x^2 - x + 1 = 0$ son –1 y ½. Así $-2x^2 - x + 1 = -2(x - 1/2)(x+1)$.

Vamos a escribir nuestro polinomio como el producto de dos factores. El –2 lo distribuimos en (x-1/2), para obtener finalmente:

$$-2x^2 - x + 1 = (-2x+1)(x+1)$$

(Intente de factorizar por Ruffini).
Paso 3: Colocar las raíces de los factores en la recta real. Estas son –1 y 1/2
Paso 4: Colocar dos pares de paréntesis encima de cada intervalo establecido por las raíces
Paso 5: Evaluar cada uno de los factores en los valores de prueba. En nuestro caso (1-2x) es el primer factor y (x+1) segundo factor. Como valores de prueba se pueden tomar –2, 0 y 1 respectivamente.



Paso 6: Colocar el signo resultante de cada multiplicación

Paso 7: Como nuestra desigualdad, $-2x^2 - x + 1 \geq 0$, es equivalente a $(1-2x)(x+1) \geq 0$, el conjunto solución será el intervalo donde el producto es positivo, este es [-1,1/2]. Observe que en este caso se incluye los extremos del intervalo por haber una igualdad en la desigualdad.
Conjunto Solución=[-1,1/2]

Comentario: Observe como efectivamente $(1-2x)$ cambia de signo en su raíz: $\frac{1}{2}$ y $(x+1)$ cambia de signo en su raíz: -1.

Ejercicio de desarrollo.- Resolver la desigualdad $x^2 \leq 4x$.

Observación importante: Puede ahorrarse trabajo si toma en cuenta que un factor cambia de signo sólo en su raíz.

DESIGUALDADES CUADRÁTICAS TRIVIALES

Algunas desigualdades resultan triviales. Un tipo de ellas es cuando la expresión cuadrática no tiene raíces reales y por consiguiente no se puede factorizar.

Ejemplo 1- Resolver la desigualdad $0 \geq x^2 + 1$.
Solución: Observe que el lado derecho no se puede factorizar. Esta desigualdad tiene una solución trivial: **R** o $\emptyset$. Hay una manera lógica para determinar cual conjunto. Como $x^2 + 1$ es un número estrictamente positivo, pues es la suma de dos números positivos. Así nunca va a ser menor que 0. Por tanto la solución es el conjunto vacío.

Comentario: 1) $x^2 + 1 \geq 0$ tiene como solución **R**.
2) Ya sabemos que si no se puede factorizar como producto de dos polinomios de segundo grado, entonces la solución es **R** ó $\emptyset$. Una manera de determinar cuál de las dos soluciones es consiste en tomar un valor de prueba: x_0. Si x_0 satisface la desigualdad entonces la solución es **R**, (no puede ser vacio $\emptyset$) . Si x_0 no satisface la desigualdad entonces la solución es $\emptyset$, (no puede ser **R**) .

Ejemplo 2- Resolver las siguientes desigualdades
a) $x^2 + x + 1 \leq 0$; **b)** $-x^2 + 2x - 4 \leq 0$.
Solución: a) No se puede factorizar. La solución es trivial. Se toma como valor de prueba 0 y se evalúa en la desigualdad: $0^2 + 0 + 1 \leq 0$. Como esta desigualdad se satisface entonces la solución es **R.**
b) No se puede factorizar. La solución es trivial. Se toma como valor de prueba 0 y se evalúa en la desigualdad: $-0^2 + 2 \cdot 0 - 4 \leq 0$. Como esta desigualdad no se satisface entonces la solución es $\emptyset$**.**

Otro tipo de desigualdad cuadráticas trivial tiene como solución **R-**$\{x_0\}$ o $\{x_0\}$. Son desigualdades que pueden ser escritas en la forma
a) $(x - x_0)^2 > 0$ ó
b) $(x - x_0)^2 \leq 0$

Es claro que la solución de **a)** es **R-**$\{x_0\}$ y la de **b)** la solución es $\{x_0\}$.

Ejemplo 3.- - Resolver la desigualdad $2x \leq x^2 + 1$.
Solución: Esta desigualdad puede ser escrita en forma canónica como
$$x^2 - 2x + 1 \leq 0.$$
Al factorizar tenemos

$$(x-1)^2 \leq 0$$

La única solución es cuando se hace 0 el lado izquierdo y ello ocurre cuando $x = 1$. Remarcamos que el lado izquierdo por estar elevado al cuadrado es mayor o igual a cero, nunca menor a cero.

OTROS TIPOS DE DESIGUALDADES QUE CONDUCEN A DESIGUALDADES CUADRÁTICAS

Otras formas de desigualdades caen en el caso de las desigualdades cuadráticas.

Ejemplo 1- Resolver la desigualdad $\dfrac{3x^2}{x^2+2} \leq 2$.

Solución: Primero tenemos que hacer el lado derecho de la desigualdad 0, para ello pasamos el 2 restando y expresaremos el lado izquierdo en una sola fracción:

$$\frac{3x^2}{x^2+2} - 2 \leq 0$$

Se realiza la suma de fracciones:

$$\frac{3x^2 - 2(x^2+2)}{x^2+2} \leq 0$$

$$\frac{x^2-4}{x^2+2} \leq 0$$

El denominador es siempre positivo, así que el signo depende de $x^2 - 4$. Es decir la desigualdad es equivalente a $x^2 - 4 \leq 0$. Esto es una desigualdad cuadrática a la que le aplicaremos los pasos dados.

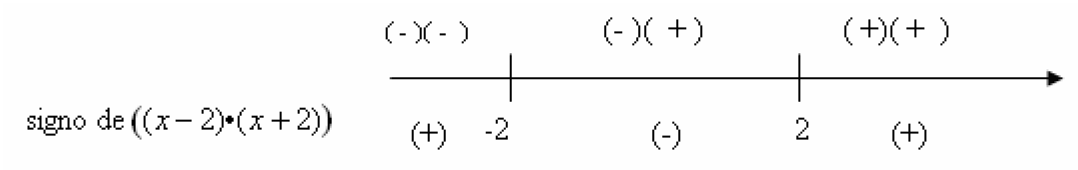
2. .- Factorizar el lado izquierdo, como producto de dos factores.

$$(x-2)(x+2) \leq 0$$

3 .- Colocar las raíces de los factores en la recta real. En este caso -2 y 2

4.- Colocar dos pares de paréntesis encima de cada intervalo establecido por las raíces.

5.- Tomar valores de prueba, evaluar los factores en los valores de prueba y colocar el signo resultante en el paréntesis respectivo del factor.



6.- Debajo de cada intervalo definido por los factores colocar un par de paréntesis, realizar la multiplicación de los signos de arriba y colocar el resultado en el paréntesis de abajo.

7.- Como la desigualdad original es equivalente a $(x-2)(x+2) \leq 0$. Así la solución de nuestra desigualdad es el intervalo [-2,2].

Ejercicio de desarrollo.- Resolver las siguientes desigualdades

a) $x^2 \leq -3x - 2$

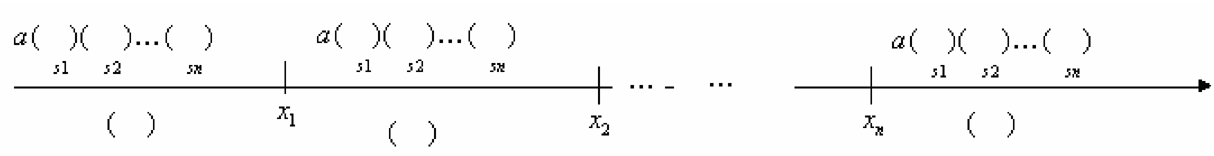
RESOLUCIÓN DE DESIGUALDADES POLINOMICAS Y RACIONALES POR EL MÉTODO DE MULTIPLICACIÓN DE SIGNOS.

Se puede extender el método vistos a desigualdades polinomicas de mayor potencia, incluso a desigualdades racionales. Si una desigualdad polinómica puede ser escrita de manera factorizada como:

$$a(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)\geq 0,$$

se procede de manera análoga como antes.

Se colocan las raíces en la recta real y se toman valores de pruebas a evaluar en cada uno de los paréntesis a fin de conocer el signo de los factores en cada uno de los intervalos definidos por las raíces, luego se hace la multiplicación de signos para conocer el signo de producto, para finalmente conseguir el conjunto solución en base al sentido de la desigualdad con respecto al cero.



Nota: Debe considerar también el signo de *a*

Ejemplo 2.- Resolver la desigualdad $x^3-2x^2<5x+6$.

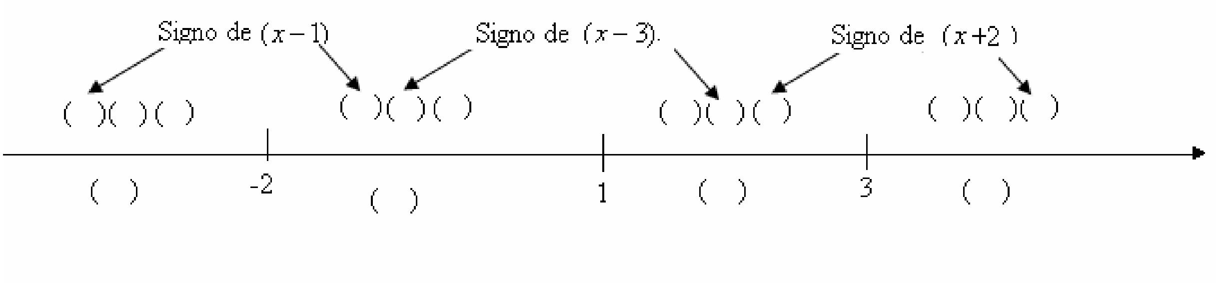
Solución: Recuerde escribirlo en forma canónica, es decir el cero en el lado derecho, no importa el sentido de la desigualdad

$$x^3-2x^2-5x-6<0$$

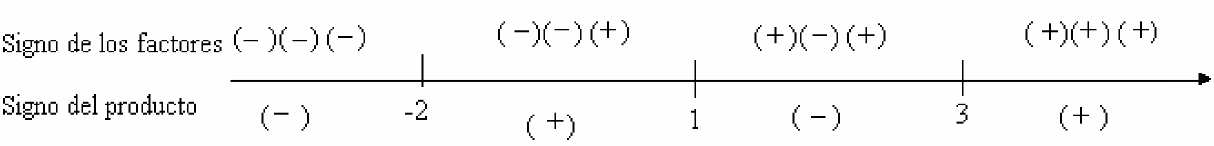
Se factoriza:

$$(x-1)(x-3)(x+2)<0.$$

Se colocan las raíces en la recta real.



Se determina el signo de cada factor en cada intervalo a través de un valor de prueba dentro del intervalo. Recuerde que el primer paréntesis se deja para el primer factor, el segundo para el segundo y así. Posibles valores de prueba para este ejercicio son -3, 0, 2 y 4 para el primer, segundo, tercer y cuarto intervalo respectivamente. El lector puede chequear.



Así como la desigualdad original es equivalente a $(x-1)(x-3)(x+2)<0$, el conjunto solución está dado por la unión de los intervalos donde este producto da negativo.

Conjunto solución: $(-\infty,-2)\cup(1,3)$.

Veamos un ejemplo de como resolver una desigualdad racional. De nuevo la idea es llevarla a la forma $\frac{p}{q} > 0$, donde *p* y *q* son polinomios que se expresan factorizados.

Ejemplo 3.- Resolver la desigualdad $1 \geq \frac{3}{x^2 - 1}$.

Solución: Antes que nada hay que darse cuenta que la expresión no está definida en -1 y 1 pues la división entre cero no lo está.
Primero pasamos todo de un solo lado a fin de conseguir el cero en el lado derecho.

$$1 - \frac{3}{x^2 - 1} \geq 0$$

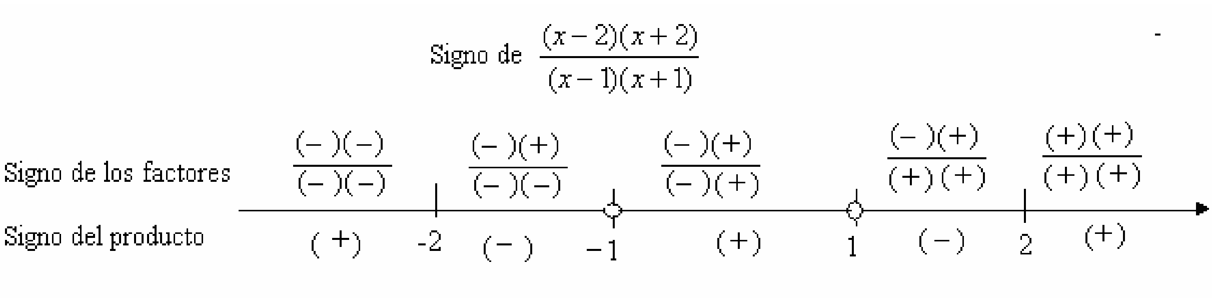
Se realiza la suma de fracciones:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} \geq 0$$

Se factoriza numerador y denominador

$$\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

Ahora colocamos lar raíces de los factores en la recta real y tomamos valores de prueba, el lector debe darse cuenta como se ha indicado los paréntesis en la misma forma que la expresión.



Los círculos de -1 y 1 son para recordarnos que la expresión no está definida en estos valores. Como nuestra desigualdad es equivalente a $\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)} \geq 0$, buscamos los intervalos donde este producto y cociente de signo es positivo: $(-\infty,-2] \cup (-1,1)$. Observe como se ha suprimido -1 y 1 en la respuesta..

Conjunto solución:. $(-\infty,-2] \cup (-1,1)$

Ejercicio de desarrollo.- Resolver las siguientes desigualdades

a) $x^3 > (3x + 28)x$

b) $\frac{2x}{2x+1} > \frac{x-1}{2x+1}$

EJERCICIOS

1) Resolver las siguientes inecuaciones:

1.1) $x^2 + x - 2 > 0$; **1.2)** $x^2 + x < 0$; **1.3)** $x^2 - 7x + 12 > 0$;

1.4) $16x^2 \geq 9x$; **1.5)** $x^2 \leq 16$; **1.6)** $x^2 > -2x$;

1.7) $x(x-2) > 3$; **1.8)** $4 - x^2 \geq 0$; **1.9)** $(3-5x)(1-2x) \leq 0$;

1.10) $2x^2 + x - 2 > x^2 + 2x$; **1.11)** $x^2 - 1 < x - 3$; **1.12)** $x < 2(x+2)^2$;

1.13) $16 - 15x \geq x^2$; **1.14)** $2x^2 + 3x - 5 \leq 0$; **1.15)** $x(x+1) > -1$;

1.16) $\dfrac{3t+3}{(t+1)^2} \leq 1$; **1.17)** $(2-x)(x-1) \leq 1 - x$; **1.18)** $4x \leq 2(x+2)(x-1)$;

1.19) $2x^2 + 2x - (x^2 + x + 6) > 0$; **1.20)** $x^2 + x - 2(x^2 + 3x) > 0$;

1.21) $x(x-4) + 4 \leq 0$; **1.22)** $(3x-2)(3x+2) - (3x+2)^2 \leq 0$

2) Resolver las siguientes inecuaciones:

2.1) $x^3 + 2x - x - 2 \geq 0$; **2.2)** $t^3 + 3t^2 + 2t < 2(t^2 + 3t + 2)$;

2.3) $-x^3 + 3x - 2 > 0$; **2.4)** $\dfrac{4}{3x+1} > 1 - 3x$;

2.5) $\dfrac{x}{x+1} < \dfrac{-x}{x+2}$; **2.6)** $\dfrac{2t}{t^2 - 4t + 3} \leq \dfrac{t+1}{1-t}$;

2.7) $\dfrac{2x+5}{2x^2 + x} \geq \dfrac{1}{x} - 2$;

Respuestas:

1.1) $(-\infty,-2) \cup (1,\infty)$; **1.2)** (-1,0) **1.3)** $(-\infty,3) \cup (4,\infty)$; **1.4)** $(-\infty,0] \cup [9/16,\infty)$;
1.5) [-4,4]; **1.6)** $(-\infty,-2) \cup (0,\infty)$; **1.7)** $(-\infty,-1) \cup (3,\infty)$; **1.8)** $[-2,2]$ **1.9)** [1/2,3/5];
1.10) $(-\infty,-1) \cup (2,\infty)$;1.11)vacio **1.12) R**; **1.13)** [-16,1];
1.14) [-5/2,1]; **1.15**) R; **1.16)** $(-\infty,-1) \cup [2,\infty)$; **1.17)** $(-\infty,1) \cup (3,\infty)$;
1.18) $(-\infty,-1] \cup [2,\infty)$;**1.19)** $(-\infty,-3) \cup (2,\infty)$;**1.20)** $(-5,0)$; **1.21)** $\{2\}$; **1.22)** $[-2/3,\infty)$

2.1) $[-2,-1] \cup [1,\infty)$; **2.2)** $(-\infty,-2) \cup (-1,2)$ **2.3)** $(-\infty,-2)$; **2.4)** $(-\frac{1}{3},\infty)$;

2.5) $(-2,-\frac{3}{2}) \cup (-1,0)$; **2.6)** $([-\sqrt{3},1) \cup [\sqrt{3},3)$; **2.7)** $(-\infty,-\frac{1}{2}) \cup (0,\infty)$;

APLICACIONES

Ejemplo 1.- Se estima que el costo total de producir q unidades diarias de un artículo es $C(q)=0.4q^2+3q+10$ UM y que cuando el precio por unidad es p las ventas serán de q artículos, donde $p=9-0.1q$ UM. ¿Cuál deberá ser el nivel de producción a fin de obtener utilidades?
Solución.- Recuerde que

$$\text{Utilidad}=\text{Ingreso total}-\text{Costo total}$$

y queremos una utilidad mayor que 0. En terminos de desigualdad:

$$\text{Utilidad}>0$$

El costo total en este caso lo dan directamente. Debemos encontrar el ingreso total a través de

$$\text{Ingreso}=qp$$

Sustituimos p de $p=9-0.1q$ y obtenemos

$$\text{Ingreso}=q(9-0.1q)$$

Así:

$$\text{Ingreso total}-\text{Costo total}>0$$

$$q(9-0.1q)-(0.4q^2+3q+10)>0$$

Simplificando

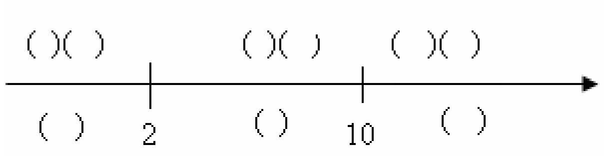
$$-0.5q^2+6q-10>0$$

Esta es una desigualdad cuadrática, la resolvemos usando la técnica vista, pero antes la multiplicamos por -2, nos queda entonces

$$q^2-12q+20<0.$$

Factorizando obtenemos

$$(q-10)(q-2)<0$$



El nivel de producción deberá estar entre 2 y 10 unidades diarias.

Ejemplo 2.- Un fabricante puede producir cada balón de fútbol a un costo de 40UM. Los consumidores han comprado 2000 balones en el año al precio de 50UM cada balón. El industrial quiere subir los precios y estima que por cada aumento de 1UM en el precio, las ventas bajan en 50 balones. ¿Qué precio deberá fijarse a cada balón con la finalidad de lograr una utilidad de por lo menos 30.000UM?
Solución: Este tipo de modelaje en el comportamiento del precio y la demanda se da con frecuencia. Una variable de uso frecuente para describir situaciones análogas como ésta la podemos definir como
x= número de incrementos de 1UM en el precio
La utilidad la podemos expresar como

Utilidad=(nºde balones vendidos) x (utilidad por balón)

Veamos como podemos obtener el número de balones vendidos a través de la variable definida. Si no hay aumento se vende 2000 balones.

Si se hace un solo aumento de 1UM se venden. $2000-1\cdot 50$

Si se hace un aumento de 2UM, esto es 2 incrementos de 1UM, se venden $2000-2\cdot 50$.

Si se hace un aumento de xUM, esto es x incrementos de 1UM, se venden $2000-x\cdot 50$.

Factorizando esta última tenemos que

nºde balones vendidos =50(40-x)

Por otro lado

Precio por balón= $50+1\cdot x$

La utilidad por balón es la diferencia entre el precio de venta y el costo unitario de 20UM. Esto es:

Utilidad por balón= (50+x)-40

=x+10

De aquí podemos expresar la utilidad total en términos de nuestra variable como:

$U(x)$=(50(40-x))(x+10).

Volviendo al objetivo del problema, se quiere conseguir el máximo número de balones para que la utilidad sea de al menos 30.000. Es decir

$$U(x)\geq 30.000$$

Sustituyendo, obtenemos

$$50(40-x)(x+10)\geq 30.000$$

la cual identificamos como una desigualdad cuadrática que se resuelve siguiendo las indicaciones dadas anteriormente

Desarrollando

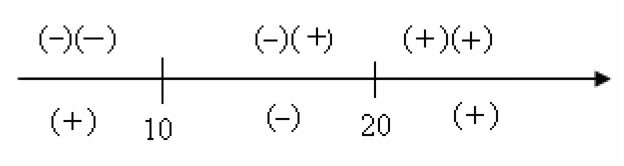
$$(40-x)(x+10)\geq 600$$

$$40x-x^2-10x+400\geq 600$$

$$x^2-30x+200\leq 0$$

Se factoriza

$$(x-20)(x-10)\leq 0$$



La respuesta de esta última desigualdad es:

$$10\leq x\leq 20$$

Sabemos que el precio es $p=50+1\cdot x$.

Así que sumando 50 a cada miembro de la desigualdad tenemos que

$$50+1\cdot 10\leq 50+1\cdot x\leq 50+1\cdot 20$$

$$60\leq p\leq 70$$

Esto es, se deberá fijar el precio entre 60 y 70UM para lograr utilidades mayores de 30.000U.M.

PROBLEMAS DE ECONOMÍA

1) Un fabricante puede producir cintas de video a un costo de 2UM por casete. Los casetes se han vendido a 5UM cada uno y a ese precio, los consumidores han comprado 4000 casetes al mes. El fabricante planea incrementar el precio de los casetes y estima que por cada 1UM de aumento en el precio se venderán 400 casetes menos. ¿Qué precio podrá fijar el fabricante a fin de obtener utilidades de por lo menos 14.400 UM? (Respuesta: entre 6 y 12 U.M.)

2) Un fabricante puede producir y vender q unidades de un artículo cada mes al precio de p UM por artículo, con p= 400 -q. ¿Cuántas unidades deberá producir y vender por mes para obtener ingresos de al menos 30.000 UM? (Resp. Entre 100 y 300 unidades)

3) Un fabricante puede producir y vender q unidades de un artículo cada mes al precio de p UM por artículo, con p= 200 -q. si el costo de producir q artículos es 120 ¿Cuántas unidades deberá producir y vender por mes para obtener utilidades de al menos 1.500 UM? (Entre 30 y 50 unidades)

4) Un fabricante puede vender cada unidad que produce a un precio de 400-2qUM. El costo de producir un artículo es 200 y los gastos mensuales de mantenimiento son 3200UM ¿Cuántas unidades deberá producir y vender por mes para obtener alguna utilidad? (Resp. Entre 20 y 80 unidades)

5) Un detallistas de mangos sabe que si fija un precio de p UM el kilo venderá q= 100 -2 p kilos de mangos. ¿Cómo debe fijar el precio a fin de obtener ingresos mayores a 1200UM? (Entre 20 y 30UM)

6) Se estima que si en una hectárea se siembran 60 naranjos la producción por árbol será de 450 naranjas anuales y que por cada árbol adicional que se siembre la producción por árbol disminuirá en 5 unidades. ¿Cuántos árboles deberá plantarse por hectárea a fin de tener una producción de al menos 28000 naranjas anuales? (Resp.- Entre 70 y 80 naranjos)

7) El número y de unidades vendidas cada mes de cierto artículo depende de la cantidad de UM x invertidas en publicidad dada por la relación $y = 100 + 8x - 0.1x^2$. ¿Cuánto debería gastar en publicidad a fin de obtener un volumen de ventas mayor a 250 unidades? (Resp. Entre 30 y 50 UM)

8) Un fabricante puede vender q unidades de un artículo cada mes al precio de p UM por artículo, con p= *100* -q. a)¿Cuántas unidades deberá producir y vender por mes para obtener ingresos de al menos 1.600 UM?b B) Si el costo de mano de obra y materiales es de 10 UM y los costos fijos son de 200UM ¿Cuántas unidades deberá producir y vender por mes para obtener ingresos de al menos 800 UM? (Resp. a) Entre 20 y 80 unidades); b) Entre 10 y 80.)

9) El modelo de costos de una empresa está dado por:

$$C(q) = 300 + 3q - 0.02q^2$$

Si la empresa vende todo lo que produce a 8UM a) ¿Cuántas unidades de producir y vender a fin de tener alguna utilidad? b) ¿Cuántas unidades de producir y vender a fin de tener al menos 1.500UM de utilidad? (Resp. a) Más de 50 unidades b) Más de 200 unidades)

10) Un productor tiene unas ventas anuales de 100.000 unidades de un artículo con un precio de 50UM. El gobierno planea colocar un impuesto sobre el precio de venta y estima que por cada UM de impuesto las ventas bajarán en 500 unidades. ¿Cuál es el rango de impuesto que puede establecer a fin que los ingresos sean mayores a 4 millones? (de 0 a 40UM).

PROBLEMAS EN CIENCIAS NATURALES Y DEL AGRO.

1) Un detallista de mangos sabe que si fija un precio de p UM el kilo venderá q= 600 -3 p kilos de mangos. ¿Cómo debe fijar el precio a fin de obtener ingresos mayores a 8000UM? (Entre 200 y 400UM)

2)Se estima que si en una hectárea se siembran 60 naranjos la producción por árbol será de 450 naranjas anuales y que por cada árbol adicional que se siembre la producción por árbol disminuirá en 5 unidades. ¿Cuántos árboles deberá plantarse por hectárea a fin de tener una producción de al menos 28000 naranjas anuales? (Entre 70 y 80 naranjos

3) El porcentaje de sobrevivencia de un cierto tipo de larvas a una temperatura constante T(grados Celsius) al cabo de una semana es modelado por la fórmula

$P(T)=-1.42T^2+68T-746$ para $20 \leq T \leq 30$

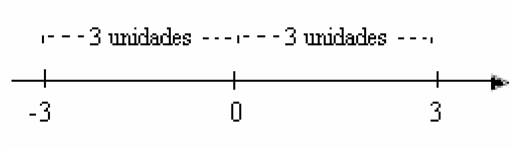
¿Cuales son los niveles de temperatura en que se consigue más de un 60% de sobrevivencia?

4) El tamaño T de una cosecha depende del nivel de nitrógeno N de acuerdo al siguiente modelo

$T(N) = \dfrac{2N}{4+N^2}$. ¿Cuáles deben ser los niveles de nitrógeno a fin que la cosecha sea mayor que 0.4?

VALOR ABSOLUTO

Cualquier número a tiene su representación en la recta real. El valor absoluto de un número representa la distancia del punto a al origen. Observe en el dibujo que la distancia del 3 al origen es 3 unidades, igualmente la distancia del punto -3 al origen es 3. En notación, esto es $|-3| = 3$.



Las barras se leen como el valor absoluto de lo que está dentro de ellas. En el valor absoluto no importa en que lado de la recta real está representado el número. Analíticamente podemos ver que si a es positivo, es decir está a la derecha del cero, entonces $|a| = a$ y si está a la izquierda del origen, es decir si a es negativo, entonces el valor absoluto le cambia el signo, esto es $|a| = -a$. Tenemos entonces la siguiente definición

Definición.- El valor absoluto de un número real, x, se define como**:**

$$|x| = \begin{cases} x, & si \quad x \geq 0 \\ -x, & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Veamos los siguientes ejemplos

Ejemplo 1.-

a.- $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

b.- $\left|-\frac{1}{2}\right| = -(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Observe como el valor absoluto a una cantidad positiva la deja igual y a una cantidad negativa le cambia el signo.

c.- Si x>2 entonces $|x-2| = x-2$, pues x-2>0 y así usamos la primera parte de la definición. Visto de otra manera a la expresión que le estamos tomando valor absoluto es de signo positivo y el valor absoluto lo deja igual.

d.- Si x<2 entonces $|x-2| = -(x-2)$, pues x-2<0 y así usamos la segunda formula de la definición. Visto de otra manera a la expresión que le estamos tomando valor absoluto es de signo negativo y el valor absoluto le cambia el signo.

e.- $\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & si \quad x > 0 \\ -1 & si \quad x < 0 \end{cases}$

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Si x es una incógnita en la expresión $|x-3|$, entonces no sabemos si x-3 es positivo o negativo. Ahora bien, si tenemos la ecuación:

$$|x-3|=5,$$

deberíamos considerar las dos posibilidades de signo. Es decir hay dos alternativas:

$$x\text{-}3=5 \quad \text{o} \quad x\text{-}3=\text{-}5$$

La primera es en el caso que x -3 sea positivo, la segunda en la situación que sea negativo. Resolviendo las dos ecuación, tenemos que

$$x=8 \quad \text{o} \quad x=\text{-}2$$

Efectivamente estos valores de x satisfacen la ecuación: $|x-3|=5$.

Veamos más ejemplos de resolución de ecuaciones en valor absoluto.

Ejemplo 1.- Resolver $|x-4|=3$

Solución: Hay dos posibilidades

$$x\text{-}4=3 \quad \text{o} \quad x\text{-}4=\text{-}3.$$

Las soluciones de ellas son 7 y 1.

El lector puede comprobar que si sustituimos estos valores en la ecuación ellos satisfacen la igualdad.

Ejemplo 2.- Resolver $3\,|5-4x|=9$

Solución: Sabemos resolver una ecuación con valor absoluto cuando el valor absoluto está solo en el lado izquierda, así que lo llevamos a esta forma, dividiendo entre 3. De esta manera la ecuación dada es equivalente a:

$$|5-4x|=3$$

Ahora esta ecuación en valor absoluto es equivalente a

$$5\text{-}4x=3 \quad \text{ó} \quad 5\text{-}4x=\text{-}3$$

La solución de ellas son $\frac{1}{2}$ y 2.

Podemos representar el conjunto solución de nuestra ecuación $3|5-4x|=9$ a través de la notación de conjunto como: $\{\frac{1}{2},2\}$.

Recuerde que un valor absoluto siempre es mayor o igual a cero, nunca negativo.

Ejemplo 3.- Resolver $|x-5|=-2$

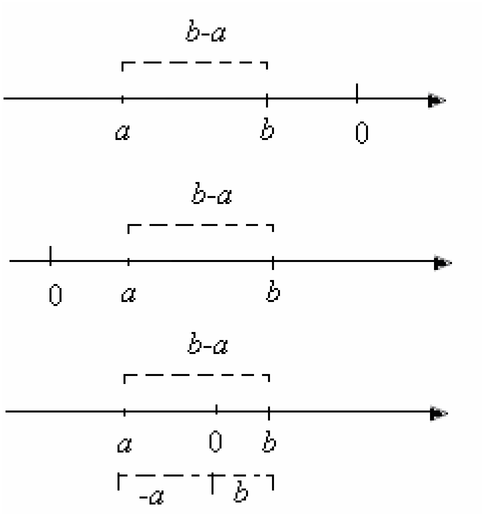
Solución: Esta igualdad es imposible de cumplirse. Por tanto la solución es vacía.

Ejercicio de desarrollo.- Resolver las siguientes ecuaciones en valor absoluto

a) $3|x-4|+1=7$ **b)** $3|2x-1|+8=1$

OTRA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA USANDO VALOR ABSOLUTO.

Recordemos que $|x|$ representa la distancia del punto *x* al origen.



En la figura se puede observar que en cualquier situación tenemos que

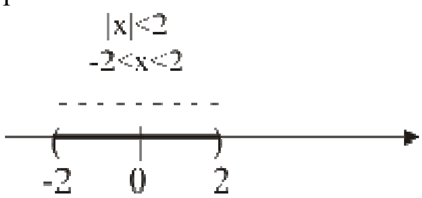
$$|a-b|=|b-a|$$

representa la distancia entre *a* y *b*

Ejemplo 4- Conseguir todos los puntos cuya distancia a 3 es igual a 4.
Solución: Sea *x* los puntos cuya distancia a 3 es igual a 4.
Entonces $|x-3|=4$. El lector puede chequear que las soluciones de está ecuación son -1 y 7.

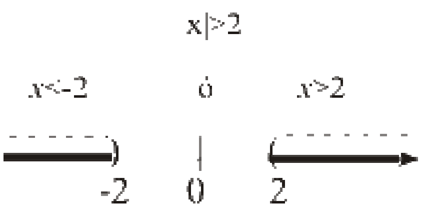
DESIGUALDADES CON VALORES ABSOLUTOS

Esta interpretación geométrica del valor absoluto nos puede ayudar a conseguir un método para resolver ecuaciones en valor absoluto.



La expresión $|x|<2$ la podemos interpretar como los *x* cuya distancia al origen es menor que 2, estos *x* son todos los números que están entre -2 y 2. Así la desigualdad

$$|x|<2 \text{ es equivalente a } -2<x<2$$

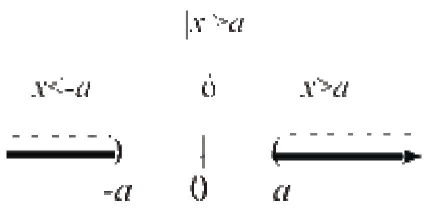


La expresión $|x|>2$ la podemos interpretar como los *x* cuya distancia al origen es mayorr que 2, estos *x* son todos los números mayores que 2 y los menores que -2. Así la desigualdad

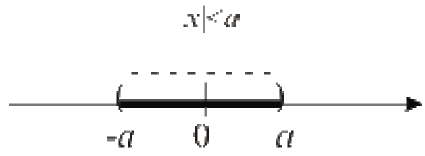
$$|x|>2 \text{ es equivalente a } x<-2 \text{ ó } x>2$$

Generalizando, **si** $a>0$, tenemos dos tipos de situaciones

FORMA 1) $|x|>a$ si y sólo si $x<-a$ ó $x>a$.



Este tipo de conjunto se suele representar usando el símbolo unión, $\cup$, y se escribe como $(-\infty,-a)\cup(a,\infty)$, que significa todos los números que están en $(-\infty,-a)$ ó en (a,∞).



FORMA 2) $|x|<a$ si y sólo si $-a<x<a$

Estas equivalencias entre desigualdades nos permitirán resolver desigualdades en valores absolutos al convertirlas en desigualdades sin valor absoluto. Una estrategia a utilizar será interpretar que x representa una expresión más complicada.

Ejemplo 1.- Convertir las siguientes desigualdades en otra proposición equivalente sin valor absoluto.
a) $|2x-1|>1$; **b)** $|2-5x|\leq 3$; **c)** $4-|1-x|\leq 1$.

Solución:

a) Usamos la forma 1.

$|2x-1|>1$ es equivalente a $2x-1>1$ o $2x-1<-1$.

(Note que $2x$-1 hace las veces de x)

b) Usamos la forma 2. Observe que un resultado similar a 2 se cumple en el caso de la desigualdad con $\leq$.

$|2-5x|\leq 3$ es equivalente a $-3\leq 2-5x\leq 3$.

c) Para usar algunas de las dos formas anteriores, debemos primero dejar el valor absoluto completamente despejado en el lado izquierdo de la desigualdad.

$4-\lvert 1-x\rvert\leq 1$	Como el 4 está sumando, pasa restando al otro lado
$-\lvert 1-x\rvert\leq -3$	Multiplicamos por – ambos lados de la desigualdad, hay que recordar que la desigualdad cambia de sentido
$\lvert 1-x\rvert\geq 3$.	Esta es la forma 2

Finalmente:

$|1-x|\geq 3$ es equivalente a $1-x\geq 3$ ó $1-x\leq -3$.

Ejercicio de desarrollo.- Convertir las siguientes desigualdades en otra expresión equivalente sin valor absoluto: **a)** $|3x-1|-4\leq 3$ **b)** $2|x-2|-1\leq 2$

Recuerde: Despejar completamente el valor absoluto en el lado izquierdo luego expresar la desigualdad planteada en otra equivalente usando forma 1 o forma 2 según sea el caso. Estas expresiones equivalente serán las que nos conducirán a la solución.

NO PUEDE QUITAR ARBITRARIAMENTE EL VALOR ABSOLUTO EN UNA DESIGUALDAD!

LLEVELA A LA FORMA 1 O FORMA 2 A FIN DE TENER UNA PROPOSICIÓN SIN VALOR ABSOLUTO

Ejemplo 2.- Resolver **a)** $|2x-1|\leq 3$ **b)** $10-3|2x-3|<4$

Solución

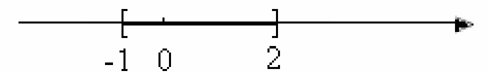
a) $|2x-1|\leq 3$ es equivalente a $-3\leq 2x-1\leq 3$, es decir tiene las mismas soluciones. Esta última es la que resolvemos:

$-3+1\leq 2x-1+1\leq 3+1$ Primero sumamos 1 a cada lado de la desigualdad

$-\frac{2}{2}\leq x\leq \frac{4}{2}$ Dividimos entre 2 cada miembro de la desigualdad.

$-1\leq x\leq 2$.

Así la solución son todos los números contenidos en el intervalo cerrado [-1,2]



b) Primero, se busca escribir esta desigualdad con el valor absoluto despejado del lado izquierdo. En la desigualdad $10-3|2x-3|<4$ primero pasamos el 10 restando al otro lado

$-3|2x-3|<-6$ Dividimos entre -3 ambos lados.

$|2x-3|>2$ Recuerde que la desigualdad cambia de sentido

Esta desigualdad es de la forma 2. Por tanto es equivalente a

$$2x-3>2 \quad \text{ó} \quad 2x-3<-2$$

Este tipo de desigualdades dobles no pueden ser resueltas de la manera sintetizada como en el caso a). En el lado izquierdo resolvemos la primera y en el lado derecho resolvemos la segunda desigualdad, manteniendo el conectivo “o”

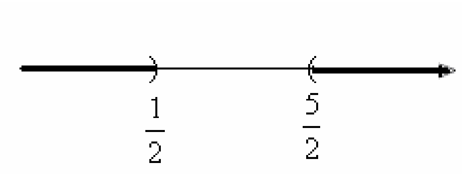
$2x-3>2$ ó $2x-3<-2$ Sumamos 3 a cada lado de la desigualdad

$2x>5$ ó $2x<1$ Se divide entre 2 ambos miembros

$x>\frac{5}{2}$ ó $x<\frac{1}{2}$

Así las soluciones de la desigualdad $10-3|2x-3|<4$ es el conjunto $(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{5}{2},\infty)$

Representados por



Ejercicio de desarrollo.-.- Resolver

a) $|1-x|\geq 3$ **b)** $7-\frac{3}{2}|2x-1|<4$

El siguiente ejemplo muestra algunas desigualdades en valor absoluto cuya soluciones son **triviales: R** ó $\varnothing$ o un punto.

Ejemplo 3.- Resolver **a)** $|x-1|\leq -3$ **b)** $1-|2x-3|<4$; **c)** $|x-3|\leq 0$

Solución:

a) En la primera desigualdad estamos comparando un valor absoluto, el cuál es positivo, con un número negativo. Obviamente esta relación no se cumple para ningún *x*. Así la solución es el conjunto $\varnothing$.

b) En este caso primero despejamos el valor absoluto en el lado izquierdo, dando $|2x-3|>-3$. Para cualquier valor de *x* tenemos que$|2x-3|\geq 0$, esto es por la propia definición de valor absoluto y por tanto mayor que -3. Así la solución de está desigualdad son todos los número reales **R**.

c) Como el valor absoluto siempre da una cantidad mayor o igual a 0, la única forma que se cumpla esta proposición es cuando $|x-3|=0$ y esto ocurre solo cuando $x=3$. Así que la única solución de esta desigualdad es el punto $x=3$

Comentarios:

1) Observe que el ejemplo 3a no es de la forma 2, pues a tiene que ser positivo. Por la misma razón, $|2x-3|>-3$ no es de la forma 1.

2) Otro tipo de soluciones triviales es **R** menos un punto. Por ejemplo
$|x-1|>0$ tiene como solución **R**-$\{1\}$.

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

A continuación damos algunas propiedades útiles del valor absoluto:

1.- $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$.

2.- $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$, con $b\neq 0$.

3.- $|x|=\sqrt{x^2}$.

4.- $|a-b|=|b-a|$.

Ejemplo 4.-

a) La ecuación $\dfrac{|6-6x|}{3}=1$ es equivalente a las siguientes:

$\dfrac{|3(2-2x)|}{3}=1$ Se factoriza

$\dfrac{|3||2-2x|}{3}=1$ Propiedad de la multiplicación

$\dfrac{3|2-2x|}{3}=1$ Se simplifica

$|2x-2|=1$ Propiedad 4

b) La desigualdad $\left|\dfrac{1-2x}{3}\right|\leq 4$ es equivalente a las siguientes:

$\dfrac{|1-2x|}{|3|}\leq 4$ Propiedad del cociente

$\dfrac{|1-2x|}{3}\leq 4$ Propiedad 4

$|2x-1|\leq 12$

En ocasiones se utiliza el valor absoluto para expresar ciertas relaciones entre cantidades:

Ejemplo 5.- Escriba las siguientes proposiciones en términos de desigualdades y valores absolutos

a.- x está a más de 3 unidades de -7: $|x-(-7)|>3$

b.- x está al menos a 3 unidades de 5: $|x-5|\geq 3$

c.- x dista de 7 en menos de 3 unidades: $|x-7|<3$

d.- El número de horas que trabaja una máquina sin interrupciones, x, difiere de 12 en menos de 2 horas: $|x-12|<2$.

e.- El caudal en un instante dado dista del caudal medio en más de 3 unidades: $|c_i-c_m|>3$

EJERCICIOS

1) Resolver las siguientes ecuaciones:

1.1) $|3-x|=4$; **1.2)** $|5x-3|=2$; **1.3)** $1-|2-x|=-6$

1.4) $3-2|4x-1|=9$; **1.5)** $\frac{3}{2}|3x-1|=6$ **1.6)** $|3-x|+|x|=0$;

1.7) $|x|+|x-1|=-3$; **1.8)** $\left|\frac{1-x}{2}\right|=1$; **1.9)** $\left|x-\frac{3}{2}\right|=2$;

1.10) $\frac{|1-x|}{3}=9$; **1.11)** $\left|\frac{1-2x}{x}\right|=4$; **1.12)** $|1-x|=|3x-1|$

2) Resolver las siguientes desigualdades. Represente las soluciones en notación de intervalos y geométricamente

2.1) $|2-x|\geq 2$; **2.2)** $|x-3|<5$; **2.3)** $2-|4-x|\leq -5$;

2.4) $2|4x-1|>9$; **2.5)** $\frac{3}{2}|2x-3|<5$; **2.6)** $\frac{|1-x|}{2}\leq 2$;

2.7) $3|x-1|+1>-3$; **2.8)** $\left|\frac{1-x}{2}\right|\leq -1$; **2.9)** $1+\left|x-\frac{3}{2}\right|\geq 2$;

2.10) $\left|\frac{2-x}{3}\right|-\frac{1}{2}\geq 2$; **2.11)** $|1-x|+|3x-1|\leq 0$; **2.12)** $\frac{|1-x|}{2}\leq 0$

3) Escriba las siguientes proposiciones en términos de desigualdades y valores absolutos

3.1) x está entre -3 y 3, ambos inclusive.
3.2) la distancia entre x y -2 es cuanto mucho 3
3.3) El precio, p, en la bolsa de unos papeles comerciales difiere de 150UM en menos de 20.
3.4) x es mayor que 4 o menor que -4
3.5) x no está a más de 4 unidades de 5.
3.6) La temperatura se aleja de 20ºC en no más de 2 grados

Respuestas:

1.1) {-1,7}; **1.2)** {1,1/5} **1.3)** {-5,9}; **1.4)** $\varnothing$ **1.5)**{-1,5/3};**1.6)** $\varnothing$ **1.7)** $\varnothing$
1.8) {-1,3} **1.9)** {-1/2,7/2} ; **1.10)** {-26,28} **1.11)** {-1/2,1/6}; **1.12)** {1/2,0}
2.1) $(-\infty,0]\cup[4,\infty)$; 2.2) (-2,8) **2.3)** $(-\infty,-3]\cup[11,\infty)$; **2.4)** $(-\infty,-7/8]\cup[11/8,\infty)$

2.5) (-1/6,19/6); **2.6)** [-3,5]; **2.7) R ; 2.8)** $\varnothing$ **2.9)** $(-\infty,\frac{1}{2}]\cup[\frac{5}{2},\infty)$;

2.10) $(-\infty,-11/2]\cup[19/2,\infty)$; **2.11)** $\varnothing$; **2.12)** {1}

3.1) $|x|\le 3$ **; 3.2)** $|x+2|\le 3$ **; 3.3)**$|p-150|<20$ **; 3.4)**$|x|\ge 4$ **; 3.6)** $|p-20|<2$