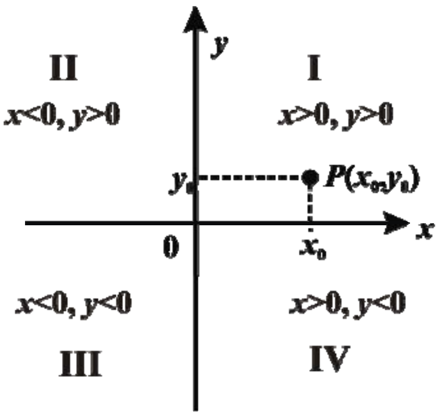
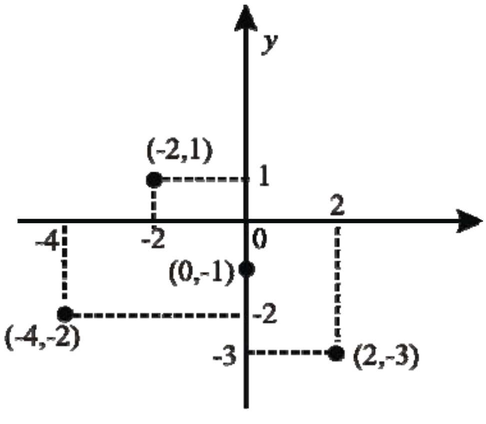
SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

Un par ordenado de números reales (x_0, y_0) lo podemos representar en el plano en un sistema de coordenadas cartesianas o rectangulares o plano *xy*. Este sistema está constituido por dos rectas perpendiculares orientadas, llamadas ejes coordenadas y la intersección de ellas se llama origen. En la figura el eje horizontal es llamado eje *x* y el eje vertical es el eje *y*. Estos ejes dividen al plano en cuatro partes llamadas primer, segundo, tercer y cuarto cuadrante, denotados por I, II, III, IV respectivamente.



Como ya hemos dicho un par ordenado de números reales (x_0, y_0) lo podemos representar mediante un punto *P* en este plano. El número x_0 se llama abscisa o coordenada *x* del punto y el número y_0 se conoce como la ordenada o coordenada *y* del punto. Para graficar se procede como sigue. Se localiza el número x_0 en el eje (real) *x* y se traza una perpendicular al eje, igual se procede con el número y_0 en el eje *y*. La intersección de estas dos rectas es un punto en el plano *xy* y es la representación del par (x_0, y_0). Recíprocamente, podemos ver que cada punto *P* en el plano representa a un par de números reales ordenados.

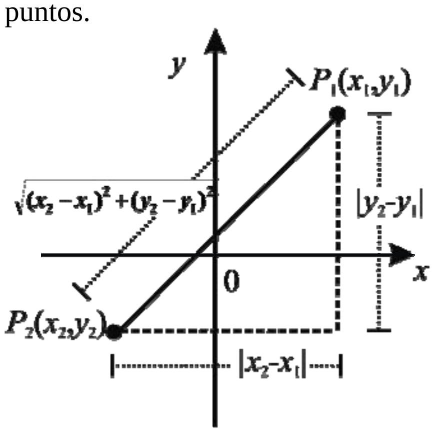
Ejemplo 1.- Represente en el plano cartesiano los puntos (-2,1); (-4,-2); (0,-1); (2,-3) y (5,0).
Solución:



DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

A continuación vamos a mostrar cómo calcular la distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

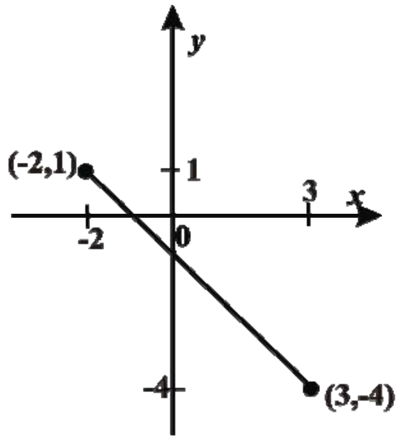
En la figura podemos ver como formamos un triángulo rectángulo, la longitud de la hipotenusa es el valor a calcular. Observe que los catetos se pueden calcular al conocer las coordenadas de los dos puntos.



Usando el Teorema de Pitágoras obtenemos **la fórmula de distancia entre dos puntos:**

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo 1.- Representar gráficamente los puntos $P_1(-2,1)$ y $P_2(3,-4)$ y calcular la distancia entre estos dos puntos.



Solución: Por la fórmula de distancia entre dos puntos tenemos

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{(3-(-2))^2 + (-4-1)^2} \\ &= \sqrt{(5)^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{25+25} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

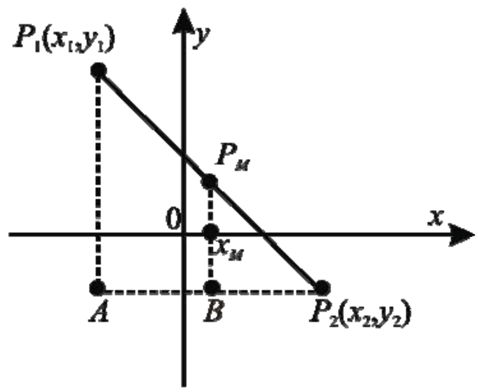
Comentario.- Es claro, por el propio concepto de distancia, que la distancia de P_1 a P_2 es la misma que de P_2 a P_1. Analíticamente podemos verificar que

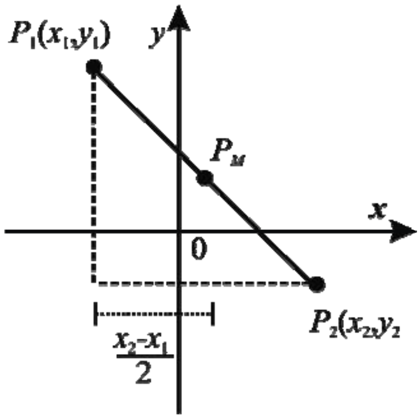
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d(P_2, P_1)$$

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO DE RECTA

En esta sección se quiere mostrar la fórmula para las coordenadas $P_M(x_M,y_M)$ del punto medio del segmento que une los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

P_M está en la mitad entre P_1 y P_2. Del dibujo podemos apreciar que x_M, también está en la mitad entre x_1 y x_2. Este resultado lo podemos deducir a través de la semejanza entre los triángulos P_1AP_2 y P_MBP_2.





La distancia entre x_M y x_1 es $\frac{(x_2-x_1)}{2}$. Así x_M está $\frac{(x_2-x_1)}{2}$ unidades más allá de x_1.

Esto es $x_M = x_1 + \frac{(x_2-x_1)}{2}$.

Realizando la suma y simplificando queda:

$$x_M = \frac{x_1+x_2}{2}$$

Igualmente podemos verificar que

$$y_M = \frac{y_1+y_2}{2}$$

Es decir: *las coordenadas del punto medio es el promedio de las coordenadas*.

En conclusión

$$(x_M, y_M) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Ejemplo 2.- Calcular el punto medio del segmento de recta que une a $P_1(2,1)$ y $P_2(-2,-3)$. Compruebe que $d(P_1,P_M) = \frac{d(P_1,P_2)}{2}$

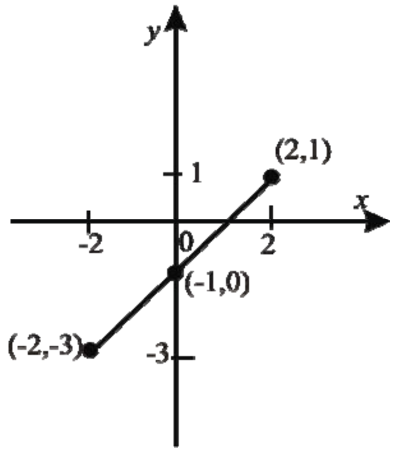
Solución:

$$(x_M, y_M) = \left(\frac{2+(-2)}{2}, \frac{1+(-3)}{2}\right)$$

$$= (0,-1)$$

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-1)^2} = 4\sqrt{2}$$

$$d(P_1,P_M) = \sqrt{(2-0)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$



Efectivamente

$d(P_1,P_M) = \frac{d(P_1,P_2)}{2}$, pues $2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2}$.

Ejercicio de desarrollo.- Calcular el punto medio del segmento de recta que une a los puntos $P_1(3,1)$ y $P_2(0,-4)$. Compruebe que $d(P_1,P_M) = d(P_2,P_M)$

EJERCICIOS

1) Represente en el plano cartesiano los puntos (-2,1); (-4,-2); (0,2); (2,-3) y (5,0).

2) Representar gráficamente los puntos: P_1(-2,1) y P_2(3,-4) y calcular la distancia entre estos dos puntos.

3) Representar gráficamente los puntos P_1(2,-1) y P_2(0,4) y calcular la distancia entre estos dos puntos.

4) Calcular el punto medio del segmento de recta que une P_1(2,1) y P_2(-6,-3). Compruebe que $d(P_1,P_M)=\dfrac{d(P_1,P_2)}{2}$

5) Calcular el punto medio del segmento de recta que une a los puntos P_1(2,1) y P_2(6,3). Compruebe que $d(P_1,P_M)=d(P_2,P_M)$

6) Determine todos los puntos en el eje *y* que están a una distancia de 5 unidades del punto (3,4).

7) Determine todos los puntos de la forma (x,2x) que están a una distancia de 4 unidades de (2,4).

8) Si dos puntos son de la forma (3,y_1) y (3,y_2). Deduzca una fórmula para la distancia entre estos puntos en que no aparezcan radicales. Generalice.

9) Localice la coordenada *x* de un punto *P* en el plano con coordenada *y*=-4 tal que este punto *P* equidiste de los puntos (2,1) y (5,2).

10) Dados los puntos A(2,-1) y B(-2,4). Determine los puntos del segmento AB que están a un cuarto de distancia de algunos de los extremos de este segmento.

11) Determine un punto situado en el eje *x* cuya distancia al punto (1,2) es $\sqrt{5}$.

12)) Diga cuál de las siguientes proposiciones son verdaderas. Justifique

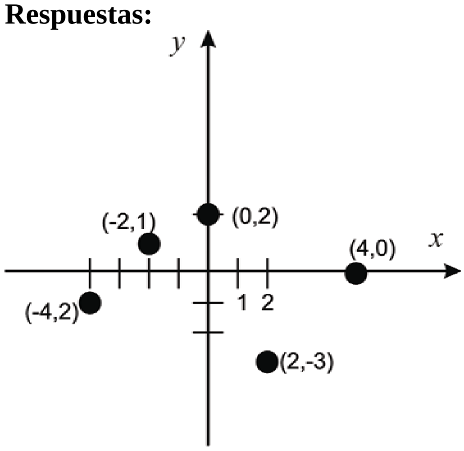
12.1) ( ) Si un punto tiene ordenada 0 entonces está sobre el eje *y*

12.2) ( ) La distancia entre $(a+b,0)$ y $(a-b,0)$ es $2b$

12.3) ( ) Si un punto tiene ordenada -3 y está sobre el eje y entonces el punto es $(0,-3)$

12.4) ( ) La distancia entre los puntos (a,b) y (0,0) es $a+b$

Respuestas:



2) $5\sqrt{2}$; **3)** $\sqrt{29}$; **4)** (-2,-1); **5)** (4,2); **6)** (0,0) y (0,8) ; **7)** $x=\dfrac{10\pm 4\sqrt{5}}{5}$; **8)** $|y_2-y_1|$;

9) $\dfrac{16}{3}$; 10) $(1,1/4),(-1,11/4)$ **11)** (2,0);(0,0); **12.1)** (F) No está sobre el eje *x*

12.2) (F) La distancia es una cantidad positiva, eventualmente 2b puede ser negativo. Podemos calcularla usando la formula de distancia entre dos puntos $\sqrt{(a-b-(a+b))^2+0}=\sqrt{(2b)^2}=|2b|$. También podemos calcularla usando la fórmula de distancia entre dos puntos de la recta real que usa el concepto de valor absoluto.

12.3) (V) Si un punto tiene ordenada -3 y está sobre el eje y entonces el punto es $(0,-3)$

12.4) (F) Podemos calcular la distancia usando la formula de distancia entre dos puntos $\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}=\sqrt{a^2+b^2}\neq a+b$

GRAFICAS DE ECUACIONES

Es frecuente que la relación entre dos variable venga dada a través de una ecuación. Por ejemplo la utilidad mensual de una carpintería dedicada a la elaboración de pupitres depende o está relaciona con la cantidad de pupitres que elabora en el mes y viene dada, por ejemplo, por la ecuación $U = 1.200 + 3q$.

Para describir mejor el comportamiento entre dos variables relacionadas a través de una ecuación es útil construir una representación geométrica de la ecuación llamada gráfica de la ecuación.

Definición.- La gráfica de una ecuación en dos variables x y y son todos los puntos con coordenadas (x, y) que satisfacen la ecuación.

Hay muchas técnicas para hacer la gráfica de una ecuación. Algunas más sofisticadas que otras. En general todas las técnicas de graficación buscan un bosquejo de la gráfica real, exhibiendo las características más notorias de lo que queremos representar.

En esta sección aprenderemos una técnica bastante sencilla de entender, pero que pudiera ser tediosa y en ocasiones nos puede conducir a gráficos que se alejan de la gráfica real. Esta técnica se basa en conseguir suficientes puntos (x, y) que satisfagan la ecuación, representarlos en el plano y unir los puntos a través de una curva suave. Refinaremos la técnica resaltando características importantes de la gráfica como son las simetrías y las intersecciones con los ejes.

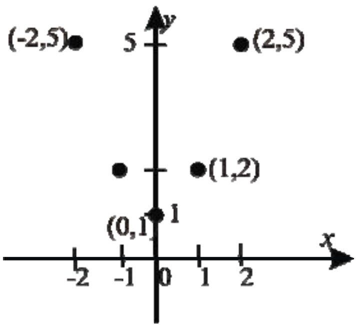
Para conseguir puntos que satisfacen la ecuación en general despejamos una de las variables en términos de la otra, le damos valores a esta última y obtenemos los valores de la variable despejada. Los puntos obtenidos se llevan a una tabla de valores.

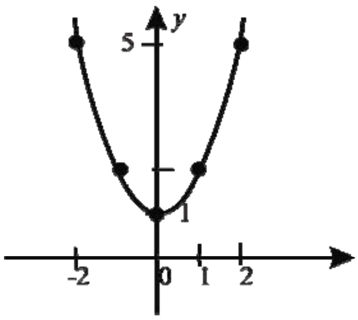
Ejemplo 1.- Bosquejar la gráfica de la ecuación $y - x^2 - 1 = 0$

Solución: Primero despejamos y en función de x:

$$y = x^2 + 1$$

Luego damos valores a x y calculamos los valores de y. Los valores que demos a la variable x tienen que ser un poco con sentido común, proponiendo valores de x en zonas donde no intuimos bien el comportamiento de la gráfica.



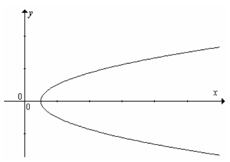
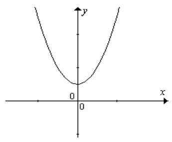
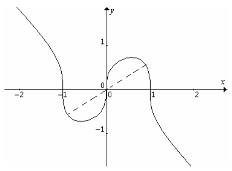


x	y
-2	5
1	2
0	1
1	2
2	5

SIMETRIAS

Observe que en el ejemplo anterior la gráfica de la ecuación $y = x^2 + 1$ es simétrica con respecto al eje y. Hay varios tipos de simetrías, las más importantes son con respecto a algunos de los ejes y simetrías con respecto al origen.

La simetría es una característica importante en una gráfica y a la hora de graficar esto debe resaltarse. También el hecho que la gráfica de una ecuación sea simétrica nos puede ahorrar trabajo, pues con la mitad de la gráfica podemos obtener por simetría el resto, determinando menos puntos en la tabla de valores. A continuación puntualizamos las definiciones de los distintos tipos de simetrías, decimos como podemos averiguar para cada ecuación que tipo de simetría tiene la gráfica y damos algunos ejemplos.

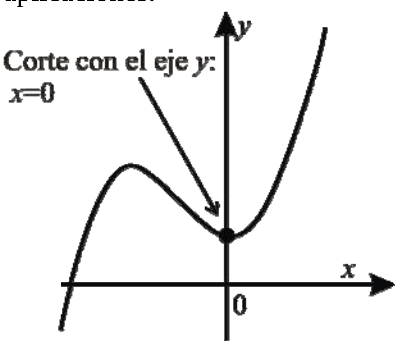
Tipo de simetría	**Definición**	**Ejemplo gráfico**	**Prueba de simetría Ejemplo**
Con respecto al eje x	Cada vez que está (x,y) en la gráfica entonces $(x,-y)$ también está.		Si se reemplaza y por $-y$ en la ecuación se obtiene una ecuación equivalente. **Ejemplo:** $y^2-x+1=0$ es simétrica con respecto al eje x pues $(-y)^2-x+1=0$ es equivalente a la ecuación original.
Con respecto al eje y	Cada vez que está (x,y) en la gráfica entonces $(-x,y)$ también está.	 *Al doblar la hoja en torno al eje y la parte derecha coincide con la parte izquierda de la gráficas*	Si se reemplaza x por $-x$ en la ecuación se obtiene una ecuación equivalente. **Ejemplo:** $y-x^2-1=0$ es simétrica con respecto al eje y pues $y-(-x)^2-1=0$ es equivalente a la ecuación original.
Con respecto al origen	Cada vez que está (x,y) en la gráfica entonces $(-x,-y)$ también está.	 *Si se rota la gráfica 180º se obtiene la misma gráfica*	Si se reemplaza x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación se obtiene una ecuación equivalente. **Ejemplo:** $y^3-x+x^3=0$ es simétrica con respecto al origen pues al reemplazar queda: $-y^3+x-x^3=0$ si ambos lados lo multiplicamos por"-" queda la ecuación original.

Ejercicio de desarrollo.- Discuta las simetrías de las siguientes gráficas de ecuaciones:

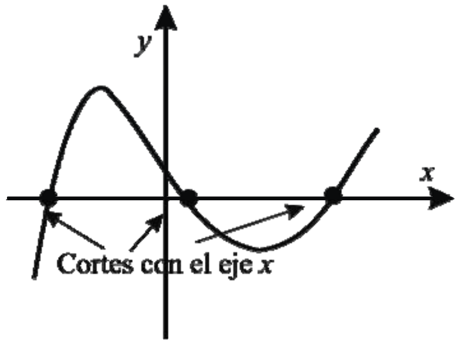
a) $yx-x^2-2=0$ **b)** $x^2\sqrt{x^2+y}+1=0$

INTERSECCIONES CON LOS EJES

Las intersecciones con los ejes es una característica que se toma en cuenta en muchas aplicaciones.



Las **intersecciones con el eje *y*** son los puntos donde la gráfica de la ecuación corta el eje *y*. Para conseguir estos puntos colocamos ***x*=0** en la ecuación y resolvemos la ecuación en *y* que resulte. Si el valor ***b*** es una solución de la ecuación planteada entonces el punto **(0,*b*)** es un punto de intersección con el eje *y*.



Análogamente, **las intersecciones con el eje *x*** son los puntos donde la gráfica de la ecuación corta el eje *x*. Para obtener estos puntos colocamos ***y*=0** en la ecuación y resolvemos la ecuación en *x* que resulte. Si el valor ***a*** es una solución de la ecuación planteada entonces el punto $(a,0)$ es un punto de intersección con el eje *x*.

Ejercicio de desarrollo.- Para las graficas de las ecuaciones dadas calcule las intersecciones con los ejes : **a)** $y=\frac{x^2-x-2}{1+x^2}$ **b)** $yx+\sqrt{x^2+1}-2=0$

En el siguiente ejemplo consideramos todos estos elementos para graficar.

Ejemplo 1.- Bosqueje la gráfica de $y^2+4x^2-1=0$. Considere simetría e intersecciones con los ejes.

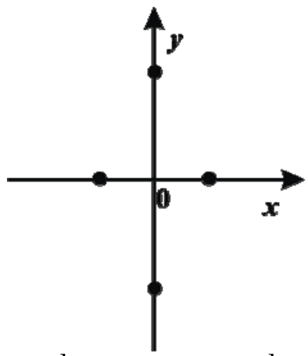
Solución:

Primero conseguiremos **las intersecciones con los ejes**

- **Intersección con el eje *x*. Hacemos *y*=0** en la ecuación dada, obteniendo la ecuación: $4x^2-1=0$, cuya solución es $x=\pm\frac{1}{2}$.
- **Para las intersecciones con el eje *y* hacemos *x*=0** en la ecuación dada, obteniendo la ecuación: $y^2-1=0$, cuya solución es $y=\pm 1$

En resumen, los cortes con los ejes son: (0,1), (0,-1), ($\frac{1}{2}$,0) y (-$\frac{1}{2}$,0).

Observe que esta información la podemos ir llevando a la gráfica.



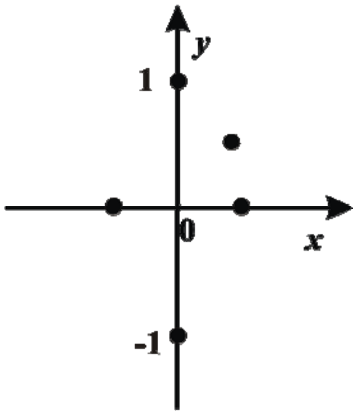
Simetrías:

La gráfica es simétrica con respecto al eje *x*, pues al reemplazar *y* por -*y* en la ecuación se obtiene $(-y)^2+4x^2-1=0$ la cuál es la misma ecuación que la original.

También **es simétrica con respecto al eje *y***, ya que si se reemplaza *x* por –*x* en la ecuación se obtiene $y^2+4(-x)^2-1=0$ también equivalente a la original.

Con algún valor de *y* positivo será suficiente para tener una idea de la gráfica. Colocamos *y*=$\frac{1}{2}$ en la ecuación y obtenemos $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$. Siempre en conveniente realizar una tabla de valores:

x	y
0	1
0	-1
$\frac{1}{2}$	0
$-\frac{1}{2}$	0
$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{2}$



$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.433$

Esta información la agregamos a nuestro gráfico, luego se hace un primer trazo en el primer cuadrante

La gráfica resultante es una curva conocida como elipse.

Ejercicio de desarrollo.- Para la siguiente ecuación discuta simetrías, calcule las intersecciones con los ejes y bosqueje la gráfica de la ecuación: $y = \frac{1-2x^2}{1+x^2}$. No se olvide de hacer una tabla de valores.

EJERCICIOS

1) Para las siguientes ecuaciones discuta simetrías, calcule las intersecciones con los ejes y bosqueje su gráfica.

1.1) $x^2 - 2y + 4 = 0$**;** **1.2)** $x^2 + 2y^2 - 4 = 0$**;** **1.3)** $x + 4y^2 - 8 = 0$**;**

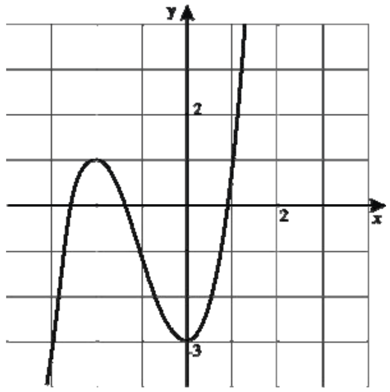
1.4) $2x^2 + 2y^2 - 16 = 0$**;** **1.5)** $4x^2 + y^2 - 16 = 0$**;** **1.6)** $y = \frac{x}{1+x^2}$

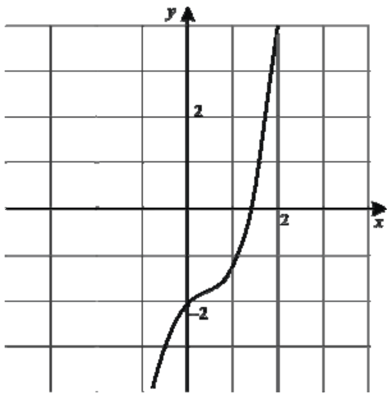
1.7) $y = \frac{5}{1+x^2}$**;** **1.8)** $4x^2y^2 - 16 = 0$

2) Trazar la gráfica de las siguientes ecuaciones **a)** $x - 2y^2 = 1$; **b)** $y = \sqrt{\frac{x-1}{2}}$; **c)** $y = -\sqrt{\frac{x-1}{2}}$. Explique que relación existe entre estas tres gráficas

3) a) Demuestre que la ecuación $x^3+3x^2-3=0$ no tiene soluciones racionales. (Esto lo puede verificar a través de la división por Ruffini, las únicas posibles raíces racionales son ± 1 y ± 3 y en ninguna de ellas la división entre $x-r$ es exacta)

b) Al lado se ha graficado, gracias a un software de computación, la ecuación $y=x^3+3x^2-3$. Estime las soluciones de la ecuación $x^3+3x^2-3=0$ a través de los puntos de cortes con el eje *x* de la gráfica de la ecuación.

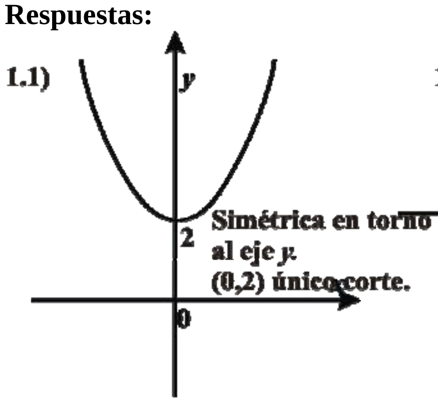


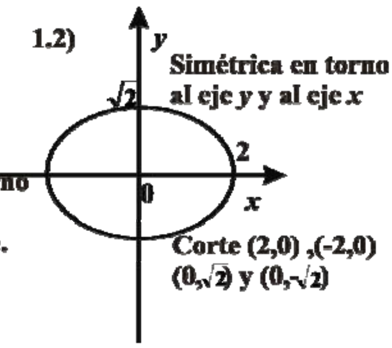


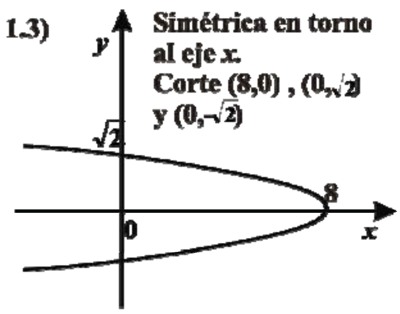
4) a) Demuestre que la ecuación $x^3-x^2+x-2=0$ no tiene soluciones racionales. (Esto lo puede verificar a través de la división por Ruffini, las únicas posibles raíces racionales son ± 1 y ± 2 y en ninguna de ellas la división entre $x-r$ es exacta)

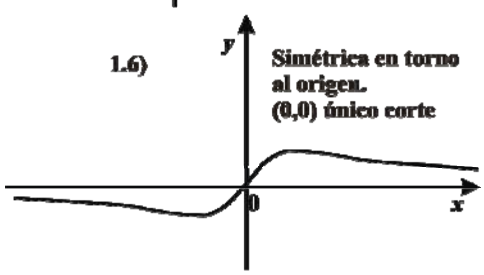
b) Al lado se ha graficado la ecuación $y=x^3-x^2+x-2$. Estime las soluciones de la ecuación $x^3-x^2+x-2=0$ a través de los puntos de cortes con el eje *x* de la gráfica de la ecuación

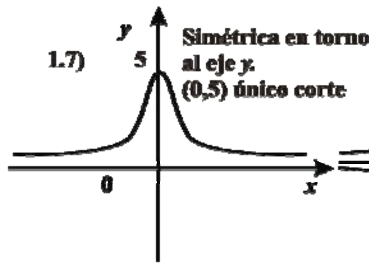
Respuestas:

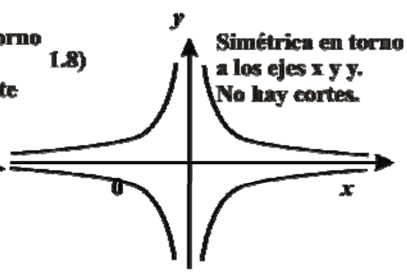


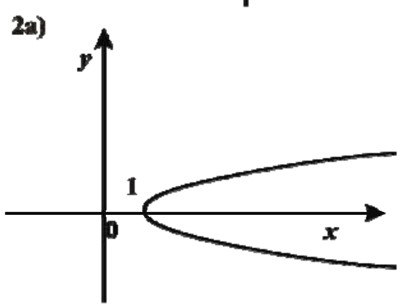


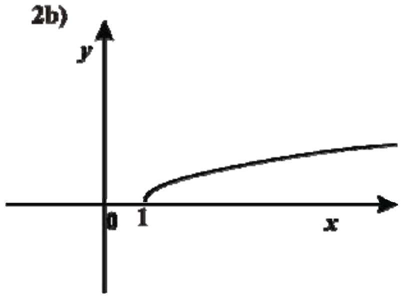


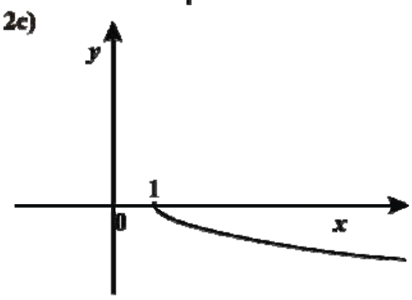












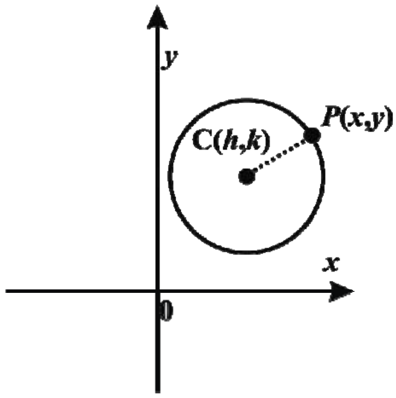
3) 0.88; -2.53 y -1.34. **4)** 1.35

LA CIRCUNFERENCIA

Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos que distan r unidades de un punto fijo llamado centro de la circunferencia. r es llamado el radio de la circunferencia.

Podemos obtener la ecuación de una circunferencia con centro (h,k) y radio r a través de la fórmula de distancia entre dos puntos, pues la distancia entre el centro y cualquier punto (x,y) de la circunferencia tiene que ser igual a r.

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$



Esta ecuación es equivalente a:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Es claro que un punto satisface esta ecuación si y solo si está sobre la circunferencia porque son los únicos puntos que satisfacen esta relación de distancia con respecto al centro.

Esta ecuación la llamaremos la forma centro-radio de una circunferencia.

Ejemplo 1.- La ecuación $(x+3)^2+(y-2)^2=25$ es la ecuación de la circunferencia con centro (-3,2) y radio 5.

Ejemplo 2.- Encontrar una ecuación de la circunferencia con centro (2,-1) y radio 3.
Solución: Usamos la forma centro-radio con C(2,-1)

$$(x-2)^2+(y-(-1))^2=3^2$$

Realizando los productos notables

$$x^2-4x+4+y^2+2y+1=3^2$$

Simplificando

$$x^2+y^2-4x+2y-4=0$$

Esta forma es conocida como la forma general de la circunferencia.

La ecuación de una circunferencia escrita como

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

es conocida como **la forma general de la circunferencia.**

Ejemplo 3.- Encontrar la ecuación general de la circunferencia con centro (3,-1) y que pasa por (0,-2).

Solución: Primero se determina el radio, usando el hecho que la distancia entre el centro y cualquier punto de la circunferencia es *r*.

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

$$\sqrt{(0-3)^2+(-2-(-1))^2}=r$$

$$r=\sqrt{10}$$

Ahora podemos usar la forma centro-radio con C(3,-1)

$$(x-3)^2+(y-(-1))^2=(\sqrt{10})^2$$

Realizando el producto notable

$$x^2-6x+9+y^2+2y+1=10$$

Simplificando

$$x^2+y^2-6x+2y=0\,.$$

Observe que la forma centro-radio se ha llevado a la forma general de la circunferencia.

Ejercicio de desarrollo: Encontrar una ecuación de la circunferencia con centro (-1,5) y que pasa por (-2,-3).

Muchas veces la ecuación de la circunferencia se presenta con la forma general y puede resultar conveniente llevarla a la forma centro-radio, que nos permite identificar el centro y el radio de la circunferencia. La manera de llevarlo a la forma centro-radio

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

es completando cuadrados. La suma x^2+ax la identificamos con los dos primeros términos del desarrollo de $(x-h)^2$, específicamente $ax=-2hx$, de aquí vemos que $h=-\frac{a}{2}$, así que el término que falta para completar cuadrados es $(a/2)^2$, ya que $x^2+ax+(a/2)^2=(x+(a/2))^2$.
Observe que *h* es la mitad del coeficiente de término en *x*, con signo cambiado.

El siguiente ejemplo ilustra detalladamente el procedimiento.

Ejemplo 4.- Encontrar el centro y el radio de la circunferencia $x^2+y^2+4x-8y-5=0$. Graficar la circunferencia.

Solución: Debemos llevarlo a la forma centro-radio a fin de identificarlos. Primero agrupamos los términos en *x* y los términos en *y*. La constante la pasamos al otro miembro.

$$x^2+4x+y^2-8y=5$$

Sumamos y restamos el mismo número para no alterar la ecuación con el fin de completar el desarrollo de $(x-h)^2$ y $(y-k)^2$

$$x^2+4x+\_\_\_-\_\_\_\_+y^2-8y+\_\_\_\_\_-\_\_\_\_=5$$

Observe que el término $4x$ corresponde a $-2hx$. Así *h*=-2. Para los términos en *x* el término que falta para completar cuadrados es $(-2)^2=4$.
El término en y es $-8y$ este corresponde a $-2ky$. De aquí que *k*=4, el término que falta para completar cuadrados es $(4)^2=16$. De manera similar notamos que *k* es la mitad del coeficiente de término en *y*, con signo cambiado.

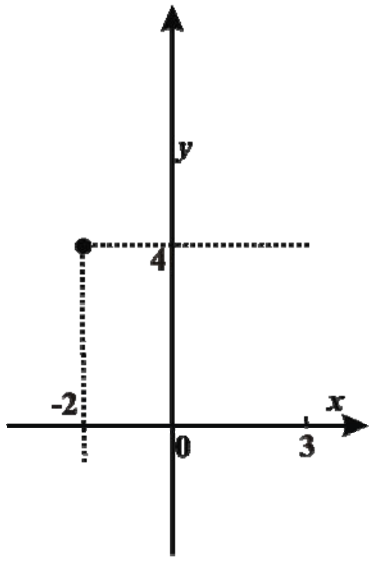
Así

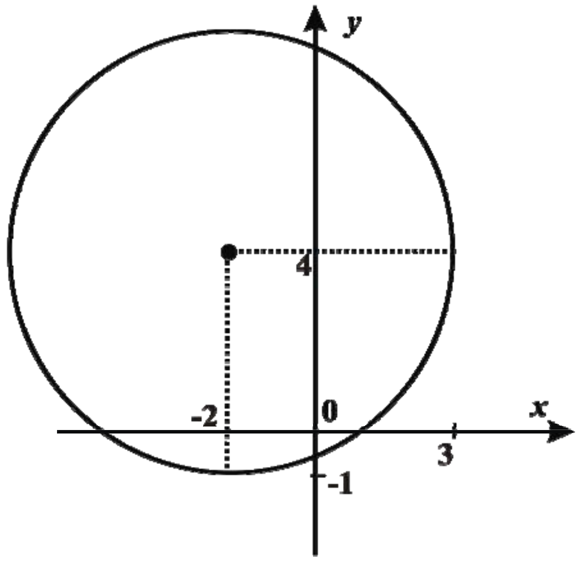
$$x^2+4x+4-4+y^2-8y+16-16=5$$
$$\underbrace{\left(x^2+4x+4\right)}_{(x+2)^2}-4+\underbrace{\left(y^2-8y+16\right)}_{(y-4)^2}-16=5$$

$$(x+2)^2-4+(y-4)^2-16=5$$
$$(x+2)^2+(y-4)^2=5+4+16$$
$$(x-(-2))^2+(y-4)^2=25$$

Se suma y resta la mitad del término mixto. En ese momento no tiene importancia el signo de *h* y *k*.
Luego se sustituye el desarrollo del producto notable por su expresión, se puede en esta parte cuadrar el signo según corresponda.
El primer desarrollo x^2+4x+4 corresponde a una suma al cuadrado.
El segundo desarrollo $y^2-8y+16$ corresponde a una diferencia al cuadrado.

Al identificar con la forma centro-radio, tenemos que $r^2=25$, de aquí que $r=5$ y el centro está dado por C(-2,4). Observe que para graficar ubicamos primero el centro y luego trazamos a partir de allí dos rayos, uno vertical y otro horizontal, ambos de longitud 5. Luego hacemos el trazo de la circunferencia que pasa por los puntos finales de estos rayos.





En el ejercicio pasado vimos como una ecuación escrita en la forma $x^2+y^2+ax+by+c=0$ puede ser llevada a la forma $(x-h)^2+(y-k)^2=d$. Si *d* es positivo entonces la grafica de la ecuación es una circunferencia con centro (h,k) y radio $\sqrt{d}$. Si *d* es negativo entonces la gráfica de esta ecuación es el conjunto vacío, pues no existen puntos (x,y) tales al sumar dos términos positivos $(x-h)^2+(y-k)^2$ de igual a un número negativo. Si *d* es cero entonces la gráfica de la ecuación está formada por un solo punto: (h,k)

Ejemplo 5.- Determinar si la ecuación dada es la ecuación de una circunferencia, en caso que lo sea encontrar el centro y el radio de la circunferencia y graficar la circunferencia.
$x^2+y^2-8x-6y+40=0$
Solución: Debemos llevarla a la forma centro-radio a fin de identificarlos. Primero agrupamos los términos en *x* y los términos en *y*. La constante la pasamos al otro miembro.

$$x^2-8x+y^2-6y=-40$$

Sumamos y restamos el mismo número para no alterar la ecuación con el fin de completar el desarrollo de $(x-h)^2 = x^2 - 2hx + h^2$ en $x^2 - 8x$. Realizamos el mismo tipo de procedimiento con $(y-k)^2 = y^2 - 2ky + k^2$

$$x^2 - 8x + \_\_\_ - \_\_\_\_ + y^2 - 6y + \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_ = -3$$

Sabemos que h es la mitad del término mixto, cambiado de signo. Identificando, vemos que $-8x = -2hx$, de donde $h = 4$. Para los términos en x el término que falta para completar cuadrados es $(4)^2 = 16$

Similarmente vemos que $-6y = -2hy$, de donde $k = 3$. Para los términos en y el término que falta para completar cuadrados es $(3)^2 = 9$. Así

$$x^2 - 8x + 16 - 16 + y^2 - 6y + 9 - 9 = -40$$

$$\left(x^2 - 8x + 16\right) - 16 + \left(y^2 - 6y + 9\right) - 9 = -40$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = -40 + 16 + 9$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = -15\,.$$

Observe que el lado izquierdo es siempre positivo para cualesquiera valores de x y y , por ser suma de cuadrados, así que nunca puede ser igual al lado derecho. Podemos concluir que no existe ningún punto (x, y) para el cual la ecuación anterior se satisfaga. Así que la ecuación $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 40 = 0$ no define una circunferencia.

Ejercicio de desarrollo: Encontrar el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 12y - 8 = 0$. Graficar la circunferencia

APLICACIONES
CURVA DE TRANSFORMACIÓN DE PRODUCTOS

La mayoría de las fábricas elaboran dos o más bienes que compiten en los recursos, esto es, necesitan mano de obra, presupuesto, maquinarias, el mismo tipo de materias primas, etc. El aumento de la producción de un tipo de bien puede conllevar a la disminución de los otros. La forma como se relacionan las cantidades de cada tipo a producir muchas veces se pueden llevar a una ecuación. Cuando sólo existen dos bienes tenemos una ecuación en dos variables que se puede graficar y la gráfica de esta ecuación es conocida como la curva de transformación de productos. Muchas veces se usa la ecuación de la circunferencia para modelar la relación entre dos variables de este tipo.

Ejemplo 1.- Una fábrica elabora dos tipos de morrales A y B. Las posibles cantidades x y y que puede fabricar de cada tipo al mes están relacionadas por la siguiente ecuación.

$$x^2 + y^2 + 200x + 300y = 90000$$

donde x corresponde al número de unidades a producir de tipo A y y al tipo B. **a)** Bosqueje la curva de transformación de productos en este caso. **b)** ¿Cuáles son los máximos posibles de producción de cada tipo al mes?

Solución: a) La curva dada tiene la forma general de una circunferencia, para graficarla la llevamos a la forma centro-radio: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ a fin de identificarlos. Entonces en

$$x^2+200x+y^2+300y=90000$$

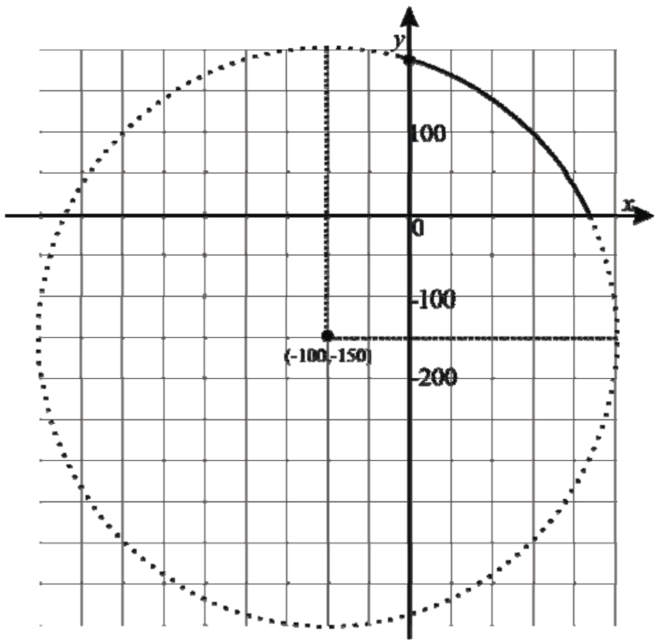
x^2+200x corresponde a los dos primeros términos del desarrollo de $(x-h)^2$. Podemos identificar $200x=-2hx$. De aquí deducimos que $h=-100$, por consiguiente el término que falta en el desarrollo de $(x-h)^2$ es $h^2=100^2$. Lo sumamos y restamos en la ecuación. Igualmente podemos ver que $k=150$ es el término que falta para completar cuadrados en y^2+300y es 150^2, lo sumamos y restamos para no alterar la ecuación.

$$x^2+200x+100^2-100^2+y^2+300y+150^2-150^2=90000$$

$$\left(x^2+200x+100^2\right)+\left(y^2+300y+150^2\right)=90000+150^2+100^2$$

$$(x-(-100))^2+(y-(-150))^2=122500$$

Así el centro es el punto (-100,-150) y el radio lo sacamos de la relación $r^2=122500$. Despejando obtenemos $r=\sqrt{122500}=350$.



Recordamos de nuevo la estrategia para graficar una circunferencia. Ubicamos primero el centro y luego a partir del centro trazamos un rayo vertical de 350 unidades y otro rayo horizontal de 350. Se bosqueja la circunferencia que pasa por los puntos finales de estos rayos.

En la gráfica se hizo un trazo continuo de la circunferencia sólo para las x y y positivas, pues están son las que tienen sentido, en el resto se hizo un trazo punteado.

b) La máxima producción de morrales tipo A ocurre cuando y=0, para obtener el valor x de producción máxima podemos sustituir y=0 en cualquiera de las ecuaciones de la circunferencia, por comodidad usamos la forma centro-radio

$$(x-(-100))^2+(y-(-150))^2=122500$$

$$(x+100)^2+(0-(-150))^2=122500$$

$$(x+100)^2=122500-22500$$

$$x=-100\pm\sqrt{100000}$$

Tomamos la solución positiva $x=216{,}2$

La máxima producción de morrales tipo B ocurre cuando x=0, para obtener el valor x de producción máxima sustituimos x=0 en la forma centro-radio

$$(x-(-100))^2+(y-(-150))^2=122500$$

$$(0+100)^2 + (y+150)^2 = 122500$$

$y = -150 \pm \sqrt{112500}$ Tomamos la solución positiva.

$y \approx 185{,}4$.

En conclusión la máxima producción posible de morrales de tipo B es 185 y de tipo A es de 216

EJERCICIOS

1) Encuentre la ecuación general de la circunferencia que cumple las condiciones dadas.

1.1) Centro (2,-1) y radio 3.

1.2) Centro $(\frac{1}{2}, -3)$ y radio $\sqrt{7}$.

1.3) Centro (-3.0) y radio $2\sqrt{3}$

1.4) Centro (-2,-1) y pasa por el punto (-3,-2)

1.5) Centro (2,-3) y pasa por el punto (-2,1/2)

1.6) Los puntos extremos de un diámetro son (4,1) y (3,0)

1.7) Centro en el origen y pasa por (3,4)

1.8) Centro (2,3) y es tangente al eje *x*.

1.9) Centro (-2,-3) y es tangente al eje *y*.

1.10) Está en el segundo cuadrante, es de radio 2 y es tangente a los dos ejes

2) Determine si las siguientes ecuaciones representan una circunferencia, en caso positivo determine el centro, el radio y grafique la circunferencia.

2.1) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 36 = 0$ **;** **2.2)** $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$

2.3) $x^2 + y^2 - 6x = 16$ **;** **2.4)** $x^2 + y^2 - 8x + y + \frac{1}{4} = 0$

2.5) $x^2 + y^2 - 2x + 7y = 0$ **;** **2.6)** $x^2 + y^2 - y - 3/4 = 0$

2.7) $x^2 + y^2 - 4y + 18 = 0$

3) En una zona se pueden sembrar dos tipos de árboles A y B. Las cantidades posibles *x* y *y* que se pueden plantar de cada tipo están relacionadas por la siguiente ecuación.

$$x^2 + y^2 + 100x + 150y = 10000$$

Bosqueje la curva de transformación en este caso. ¿Cuáles son los máximos posibles de cada especie?

4) La demanda de cierto producto es de *q* unidades cuando el precio fijado al consumidor es *p* UM en donde

$$q^2 + p^2 + 250q + 30p = 40000$$

Dibuje la curva de demanda. ¿Cuál es el precio más alto por encima del cual no hay ventas posibles?

5) Una fábrica de celulares produce dos tipos I y II. Las cantidades posibles *x* y *y* que pueden producirse semanalmente están relacionadas por la ecuación

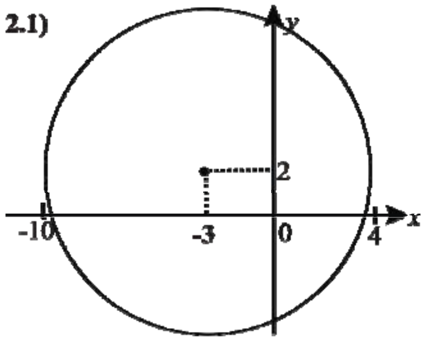
$$x^2 + y^2 + 400x + 500y = 300000$$

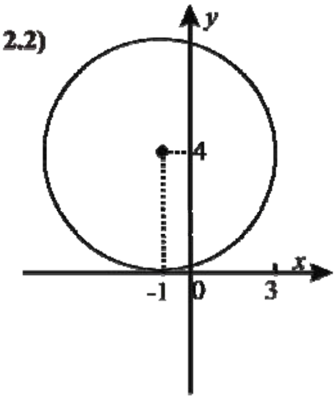
Bosqueje la curva de transformación de productos. ¿Cuál es el número máximo de celulares de tipo II que pueden producirse?

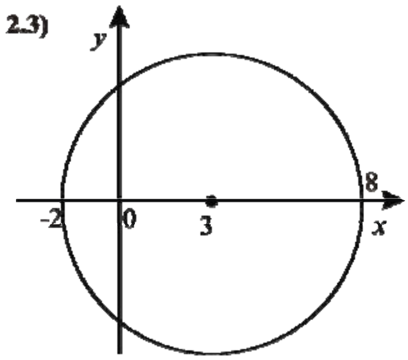
Respuestas:

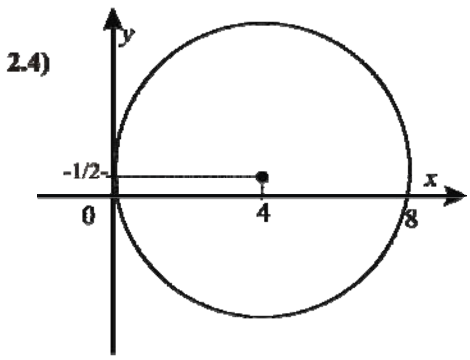
1.1) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ **; 1.2)** $x^2 + y^2 - x + 6y + 9/4 = 0$ **; 1.3)** $x^2 + y^2 + 6x - 3 = 0$ **; 1.4)** $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 3 = 0$ **; 1.5)** $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 13/4 = 0$ **;1.6)** $x^2 + y^2 - 7x - y + 12 = 0$

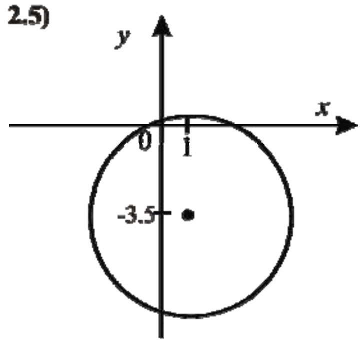
1.7) $x^2+y^2=25$**;** **1.8)** $x^2+y^2-4x-6y+4=0$; **1.9)** $x^2+y^2+4x+6y+9=0$;
1.10) $x^2+y^2+4x-4y+4=0$
2.1) (-3,2); *r*=7 ; **2.2)** (-1,4) ; *r*=4; **2.3)** (3,0); *r*= 5 **2.4)**(4,-1/2); *r*=4
2.5) $(1,-\frac{7}{2})$; *r*=$\frac{\sqrt{53}}{2}$; **2.6)** $C(0,\frac{1}{2}), r=1$; **2.7)** No es una circunferencia

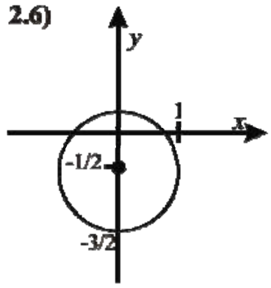


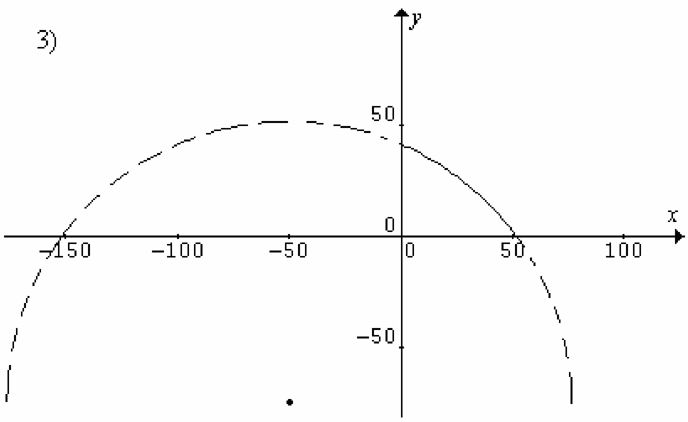


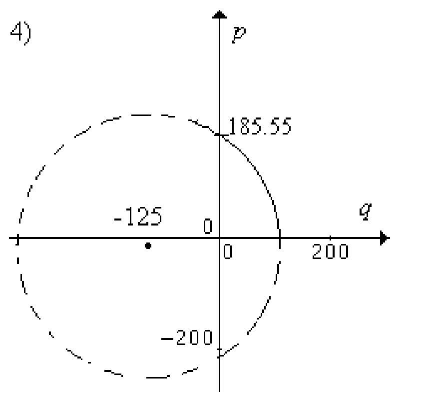












$(x-(-125))^2+(y-(-15))^2=(236.32)^2$

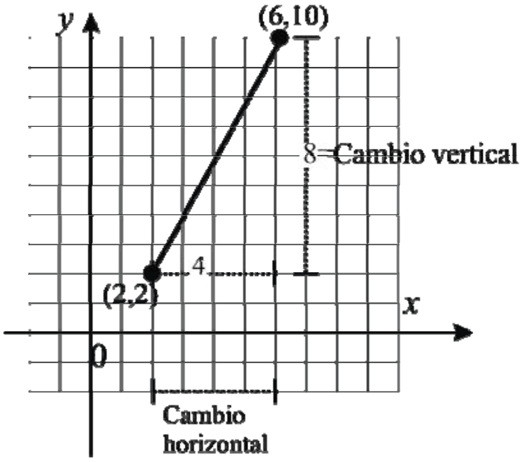
$x_{\max}=51.85;=y_{\max}=41.18$

LA RECTA

La línea recta es quizás la curva más utilizada para describir relaciones entre dos variables.

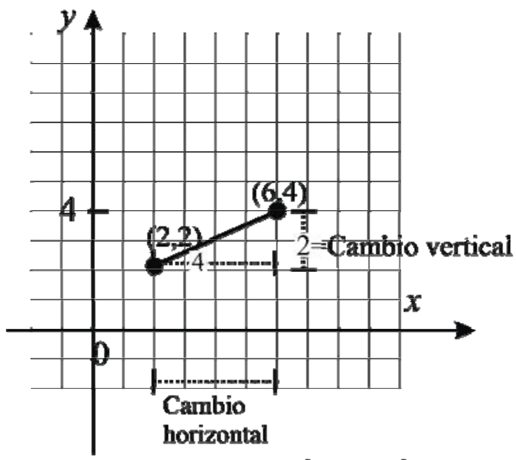
Empezaremos el estudio sobre rectas definiendo una magnitud que cuantifique la inclinación de las distintas rectas. La inclinación puede ser medida a través de la pendiente que es el cociente del cambio vertical entre el cambio horizontal, cuando pasamos de un punto a otro punto de la recta.

$$m = \frac{cambio\ \ vertical}{cambio\ \ horizontal} = \frac{cambio\ \ en\ \ y}{cambio\ \ en\ \ x}$$



$$m = \frac{cambio\ vertical}{cambio\ horizontal} = \frac{8}{4} = 2$$

Figura 1

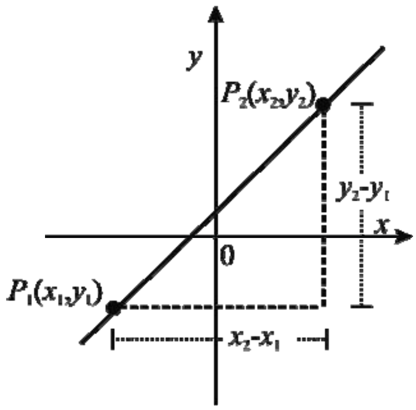


$$m = \frac{cambio\ vertical}{cambio\ horizontal} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Figura 2

Observe que la recta de la figura 1 tiene una inclinación mayor que la recta de la figura 2.

La diferencia de inclinación puede ser explicada en términos de la pendiente. El cambio vertical en la figura 1 es de 8 unidades, cuando nos movemos de (2,2) a (6,10) y el de la figura 2 es de 2 unidades, cuando nos movemos de (2,2) a (6,4). En ambos casos el cambio horizontal es de 4 unidades. Por tanto la pendiente de la recta de la figura 1 es 2 y la pendiente de la recta de la figura 2 es ½..



En general, si tenemos dos puntos sobre una recta no vertical: $(x_{1,}y_1)$ y (x_2, y_2). El cambio vertical está dado por $y_2 - y_1$ y el cambio horizontal por $x_2 - x_1$.

Muchas veces el cambio *y* es denotado por Δy

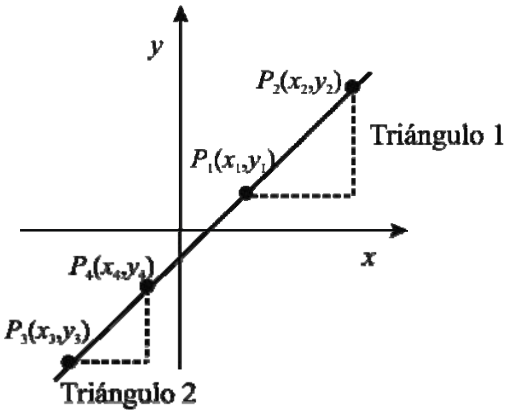
$$\Delta y = y_2 - y_1$$

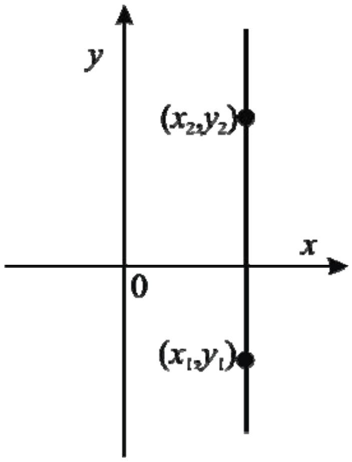
Definición.- Sea *l* una recta no paralela al eje *y* y sean $(x_{1,}y_1)$ y (x_2, y_2) dos puntos distintos sobre la recta. La pendiente *m* de la recta está definida por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Observación 1: La definición de la pendiente es independiente de los puntos escogidos sobre la recta. En la figura observamos que los triángulos 1 y 2 son semejantes, por tanto las razones de sus lados son iguales, particularmente

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$





Observación 2: Para las rectas verticales no está definida la pendiente. Para cualesquiera dos puntos distintos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) sobre la recta, tenemos que $x_1 = x_2$, por tanto el denominador da cero en la fórmula de *m*.

Observación 3: Cualquier recta horizontal tiene pendiente cero. Efectivamente dos puntos distintos de una recta horizontal tienen igual coordenada *y*; estos puntos son de la forma (x_1, y_1) y (x_2, y_1), con $x_1 \neq x_2$, así el numerador es 0 en la fórmula de la pendiente.

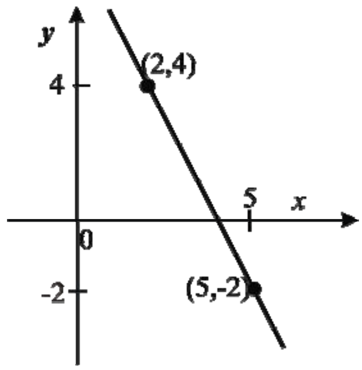
$$m = \frac{y_1 - y_1}{x_2 - x_1} = 0$$

Ejemplo 1.- Graficar la recta que pasa por (2,4) y (5,-2) y calcular su pendiente.

Solución: Cualquiera de estos puntos puede ser tomado como (x_2, y_2), digamos que es el primero y el otro es (x_1, y_1). Así:

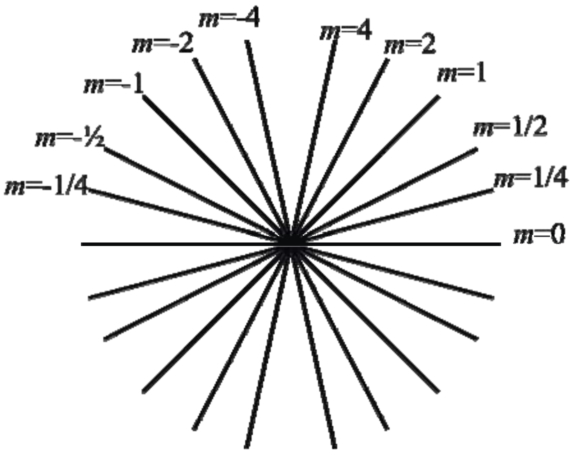
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - (-2)}{2 - 5}$$

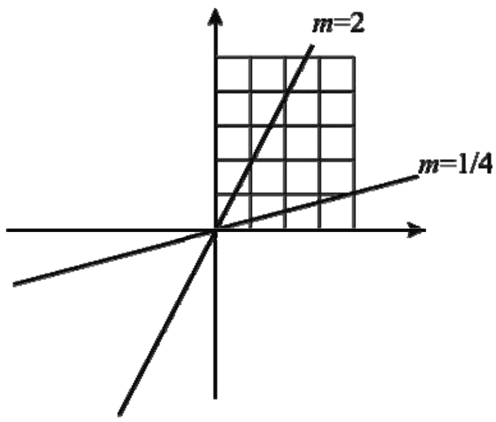
$$= \frac{6}{-3} = -2$$



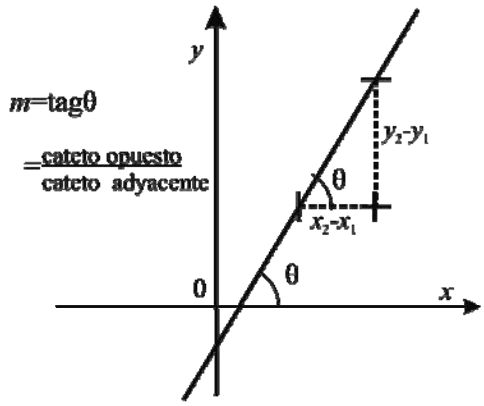
Observe que en este caso la pendiente es negativa, esto ocurre cuando la recta baja de izquierda a derecha. La magnitud 2 significa que cuando *x* aumenta una unidad, la *y* disminuye 2 unidades.

En la figura mostramos un haz de rectas con diferentes pendientes. Cuando la recta es menos inclinada, casi horizontal, la pendiente está cerca de 0, cuando es más inclinada, casi vertical su magnitud es grande. Ya hicimos la observación que cuando la recta baja de izquierda a derecha la pendiente es negativa y cuando sube es positiva.





Observación 4: Si una recta no es paralela al eje *y*, la pendiente es la tangente del ángulo de inclinación. Ver figura.



A continuación deduciremos la ecuación de la recta llamada forma punto-pendiente. Esto es, dada la pendiente m y un punto (x_0, y_0) sobre la recta encontraremos una ecuación tal que cualquier punto (x, y) que este sobre la recta satisface la ecuación y recíprocamente cualquier punto que satisfaga la ecuación está sobre la recta.

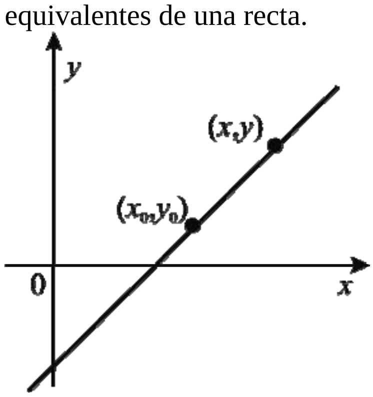
Por la observación 1, la definición de la pendiente de una recta es independiente de los puntos de la recta que tomemos, en particular podemos tomar el punto (x_0, y_0) y un punto cualquiera, (x, y), de la recta distinto al primero. Esta pendiente debe ser igual a m:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m .$$

Esta ecuación puede ser reescrita como

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

A esta ecuación la llamaremos forma **punto-pendiente.** Luego veremos otras ecuaciones equivalentes de una recta.



Observe que:

1) El punto (x_0, y_0) satisface la ecuación

2) Cualquier otro punto (x, y) está sobre la recta si y sólo si satisface la ecuación, porque sólo los puntos sobre la recta son los que forman con (x_0, y_0) una pendiente m.

Ejemplo 2.-
a) Encontrar una ecuación de la recta que pasa por el punto (-2,1) con pendiente igual a -3.
b) Encuentre el punto sobre esta recta cuya coordenada *x* es igual a 4.
Solución: **a)** Usamos la ecuación punto-pendiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$, con $m = -3$ y $(x_0, y_0) = (-2,1)$. Sustituyendo:

$$y - 1 = -3(x - (-2))$$
$$y - 1 = -3x - 6$$
$$y = -3x - 5$$

b) Para conseguir este punto debemos evaluar la ecuación de la recta $y = -3x - 5$ en $x = 4$:

$$y = -3(4) - 5$$
$$y = -17$$

Así la recta pasa por el punto (4,-17).

Ejemplo 3.-
a) Encontrar una ecuación de la recta que pasa por los puntos (-1,3) y (2,4).
b) Verifique que el punto (-4,2) está sobre la recta.
Solución:
a) Primero encontraremos la pendiente de la recta para luego usarla junto con cualquiera de estos puntos en la forma punto pendiente de una ecuación de la recta.

La pendiente está dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-3}{2-(-1)} = \frac{1}{3}$$

Usaremos el punto (2,4) como el punto (x_0, y_0) en la forma punto-pendiente. Así obtenemos:

$$y - 4 = \frac{1}{3}(x - 2)$$

Podemos reescribir esta ecuación de varias maneras:

$$3(y-4) = (x-2)$$

$$3y - 12 = x - 2$$

$$3y - x - 10 = 0$$

Otra forma de escribirla es despejando la y

$$y = \frac{x+10}{3}$$

b) Para verificar que el punto (-4,2) está sobre la recta es suficiente verificar que este punto satisface la ecuación. Usamos para ello la última ecuación:

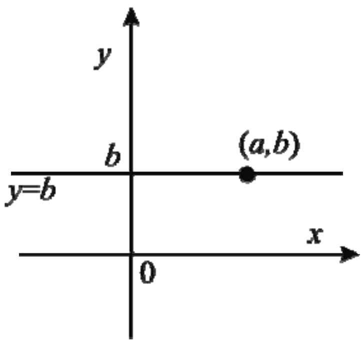
$$y = \frac{x+10}{3}$$
$$2 \overset{?}{=} \frac{-4+10}{3}$$

Efectivamente como el punto satisface la igualdad anterior entonces está sobre la recta.

Ejercicio de desarrollo.-
a) Encontrar una ecuación de la recta que pasa por los puntos (0,-2) y (-1,4).
b) Encuentre el punto de corte de esta recta con el eje *x*.

ECUACIONES DE RECTAS HORIZONTALES Y VERTICALES

Para encontrar la ecuación de una recta horizontal que pasa por (a,b) usamos la forma punto-pendiente.

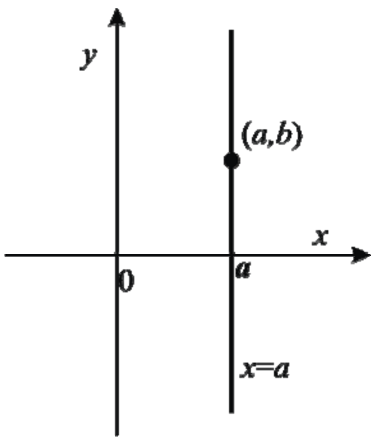


Ya hemos dicho que en este caso la pendiente es 0. Así

$$y-b=0(x-a)$$
$$y-b=0$$
$$y=b$$

Así $y=b$ **es la ecuación de la recta horizontal que pasa por (*a*,*b*).**

Observamos que los puntos de la recta cuya ecuación es $y=b$ es el conjunto de los puntos (x,b), con x un número real.

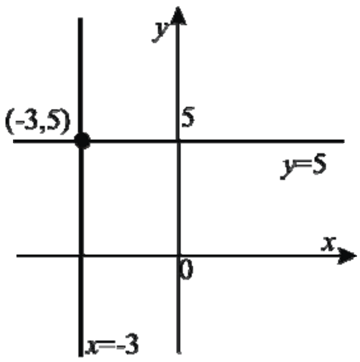


Aprovechando las ideas, podemos decir que el conjunto de puntos de la recta vertical que pasa por (a,b) satisfacen la condición $x=a$, la coordenada *y* asume cualquier valor.

Recíprocamente si una recta vertical satisface $x=a$ entonces en particular pasa por (a,b).

Así $x=a$ **es la ecuación de la recta vertical que pasa por (*a*,*b*).**

Ejemplo 4.-
a) Encontrar una ecuación de la recta horizontal que pasa por el punto (-3,5)
b) Encontrar una ecuación de la recta vertical que pasa por el punto (-3,5)
Solución:



Es conveniente graficar las rectas para recordar cuáles son las exigencias de las rectas horizontales y verticales. En el dibujo vemos que todas las coordenadas *y* de los puntos sobre la recta horizontal son iguales a 5. Esta es precisamente la ecuación de dicha recta: *y*=5. Por otro lado la ecuación de la recta vertical es *x*=-3, efectivamente puede comprobar gráficamente que todos los puntos de esta recta tienen abscisa *x* igual a –3.

Ejercicio de desarrollo.-
a) Encontrar una ecuación de la recta que pasa por los puntos (0,-2) y (1-2).
b) Encontrar una ecuación de la recta que pasa por el punto (3,-2) y corta el eje *x* en 3.
c) Encontrar una ecuación de la recta con pendiente 0 y pasa por (-1,4).
d) Encontrar una ecuación de la recta que pasa por el punto (1,-2) y corta el eje *y* en 1.

OTRAS FORMAS DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

Recordemos que las formas punto-pendiente abarca sólo el caso de rectas donde está definida la pendiente, estas son las rectas no paralelas al eje *y*.

Una alternativa para escribir el conjunto de todas las ecuaciones de rectas posibles, incluyendo las verticales, es la forma:

$$ax + by + c = 0\,,$$

donde *a* y *b* no pueden ser simultáneamente 0. Esta forma de la ecuación es llamada la **ecuación general de la recta.**

La ecuación con forma punto-pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$, puede ser escrita como:

$$y = mx - mx_0 + y_0\,,$$

más generalmente como:

$$\boxed{y = mx + b}$$ **Forma pendiente-ordenada al origen**

Observe que si $x = 0$ entonces $y = b$. Es decir el corte con el eje *y* es b, comúnmente llamada ordenada al origen. La ecuación de la recta escrita como

$$y = mx + b$$

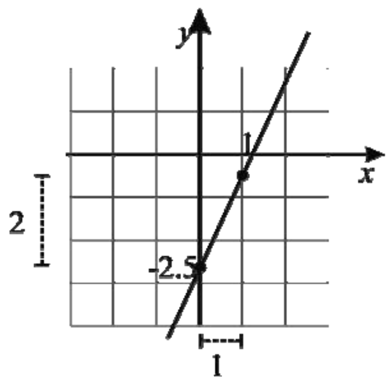
es llamada **la forma pendiente-ordenada al origen**. Es muy útil para identificar la pendiente, el corte de la recta con el eje *y* y de allí graficar rápidamente.

Ejemplo 5.- Representar la ecuación $2y - 4x + 5 = 0$ en la forma pendiente ordenada en el origen, conseguir la pendiente y el punto de corte con el eje *y* y graficar la recta.

Solución: Debemos despejar *y* de la ecuación

$$2y - 4x + 5 = 0$$
$$2y = 4x - 5$$
$$y = \frac{4}{2}x - \frac{5}{2}$$
$$y = 2x - \frac{5}{2}$$

Esta ecuación es de la forma $y = mx + b$, en este caso *m*=2 y $b = -\frac{5}{2}$.



Para graficar marcamos primero el punto $(0,-\frac{5}{2})$. Por allí pasa nuestra recta. Luego estimamos una pendiente de 2. Si los ejes están igualmente escalados, esta inclinación corresponde a un cambio de 2 unidades en *y* cuando la *x* cambia 1 unidad.

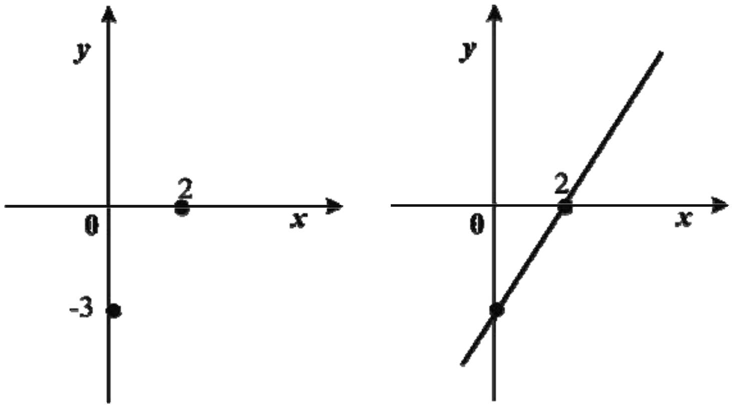
Alternativamente, para graficar una recta podemos localizar dos puntos sobre la recta y unir dichos puntos. Unos puntos muy convenientes son los cortes con los ejes. Pero a veces existe uno solo corte y entonces hay que localizar otro punto que satisfaga la ecuación. Veamos el siguiente ejemplo

Ejemplo 6.- Graficar las siguientes ecuaciones: **a)** $2y-3x+6=0$; **b)** $y=3x$

Solución: a) La primera recta se graficará consiguiendo los puntos de cortes con los ejes. Primero se plantea para conseguir los cortes con los ejes.

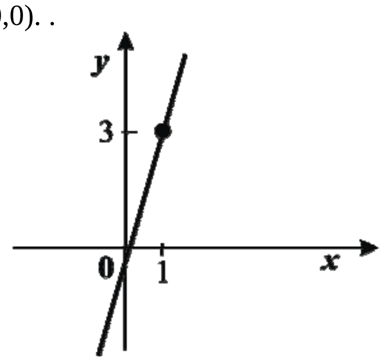
Intersección con *y*: Colocamos $x=0$ en la ecuación resultando $2y+6=0$. De aquí que el corte ocurre cuando $y=-3$

Intersección con el eje *x*: Colocamos $y=0$ en la ecuación resultando $-3x+6=0$. De aquí que el corte es para $x=2$. Llevamos estos dos cortes al plano cartesiano y trazamos la recta que pasa por ellos.



b) Es fácil chequear que el corte con *x* y con *y* coincide con el origen (0,0). .

En este caso podemos conseguir otro punto, por ejemplo si $x=1$ entonces $y=3\cdot 1$. Así el punto (1,3) es un punto sobre la recta. De una vez llevamos estos puntos al plano *xy* y trazamos la recta que pasa por ellos



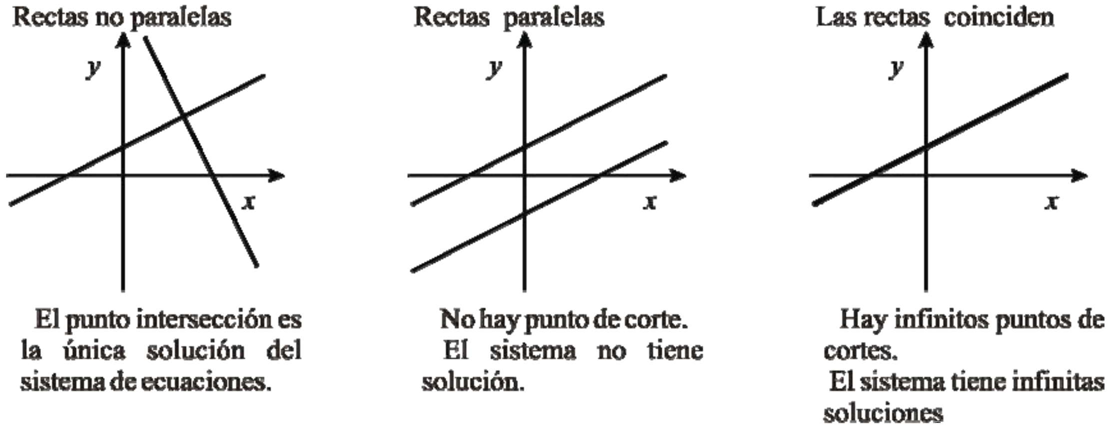
A continuación presentamos una tabla resumen de las distintas formas de la ecuación de la recta.

Formas de la ecuación de una recta	**Ecuación**
Forma punto-pendiente	$y-y_0=m(x-x_0)$
Forma pendiente-ordenada al origen	$y=mx+b$
Forma general	$ax+by+c=0$
Recta vertical	$x=a$
Recta horizontal	$y=b$

RESOLUCIÓN GEOMÉTRICA DEL SISTEMA DE ECUACIONES $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$

PUNTO DE INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS

La gráfica de una ecuación lineal es una recta, la cual está constituida por todos los pares (x, y) que satisfacen la ecuación. Si se grafican las dos ecuaciones obtendremos dos rectas, en donde caben tres casos:

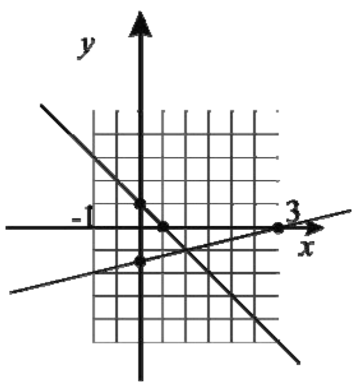


En el caso que las dos rectas se intercepten, el punto de intersección es el único punto tal que sus coordenadas satisface las dos ecuaciones simultáneamente. Recíprocamente si el sistema de ecuaciones tiene una sola solución $x = x_0$ y $y = y_0$ entonces el punto (x_0, y_0) es el punto de intersección de las dos rectas (gráficas de las ecuaciones $a_1x+b_1y+c_1=0$ y $a_2x+b_2y+c_2=0$)

Ejemplo 1.- Para el sistema $\begin{cases} 2x+2y=1 \\ x-4y=3 \end{cases}$

Consiga la solución aproximada por graficación.
Solución:

Graficamos cada recta determinando los cortes con los ejes. Al graficar podemos estimar el punto de intersección entre las dos rectas. Este punto de corte es aproximadamente (1,-0.5). De aquí que *x*=1 y *y*=-0.5 es la única solución del sistema de ecuaciones

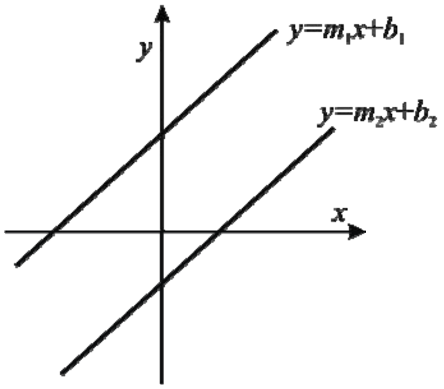


Ejercicio de desarrollo.- a) Graficar las siguientes ecuaciones en el mismo sistema de coordenadas $3y+5x+9=0$ y $y=3x+1$ **b)** Estimar el punto de intersección de las dos rectas. **c)** Para verificar su estimación resuelva el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3y+5x+9=0 \\ y=3x+1 \end{cases}$

Ejercicio de desarrollo.- Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 3x+y=1 \\ 2x-4y+1=0 \end{cases}$ gráficamente y analíticamente

Ejercicio de desarrollo.- Encontrar la ecuación general de la recta que tiene pendiente -2 y pasa por el punto de intersección de las rectas $2x+y+1=0$ y $x+2y+2=0$.

RECTAS PARALELAS Y RECTAS PERPENDICULARES



Es claro que dos rectas no verticales son paralelas si sus pendientes son iguales. Esto es $y = m_1 x + b_1$ y $y = m_2 x + b_2$ son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$

Ejemplo 1.- Encontrar la ecuación general de la recta que pasa por el punto (-1,4) y es paralela a la recta $2y - 3x - 1 = 0$.

Solución.- Lo primero que debemos hacer es conseguir la pendiente de la recta dada, llevando la ecuación a la forma pendiente-ordenada en el origen

$$\begin{gathered} 2y - 3x - 1 = 0 \\ 2y = 3x + 1 \\ y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \end{gathered}$$

Esta ecuación está en la forma $y = mx + b$, de aquí que $m = \frac{3}{2}$.

Como la ecuación que queremos obtener es paralela a la recta $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$, entonces tiene la misma pendiente $m = \frac{3}{2}$. Así ya podemos usar la forma punto-pendiente

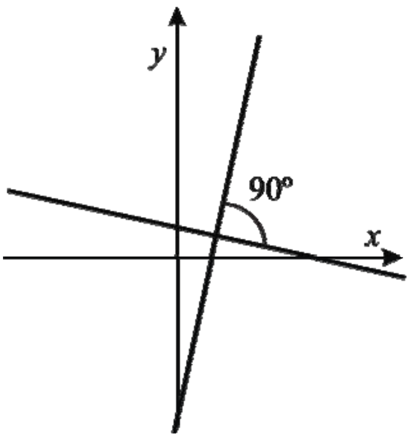
$$y - 4 = \frac{3}{2}(x - (-1))$$

Como nos piden la ecuación general de la recta, debemos hacer aún algunas manipulaciones algebraicas para llevarla a esta forma.

$$\begin{gathered} 2(y - 4) = 3(x + 1) \\ 2y - 8 = 3x + 3 \\ -3x + 2y - 11 = 0\,. \end{gathered}$$

En la gráfica se puede apreciar dos rectas perpendiculares. Observe que una está creciendo de izquierda a derecha y la otra decrece, esto es cuando una pendiente es positiva la otra es negativa. Cuando la magnitud de una en valor absoluto es grande, la otra es pequeña. Efectivamente las pendientes de rectas perpendiculares guardan una relación recíproca negativa entre sí. Esto es

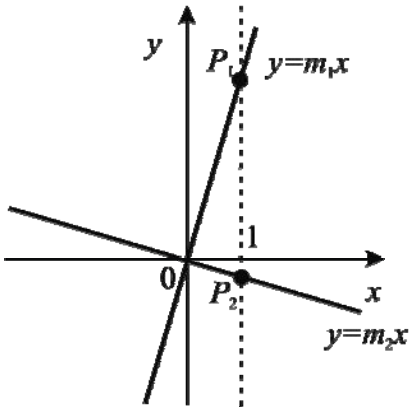
$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$



Otra forma de recordar esta relación es a través de la formula:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

A continuación mostraremos esta relación solo en el caso de rectas que pasan por el origen. Para una deducción general se puede retomar estas ideas.



La relación la obtenemos por el Teorema de Pitágoras aplicado al triangulo rectángulo $P_1 0 P_2$:

$$|OP_1|^2 + |OP_2|^2 = |P_1P_2|^2$$

$$\left(\sqrt{1+m_1^2}\right)^2 + \left(\sqrt{1+m_2^2}\right)^2 = \left(\sqrt{0^2+(m_1-m_2)^2}\right)^2$$

$$1+m_1^2+1+m_2^2 = m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2$$

Simplificando obtenemos la relación deseada

$$1 = -m_1m_2$$

Observación.- Haciendo un abuso del lenguaje, hablaremos indistintamente de la ecuación de la recta y la recta

Ejemplo 2.- Encuentre la recta que es perpendicular a $4y-2x-5=0$ y pasa por el punto (-5,-2). Exprese la recta en la forma pendiente-ordenada al origen y grafique las dos rectas.

Solución: Debemos conseguir primero la pendiente de la recta dada, para ello la escribimos en la forma pendiente-ordenada al origen.

$$4y = 2x+5$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$$

De aquí identificamos $m = \frac{1}{2}$. La pendiente de la recta perpendicular está dada por

$$m_{\perp} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2.$$

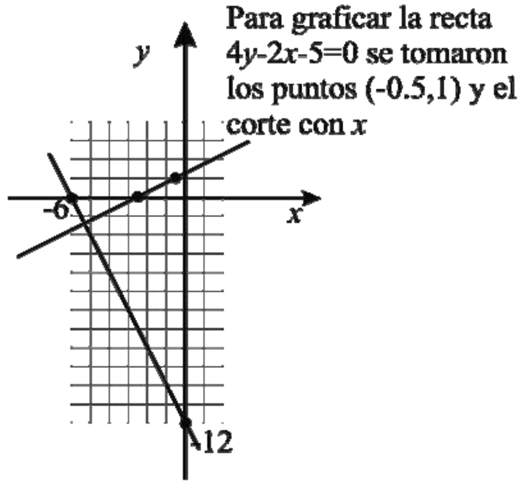
Ahora planteamos la ecuación punto-pendiente para hallar la recta:

$$y-(-2) = -2(x-(-5))$$

Finalmente obtendremos la forma pendiente-ordenada al origen.

$$y+2 = -2x-10$$

$$y = -2x-12$$



Ejercicio de desarrollo.-

a) Encontrar la ecuación general de la recta que corta el eje x en -3 y es paralela a la recta $2y+5x-8=0$.

b) Encuentre la recta que es perpendicular a $3x-2y+6=0$ y pasa por el punto (1,-3).

c) Encuentre la recta que es perpendicular a $y+6=0$ y pasa por el punto (5,-2).

EJERCICIOS

1) Para cada par de puntos consiga la pendiente de la recta que pasa por ellos:

1.1) (-1,2) y (-3,-4); **1.2)** (0, 1) y (-1,1); **1.3)** $(1,\frac{2}{3})$ y $(\frac{1}{3},2)$; **1.4)** (3,1) y (3,5)

2) Para los siguientes ejercicios determinar la ecuación general de la recta que satisface las condiciones indicadas

2.1) Pasa por el punto (3,-1) y tiene pendiente 4;
2.2) Pasa por el origen y tiene pendiente -1.
2.3) Pasa por el punto (2,-1) y tiene pendiente 0
2.4) Pasa por los puntos (3,5) y (4,0);
2.5) Pasa por los puntos (-2,1) y (1,0)
2.6) Pasa por los puntos (-2,-1) y (1,-3);
2.7) Pasa por los puntos (-2,1) y (9,1)
2.8) Es horizontal y pasa por (1,3);
2.9) Es paralela al eje *y* y pasa por (1,3)
2.10) Pasa por el punto (-2,5) y tiene pendiente $-\frac{1}{3}$
2.11) Pasa por los puntos (-2,1) y (1,1);
2.12) Pasa por los puntos (3,-1) y (3,0)
2.13) Pasa por el origen y tiene pendiente -3;
2.14) Tiene pendiente 3 y corta el eje *y* en –4
2.15) Tiene pendiente -2 y corta el eje *y* en 5;
2.16) Tiene pendiente 3 y corta el eje *x* en 1
2.17) Tiene pendiente $\frac{3}{4}$ y corta el eje *y* en –4.
2.18) Corta el eje *x* en -2 y pasa por la intersección de las rectas $y = 2x$ y $y = 4 - 2x$

3) Para la siguiente ecuación conseguir los cortes con los ejes y graficar: $y = 2x - 10$

4) Graficar la ecuación: $y = \frac{-3x}{2}$

5) Encuentre, si existe, la pendiente, la intersección con el eje *y* y grafique las siguientes rectas:

5.1) $2y - 3x + 3 = 0$; **5.2)** $y = 4$; **5.3)** $2y - 3x = 0$;
5.4) $2x = y - 1$; **5.5)** $x + 1 = \frac{1}{5}y$; **5.6)** $x + 1 + 2y = 0$;
5.7) $2x + 1 + y = 0$

6) Diga si los siguientes pares de rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos.

6.1) $2x = y - 1$, $4x + 1 - 2y = 0$
6.2) $2y - 3x = 0$, $2x + 3y + 1 = 0$
6.3) $x = 2y + 5$, $2x + 1 + y = 0$
6.4) $3y + 4x + 1 = 0$, $4x = 3y + 5$
6.5) $3y + 4x + 5 = 0$, $8y - 6x + 1 = 0$

7) Para los siguientes ejercicios encuentre la ecuación de la recta que satisface las siguientes condiciones. De su respuesta en la forma pendiente-ordenada en el origen en el caso que se pueda.

7.1) Pasa por el punto (1,2) y es paralela a la recta $2y - 3x + 1 = 0$.
7.2) Es paralela a la recta $x = 5$ y pasa por (1,-3).
7.3) Pasa por el punto (-1,4) y es perpendicular a la recta $2y = x$.
7.4) Pasa por el punto (-3,2) y es perpendicular a la recta $x = 3$.
7.5) Es perpendicular a la recta *y*=-3*x* y pasa por la intersección de las rectas $2x - y - 2 = 0$ y $2x + y - 4 = 0$
7.6) Pasa por (2,3) y es perpendicular a la recta que pasa por (0,0) y (-1,2).
7.7) Pasa por el punto (0,-2) y es perpendicular la recta *y*=4
7.8) Pasa por el punto (-1,2) y es paralela a la recta *y*=-2
7.9) Es perpendicular a la recta $5y = -3x + 3$ y corta el eje *y* en 5.

7.10) Es paralela a la recta $x = 2y + 5$ y pasa por origen.
7.11) Corta el eje *x* en 4 y es perpendicular a la recta $3y + 4x + 1 = 0$.
7.12) Es paralela a la recta $2x - 3y = 0$ y pasa por la intersección de las rectas $y = 2x - 4$ y $y = 4 - 2x$

8) Encuentre el valor de *k* para que la recta $ky = 3x + 1$, sea paralela a la recta $4y + 6x + 5 = 0$.

9) a) En el mismo sistema de coordenadas grafique los siguientes pares de rectas:
9.1) $\begin{cases} 4x - y = 5 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$ **9.2)** $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$ **; b)** Estime gráficamente el punto de corte.

10) Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales gráficamente y analíticamente

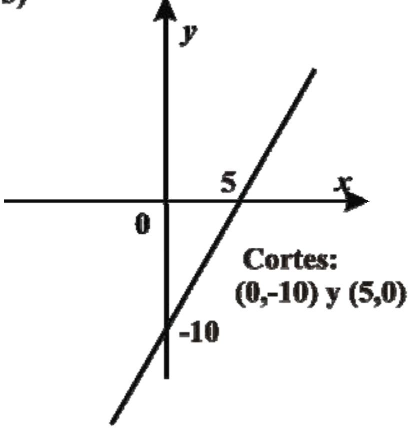
10.1) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - 4y + 5 = 0 \end{cases}$ **10.2)** $\begin{cases} \dfrac{y}{3} - \dfrac{x}{2} = 1 \\ x - \dfrac{y}{3} = -2 \end{cases}$ **10.3)** $\begin{cases} y = 2x - 7 \\ y = -2(x - 4) \end{cases}$

10.4) $\begin{cases} y = -3\left(\dfrac{x-1}{2}\right) + 8 \\ x - 8y = 15 \end{cases}$ **10.5)** $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 1 \\ 2x + 3y + 3 = 0 \end{cases}$ **10.6)** $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 1 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases}$

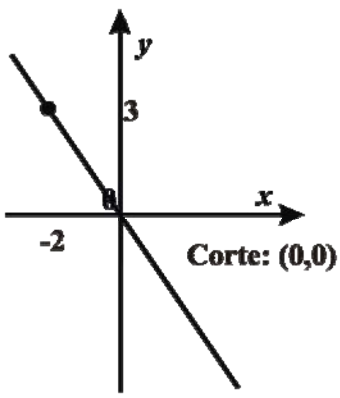
11) Diga cuál de las siguientes proposiciones son verdaderas. Justifique
11.1) ( ) Es posible que dos rectas sean perpendiculares y ambas tengan pendientes positivas.
11.2) ( ) La ecuación de cualquier recta puede ser escrita en la forma punto-pendiente.
11.3) ( ) Si el costo variable por unidad es constante entonces el costo total sigue un modelo de costo lineal.
11.4) ( ) Una recta horizontal no tiene pendiente definida.
11.5) ( ) La ecuación del eje *x* es y=0.
11.6) ( ) Las rectas $x + a = 0$ y $2x + b = 0$ son paralelas
11.7) ( ) Las rectas $\begin{cases} Ax - By = C \\ Bx + Ay = D \end{cases}$ son perpendiculares

Respuestas: 1.1) 3; **1.2**) 0; **1.3)** -2; **1.4)** No está definida.
2.1) $4x - y - 13 = 0$ **; 2.2)** $y + x = 0$ **; 2.3)** $y + 1 = 0$ **; 2.4)** $y + 5x - 20 = 0$ **; 2.5)** $3y + x - 1 = 0$ **;**
2.6) $3y + 2x + 7 = 0$ **;2.7)** $y - 1 = 0$ **; 2.8)** $y = 3$ **; 2.9)** $x = 1$**; 2.10)** $3y + x - 13 = 0$ **;2.11)** $y = 1$**; 2.12)** $x = 3$ **;2. 13)** $y = -3x$ **; 2.14)** $y - 3x + 4 = 0$ **; 2.15)** $y + 2x - 5 = 0$**; 2.16)** $y - 3x + 3 = 0$ **; 2.17)** $\dfrac{3}{4}x - y - 4 = 0$ **; 2.18)** $y = \dfrac{2}{3}(x + 2)$

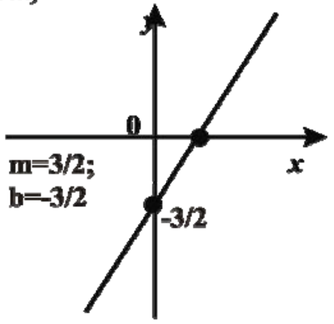
3)



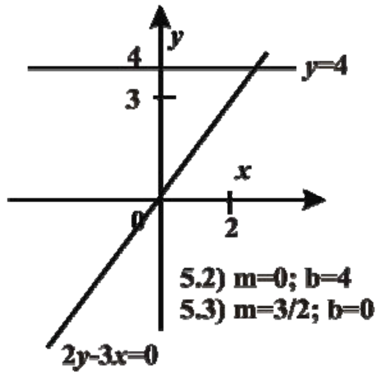
4)



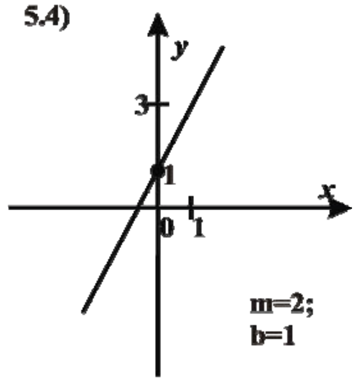
5.1)



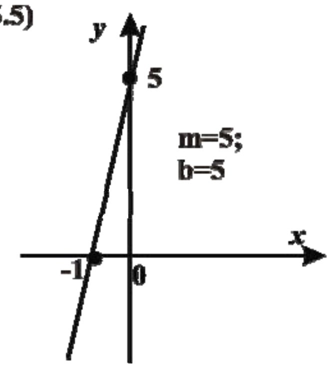
5.2)
5.3)



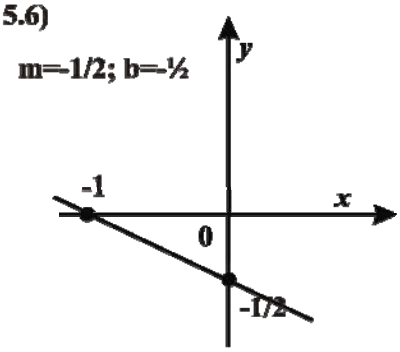
5.4)



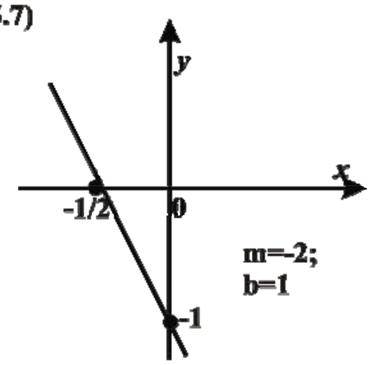
5.5)



5.6)



5.7)



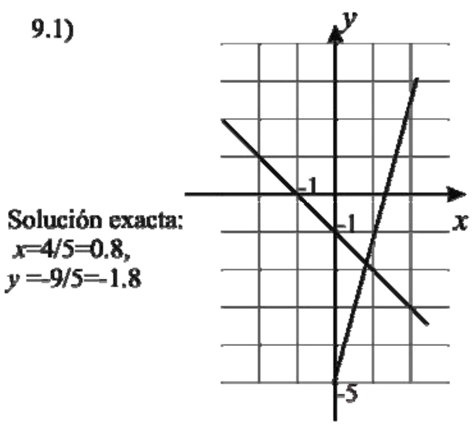
6.1) Paralelas; **6.2)** Perpendicular**; 6.3)** Perpendicular; **6.4)** Ninguna de las dos; **6.5)** Perpendicular;

7.1) $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ **;** **7.2)** $x=1$ **;** **7.3)** $y=-2x+2$ **;7.4)** $y=2$ **;**

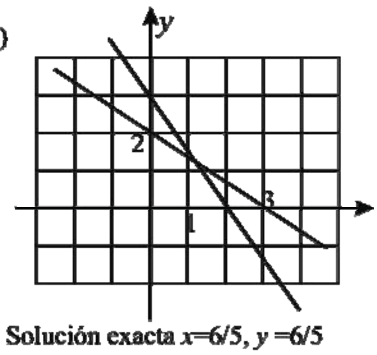
7.5) $y=-\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}$ **;** **7.6)** $y=\frac{1}{2}x+2$ **;** **7.7)** $x=0$ **;** **7.8)** $y=2$ **;** **7.9)** $y=\frac{5}{3}x+5$ **;** **7.10)** $y=\frac{1}{2}x$ **;**

7.11) $y=\frac{3}{4}x-3$ **; 7.12)** $y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$ **8)** ***k*=-2; 10)** Verdaderas: **10.3); 10.5); 10.6)** y **10.7)**

9.1)



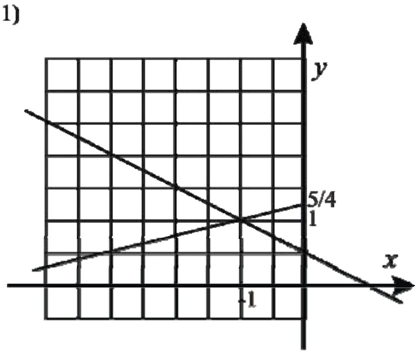
9.2)



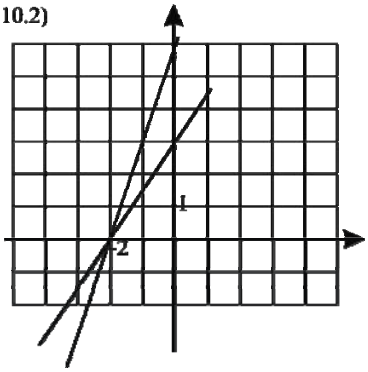
10.1) (-1,1); **10.2)** (-2,0); **10.3)** $(\frac{15}{4},\frac{1}{2})$ **10.4)** (7,-1); **10.5)** No tiene solución;

10.6) Infinitas soluciones (*x*, -2*x*/3+2)

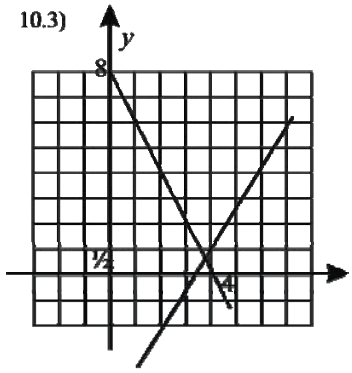
10.1)



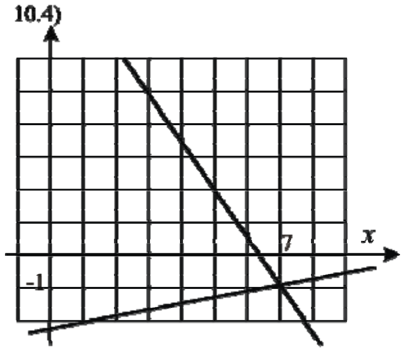
10.2)



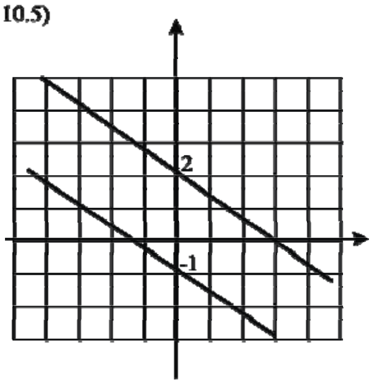
10.3)



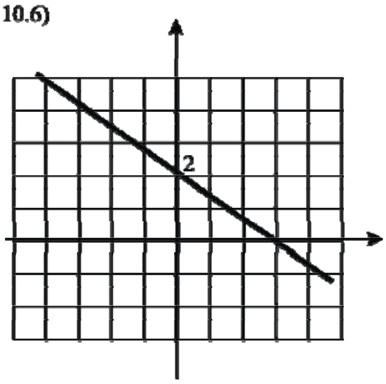
10.4)



10.5)



10.6)



11.1) (F) De la relación $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$ vemos que una tiene signo contrario a la otra.

11.2) (F) Las ecuaciones de las rectas verticales no pueden ser escritas en esta forma porque ni siquiera tienen pendientes definidas.

11.3) (V) Tendría la forma $C_T = C_F + cq$, donde *c* es el costo variable por unidad.

11.4) (F) Si tiene pendiente y vale 0.

11.5) (V) La ecuación del eje *x* es *y*=0.

11.6) (V) Las dos son rectas verticales. Observe que pueden ser escritas como $x = -a$ y $x = \dfrac{b}{2a}$

11.7) (V) Despejamos *y* en ambas ecuaciones para determinar las pendientes. Las pendientes de las rectas $\begin{cases} y = \dfrac{Ax}{B} - \dfrac{C}{B} \\ y = \dfrac{-B}{A}x + \dfrac{D}{A} \end{cases}$ son $\dfrac{A}{B}$ y $-\dfrac{B}{A}$ y cumplen con la relación $m_1 \cdot m_2 = -1$ de perpendicularidad.

APLICACIONES EN LA ECONOMIA

MODELOS DE COSTOS LINEALES

Ejemplo 1.- Suponga que el costo total de producir 40 unidades de un producto es de 120UM mientras que el de 70 unidades es 165UM. Si el costo *c* está relacionado linealmente con la cantidad a producir *q*. **a)** Determine una ecuación lineal que relacione *c* con *q*. **b)** Encuentre el costo de producir 35 unidades. **c)** Interprete la pendiente

Solución: a) Como se dice que el costo está relacionado linealmente con *q*, la ecuación que se pide es el de una recta. En este caso como nos dan dos puntos: $(q_1, C_1) = (40{,}120)$ y $(q_2, C_2) = (70{,}165)$ podemos determinar la pendiente que pasa por estos dos puntos y luego usar la ecuación punto pendiente para establecer la recta.

(Observe como se ha seleccionado *q* como la variable independiente y *C* la dependiente)

Tenemos entonces

$$m = \frac{C_2 - C_1}{q_2 - q_1} = \frac{165 - 120}{70 - 40} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2}$$

Al usar la ecuación punto pendiente usando el punto $(q_1, C_1) = (40{,}120)$, obtenemos

$$C - C_1 = m(q - q_1)$$

$$C - 120 = \frac{3}{2}(q - 40)$$ Esta forma la llevamos a la forma pendiente-ordenada al origen

$$C = \frac{3}{2}q + 60$$

b) Para encontrar el costo de producir 35 unidades sustituimos q=35 en la ecuación anterior

$$C = \frac{3}{2} \cdot 35 + 60$$

$$C = 112{,}5$$

En conclusión, el costo de producir 35 unidades es 112,5M

c) En economía es usual buscar las interpretaciones de tasas de cambios tomando la variación en la variable independiente igual a 1:

$$m = \frac{C_2 - C_1}{q_2 - q_1} = \frac{\Delta C}{1} = 1{,}5$$

Esto es $\Delta C = 1{,}5$ cuando el cambio en la producción aumenta una unidad. Muchas veces leemos $\Delta C = 1{,}5$ como: *los costos aumentan en 1,5UM*. Este aumento en el costo total se traduce es este contexto en el costo de cada unidad.

Efectivamente este modelo corresponde al modelo de costos totales tratado anteriormente, donde: $C = C_F + C_V$. Si el costo de cada artículo es c_u, independientemente de la cantidad de artículo a producir y vender entonces $C_V = c_u q$ quedando entonces un modelo de costos lineales: $C = C_F + c_u q$, y la pendiente es el costo de cada unidad, llamado costo variable por unidad.

Ejemplo 2.- Se quiere contratar a un albañil para pegar cerámica. Él cobra 20UM solo por llegar con su equipo para comenzar el trabajo más 3UM cada metro cuadrado que coloque. **a)** Consiga una relación entre el costo del trabajo y x metros cuadrados de cerámica a pegar. **b)** A partir de la parte a) determine el costo de pegar 12 metros cuadrados de cerámica.

Solución:

a) De la discusión anterior sabemos que estamos en un modelo de costos lineales:

$C = C_F + c_u q$, donde C_F es el cobro inicial y c_u es el costo de una unidad de trabajo.

En este caso $C_F = 20$ y $c_u = 3$ y

$C = 20 + 3q$

b) Sustituimos en la ecuación anterior q por 12 obtenemos

$C = 20 + 3 \cdot 12 = 56$ UM es el costo de pegar 12 metros cuadrados de cerámica.

Con frecuencia se tiene un presupuesto fijo que se tiene que distribuir en la adquisición de dos o más bienes. Veamos el siguiente ejemplo que puede ser extendido en muchas aplicaciones.

Ejemplo 3.- Suponga que se recogió 100 UM para organizar una reunión. Se piensa comprar refrescos y papas para ofrecer. El refresco cuesta 1.5UM la botella de litro y medio y las papitas cuestan 2.5 el paquete de 400gr. Sea x el número de botellas de refrescos(de litro y medio) y y el número de paquetes (de 400gr) de papitas a comprar. Determine una ecuación que describa las distintas combinaciones que pueden ser compradas con el presupuesto asignado. Represente gráficamente la ecuación.
Solución: Obtendremos la ecuación a través de la condición de igualdad establecida en el problema:

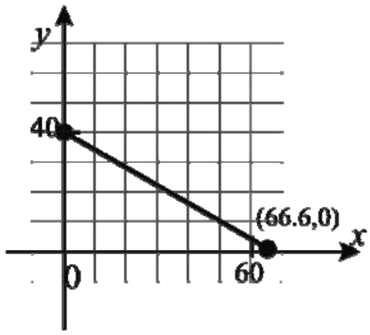
Gasto total=100
El gasto total= Gasto en Refresco+Gasto en Papitas

El gasto en refresco es de $1,5x$
El gasto en papitas es de $2,5y$

Así, sustituyendo obtenemos la relación pedida:

$$1,5x + 2,5y = 100$$

Esta ecuación muestra las distintas posibilidades con que se puede distribuir el presupuesto de 100UM.
Al lado se ha hecho la representación gráfica de esta ecuación.



MODELOS EN EL TIEMPO

Ejemplo 1.- Una oficina comercial compró una computadora en 5000UM. Se estima que el valor es de 500UM al cabo de 9 años. Si se considera una depreciación lineal. **a)** Encuentre una ecuación que exprese el valor V de la computadora en función del tiempo. **b)** De una interpretación de la pendiente.
Solución:
a) Si el valor de la computadora es lineal con respecto al tiempo, entonces se debe buscar una ecuación de la recta que pase por los puntos $(t_2, V_2) = (0,5000)$ y $(t_1, V_1) = (9,500)$. Para ello primero calculamos la pendiente que pasa por estos puntos

$$m = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} = \frac{5000 - 500}{0 - 9} = -\frac{4500}{9} = -500$$

Ahora usamos la ecuación punto-pendiente:

$$V - V_1 = -500(t - t_1)$$

$$V - 5000 = -500(t - 0)$$
$$V = -500t + 5000$$

b) La pendiente es -500, esto se puede interpretar que por cada año que transcurre el valor de la computadora disminuye 500UM.

Recordemos que la pendiente es la razón de cambio de *y* al cambio en *x*. En las aplicaciones esta razón de cambio se interpreta como la tasa promedio de cambio: el cambio en *y* por un cambio de una unidad en *x*.

Ejemplo 2.- La relación $y = 240.3t + 13400$ expresa el PIB de un país en miles de millones de U.M. como función del tiempo *t*, medido en años desde el año 2001. Diga el valor de la pendiente y la ordenada en el origen. De una interpretación de ambas.
Solución: Directamente podemos ver que la pendiente es 240.3, este valor se puede interpretar diciendo que el PIB está creciendo a una razón promedio de aproximadamente 240.3 miles de millones U.M. por año. La ordenada en el origen es 13400, es el valor de *y* cuando *t* es cero. Este valor se interpreta que es el PIB en el año 2001.
La tasa promedio de cambio del PIB por año es entonces 240.3 miles de millones de UM.

Ejemplo 3.- Se estima que la cosecha de apio será de 120 toneladas para la primera semana de Septiembre y que crecerá a una razón de 2.5 toneladas por semana a partir de esta fecha. Este modelo es válido hasta el 1 de Diciembre. Encuentre el modelo lineal que relaciona el tamaño de la cosecha con el tiempo en semanas medido a partir del primero de Septiembre.
Solución: En este problema nos dan la tasa de cambio de la cosecha de apio, su valor es la pendiente de la recta, ella es *m*=2.5. Como *t* está medido a partir de la primera semana de Septiembre, b=120 es la ordenada en el origen por ser *t*=0. Para este problema es recomendable entonces usar la ecuación pendiente-ordenada en el origen:

$$y = mt + b$$

Sustituyendo, obtenemos de una vez el modelo pedido

$$y = 2.5t + 120$$

Ejemplo 4.- El número promedio de habitantes por casa ha estado disminuyendo en los últimos años en el país, manteniéndose una tendencia lineal con respecto al tiempo. En el año 2000 había un promedio de 5.3 habitantes por casa. En el 2005 cerca de 4.8. Si *N* representa el número promedio por casa y *t* el número de años después del 2000, **a)** Encuentre una ecuación lineal que represente *N* en función de *t*. **b)** ¿Cuál es la predicción para el año 2010 de personas por casa? **c)**¿Este es un modelo válido por mucho tiempo?
Solución:
a) Como el modelo se asume lineal debemos conseguir la ecuación de la recta que pasa por $(t_1, N_1) = (0{,}5.3)$ y $(t_2, N_2) = (5{,}4.8)$. Para ello primero calculamos la pendiente que pasa por estos puntos

$$m = \frac{N_2 - N_1}{t_2 - t_1} = \frac{5.3 - 4.8}{0 - 5} = -\frac{0.5}{5} = -0.1$$

Ahora usamos la ecuación punto-pendiente:

$$N - N_1 = -0.1(t - t_1)$$
$$N - 5.3 = -0.1(t - 0)$$
$$N = -0.1t + 5.3$$

b) Para el año 2010 han transcurrido 10 años después del 2000. Así que en la ecuación recién obtenida evaluamos *t* en 10 para obtener el número de habitantes promedio estimado para ese año

$N = -0.1(10) + 5.3 = 4.3$ habitantes por casa.

c) Este modelo no es razonable a largo plazo. Por ejemplo si pasa 50 años el promedio de habitantes por casa es 0.3 lo cual no tiene sentido.

Ejemplo 5.- Las reservas probadas de un mineral en cierto país en los actuales momentos son de 12.5 millones de toneladas. Si la explotación se mantiene constante en 20.000 toneladas al mes y no hay nuevas exploraciones que aumenten las reservas probadas **a)** Justifique que hay una relación lineal entre las reservas y el tiempo**. b)** Consiga esa relación lineal. **c)** ¿Cuándo se acabarán las reservas probadas? **d)** Dibuje la recta de reservas probadas contra el tiempo en meses.

Solución:

a) Como el cambio de las reservas es constante por mes (*t)* entonces hay una relación lineal entre ellas.

b) -20.000 toneladas representa la razón de cambio de y por mes (por una unidad de cambio en *t*), así que ella es la pendiente *m*=-20.000, recuerde que es razón de cambio. Expresamos nuestras cantidades en millones, así *m*=-0.02 millones por mes. Para conseguir la ecuación de la recta hace falta un punto en el plano. Como dan la información que hay 12.5 millones, tomamos este como la coordenada *y* de las reservas. El tiempo lo inicializamos en 0 a partir de los actuales momentos. Así la recta pasa por (0,12.5). Se puede usar la ecuación punto-pendiente o la ecuación ordenada en el origen para encontrar la ecuación de la recta. Usamos la segunda pues 12.5 es la ordenada en el origen:

$$y = mt + b$$

Al sustituir los valores se obtiene:

$y = -0.02t + 12.5$ millones de toneladas

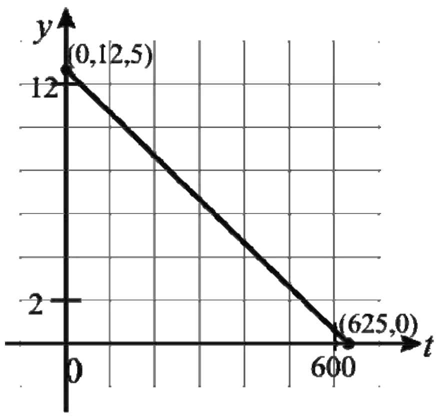
c) Se acabarán las reservas cuando *y*=0
Sustituimos este valor en la ecuación encontrada en b):

$0 = -0.02t + 12.5$ y se despeja *t*

$$t = \frac{12.5}{0.02} = 625 \text{ meses}$$

Esta cantidad de meses equivale a 52 años.

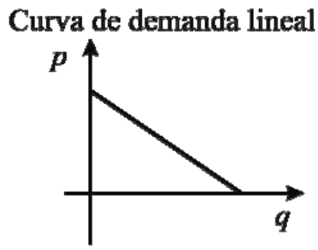
En conclusión: en 52 años se acabarán las actuales reservas probadas con los niveles de producción actual.

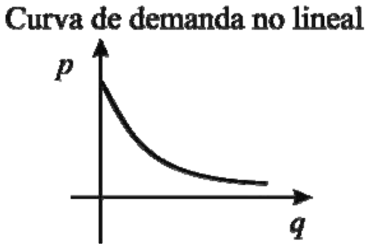


ECUACION DE DEMANDA

La ecuación de demanda es una ecuación que expresa la relación que existe entre *q* y *p*, donde *q* es la cantidad de artículos que los consumidores están dispuestos a comprar a un precio *p*. Es normal que si los precios bajan los consumidores estarán dispuestos a comprar más artículos, así la gráfica de la ecuación suele ser decreciente de izquierda a derecha. Esta gráfica también es conocida como curva de demanda. Ella se dibuja sólo para valores de *p* y *q* positivos. Los economistas suelen representar *p* en el eje de las *y* y *q* en el eje de las *x*.

Las ecuaciones lineales suelen ser un modelo muy frecuente para representar ecuaciones de demanda. Recordemos que la gráfica es una línea recta, como se muestra en la figura.





Pueden existir otros tipos de curvas de demandas distintas a rectas. Normalmente son decrecientes de izquierda a derecha debido a que en general el mercado sigue la pauta de a menor precio mayor demanda.

El siguiente ejemplo ilustra como se puede estimar la ecuación de demanda cuando se supone que es lineal.

Ejemplo 1.- Una tienda de video vende 20 DVD a un precio de 25UM, pero si fija un precio de 30UM se venderán 15 DVD. Determine la ecuación de demanda suponiendo que existe una relación lineal entre *q* y *p*.
Solución: Cuando se específica que la ecuación de demanda es lineal se tiene que esta ecuación es la de una recta. Consideraremos la cantidad *q* como la abscisa y la cantidad *p* como la ordenada. En el problema se tienen dos puntos que satisfacen la ecuación buscada $(q_1, p_1) = (20,25)$ y $(q_2, p_2) = (15,30)$. Para conseguir la recta que pasa por estos puntos primero calculamos la pendiente.

$$m = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} = \frac{30-25}{15-20} = -1$$

Ahora se usará la ecuación punto pendiente, recordando que *p=y* y *q=x.*

$$p - p_1 = m(q - q_1)$$
$$p - 25 = -1(q - 20)$$

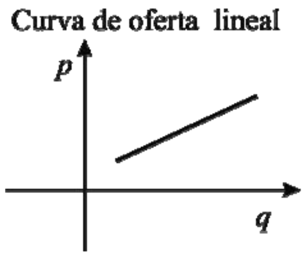
Reordenando obtenemos la ecuación de demanda:

$$p = -q + 45$$

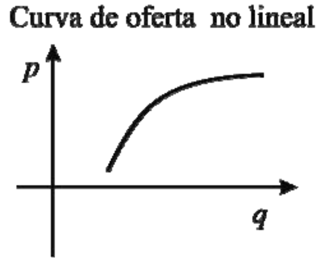
ECUACION DE OFERTA

La ecuación de oferta da la relación entre el precio que pueda tener un artículo y la cantidad de artículos que los proveedores o fabricantes estén dispuestos a colocar en el mercado a ese precio.

Normalmente si el precio es alto los proveedores colocarán muchos artículos en el mercado, sin embargo si el precio es bajo disminuirá los artículos ofrecidos por los proveedores. Así la curva de oferta suele ser creciente de izquierda a derecha



Hay muchos productos que siguen una relación lineal en la oferta, su curva de oferta es una recta, normalmente de pendiente positiva. Sin embargo existen otros productos con una ecuación de oferta no lineal como se muestra en la figura de al lado.
Pero en general la curva de oferta es creciente, pues a mayores precios los fabricantes son capaces de ofrecer más artículos.



PROBLEMAS DE ECONOMIA

1) Suponga que el valor de compra de una máquina que se deprecia linealmente fue de 5.000 UM. Al cabo de 10 años el valor de la máquina fue de 850UM. **a)** Encuentre una ecuación que exprese el valor V de la máquina después de t años de la compra. **b)** Calcule el valor de la máquina 5 años después de la compra. **c)** ¿Cuándo se depreciará por completo la maquina. **d)** Bosqueje la ecuación, seleccione *t* como el eje horizontal. ¿Cuál es la pendiente de la recta resultante? **Respuestas: a)** V=-415t+5000; **b)** 2925 UM; **c)** 12 años; **d)** -415.

2) En análisis de producción, una línea de isocosto es una línea cuyos puntos representan todas las combinaciones de dos factores de producción que pueden ser compradas por la misma cantidad. Suponga que un granjero tiene asignados 20.000UM para la compra de *x* toneladas de fertilizantes (con un costo de 2000UM por tonelada) y *y* galones de insecticida (con un costo de 20UM por galón). Determine una ecuación de isocosto que describa las distintas combinaciones que pueden ser compradas con 20.000UM. Observe que ni *x* ni *y* pueden ser negativas. **Respuestas:**20.000=2000*x*+20*y*

3) Un fabricante produce dos productos X y Y para los cuales las ganancias por unidad son 4UM y 6UM, respectivamente. Si x unidades de X y *y* unidades de Y son vendidas, la ganancia total P está dada por P=4x+6y, donde, $x,y \geq 0$. **a)** Bosqueje la gráfica de esta ecuación para P=240. El resultado es llamado línea de isoutilidad y sus puntos representan todas las combinaciones de ventas que producen una utilidad de 240UM. **b**)Determine la pendiente para P=240. **c)** Si P=600, determine la pendiente. **d)** ¿Las rectas de isoutilidad para los productos X y Y son paralelas? **Respuestas: a)** 240=4*x*+6*y*;
b) m=-2/3 ; **c)** m=-4/6; d)si

4) Para efectos tributarios, las computadoras personales se deprecian linealmente hasta llegar a cero en un período de 10 años; es decir el valor de las computadoras decrece a una razón constante, de manera que es igual a cero al cabo de 10 años. Si el valor de compra de una computadora fue 1200UM, exprese el valor de la computadora como una función de tiempo y dibuje su gráfica.
Respuestas: V=1200-120t)

5) Desde el comienzo del año el precio de la gasolina corriente ha estado aumentado a una tasa constante de 0.02UM por litro al mes. Si el primero de junio el precio había llegado a 1.2UM por litro, exprese el precio de la gasolina corriente como una función del tiempo y dibuje su gráfica.
Respuestas: p=0.02t+1.08; t es el número de meses contados a partir del primero de enero.)

6) (Ec. de costo) Suponga que el costo total de producir 10 unidades de un producto es de 40UM mientras que el de 20 unidades es 65UM. Si el costo *c* está relacionado linealmente con la cantidad a producir *q*. **a)** Determine una ecuación lineal que relacione *c* con *q*. **b)** Encuentre el costo de producir 35 unidades. **Respuestas: a)** c=2,5q+15; **b)** 102,5UM.

7) Un comercio tiene una política lineal sobre fijación de precios sobre artículos que cuestan más de 29,99UM. Si se sabe que el costo de adquisición de una grabadora es de 60UM y el precio de venta en este comercio es de 75 y una secadora cuesta adquirirla 70 U.M. y el precio de venta es 90U.M. **a)** Calcule una ecuación lineal que relacione el precio de venta *p* con el costo. **b)** Use esa ecuación para estimar cuánto le costó al negocio una calculadora de bolsillo, cuando el precio de venta es de 30UM. **Respuestas: a)** $2p-3c=30$; **b)** 10 UM.

8) En una compañía un empleado recién contratado cobra 150UM y el empleado con cinco años de antigüedad recibe un sueldo de 250UM . **a)** Hallar la ecuación del sueldo del empleado en función del tiempo que lleva en la compañía, suponiendo que hay una relación lineal entre el sueldo y el número de años que lleva trabajando en la compañía. **b)** ¿Cuánto cobrará un empleado que lleva en la empresa 10 años de servicio? **Respuestas:** y=20t+150; 350 UM

9) Una fabrica de zapatos elabora dos tipos de calzado *x* y *y*. Las horas de trabajo por cada modelo están dadas en la tabla anexa.

	horas
Calzado *x*	1.25
Calzado *y*	1.5

Si la fabrica dispone de un máximo de 300 horas de trabajo. Encuentre la relación entre el número de pares de zapatos de cada tipo que pueden fabricarse si se utilizan por completo las horas de trabajo disponible. **Respuestas:** $1.25y+1.5y=300$

10) La tarifa por el servicio de un ciber está dado por la siguiente formula $c = 8 + 0{,}5t$, donde t es la cantidad de minutos consumidos. Exprese en un lenguaje sencillo como trabaja la tarifa.

11) El costo fijo por la fabricación de un artículo es de 100UM y el costo variable por unidad es de 5UM. Encuentre la ecuación que relaciona los costos totales con la cantidad de artículos a producir. **Respuestas:** $c = 100 + 5q$

12) Se colocan 400 UM al 8% de interés simple anual .**a)** ¿Cuál es el valor de la inversión al cabo de t años?; **b)** ¿Cuál es el valor de la inversión a los 5 años? **c)** Grafique. **Respuestas:** a) $v = 400 + 32t$, b) 560)

13) Un taxista cobra 3UM por parar y subir a los pasajeros y luego 2UM por cada 100 metros de recorrido. Encontrar la ecuación lineal que relacione la tarifa y los metros recorridos. **Respuestas:** $v = 3 + 2x$, donde x son los cientos de metros recorridos

14) La experiencia de una distribuidora en otras ferias de libros es que si coloca a un precio de 30UM el libro de records Guinness venderá 1200 ejemplares, pero si establece un precio de 45 venderá 800 ejemplares. Asuma que hay una relación lineal entre el precio p y q la demanda de libros. **a)** Encuentre una ecuación que relacione el precio y la demanda del libro de records del año. **b)** De una interpretación de la pendiente y de la ordenada en el origen de la ecuación de a). **c)** Si el expositor sólo cuenta con 900 ejemplares ¿Qué precio deberá colocar para asegurar que los venderá todos al precio más alto posible? **Respuesta: a**) $15q + 400p = 24.000$; **b)** 105/4 U.M.

15) Suponga que un fabricante de bicicleta suministrará en el mercado 500 bicicletas si el precio es de 350UM y 350 bicicletas cuando el precio es de 300UM. Determinar la ecuación de oferta, suponiendo que el precio p y la cantidad q están relacionadas linealmente. **Respuesta:** $3p = q + 550$

16) Suponga que los clientes demandarán 40 unidades de un producto cuando el precio es de 12 UM y 25 unidades cuando el precio es de 18UM. **a)** Encontrar la ecuación de demanda, suponiendo que es lineal. **b)** Calcular el precio cuando 30 unidades son demandadas. **Respuestas: a)** $p = -\frac{2}{5}q + 28$; **b)** 16 U.M.

17) Suponga que una industria de calzado está dispuesto a fabricar 50 mil pares de zapatos escolares en la temporada si el precio en el mercado es de 35UM y 35 (miles de pares zapatos) cuando el precio sea de 30UM. Determine la ecuación de oferta, suponiendo que el precio p y la cantidad q están relacionados linealmente. **Respuesta:** $q=3p-55$

18) Suponga que un fabricante puede colocar en el mercado 400 unidades de un producto cuando el precio es de 150 UM y 250 unidades cuando el precio es de 200UM. Encontrar la ecuación de demanda, suponiendo que es lineal. **Respuesta:** $q = 850 - 3p$

PROBLEMAS DE ADMINISTRACION AMBIENTAL

1) El costo y de reducir la emisión de gases tóxicos de un carro depende del porcentaje de reducción x de una manera lineal. Encuentre esta relación sabiendo que si se reduce en un 20% la emisión, entonces el gasto es de 50UM y si se reduce en un 25% el costo es 60UM **a)** Encuentre la relación lineal entre el costo y el porcentaje de reducción de emisiones tóxicas. **b)** Encuentre el costo cuando el porcentaje de reducción es 90%. **Respuestas: a)** $y = 2x + 10$; **b)** 190

PROBLEMAS DE ADMINISTRACIÓN DEL AGRO

1) En los últimos años se ha observado un incremento constante en la producción de arroz en cierta zona del país. Si en 1998 la producción fue de 42 toneladas y en el 2002 la producción fue de 49 toneladas. Asuma que hay una relación lineal entre la producción de arroz en esa zona y el tiempo medido en años a partir de enero de 1998 (t=0) **a)** Estime esta relación. **b)** ¿Cuál será aproximadamente la producción en 2010? **Respuestas: a)** $y = \frac{7}{4}t + 42$; **b)** $\frac{139}{2}$

2)Se estima que el tamaño de una cosecha es de 200 sacos para el primero de septiembre y que aumenta a una razón constante de 3 sacos por semana. Encuentre la relación lineal entre el tamaño de la producción y el tiempo. **Respuesta:** $y = 200 + 3t$ con t medido en semanas

3) Se quiere plantar dos tipos de árboles en una región. Las horas de trabajo por cada tipo están dadas en la tabla anexa.

	horas
tipo I	1.4
tipo II	1.1

Si se dispone de un máximo de 250 horas de trabajo. Encuentre la relación entre el número de árboles a plantar de cada tipo si se utilizan por completo las horas de trabajo disponible.
Respuesta: $1.4x+1.1y=250$

PROBLEMAS DE CIENCIAS SOCIALES

1) En un país después del año 2000 ha estado incrementándose el empleo a un promedio de 0.02 cientos de miles de personas cada mes. Si en el año 2000 había 2.5 millones de personas empleadas, encuentre una relación entre el número de personas empleadas y el tiempo t en meses. **Respuestas:** $y = 0.002t + 2.5$ millones de personas

2) Realizar el ejemplo 2 considerando que el tiempo cambia en años. Primero calcule cambio de las reservas cuando transcurre un año.

3) En la pagina WEB del grupo del Banco Mundial aparece publicada entre otras estadística la esperanza de vida en Brasil. Para el año 2000 era 69,7, y para el año 2004 fue de 70,9 años. **a)** Asuma que en esta década la esperanza de vida sigue un modelo lineal, ajuste una ecuación a partir de estos dos datos**. b)** En la estadística aparece que en el año 2003 la esperanza de vida era de 70,6 años. ¿Este dato satisface su ecuación? Si es así es pura casualidad, ya que este tipo de modelo es aleatorio. **c)** Use el modelo en a) para predecir la esperanza de vida para el año 2009. d) ¿Le parece razonable este modelo a largo plazo? Justifique (http://www.bancomundial.org/datos/datos_pais.html)

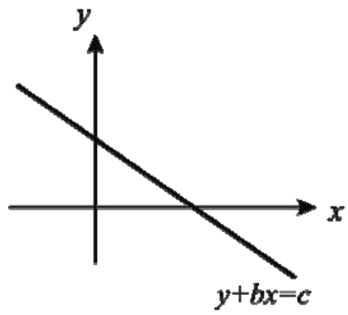
RESOLUCIÓN GEOMETRICA DE DESIGUALDADES LINEALES

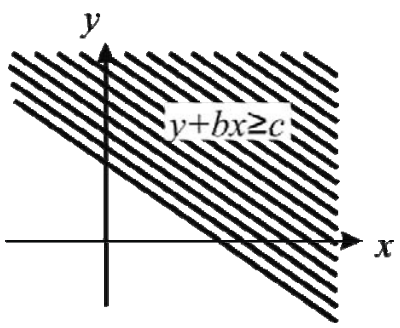
En esta sección veremos que la representación geométrica de los puntos (x, y) que satisfacen una desigualdad lineal de tipo $ay + bx \geq c$ es un semiplano

Analicemos el caso particular de la desigualdad $y + bx \geq c$. (Observe que toda desigualdad del tipo $ay + bx \geq c$ con $a \neq 0$ se la puede llevar a esta forma, salvo el signo de la desigualdad)

En este caso que se tiene la igualdad, los puntos sobre la recta $y + bx = c$ satisfacen la desigualdad. Al lado hemos dibujado esta recta.

Recuerde que c es la ordenada en el origen de la recta $y + bx = c$.





También todos los puntos sobre las rectas $y + bx = d$, con $d \geq c$ satisfacen la desigualdad (por transitividad: $y + bx = d \geq c$). Estas rectas tienen las mismas pendientes que la recta $y + bx = c$, pero las ordenadas en el origen son mayores. En la figura están graficadas una serie de rectas con estas características. El conjunto de puntos sobre las rectas $y + bx = d$, con $d \geq c$, forman un semiplano.

Por otro lado, ningún punto sobre rectas de la forma $y + bx = e$, con $e < c$, satisface la desigualdad. Así que la solución de la desigualdad es un semiplano definido por la recta $y + bx = c$.

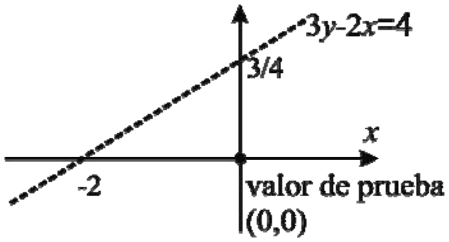
Consideraciones para obtener la representación grafica de una desigualdad lineal

1) Ya sabemos que la solución de una desigualdad $ay + bx \geq c$ (>,< o $\leq$) es un semiplano delimitado por la recta $ay + bx = c$. Para determinarlo primero graficaremos la recta $ay + bx = c$, luego tomaremos un punto de prueba fuera de la recta. Este punto lo evaluamos en $ay + bx$. Si es mayor a c entonces donde está el punto es el semiplano solución, si no es el otro semiplano.

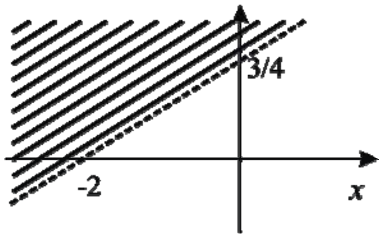
2) Si la desigualdad es estricta entonces la recta $ay + bx = c$ no pertenece al conjunto solución y esta recta la dibujaremos con un trazo punteado, si la desigualdad contiene la igualdad la recta la dibujaremos con un trazo sólido.

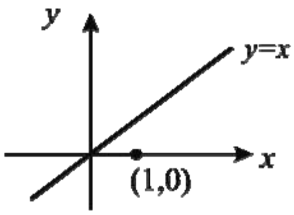
Ejemplo 1.- Conseguir la solución gráfica de $3y - 2x > 4$

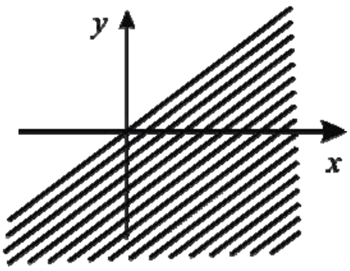
Solución: Se dibuja primero la recta $3y - 2x = 4$ Punteada pues la desigualdad es estricta.



Luego se toma un punto de prueba fuera de la recta, por ejemplo el punto (0,0) y se sustituye en la desigualdad: $3\cdot 0-2\cdot 0>4$ es una proposición falsa. Por lo tanto la solución es el semiplano que no contiene el (0,0).







Ejemplo 2.- Conseguir la solución gráfica de $y-x\geq 0$

Solución: Se dibuja primero la recta $y-x=0$

Sólida pues la desigualdad no es estricta.

Luego se toma un punto de prueba fuera de la recta, por ejemplo el punto (1,0) y se sustituye en la desigualdad: $1-0\geq 0$ es una proposición verdadera. Por lo tanto la solución es el semiplano que contiene el (1,0).

Ejercicio de desarrollo.- Encuentre la solución geométrica de la siguiente desigualdad: $2y+2x\leq 1$

En ocasiones tenemos sistemas de desigualdades, como por ejemplo:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y>c_1 \\ a_2x+b_2y>c_2 \end{cases}$$

Resolver un sistema de desigualdades gráficamente es encontrar la región del plano de todos los puntos que satisfacen al mismo tiempo ambas desigualdades. Para encontrar tal región se gráfica cada desigualdad y luego se toma la intersección de los semiplanos.

Ejercicio de desarrollo.- Encuentre las soluciones geométricas del siguiente sistema de desigualdades

$$\begin{cases} 4x-2y>1 \\ \quad x<3y \end{cases}$$

APLICACIONES

Ejemplo 1.- Una compañía obtiene una ganancia de 30UM por fabricar cada barril de alcohol isopropilico y 25UM por fabricar cada barril de alcohol absoluto. Se quiere utilidades totales de al menos 1500UM diarios. Si *x* representa el número de barriles de alcohol isopropilico y *y* el número de barriles de alcohol absoluto que se producen diariamente, dibujar la región del plano que satisface esta condición.

Solución: Primero se debe conseguir la desigualdad que impone la condición.

En este caso la condición es

$$\text{Utilidades}\geq 1.500$$

Por otro lado debemos expresar las utilidades en términos de las variables x y y.

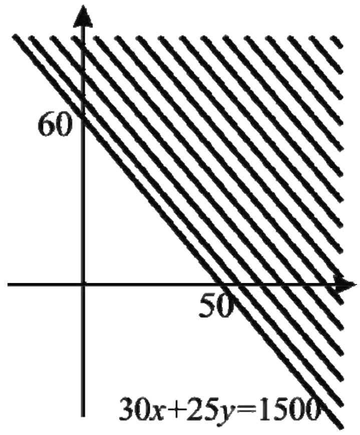
Tenemos que:

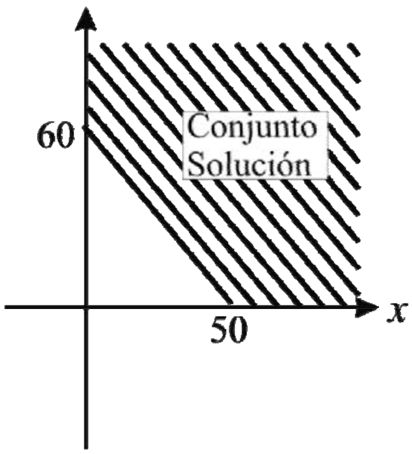
Utilidad por producir x barriles de alcohol isopropilico = $30x$
Utilidad por producir y barriles de alcohol absoluto = $25y$
Utilidades totales= $30x + 25y$

Así la región que satisface la condición de utilidad está dada por

$$30x + 25y \geq 1.500$$

Para dibujar la región primero trazamos la recta $30x + 25y = 1.500$. Luego tomamos un punto de prueba fuera de la recta, por ejemplo (0,0), como no satisface la desigualdad la solución es el otro plano que no contiene al (0,0).





Finalmente la solución debe estar restringida a los x y y positivos. Así que eliminamos las regiones que no cumplen está condición

Ejemplo 2.- Una empresa fabrica dos tipos de mesas, A y B. Para la fabricación de ambas mesas deben pasar por dos procesos I y II. El tiempo que le toma cada mesa en cada proceso está indicada en la siguiente tabla.

	Mesa A	Mesa B
Horas del proceso I	0.75	1
Horas del proceso II	1,25	0.75

La fábrica dispone a lo sumo de 80 horas a la semana para el proceso I y 120 para el proceso II. Sean x y y el número de mesas A y B, respectivamente, que se fabrican a la semana. Dé las desigualdades para que las cantidades producidas no exceda los tiempos del proceso I y II y represéntelas gráficamente.

Solución: Se deben plantear dos desigualdades, una para que se satisfaga las horas totales del proceso I y la otra desigualdad para el proceso II.

Horas totales en el proceso I = Horas totales en el proceso I para la fabricación de x mesas de tipo A. + Horas totales en el proceso I para la fabricación de y mesas de tipo B.

En términos de las variables y los datos nos queda que:

Horas totales del proceso I= $0.75x + 1 \cdot y$

De manera similar podemos ver que:

Horas totales del proceso II= $1.25x + 0.75 \cdot y$.

Así x y y deben satisfacer el siguiente sistema de desigualdades:

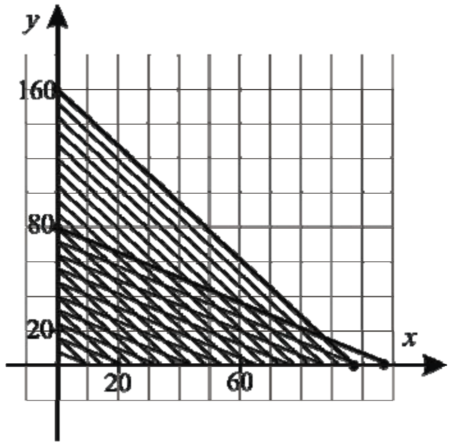
$0.75x + 1 \cdot y \leq 80$ (Condición de horas del proceso I)

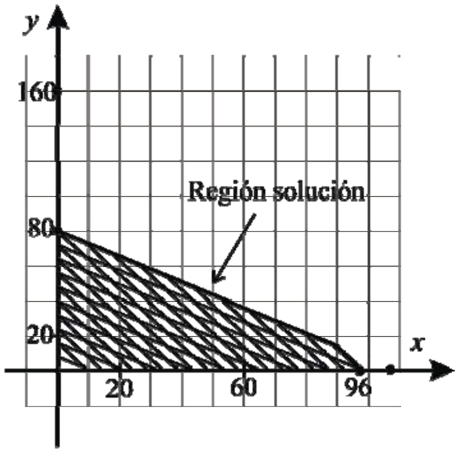
$1.25x + 0.75 \cdot y \leq 120$ (Condición de horas del proceso II)

Además

$x \geq 0$

$y \geq 0$





En ambas desigualdades tomamos (0,0) como valor de prueba y vemos que las desigualdades se satisfacen. Por lo tanto la región solución en ambas regiones son los semiplanos que están por debajo de sus respectivas rectas. La solución del sistema es la intersección de los dos semiplanos marcado en el dibujo por la región a cuadros.

EJERCICIOS

1) Encuentre la solución geométrica de las siguientes desigualdades:

1.1) $5y + 2x \leq 0$ **1.2)** $-y + 2x - 3 > 0$ **1.3)** $y \geq 4x - 1$ **1.4)** $x - 2y < 10$

2) Encuentre las soluciones geométricas de los siguientes sistemas de desigualdades

2.1) $\begin{cases} x - 2y > 10 \\ x \geq 2y \end{cases}$ **2.2)** $\begin{cases} x + y - 6 \leq 0 \\ x - 2y - 4 < 0 \end{cases}$ **2.3)** $\begin{cases} x \leq 3y - 6 \\ x \leq -2y + 8 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$

3) Se quiere hacer la siembra de árboles en una región con dos tipos de árboles I y II. El costo por unidad y las horas de trabajo por cada modelo están dados en la tabla anexa.

	horas	Costo
Árbol I	1.25	4
Arbol II	1.5	4.5

Si se da un máximo de 300 horas de trabajo y un presupuesto de 550UM a la semana. Dibuje la región que no sobrepasa la asignación presupuestaria ni la cantidad laboral disponible.

4) Una compañía de transporte está planificando comprar una flota de autobuses con un presupuesto de hasta 600 millones de UM, que le permita transportar al menos 350 pasajeros al mismo tiempo. En el mercado existen dos tipos de autobuses, los precios unitarios y las capacidades están dados en la tabla anexa.

	capacidad	precio
Autobús I	35	40
Autobús II	50	60

Dibuje la región que cumple con las expectativas de transporte y esté en los márgenes del presupuesto contemplado.

Respuesta: $\begin{cases} 350 \leq 35x + 50y \\ \\ 600 \geq 40x + 60y \end{cases}$

5) Las restricciones pesqueras impuestas obligan a cierta empresa a pescar como máximo 2.000 toneladas de merluza y 2.000 toneladas de robalo, además, en total, las capturas de estas dos especies no pueden pasar de las 3.000 toneladas ¿qué cantidades debe pescar para satisfacer estas restricciones? Represente gráficamente todas las posibilidades de pesca.

(Respuesta: Si x=nº de toneladas de merluza y y = nº de toneladas de robalo.

Restricciones $\begin{cases} x \leq 2000 \\ y \leq 2000 \\ x + y \leq 3000 \end{cases}$

6) En una granja de pollos se da una dieta "para engordar" todo el corral con una composición mínima de 15 unidades de una sustancia A y otras 12 de una sustancia B. En el mercado sólo se encuentran dos clases de comidas: el tipo X con una composición de una unidad de A y cinco de B por kg. y el tipo Y, con una composición de tres unidades de A y una de B por kg.

¿Señale mediante un grafico todas las posibilidades de kgs que se pueden comprar de cada tipo de comida para cubrir las necesidades?

Bosquejo de la solución:

	Contenido de A	Contenido de B
Comida X	1	5
Comida Y	3	1

x=Kilos de Comida tipo X

y= Kilos de Comida tipo Y

Restricción 1(necesidad 1)

Las cantidad total de kg a comprar debe tener al menos 15 unidades de A.

$$1 \cdot x + 3 \cdot y \geq 15$$

Restricción 2(necesidad 2)

Las cantidad total de kg a comprar debe contener en total al menos 12 unidades de B.

(Contenido de B por kg en marca X)*(cantidad de kg en marca X)+

+(Contenido de B por kg en marca Y)*(cantidad de kg en marca Y) ≥ 12

$$5 \cdot x + 1 \cdot y \geq 12$$

Se debe graficar el sistema: $\begin{cases} x + 3y \geq 15 \\ 5x + y \geq 12 \end{cases}$

7) Podemos comprar paquetes de abono A o B. Cada paquete contiene las unidades de potasio (K), fósforo (P) y nitrógeno (N) indicadas en la tabla, donde se da el precio del paquete.

Marca	K	P	N
A	4	6	1
B	1	10	6

¿En qué proporción hay que mezclar ambos tipos de abono para obtener un abono que contenga al menos 4 unidades de K, 23 de P y 6 de N?

8) Dos obreros elaboran determinadas piezas. Estos obreros tienen distintos rendimientos. El primer obrero fabrica 2 piezas en 1 hora, en cambio el segundo obrero realiza 3 piezas en el mismo lapso. Se los quiere contratar a fin que realicen al menos 100 piezas.

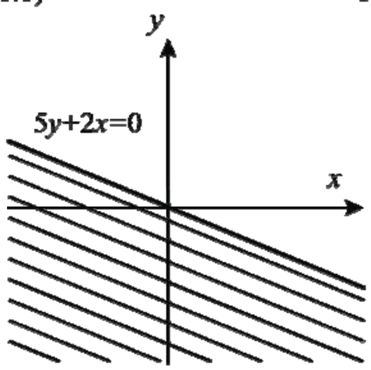
Sea x= el nº de horas de contrato del primer obrero y

y = el nº de horas de contrato del segundo obrero

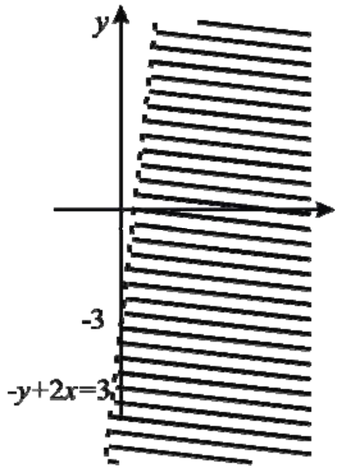
Describa mediante desigualdades todas las posibilidades de contrato a fin que realicen las 100 piezas o más.

Respuestas:

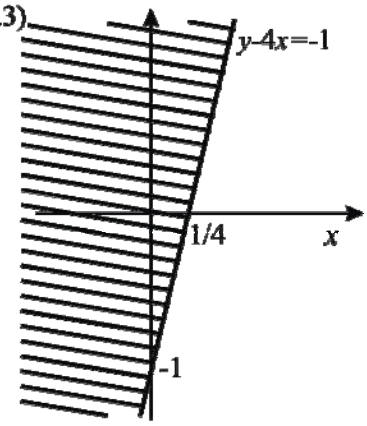
1.1)



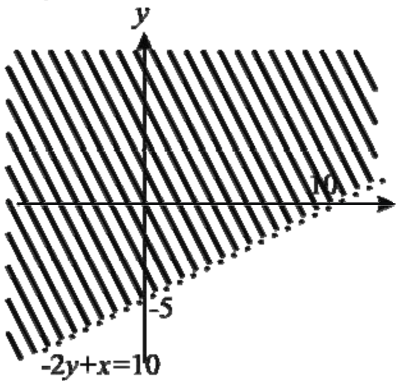
1.2)



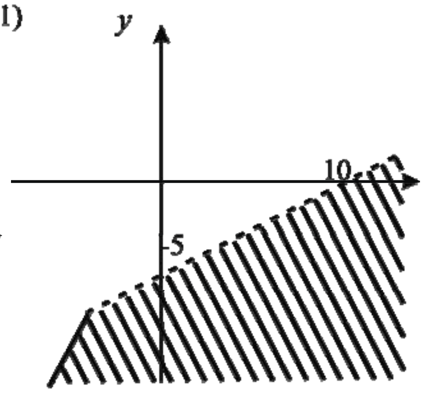
1.3)



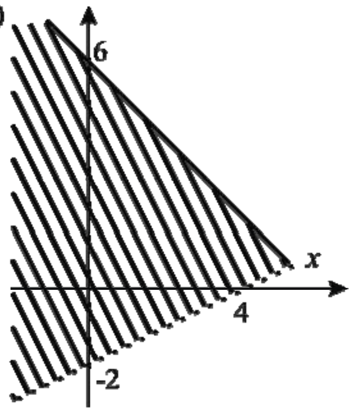
1.4)



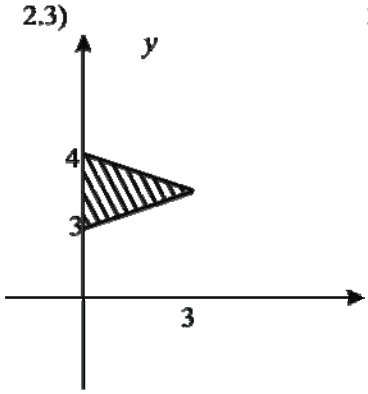
2.1)



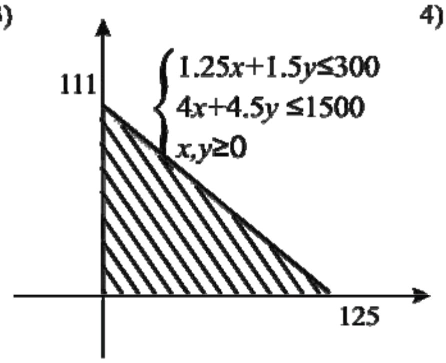
2.2)



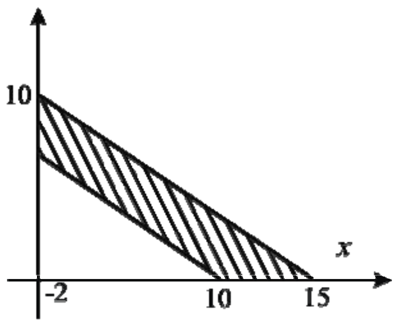
2.3)



3)



4)

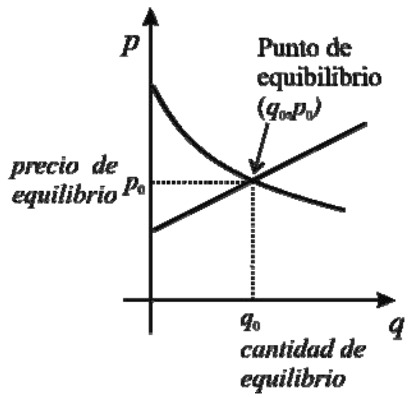


8) $\begin{cases} 2x+3y \geq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

PUNTO DE EQUILIBRIO.

Si el precio de un artículo está demasiado alto habrá pocos consumidores dispuestos a comprarlo, por otro lado si el precio es demasiado bajo los fabricantes no estarán dispuestos a ofrecerlo. En el mercado existe la tendencia de ajustarse los precios. *El punto de equilibrio* (q_0, p_0) *del mercado es conocido como el precio* p_0 *en que la cantidad demandada* q_0 *es igual a la cantidad ofrecida por los productores.*

Este es un punto que satisface la ecuación de demanda y oferta a la vez. Para conseguirlo tenemos que resolver el sistema formado por las ecuaciones de oferta y de demanda. Gráficamente es el punto de intersección de la curva de demanda y de oferta.



Ejemplo 1.- La ecuación de oferta de un determinado bien está dado por $2p - 3q = 10$ y la de demanda por $3q + p = 20$. Determinar el punto de equilibrio del mercado de este bien:

a) analíticamente, **b)** geométricamente

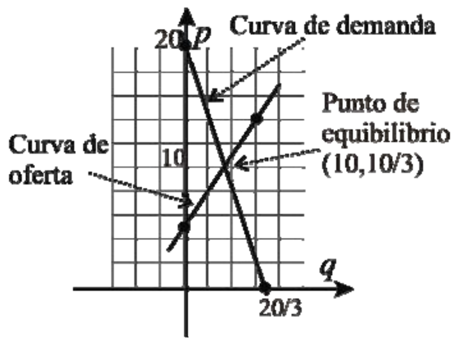
Solución: a) La solución analítica es una solución exacta, para conseguirla tenemos que resolver el sistema de ecuaciones de oferta y demanda:

$$\begin{cases} -3q + 2p = 10 \\ 3q + p = 20 \end{cases}$$

Para ello usamos el método de reducción. Sumamos ambas ecuaciones, obteniendo $3p = 30$.

De aquí $p = 10$. Sustituyendo en cualquiera de las dos ecuaciones, por ejemplo en la segunda este valor de *p*, nos da: $3q + 10 = 20$. De donde $q = \dfrac{10}{3} \approx 3.33$.

b) Para determinar la solución geométricamente debemos dibujar lo más preciso posible las gráficas de las ecuaciones de oferta y demanda. (La gráfica de oferta se hizo en este caso dando los valores *q*=6 y *q*=0 y encontrando sus *p*, la gráfica de demanda se hizo encontrando los cortes con los ejes). Luego estimar el punto de intersección entre estas dos rectas, este será el punto de equilibrio. Este método no da la precisión del primero, pero podemos ver que las coordenadas del punto de intersección son aproximadamente $(3.33, 10)$. Se puede apreciar que en este ejemplo se ha escalado de 2 en 2 unidades los dos ejes.



PUNTO DE EQUILIBRIO CON IMPUESTO O CON SUBSIDIO

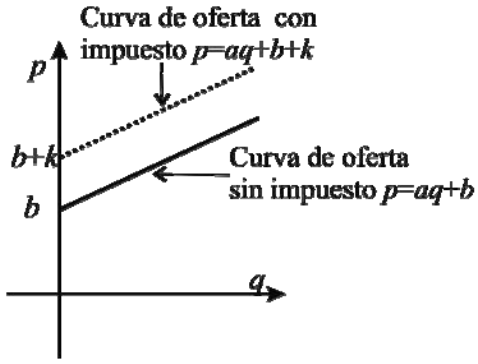
En ocasiones el gobierno, como ente regulador de la economía, decide o bien colocar un impuesto o un subsidio fijo k por artículo al fabricante o proveedor. El efecto de esta medida la sufrirá la ecuación de oferta, pues el fabricante o proveedor tendrá las mismas aspiraciones de ganancias de antes y él tendrá para ello que contemplar el nuevo impuesto o subsidio en su análisis de costo.

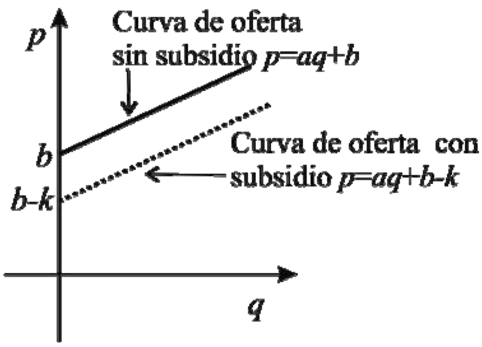
Si la ecuación de oferta antes de la medida era $p = aq + b$. Entonces con un impuesto de k UM por artículo la nueva ecuación de oferta será de $p = aq + b + k$, pues para recibir los mismos $aq + b$ de sus aspiraciones él deberá tomar en cuenta el nuevo impuesto.

Si por otro lado se coloca un subsidio de k, la ecuación de oferta será de $p = aq + b - k$, pues el gobierno le dará k unidades al proveedor o fabricante para cubrir con sus aspiraciones.

En la ecuación de demanda no le suele ocurrir cambios antes medidas de impuesto o subsidio. El consumidor no percibe el efecto pues él no pagará directamente este impuesto y mantiene las mismas disposiciones para comprar el bien.

Comentario.- Si se coloca un impuesto de k a cada bien, la gráfica de la nueva ecuación de oferta tendrá la misma pendiente, pero estará desplazada k unidades arriba de la original.





Si por el contrario hay un subsidio entonces la nueva curva de oferta estará desplazada k unidades debajo de la original

Ejemplo 1.- La ecuación de oferta de un determinado artículo está dado por $5p - 2q = 30$ y la de demanda por $q + 10p = 120$.

a) Determinar el punto de equilibrio del mercado de este artículo

b) Si se coloca un impuesto de 1UM por unidad al productor. Calcule el nuevo punto de equilibrio. Grafique.

Solución:

a) Tenemos que resolver el sistema $\begin{cases} 5p - 2q = 30 \\ 10p + q = 120 \end{cases}$, despejamos p en la primera ecuación

$p = 6 + \frac{2}{5}q$ y la sustituimos en la segunda ecuación.

$$q + 10(6 + \frac{2}{5}q) = 120$$

$$5q = 60$$

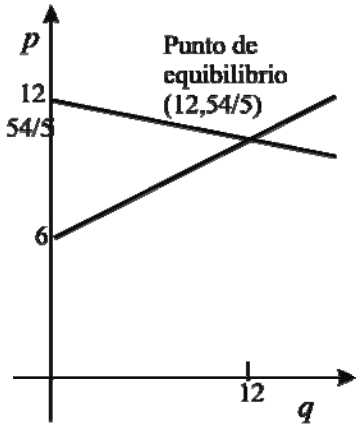
$$q = 12$$

Al sustituir este valor en la ecuación de oferta tenemos:

$$p = 6 + \frac{2}{5}12$$

$$p = \frac{54}{5}$$

Así que $p = \frac{54}{5}$ =10,8 es el precio de equilibrio y la cantidad de equilibrio es 12 antes del impuesto



b) Al cargar un impuesto de 1UM la ecuación de oferta queda como $p = 7 + \frac{2}{5}q$ y la ecuación de demanda permanece igual.

Para hallar el nuevo punto de equilibrio resolvemos el sistema

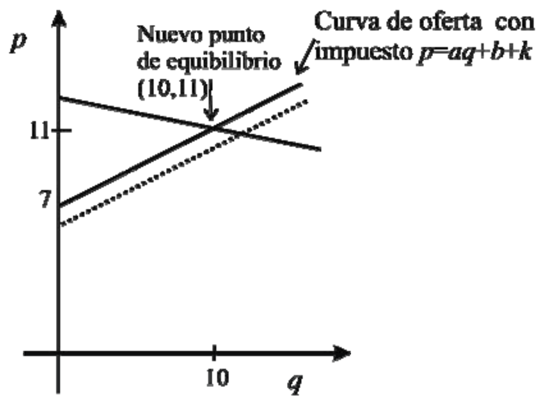
$$q + 10p = 120$$

$$p = 7 + \frac{2}{5}q$$

Sustituimos *p* en la primera ecuación, obteniendo

$$q + 10(7 + \frac{2}{5}q) = 120 .$$

De aquí $q + 4q = 50$. Así que la nueva cantidad de equilibrio es $q = 10$, sustituyendo este valor en la ecuación de oferta, vemos rápidamente que el nuevo precio de equilibrio es $p = 11$. Así que con un impuesto de 1UM el nuevo precio de equilibrio subió 0,2UM.



Ejemplo 2.- La ecuación de oferta de un determinado artículo está dado por $p = 150 + \frac{1}{2}q$ y la de demanda por $p = 200 - \frac{1}{3}q$.

a) Verificar que la cantidad de equilibrio de este artículo es 60 unidades.
b) ¿Qué subsidio deberá colocar el gobierno al productor a fin que el consumo aumente en un 10%?
Solución:
a) Igualamos la ecuación de oferta y demanda a fin de obtener la cantidad de equilibrio

$$200 - \frac{1}{3}q = 150 + \frac{1}{2}q$$

$$50 = \frac{5}{6}q$$

$$q = 60$$

b) En este caso la incógnita es *k* la cantidad de subsidio y la ecuación de oferta queda

$$p = 150 + \frac{1}{2}q - k .$$

La ecuación de demanda queda igual: $p = 200 - \frac{1}{3}q$

Como se quiere que la cantidad de equilibrio sea 66 (¿por qué?), tenemos entonces que conseguir k que satisfaga conjuntamente con p el siguiente sistema

$$p = 150 + \frac{1}{2}66 - k$$

$$p = 200 - \frac{1}{3}66$$

Igualando estas dos ecuaciones obtenemos

$$150 + 33 - k = 200 - 22$$

cuya solución es k=5. Así el gobierno debe dar un subsidio de 5UM por artículo a fin de incrementar el consumo en 10%.

EJERCICIOS

1) En cada uno de los siguientes ejercicios se da la ecuación (O) de oferta y la ecuación (D) de demanda para un producto. Si p representa el precio de una unidad en UM: y q el número de unidades ofertadas o demandadas al precio de p por artículo. Encuentre el punto de equilibrio en cada caso:

1.1) $\begin{cases} D: \ \ 2p + q = 50 \\ 0: \ \ 3p - 5q = 10 \end{cases}$ **1.2)** $\begin{cases} D: p + q = 30 \\ O: p - q - 2 = 0 \end{cases}$

1.3) $\begin{cases} D: p = 17 + \dfrac{q}{2} \\ O: p = 44 - 4q \end{cases}$ **1.4)** $\begin{cases} D: p + \dfrac{q}{100} = 3 \\ O: 50p = 250 - q \end{cases}$

Respuestas: 1.1) (10,20); **1.2)** (14,16); **1.3)**(6,20) **1.4)** (200,1)

2) Las ecuaciones de oferta y demanda de un determinado bien son $p = \dfrac{q}{100} + 2$ y $p = -\dfrac{5q}{100} + 14$ respectivamente.

a) Encuentre el punto de equilibrio

b) Si el gobierno impone al fabricante un impuesto de 2UM a cada bien, ¿Cuál es el nuevo punto de equilibrio? Consiga ambas respuestas geométricamente y algebraicamente.

3) Si a un determinado artículo se le fija un precio de 60 UM la oferta será de 20 unidades y la demanda de 25. Si se fija un precio de 100 UM, entonces la oferta será de 40 unidades y la demanda de 5 artículos. **a)** Encuentre las ecuaciones de oferta y demanda, suponiendo que ambas son lineales.
b) Encuentre el punto de equilibrio. **c)** ¿Qué subsidio deberá fijar el gobierno con la finalidad que el precio de equilibrio este en 60UM?

4) Se sabe que el punto de equilibrio del mercado ocurre cuando el precio es 15UM y la demanda de 60 unidades. Se sabe que a un precio de 30UM ya no habrá ventas y a un precio de 10UM los productores ya no ofrecerán su mercancía. **a)** Encuentre las ecuaciones de oferta y demanda sabiendo que ambas son lineales. **b)** Si el gobierno impone un impuesto al fabricante de 2UM por cada artículo ¿Cuál será el nuevo precio de equilibrio?

Respuestas: 2a) (200,6); b) (500/3,17/3) **3a**) $p = 2q + 20$; d: $p = -2q + 110$; **b)** (32.5,45) **c)** k=10;
4) $p = -\dfrac{1}{4}q + 30$; $p = \dfrac{1}{6}q + 10$; **b**) 96/5

PRUEBA AUTOEVALUATIVA 1 DEL TEMA 3

1) Para los siguientes encuentre la ecuación de la recta que satisface las condiciones dadas. De su respuesta en la forma general.

a) Pasa por el punto (2,1) y es perpendicular a la recta que corta el eje y en 3 y al eje x en 2.

b) Pasa por el punto (8,3) y por la intersección de las rectas $2x - y = 3$ y $x - y = 1$.

c) Es perpendicular la recta 3+2x=0 y pasa por (3,6)

2) Encuentre la ecuación general de la circunferencia que cumple las condiciones dadas.
Las coordenadas de dos puntos de un diámetro son $(-3{,}0)$ y $(3{,}1)$

3) Una fabrica de bicicletas elabora dos tipos: X y Y. Las cantidades posibles x y y dadas de unidades que pueden producirse diariamente están relacionadas por la ecuación

$$x^2 + y^2 + 6x + 4y - 40 = 0\,.$$

Bosqueje la curva de transformación de productos. ¿Cuál es el número máximo de bicicletas tipo X pueden producirse.

4) Para la siguiente ecuación discuta simetrías, calcule las intersecciones con los ejes y bosqueje su gráfica. $x + 4y^2 - 36 = 0$.

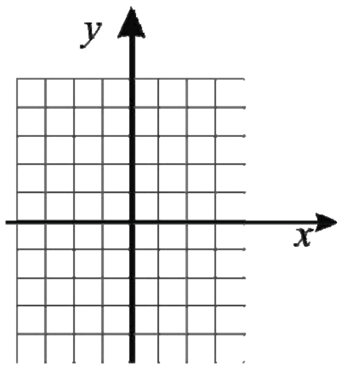
5) Un centro de comunicaciones tiene actualmente una tarifa de 3.5 UM el minuto a celulares. A ese precio tiene una demanda semanal de 2.200 minutos. Estima que si se aumenta el precio en 2.00 UM el minuto entonces la demanda bajará a 1.600 minutos. Si el precio está relacionado linealmente con la demanda. Consiga una relación lineal entre el precio y los minutos consumidos semanalmente

6) Suponga que una empresa que elabora aceite vegetal está dispuesta a colocar 50(mil litros de aceite diarios) cuando el precio en el mercado es de 30UM el litro y está dispuesta a colocar 500 más por cada aumento de 1UM en el precio. Determine la ecuación de oferta, suponiendo que el precio p en el mercado y la cantidad q de litros que está dispuesta a elaborar la empresa están relacionados linealmente.

7) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2y + x = 5 \\ y - x = 4 \end{cases}$

a) Geométricamente Esto es grafique lo más preciso las dos rectas y estime las coordenadas del punto de intersección.

b) Analíticamente: Esto es usando cualquiera de los métodos vistos en bachillerato: igualación, sustitución o reducción Las aclaratorias no aparecerán en el examen



8) Diga cuál de las siguientes proposiciones son verdaderas. Justifique

a)( ) Las coordenadas del punto de intersección de las rectas $y = 1 - x$ y $2y = 1 - x$ es la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = 1 - x \\ 2y = 1 - x \end{cases}$

b)( ) La gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 + 2x + 4 = 0$ es una circunferencia.

c)( ) El valor de k que hace que las rectas $ky = 1 - x$ y $y = 5x + 2$ sean paralelas es 5

d) ( ) En la recta y-2x+1=0 tenemos que un aumento de una unidad en las x entonces la y aumenta 2 unidades

e) ( ) El punto (4,0) está sobre la recta que tiene pendiente 2 y que pasa por el punto (0,-2)

f) ( ) El valor de índice bursátil hoy lunes al cierre de la jornada es de 7.600. Se estima que el índice bursátil pierda 2.3 puntos cada día hábil para los siguientes 30 días hábiles contados a partir de hoy. Entonces el modelo de predicción del índice bursátil es lineal y está dado por $I = 7.600 - 2.3t$, donde t es el número de días hábiles contados a partir de hoy.

PRUEBA AUTOEVALUATIVA 2 DEL TEMA 3

1) Para los siguientes ejercicios encuentre la ecuación de la recta que satisface las siguientes condiciones. De su respuesta en la forma pendiente-ordenada en el origen en el caso que se pueda.

a) Pasa por el punto (2,1) y es paralela a la recta que corta el eje *y* en 3 y al eje *x* en 2.

b) Pasa por (-5,-2) y es perpendicular a la recta que pasa por (1,4) y (3,4)

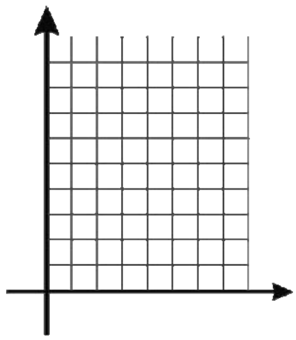
c) Pasa por el punto $(3,-1)$ y por la intersección de las rectas $y = 3$ y $x - y = 4$

2) Encuentre la ecuación general de la circunferencia que cumple las condiciones dadas. El centro está ubicado en la intersección de las recta y=2x y y=-2x+4. Esta circunferencia pasa por el punto (6,8)

3) La ecuación de demanda de un producto está dada por: $p^2 + q^2 + 6p + 4q - 36 = 0$. Bosqueje la ecuación de demanda. ¿Cuál es el precio a partir del cuál no hay ventas?

4) Para la siguiente ecuación discuta simetrías, calcule las intersecciones con los ejes y bosqueje su gráfica. $xy^2 + x - y = 0$.

5) Se tiene dos tipos de cafés, el primero cuesta 4UM el kg y el segundo de peor calidad 3UM el kilo. **A)** Encuentre la ecuación que muestra todas las posibles combinaciones de los dos tipos de cafés que pueden comprarse con 100UM en términos de *x* kilos de cafés del primer tipo y *y* kilos de cafés del segundo tipo a comprar. **B)** Grafique esta ecuación. **C)** De una interpretación a los cortes. **D)** De la interpretación a la pendiente.

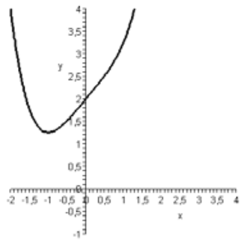


6) Suponga que el costo de producir 20 artículos es 32UM y el costo de producir 35 es 56UM. Suponga que la ecuación de costos totales es lineal. **A)** Encuentre la ecuación de costos totales. **B)** ¿Cuál es el costo fijo y cuál es el costo variable por unidad? ¿Qué relación existes entre estos dos costos y los elementos de la ecuación de la recta.

7) Encuentre el valor de *k* para que las rectas $y = 1 - x$ y $2y = 1 - kx$ sean perpendiculares

8) Diga cuál de las siguientes proposiciones son verdaderas. Justifique

a)( ) En la figura se tiene la gráfica de la ecuación $y = x^4 + 2x + 2$. De la gráfica podemos deducir que la ecuación $x^4 + 2x + 2 = 0$ no tiene solución.



b)( ) Si se tiene un fondo de 20.000 UM. para gastar en los próximos meses en la nomina de los obreros la cual es de 800 mensual, entonces la ecuación que relaciona *t*, tiempo medido en meses a partir de que se recibe el dinero y C cantidad de dinero que queda en la cuenta *t* meses después que se recibe el dinero es: $C = 20.000 - 800t$. Asuma que el fondo no gana intereses.

c)( ) La recta $2y = x + b$ tiene pendiente 1.

d) ( ) Los valores de *x* para los cuales el punto (*x*,-*x*) dista de (2,2) en 4 unidades son 2 y -2. Muestre todo el procedimiento que justifica su respuesta.

e) ( ) Si una circunferencia tiene radio 3, centro en el segundo cuadrante y es tangente a los dos ejes entonces su centro es (-3,3).

9) Encuentre la solución geométrica del siguiente sistema de desigualdades $\begin{cases} x + 4y > 8 \\ x + 3y \geq 0 \end{cases}$

RESPUESTAS Y SUGERENCIAS DE LA PRUEBA AUTOEVALUATIVA 1 DEL TEMA 3

1) Sugerencia: Dan dos puntos (0,3) y (2,0). Con ellos conseguir la pendiente y luego usar la ecuación pto.-pendiente $y-3=-\frac{3}{2}x$. Hay que llevarla a la forma general. Respuesta: $2y+3x-6=0$

b) Sugerencia: Hay que conseguir la intersección entre las dos rectas resolviendo el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ la solución es *x*=2 y $y=1$. Así que la recta pasa por (2,1) y (8,3) **.** Ahora queda determinar la pendiente, da 1/3. Luego se usa la ecuación punto pendiente para determinar la recta:

$y-1=\frac{1}{3}(x-2)$. Falta llevarlo a la forma general. Respuesta: $3y-x-1=0$

c) La recta 3+2*x*=0 es vertical por tanto la que hay que determinar es horizontal, con ecuación de la forma *y*=*k*, Respuesta: *y*=6

2) Sugerencia: El centro es el punto medio de los dos punto de este diámetro. El centro es (0,1/2). El diámetro de la circunferencia es la distancia entre estos dos puntos. Da

$D=\sqrt{(3-(-3))^2+(1-0)^2}=\sqrt{37}$

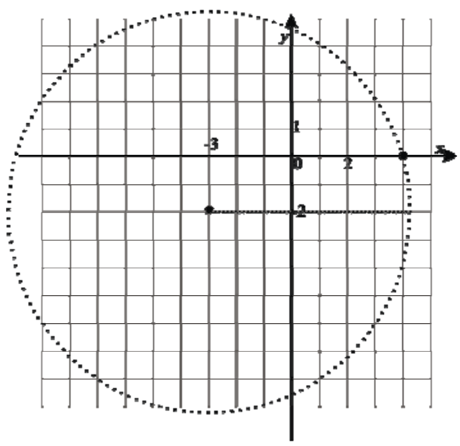
El radio es entonces $\sqrt{37}/2$ y la ecuación de la circunferencia es $(x-0)^2+(y-1/2)^2=\left(\sqrt{37}/2\right)^2$

Respuesta: La ecuación de la circunferencia pedida es $x^2+y^2-y-9=0$

3) Sugerencia: Para graficar primero se completa cuadrados:

$(x+3)^2+(y+2)^2=53$ De aquí el centro es (-3,-2) y el radio $\sqrt{53}$.

De la gráfica se puede ver que el máximo x se obtiene cuando y es 0.



Entonces se plantea la ecuación

$(x+3)^2+(0+2)^2=53$

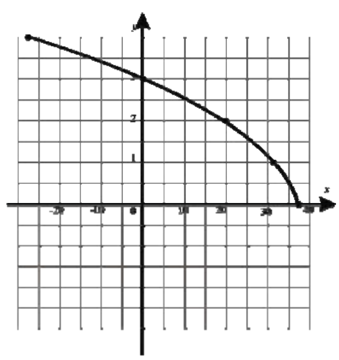
Esta ecuación tiene como solución -10 y 4, se toma la solución positiva. Esta es x=4 .

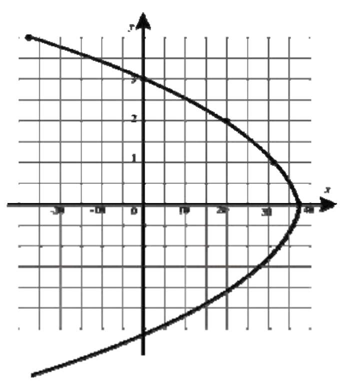
4) Respuesta: Simetría con respecto al eje x (No hay más simetrías). Cortes (36,0) y (0,3)

Posible tabla de valores dándole valores positivos a *y*´s y calculando x: $x=-4y^2+36$

x	y
36	0
32	1
20	2
0	3
-28	4

Luego se llevan al plano se unen los puntos con un trazo suave y se usa la simetría para graficar.





5) Sugerencia. Como las dos variables están relacionadas linealmente, determinamos la recta. En este caso nos dan la información de dos puntos de la recta: (*p*,*q*)=(3.5, 2.200) y (*p*,*q*)=(5.5, 1600)

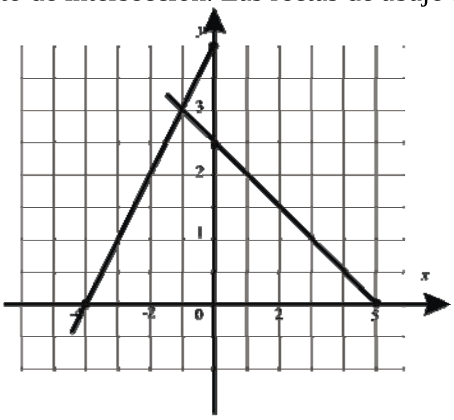
$$m=\frac{2200-1600}{3.5-5.5}=-\frac{600}{2}=-300$$

Respuesta: La ecuación es entonces $(p-5.5)=-300(q-1600)$

6) Sugerencia: 500 es el cambio en q entre cambio en p. Es la pendiente en la ecuación $(q-q_0)=m(p-p_0)$ El punto es $q_0=50.000$ y $p_0=30$

Respuesta: La ecuación lineal está dada por $(q-50.000)=500(p-30)$

7) Geométricamente Esto es grafique lo más preciso las dos rectas y estime las coordenadas del punto de intersección. Las rectas de abajo se han graficado determinando los cortes con los ejes



b)Analíticamente: Esto es usando cualquiera de los métodos vistos en bachillerato: igualación, sustitución o reducción Las aclaratorias no aparecerán en el examen

Puede usar el método de reducción, al sumar las dos ecuaciones queda 3y=9, al despejar obtenemos y=3. Al sustituir en cualquiera de las dos ecuaciones la y, da x= -1

La estimación a través del grafico del punto de intersección es (-1,3)

8) Diga cuál de las siguientes proposiciones son verdaderas. Justifique

a)(V) El punto de intersección (x_0, y_0) está sobre las dos rectas, por tanto satisface las dos ecuaciones simultáneamente y $x=x_0$ y $y=y_0$ son las soluciones de un sistema de ecuaciones si satisfacen simultáneamente a ambas.

b)(F) Al llevarlo a la forma $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=d$ da $(x-1)^2+y^2=-3$ como d es negativo no es la gráfica de una circunferencia. La gráfica es el conjunto vacio.

c)(F) Hay que igualar la pendiente de ambas ecuaciones. Quedaría planteada una ecuación en k que se resuelve. La pendiente de la primera ecuación en -1/k. La pendiente de la segunda ecuación es m=5. -1/k=5. La solución de esta ecuación es k=-1/5.

d) (V) La pendiente es 2. La pendiente es $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{cambio\ \ en\ \ y}{camnio\ \ en\ \ x}$=2. Como cambio en x es 1, Se ve claramente que el cambio en y es 2.

e) (F) Hay que conseguir la recta y verificar que el punto satisface la ecuación de la recta.

La recta es $(y+2)=2x$ Al sustituir queda $(0+2)\overset{?}{=}2\cdot 4$ Como el punto no satisface la ecuación entonces no está sobre la recta

f) (V) Como por cada día que pase el valor del índice decrece de manera constante, es una relación lineal, de pendiente -2.3 y ordenada al origen 7.600.