FUNCIONES EXPONENCIALES

Las funciones exponenciales tienen muchas aplicaciones, en especial ellas describen el crecimiento de muchas cantidades de la vida real.

Definición.-La función con dominio todos los reales y definida por

$$f(x)=a^x,$$

con $a>0$, $a \neq 1$ es llamada función exponencial con base a.

Comentarios:

1.- Conviene aclarar que la función está bien definida para todo número real. Suponga tenemos la función exponencial con base 2. $2^{\frac{p}{q}}$ está definido como $\sqrt[q]{2^p}$. Para definir 2^x, con x irracional, se realiza a través de aproximaciones. Por ejemplo para definir 2^π, lo hacemos por medio de una sucesión de números racionales que se acerque cada vez más a π como

$$3,\frac{31}{10},\frac{314}{100},\frac{3141}{1000},\frac{31419}{10000},\ldots$$

Se puede mostrar que la sucesión

$$2^3,2^{\frac{31}{10}},2^{\frac{314}{100}},2^{\frac{3141}{1000}},2^{\frac{31419}{10000}},\ldots$$

se acerca a un solo número positivo, el cuál es la definición de 2^π. Para los muy curiosos, la definición de 2^π, es independiente de la sucesión de números que se acerca cada vez más a π.

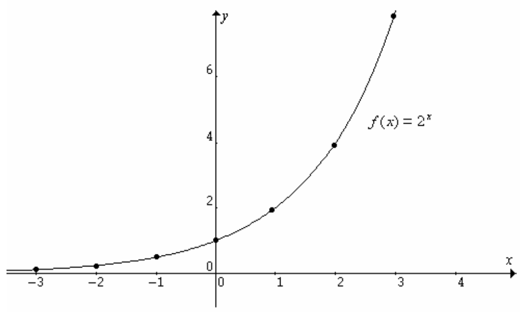
2.- Funciones como $f(x)=b^{-x}, h(x)=\sqrt{b^x}$ y $g(x)=b^{2x}$ son de tipo exponencial. Lo verificamos al reescribirlas, la primera como $f(x)=\frac{1}{b^x}=\left(\frac{1}{b}\right)^x$, siendo entonces exponencial con base $\frac{1}{b}$; la segunda como $h(x)=\left(\sqrt{b}\right)^x$ y la última como $g(x)=\left(b^2\right)^x$, de aquí que la función h y g son exponencial con base $\sqrt{b}$ y b^2 respectivamente.

GRAFICAS DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Realizaremos la gráfica de $f(x)=2^x$

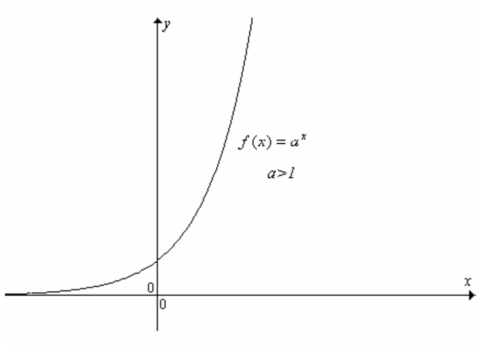
Para ello calcularemos algunos valores de la función y los uniremos a través de un trazo suave.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8



Usted puede chequear que el comportamiento de la gráfica de las funciones de la forma $f(x)=a^x$, con $a>1$, es similar y lo resumimos en el siguiente reporte:

Reporte de la gráfica de la función $f(x) = a^x$,con a>1:
1) El dominio es todos los reales. El rango los reales positivos
2) La intercepción con el eje y es el punto (0,1)
3) La función crece de izquierda a derecha.
4) La recta y=0 (el eje x) es una asíntota horizontal por la izquierda, esto quiere decir que la gráfica de la función se acerca cada vez más a esta recta. Sin embargo cuando incrementamos los valores de x entonces la gráfica asciende rápidamente.

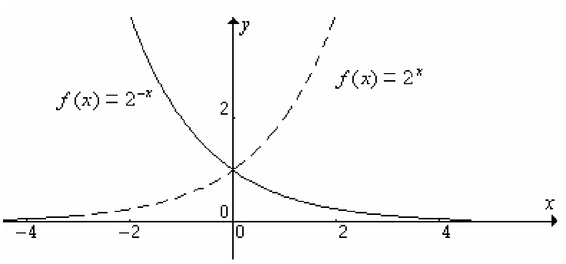


Este tipo de función es conocida a veces como la ley de crecimiento exponencial.

Remarcamos que la gráfica anterior es sólo un bosquejo o trazo de la función. Por otro lado, una mayor o menor inclinación en el primer cuadrante depende del valor de a, para a grande la gráfica es más inclinada.

Para ver el comportamiento de la gráfica $f(x) = a^x$, con 0<a<1, primero obtendremos la gráfica de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Usaremos las técnicas aprendidas cuando estudiamos operaciones geométricas de gráficas de funciones. También se puede obtener una tabla de valores y llevarlos puntos al plano cartesiano para hacer un trazo suave de la curva.

La función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, puede ser reescrita como $f(x) = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$. Esta función puede ser obtenida de la gráfica de la función 2^x por simetría con respecto al eje y.



La forma de la gráfica de la funciones $f(x) = a^x$, con 0<a<1, es similar a la de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, salvo la inclinaciones que depende del valor de a. A continuación presentamos la gráfica de estas funciones junto con el reporte de las características más notorias de la gráfica.

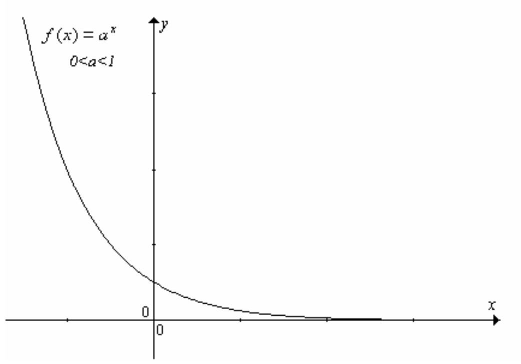
Reporte de la gráfica de la función $f(x) = a^x$ con $0<a<1$:

1) El dominio es todos los reales. El rango los reales positivos

2) La intercepción con el eje y es el punto (0,1)

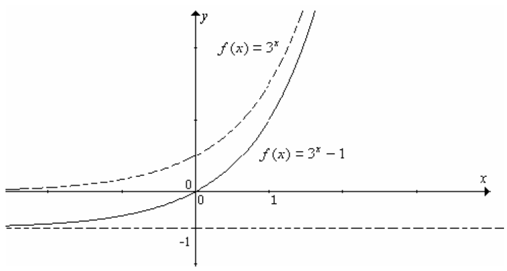
3) La función **decrece** de izquierda a derecha.

4) La recta y=0 (el eje *x*) es una asíntota horizontal por la derecha, esto quiere decir que la gráfica de la función se acerca cada vez más a esta recta cuando x toma valores cada vez más grande. Sin embargo la función toma valores tan altos como se quiera para valores de x negativos y grandes en magnitud.



Ejemplo 1.- Trazar la gráfica de la función $f(x) = 3^x - 1$ y realizar un reporte acerca de su comportamiento.

Solución: Para realizar esta gráfica partimos de la forma general de la gráfica a^x, con $a>1$. La gráfica es un desplazamiento hacia abajo de 1 unidad de la gráfica de $f(x) = 3^x$. Conviene en estos casos desplazar la asíntota para un mejor bosquejo de la gráfica.



Reporte de la gráfica de la función $f(x) = 3^x - 1$:

1) El dominio es $(-\infty, \infty)$. El rango es el conjunto (-1, ∞).

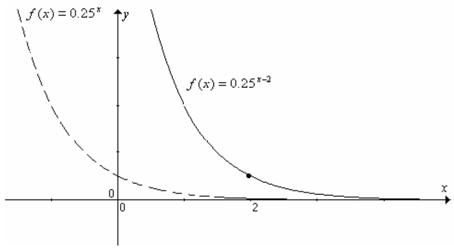
2) La intercepción con el eje x es el punto (0,0).

3) La función crece de izquierda a derecha..

4) La recta y=-1 es una asíntota horizontal por la izquierda.

Ejemplo 2.- Trazar la gráfica de la función $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$ y realizar un reporte acerca de su comportamiento.

Solución: Para realizar esta gráfica partimos de la forma general de la gráfica a^x, con $a<1$, con una forma relativamente inclinada. Nuestra gráfica es un desplazamiento hacia la derecha de 2 unidades de la gráfica $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x}$. Conviene en estos casos desplazar la asíntota para un mejor bosquejo de la gráfica



La gráfica corta el eje y cuando x=0.

Esto es en y=$\left(\frac{1}{4}\right)^{0-2} = 4^2 = 16$.

Reporte de la gráfica de la función $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$

1) El dominio es **R**. El rango el conjunto (0, ∞)

2) La intercepción con el eje y es el punto (0,16)

3) La función **decrece** de izquierda a derecha.

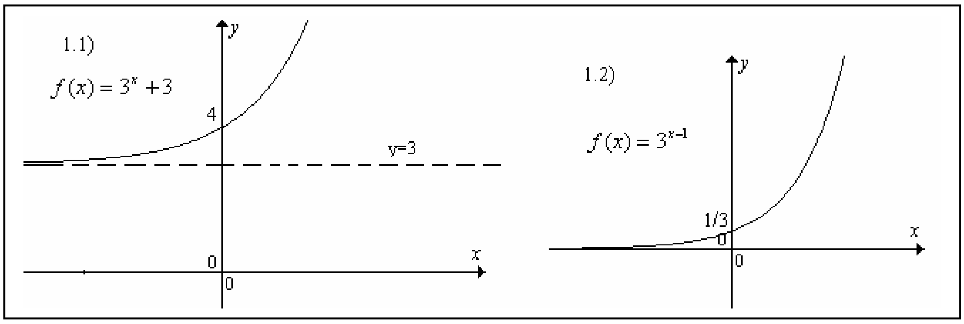
4) La recta y=0 **es una asíntota horizontal** por la derecha.

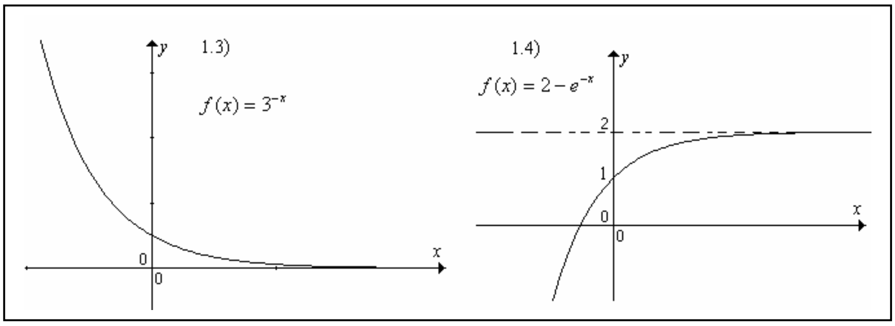
EJERCICIOS

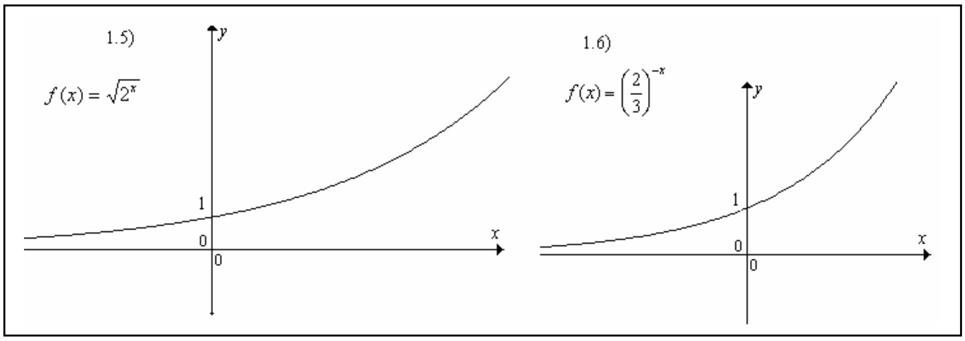
1) Graficar las siguientes funciones. Realizar un reporte de la gráfica

1.1) $f(x)=3^x+3$; **1.2)** $f(x)=3^{x-1}$; **1.3)** $f(x)=3^{-x}$;

1.4) $f(x)=2-e^{-x}$; **1.5)** $f(x)=\sqrt{2^x}$; **1.6)** $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$







APLICACIONES

A) INTERES COMPUESTO

La función exponencial aparece ligada en el cálculo de intereses compuestos. Recordemos que el interés compuesto es aquél donde el interés generado por un capital es reinvertido de modo que en el siguiente período éste genera también intereses.

Suponga *P,* el cual llamaremos monto principal, principal o capital inicial, es invertido a una tasa simple de *t* por periodo, entonces el interés final al cabo del periodo de interés es *Pt*, teniendo como capital al final de este periodo : $P + tP = P(1+t)$. Si esta cantidad es reinvertida a la misma tasa, el interés generado será de $P(1+t)t$ y ahora en este segundo periodo el nuevo principal será de $P(1+t) + P(1+t)t = P(1+t)(1+t) = P(1+t)^2$.

Podemos chequear que el principal al finalizar el tercer periodo será de $P(1+t)^3$. Más generalmente, al finalizar el periodo k, **el monto acumulado** A **o monto total** o capital final será de:

$$A_k = P(1+t)^k$$

donde *t* es la tasa de interés por periodo y *P* el capital inicial.

El interés compuesto es la diferencia entre el monto acumulado y el monto inicial (Capital final menos capital inicial)

Conviene hacer las siguientes

Observaciones:

1.- Los periodos de intereses pueden ser en años, semestres, meses, días, etc

2.- *t*, tasa de interés por periodo, se expresa en decimal. Esto es, si se dice que el capital es invertido a un interés compuesto anualmente del 5%, entonces $t = \frac{5}{100} = 0.05$.

Si se dice que el capital es invertido a un interés anual compuesto trimestralmente del 6%, es decir se paga 4 veces en el año entonces $t = \frac{6}{4 \cdot 100} = 0.015$. Más generalmente, si se denota r la tasa anual compuesta con n pagos al año (número de periodos anuales de capitalización), entonces *t* puede ser expresado en términos de r como $t = \frac{r}{n}$

3.- Es claro que si se dice que el capital invertido a un interés compuesto anualmente del 5% durante 10 años entonces el número de periodos es k=10. Pero si por ejemplo estamos en la situación de un capital invertido a un interés anual compuesto trimestralmente del 6% por 10 años, entonces el número de periodos es 4 por año y el número total de periodos es $k = 4 \cdot 10$ Si n es el número de periodos por año, entonces $k = n \cdot$número de años.

De las observaciones 3 y 4, el monto compuesto puede ser expresado como función de *r* (tasa anual) y *n* (número de periodos anuales de capitalización) como

$$A = P(1+\frac{r}{n})^{nx}$$

donde x es el número de años en que se invierte P.

4.- La expresión $(1+t)^k$ que aparece en la definición del monto acumulado es una exponencial en la variable k, con base $1+t$.

Ejemplo 1.- Supongamos que se invierte 1.000UM durante 8 años al 9% compuesto anualmente. Calcular a) El monto compuesto. b) El interés compuesto

Solución: a) Utilizamos la ecuación $A = P(1+r)^k$, con P=*1000, r*=0.09 y k=8.

Tenemos entonces

$$A = 1000(1+0.09)^8$$

$$A = 1000(1.09)^8 = 1992{,}56$$

b) Sabemos que

Interés compuesto= *A-P*
=1992.56-1000
=992.56

Ejemplo 2.- Supongamos que se invierte 1.000UM durante 8 años a una tasa anual de 9% compuesto semestralmente. Calcular **a)** El monto compuesto. **b)** El interés compuesto

Solución: a) Antes de usar nuestra fórmula $A = P(1+\frac{r}{n})^{nx}$, con P=1.000, debemos precisar quien es n en este caso. Como hay dos pagos al año tenemos que $n = 2$, entonces $\frac{r}{n} = \frac{9}{2 \cdot 100} = 0.045$ y $nx = 2 \cdot 8$. Así

$$A = 1000(1+0.045)^{16}$$

$$A = 1000(1.045)^{16} = 2.022{,}27$$

b) Sabemos que

Interés compuesto= *A-P*
=2.02,.27-1.000
=1.022,27

El lector puede comparar los resultados del ejemplo 1 con el 2. Muchas veces para comparar distintos rendimientos, por tener diferentes periodos, con la misma tasa de interés anual se usa la tasa efectiva anual que es la tasa que da el mismo interés compuesto una vez al año.

Ejemplo 3.- Un banco tiene unas tasa del 5% compuesto mensualmente. ¿Cuál es la tasa efectiva anual?

Solución: En un año el capital final a la tasa del 5% compuesto mensualmente es

$$A = P(1+\frac{0.05}{12})^{12} = P(1.0512)$$

Se pregunta : ¿Cuál será la tasa compuesta anualmente para tener este capital final.

Este capital final a una tasa de r compuesto anualmente será entonces:

$A = P(1+r)$ y debemos plantear:

$$P(1+r) = P(1.0512).$$

Esto es una ecuación lineal, simplificando las P obtenemos

$$1+r=1.0512,$$

De aquí obtenemos $r=0.0512$. Así que una tasa del 5.12% anual es equivalente a una tasa del 5% compuesto mensualmente.

INTERES COMPUESTO CONTINUAMENTE

La siguiente tabla muestra el comportamiento del Monto total si se mantiene fija la tasa r=0.08, el capital inicial invertido en un año (1000UM) , pero el número n de periodos aumenta.

Compuesta	n	$A=1000(1+\frac{0.05}{n})^{n\cdot 1}$
Anualmente	1	1050,00
Semestralmente	2	1050,62
Por mes	12	1051,16
Por semana	54	1051,25
Por días	365	1051,27
Por horas	8760	1051,27

Observe como el Monto total se llega a estabilizar cuando el número de periodos es grande. La base matemática para justificar este comportamiento se verá posteriormente y se enuncia

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e=2{,}71828 \quad cuando \quad n\to\infty$$

(se lee "*el cantidad* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tiende al número e *cuando n tiende a infinito)*

Vea la tabla dada para por lo menos admitir este resultado.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	
10	$(1{,}1)^{10}$	2.593742
1000	$(1{,}001)^{1000}$	2,716923
100.000	$(1{,}00001)^{100000}$	2.718268
10.000.000	$(1{,}0000001)^{10000000}$	2.718281
10^9	(1,000000001)	2.718281

Ahora tenemos que el monto total a una tasa anual de r, con un capital inicial de P, en x años, con un número de periodos por años igual a n está dado por:

$$A_n=P(1+\frac{r}{n})^{nx}$$

Haciendo algunas manipulaciones algebraicas con el fin de aplicar el resultado anterior, tenemos

$$A_n=P(1+\frac{1}{n/r})^{\frac{n}{r}\cdot rx}$$

$$A_n = P\left((1+\frac{1}{n/r})^{\frac{n}{r}}\right)^{rx},$$

Si hacemos la sustitución $m = n/r$ queda

$$P\left((1+\frac{1}{m})^{m}\right)^{rx}$$

si $n \to \infty$, entonces también m y de esta manera usando que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} \to e = 2{,}71828 \quad cuando \quad m \to \infty$, tenemos

$$A_n \to P(e)^{rx} = Pe^{rx}.$$

De aquí obtenemos:

Fórmula del monto total con un interés compuesto continuamente:

$$A = Pe^{rx}$$

donde P es el monto principal, r la tasa de interés, x el números de años de la inversión y A el monto total después de x años.

Ejemplo 1.- Supongamos que se invierte 1.000UM durante 8 años a una tasa anual de 9% compuesto continuamente. Calcular el monto compuesto.

Solución: Al ser el interés compuesto continuamente se debe usar la fórmula $A = Pe^{rx}$, con P=1.000, n=8 y r=0.09. Así

$A = Pe^{rx} = 1000e^{0.09\cdot 8} = 1000e^{0.72}$. Al usar la calculadora obtenemos que A=2054.4UM.

B) CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO POBLACIONAL

Supongamos que el tamaño inicial de una población es P_0, y la población aumenta a una tasa por periodo de r, al finalizar un periodo de tiempo la población habrá aumentado $P_0 r$ y el tamaño total de la población al final de este periodo será de : $P_0 + rP_0 = P_0(1+r)$. En un segundo periodo de tiempo la población aumentará a una tasa de r sobre una población de $P_0(1+r)$, entonces el aumento de la población en el segundo periodo de tiempo es de $P_0(1+r)r$ y ahora, al finalizar este segundo periodo de tiempo, el tamaño de la población será de

$$P_0(1+r) + P_0(1+r)r = P_0(1+r)(1+r) = P_0(1+r)^2$$

Podemos chequear que el tamaño de la población al finalizar el tercer período será de $P_0(1+r)^3$.

Más generalmente, al finalizar el periodo t, **el tamaño de la población $P(t)$** será

$$P(t) = P_0(1+r)^t$$

donde P_0 es el tamaño inicial de la población.

Observación:
1.- r viene expresada como una cantidad decimal. Por ejemplo si se habla que la población crece a una tasa del 6%, entonces r=0.06 **.**

Ejemplo 4.- Una población de 4 millones de habitantes crece a una tasa de 3% anual. Estime el tamaño de la población al cabo de 5 años.
Solución: a) Utilizamos la ecuación $P(t) = P_0(1+r)^t$, con P_0=4, r=0.03 y t=5:

$$P(5)=4(1+0.03)^5$$

$$P(5)=4(1.03)^5=4.63 \text{ millones de habitantes}$$

Ejercicio de desarrollo: Una población crece a una tasa de 2.5% anual. Si actualmente tiene 3.3 millones de habitantes. a) Estime el tamaño de la población dentro de 3 años. b) ¿Cuántas habitantes tenía hace una década?, suponga que la tasa de crecimiento se ha mantenido constante?
(Comentario: Podemos emplear el modelo $P(t) = P_0(1+r)^t$ con t que empieza a contar a partir de este año para a) y para b) que empieza a contar hace 10 años, si se hace así para b), debemos plantear una ecuación donde P_0 es la incógnita.)

Observación:
Si la población disminuye a una tasa de r es fácil ver que el tamaño de la población después de un periodo de t años es $P(t) = P_0(1-r)^t$.

Este modelo de crecimiento poblacional, $P(t) = P_0(1+r)^t$, está sujeto a la condición que el porcentaje de crecimiento sea constante a través de los años. Sabemos que a veces esto no es así, existen factores que inhiben el crecimiento indefinido como el hacinamiento, la falta de alimentos y otros factores sociológicos en el caso de la población humana: crisis en la familia, crisis económica, etc. Así que un modelo de crecimiento exponencial es recomendable por periodos pequeños o en poblaciones recién establecidas donde aparentemente no hay limitantes de crecimiento.

Para poblaciones creciendo inicialmente rápido y luego se vuelven tan numerosas que pierden su capacidad de crecer debido a interacciones entre los miembros de la población, resulta apropiado un modelo de **crecimiento logístico,** dado por

$$P(t) = \frac{a}{1+Ce^{-kt}},$$

donde a, C y k son constantes. a representa el tamaño de la población límite. Si denotamos por $P_0 = P(0) = \frac{a}{1+C}$ el tamaño inicial de la población entonces el lector puede comprobar que

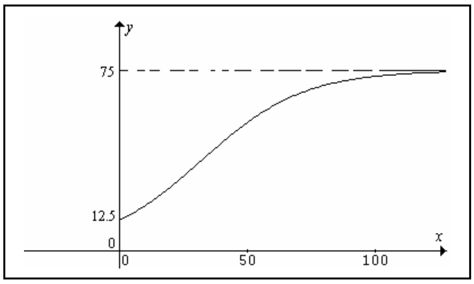
$$C = \frac{a - P_0}{P_0}$$

Ejemplo 5.- Cierta población crece de acuerdo al modelo logístico con *a*=75 millones, *C*=5 y $k = 0.05$. ¿Cuál es el tamaño de la población cuando *t*=0, para *t*=20 , *t*=40 y para *t*=100?
Solución:

$$P(0) = \frac{75}{1+5e^{-k.0}} = \frac{75}{6} \approx 12.5 \text{ millones}$$

$$P(20) = \frac{75}{1+5e^{-k20}} = \frac{75}{1+5\cdot 0.36} \approx 26.41$$

$$P(40) = \frac{75}{1+5e^{-k20}} = \frac{75}{1+40\cdot 0.135} \approx 44.7$$



$$P(100) = \frac{75}{1+5e^{-100k}} = \frac{75}{1+40\cdot 0.00673} \approx 72.55$$

Comentario: El modelo logístico no sólo resulta útil para modelar crecimiento de determinadas poblaciones sino también para propagación de ciertas epidemias, crecimiento de ciertos seres vivos, crecimientos de compañías, ventas de nuevos productos, propagación de rumores, etc.

Una curva como la dada arriba es el comportamiento típico de una curva logística.

EJERCICIOS

1) Dibuje las siguientes gráficas para *x*>0

1.1) $f(x) = c\frac{1}{e^{kx}} = ce^{-kx}$ **1.2)** $f(x) = c(1-e^{-kx})$

c,k>0

1.1) Pertenece a la familia de decaimiento exponencial usada en desintegración radioactiva, presión atmosférica, absorción de luz en el agua. En contaduría: devaluación continua. Densidad de probabilidad exponencial cuando *c*=*k*.
1.2) Pertenece a la familia de las curvas de crecimiento limitado. Si c=1 es la función de distribución de probabilidad exponencial, la cual da la probabilidad que una variable exponencial sea menor o igual que *x*.

PROBLEMAS:

1)Se realiza una inversión de 1.500UM durante 10 años al 5% compuesto anualmente. Calcular a) El monto compuesto b) El interés compuesto (Resp. a) 2443.34; b) 943,34)
2) Supongamos que se invierte 2.000UM durante 10 años a una tasa anual de 5% compuesto trimestralmente. Calcular a) El monto compuesto. b) El interés compuesto.(Resp. a)2465.42; b) 965.42)
3)Una población de 3 millones de habitantes crece a una tasa de 2.5% anual. Estime el tamaño de la población al cabo de 10 años.(Resp. 3.840.253)

4=Si el crecimiento de una población siguiera el modelo exponencial $P(t)=P_0 e^{0.02t}$, donde P_0=200.000 es la población en el año 1990 y $P(t)$ es la población t años después de 1990 ¿Cuál era la población en 1997? (Resp. 230.054)

5)El valor de una casa ubicada en cierta zona de la ciudad aumenta a una tasa del 5% anual. Si el valor de esta propiedad fue de 7000 UM en 1990. Calcule el valor de la casa para el año 2010. (Resp. 18.573)

6)Depreciación. El método de saldo decreciente se usa en contabilidad, en él la cantidad de depreciación que se calcula cada año es un porcentaje fijo del valor presente del artículo. Si y es el valor del artículo en un año determinado, la depreciación es ay cuando la tasa de depreciación es a, donde $0<a<1$, y el valor nuevo es $(1-a)y$. Si el valor inicial del artículo es y_0, a) demuestre después de n años que el valor de depreciación es $(1-a)^n y_0$, b) aplique esta fórmula para estimar el valor de un carro que fue comprado hace 6 años a 1200UM si se estima la tasa de depreciación es 0.05 (Resp. 882,1)

7)Para una inversión de 3000 con un interés compuesto del 6% anualmente. Calcule el monto total al cabo de 4 años en los siguientes casos de periodos de capitalización: a) mensual, b) trimestral, c)anual d) continuo (Resp. a) 3811,4 b) 3807; c) 3787,43 d) 3813.7)

8)Una inversión P gana el 8% compuesto continuamente. Al cabo de 5 años el monto total es de 5500UM.Calcule P (Resp. 3686.76 UM)

9)Si el crecimiento de la población mundial siguiera el modelo exponencial $P(t)=P_0\, e^{0.012t}$, donde P_0=6.000.000 es la población en el año 1999 y $P(t)$ es la población después de t años de 1999 ¿Cuál será la población dentro de 5 años? (Respuesta: tomado de **Wikipedia** Población humana actual 6.000 millones en 1999. "Las estimaciones de las Naciones Unidas para el 2004 son de 6.350 millones, con un crecimiento del 1,2% (77 millones) por año.", resp. de calculo 6.371millones)

¿Se ajusta este modelo a las proyecciones de las Naciones Unidas.?

Proyecciones
7.000 millones hacia el 2010.
8.000 millones hacia el 2025.
9.000 millones hacia el 2050

10)El porcentaje de árboles en una plantación que se ha infectado por cierta plaga esta dado por

$$P(t)=\frac{100}{1+20e^{-0.05t}}.$$

donde t es el número de semanas después que se reportó la enfermedad. Calcule **a)** $P(0)$, **b)** $P(20)$ y c) $P(50)$ (Resp. a)4.7; b) 12 ;c) 37.8).