Capítulo 5:

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

5.1 Dominio y gráfica de funciones

En esta sección estudiaremos funciones reales de varias variables reales. Cantidades de la vida cotidiana o económica o ciertas cantidades físicas dependen de dos o más variables. El volumen de una caja, V, depende del largo, *x*, del ancho, *y*, y de *z* la altura de la caja. Los costos de una empresa que fabrica dos tipos de artículos dependen de q_1 la cantidad de artículos de tipo I y q_2 la cantidad de artículos de tipo II que produce. La temperatura que tiene un gas depende del volumen que ocupa y de su presión.

Veamos la definición formal de una función real de dos variables.

Definición.- Sea D un conjunto de pares ordenados, (x,y), de números reales, $D \subset R^2$. Una función real de dos variables reales es una regla que asigna a cada par ordenado (x,y) en D un único número real, denotado por $f(x,y)$.

El conjunto D es llamado el dominio de la función y el conjunto de todos los valores de la función es el rango de la función.

Observación: Cuando tenemos una función de dos variables se suele utilizar *z* para representar los valores de la función: $z = f(x,y)$. La variable *z* es la variable dependiente y *x* y *y* las variables independientes.

Normalmente no se específica cual es el dominio de la función. Cuando éste es el caso tenemos que considerar **el dominio implícito.** El dominio implícito de una función de dos variables es el conjunto más amplio de (x,y) donde tiene sentido evaluar la fórmula, y el resultado es un número real. Muchas veces este dominio se representa gráficamente. En el caso de dos variables la representación es una región en el plano.

Ejemplo 1.- Sea $f(x,y)=\sqrt{y+4x^2-4}$. **a)** Calcular el dominio de *f*. **b)** Represéntelo gráficamente. **c)** Calcule $f(2,0)$, $f(-\frac{\sqrt{2}}{2},2)$ y $f(1,-1)$.

Solución:

a) La función está bien definida y es un número real cuando el radicando es mayor o igual a cero, esto es:

$$y+4x^2-4 \geq 0$$

Así que el dominio es el conjunto de todas las parejas (x,y) tales que $y+4x^2 \geq 4$.

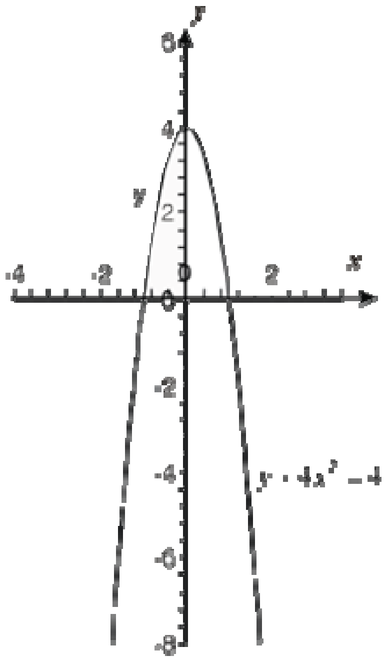
Más formalmente escribimos:

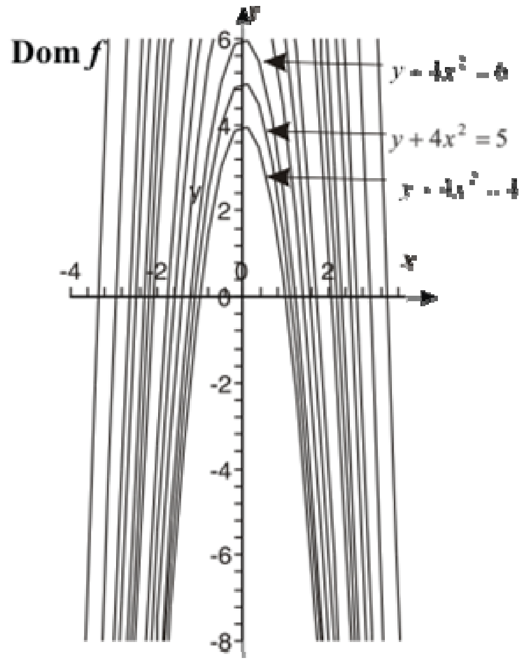
$$\text{Dom } f = \{(x,y) \,/\, y+4x^2 \geq 4\}$$

b) Este conjunto se puede representar en el plano. Es una región del plano limitada por la curva $y+4x^2-4=0$. Primero se traza la curva $y+4x^2-4=0$. Reescribiéndola como $y=4-4x^2$, la identificamos como una parábola abriendo hacia abajo y con vértice en (0,4). Para determinar la región completamente podemos proceder de dos maneras.

Primer procedimiento: Es claro que nuestra región es el conjunto de puntos (x,y) que satisface la desigualdad $y+4x^2\geq 4$. Este conjunto lo podemos ver como la unión de todas las curvas $y+4x^2=d$ con $d\geq 4$.

Entre ellas están $y+4x^2=4$; $y+4x^2=5$, $y+4x^2=6$, $y+4x^2=7$ y todas las intermedias y que están por encima de éstas. Haciendo el gráfico de todas estas curvas podemos visualizar el dominio de la función, vea la figura a la derecha.





Segundo procedimiento: Una vez que hemos establecido que el dominio es una de las dos regiones del plano limitada por la curva $y+4x^2=4$, podemos tomar un punto de prueba en el plano que no esté en la curva.

Claramente (0,0) no está sobre la curva. Evaluamos la desigualdad $y+4x^2-4\geq 0$ en este punto, si satisface la desigualdad entonces la región que contiene el punto de prueba es el conjunto solución, esto es, es el gráfico del dominio de la función, si no satisface la desigualdad entonces el conjunto solución a la desigualdad es la otra región.

Como $0+4\cdot 0^2-4\geq 0$ no se satisface entonces el dominio es la región limitada por la curva $y+4x^2=4$ que no contiene el (0,0), como efectivamente ya deducimos con el otro procedimiento, vea la figura como efectivamente está rayada la región que no contiene el punto (0,0).

c) La evaluación de funciones se hace de manera similar al caso de funciones de una sola variable. Por ejemplo para obtener el valor $f(2,0)$ sustituimos el valor de x por 2 y el de y por 0. Así

$$f(2,0)=\sqrt{0+4(2)^2-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$f(-\frac{\sqrt{2}}{2},2)=\sqrt{2+4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-4}=0$$

$$f(1,-1)=\sqrt{-1+4\cdot(1)^2-4}=\sqrt{-1}\text{ no es real.}$$

Efectivamente la función no está definida en $(1,-1)$. Vea el gráfico dado en **b)** y chequee que efectivamente este punto no está en el dominio.

Remarcamos que con el primer procedimiento demostramos que la solución de una desigualdad en dos variables tiene como representación gráfica a una de las dos regiones delimitadas por la curva dada por la igualdad. El segundo procedimiento es más expedito en determinarla.

En ocasiones nos referiremos al dominio de una función como su representación gráfica, recuerde que realmente el dominio es un conjunto de pares ordenados que pueden ser representados en el plano.

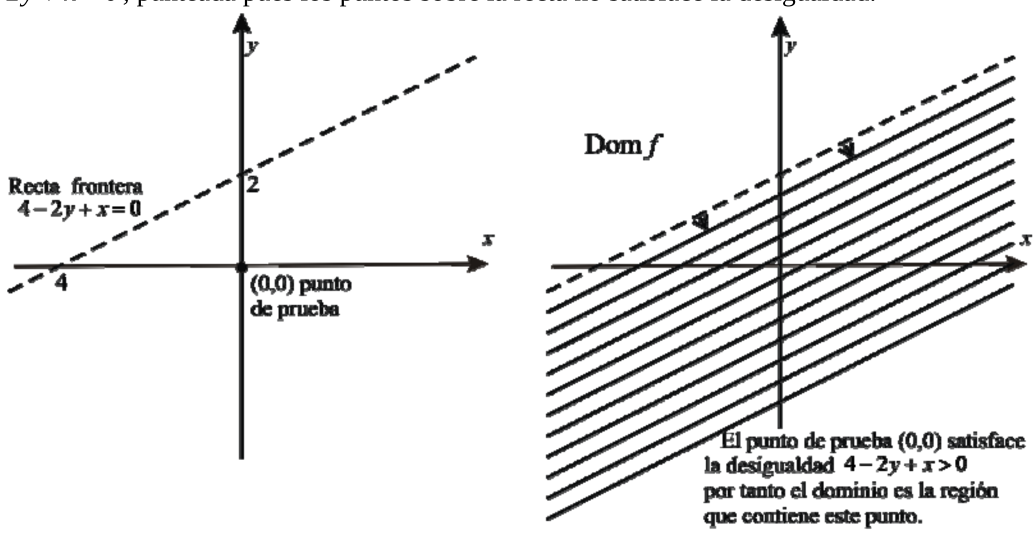
Ejemplo 2.- Encuentre el dominio de la siguiente función y represéntelo gráficamente.

a) $f(x,y)=\ln(4-2y+x)$; **b)** $h(x,y)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+y}$

Solución: **a)** Para que la función esté bien definida y sea un número real se tiene que cumplir que $4-2y+x>0$, entonces:

$$\text{Dom } f=\{(x,y)/\,4-2y+x>0\}$$

Sabemos que la representación gráfica de esta región del plano es un semiplano por ser una desigualdad lineal. Para determinar el semiplano rápidamente, primero graficamos la recta $4-2y+x=0$, punteada pues los puntos sobre la recta no satisface la desigualdad.



luego tomamos un punto de prueba fuera del la recta, si este punto satisface la desigualdad el semiplano es donde está este punto, en caso que no se cumpla la desigualdad el conjunto solución es el otro semiplano.

El punto escogido es de nuevo (0,0) porque está fuera de la curva $4-2y+x=0$. Como el punto (0,0) satisface la desigualdad $4-2y+x>0$, entonces el dominio de la función es el semiplano que contiene el origen. De nuevo insistimos, se ha dibujado la recta $4-2y+x=0$ en forma punteada para indicar que ella no pertenece al dominio de la función.

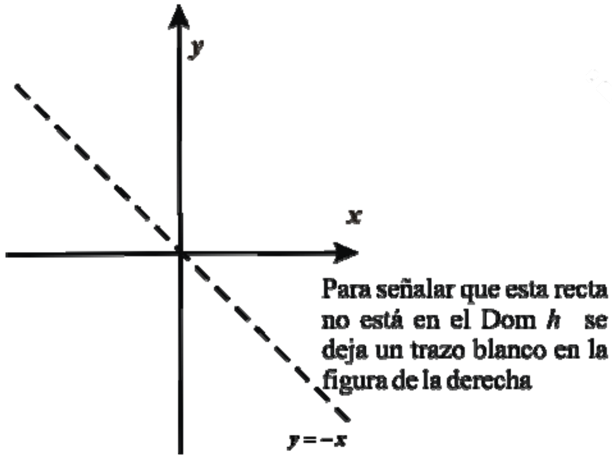
b) Para que la función esté bien definida y sea un número real se tiene que cumplir que

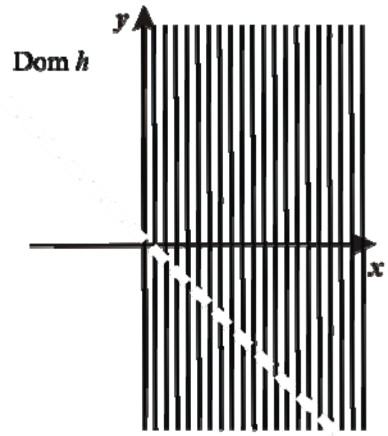
$$x+y\neq 0 \text{ y } x\geq 0$$

$$\text{Dom } h=\{(x,y)/\,x+y\neq 0 \text{ y } x\geq 0\}$$

La primera restricción es todo el plano salvo la recta $x+y=0$

La segunda restricción es el semiplano donde la variable x es no negativa, esto es el semiplano a la derecha del eje x . Buscamos la intersección o parte común de estos dos subconjuntos de R^2 para determinar el dominio de la función.





Ejercicio de desarrollo.- Sea $g(x,y)=\ln(x+y)-e^x$. **a)** Calcular el dominio de *f*.
b) Represéntelo gráficamente; **c)** Encuentre $f(0,-1)$ y $f(1,0)$.

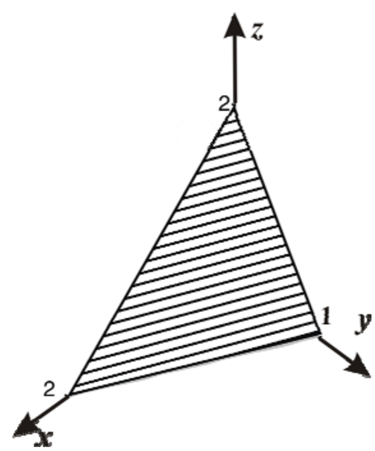
A veces es conveniente representar la función geométricamente. En el caso de una sola variable teníamos una representación geométrica de la función $y=f(x)$ en el plano. Ella era una curva. En el caso de una función en dos variables, la representación de la función será en el espacio, obteniendo en este caso una superficie como representación.

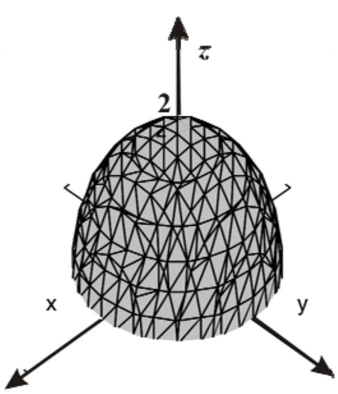
Definición.- Sea *f* una función de dos variables. La gráfica de la función *f* es el conjunto de todos los puntos de la forma (x,y,z) donde $z=f(x,y)$ y $(x,y)\in Dom(f)$.

Ejemplo 3.- Bosqueje la gráfica de las siguientes funciones
a) $f(x,y)=2-x-2y$; **b)** $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$

Solución

a) Graficamos la ecuación $z=2-x-2y$ que corresponde a un plano, con intersecciones con los ejes *x*, *y* y *z* en 2,1 y 2 respectivamente.





b) Graficamos la ecuación $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, ella es la mitad de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ con coordenada *z* positiva.

APLICACIONES

Suponga que estamos en la situación de una empresa que elabora dos productos A y B. Podemos considerar la función de costos conjuntos $C(q_1,q_2)$ que representa los costos totales de producir q_1 unidades del producto A y q_2 unidades del producto B. De manera similar podemos definir la función de ingresos conjuntos $I(q_1,q_2)$ y de utilidad conjunta $U(q_1,q_2)$.

El siguiente ejemplo ilustra una situación en que es fácil determinar estas funciones.

Ejemplo 4.- Una pastelería produce chocolate blanco y chocolate oscuro. El costo de material y mano de obra por producir un kilo del chocolate blanco es 6 UM y el del oscuro es 5UM. Suponga que la empresa tiene costos fijos semanales de 1200UM.
a) Encuentre el costo semanal como función de la cantidad de kilos de chocolates de cada tipo producido a la semana. **b)** Suponga que la pastelería vende el kilo de chocolate blanco a 10UM y el oscuro a 8UM. Obtenga la función utilidad mensual como función del número de kilos de cada tipo producidas y vendidas a la semana.
Solución:
a) El costo de material y manos de obra por producir q_1 kilos de chocolate blanco y q_2 kilos de chocolate oscuro están dado por $6\,q_1$ y $5\,q_2$ respectivamente.
El costo conjunto en este caso esta dado por

$C(q_1,q_2)=$ Costo fijo+Costo variable

$$C(q_1,q_2)=1200+(6q_1+5q_2)$$

b) Primero obtendremos la función de ingreso conjunto. Es claro que

$I(q_1,q_2)=$ Ingreso por la venta de q_1 chocolate blanco+ Ingreso total por la venta de q_2 chocolate oscuro

$$I(q_1,q_2)=10q_1+8q_2\,.$$

Finalmente obtenemos

$$U(q_1,q_2)=I(q_1,q_2)-C(q_1,q_2)$$
$$U(q_1,q_2)=10q_1+8q_2-(1200+6q_1+5q_2)$$
$$U(q_1,q_2)=4q_1+3q_2-1200\,.$$

Ejemplo 5.- Una heladería ofrece tinitas y barquillas. Se ha estimado que si se vende la tinita a p_1UM y la barquilla a p_2 UM, la ecuación de demanda de la tinita está dada por

$D_1(p_1,p_2)=300-5p_1+10p_2$ y la ecuación de demanda de la barquilla por

$D_2(p_1,p_2)=200+7p_1-5p_2$ al día.

Exprese el ingreso diario de la compañía en función de p_1 y p_2.
Solución:

El ingreso diario lo podemos calcular a partir de

Ingreso conjunto=Ingreso por la venta de tinita+ingreso por la venta de barquillas

Ingreso conjunto=(precio de la tinita)(número de tinitas vendidas)
+(precio de la barquilla)(número de barquillas vendidas)

$$I(p_1,p_2)=p_1(300-5p_1+10p_2)+p_2(200+7p_1-5p_2)$$
$$I(p_1,p_2)=300p_1-5p_1^2+10p_1p_2+200p_2+7p_1p_2-5p_2^2$$
$$I(p_1,p_2)=300p_1+200p_2+17p_1p_2-5p_1^2-5p_2^2\,.$$

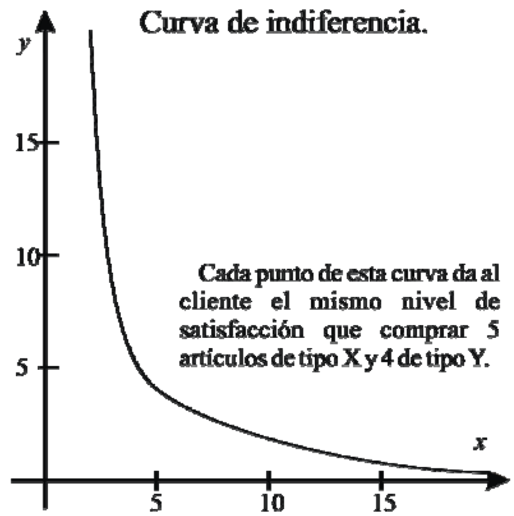
Función de utilidad de consumo. (Satisfacción al consumo)

La función de utilidad de consumo, denotada por $u(x,y)$ cuantifica el nivel de satisfacción o utilidad que un consumidor tiene al adquirir x unidades de un producto y y de otro producto. Muchas veces se está interesado en todas las posibles combinaciones de compras que producen el mismo nivel de satisfacción c_0. En nuestra terminología si tenemos la función $z=u(x,y)$ cuya representación gráfica es una superficie en R^3, nosotros sólo estamos interesados en la traza con el plano $z=c_0$. Esta curva de nivel dada por la ecuación $c_0=u(x,y)$ se llama curva de indiferencia.

Ejemplo 6.- Suponga que la función de utilidad de consumo de dos bienes para un cliente está dada por $u(x,y)=x^2y$. El cliente ha comprado 5 unidades del bien X y 4 del bien Y. Represente geométricamente otras posibilidades que tenía el cliente para tener el mismo nivel de satisfacción o de utilidad en su compra.

Solución: Primero calculamos la utilidad o satisfacción del cliente por esta compra. Ella está dada por $u(5,4)=5^2\cdot 4=100$.

Planteamos la curva de indiferencia para $u=100$, ella es $100=x^2y$. Esto es una curva en R^2. Para visualizar mejor la gráfica escribimos está ecuación como una función $y=\dfrac{100}{x^2}$. Al graficar sólo hemos considerado la parte positiva de las x´s.



En Economía es corriente determinar distintas curvas de nivel para diversas cantidades. En el caso de funciones de costos, estas curvas son conocidas como las líneas de isocosto.

EJERCICIOS 5.1

1) Calcule el valor de la función indicada

1.1) $f(x,y)=x(y-2)^3$; $f(1,-3)$; $f(2,2)$; **1.2)** $f(x,y)=xe^y-x^2$; $f(1,-\ln 2)$; $f(2,0)$

1.3) $f(x,y)=\dfrac{xy^3-1}{x-y}$; $f(0,-3)$; $f(2,-2)$; **1.4)** $f(u,t)=e^{ut}-t$; $f(\ln 3,2)$; $f(0,10)$

1.5) $g(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $g(1,0,1)$; $g(0,4,3)$; **1.6)** $G(w,z)=\dfrac{\ln(1+zw)}{1+2z}$; G(1,0); G(1,1-e);

1.7) $h(r,s,t,u)=\dfrac{1-u^2}{s+t}$; $h(1,-2,-1,1)$; $h(1,-2,-1,2)$; $h(1,y,x+h,0)$;

1.8) $F(x,y,z)=2x-3y^2+4z$; $F(-1,-2\sqrt{2},0)$; $F(2,y+h,2)$.

2) Determine el dominio de las siguientes funciones. Represéntelo gráficamente.

2.1) $f(x,y)=\ln(x-y-2)$; **2.2)** $f(x,y)=xe^{y}-\dfrac{1}{x}$**;** **2.3)** $f(x,y)=\dfrac{xy-1}{2x-y}$**;**

2.4) $f(u,t)=\dfrac{u-1}{\ln(u-t)}$**;** **2.5)** $g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ **;** **2.6)** $h(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}$

2.7) $g(x,y)=\sqrt{1-x+y^2}$ **;** **2.8)** $h(x,y,z)=x\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ **;**

2.9) $g(x,y,z)=x+\sqrt{2-2y-z}$ **;** **2.10)** $H(u,v)=u\ln(2-u^2-v)$**;** **2.11)** $g(x,y,z)=z\sqrt{4-x^2-y^2}$ **.**

3) Bosqueje la gráfica de las siguientes funciones

3.1) $g(x,y)=4-x-2y$**;** **3.2)** $h(x,y)=4-x^2-y^2$**;**

3.3) $g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+1$**;** **3.4)** $h(x,y)=\sqrt{4-(x^2+y^2)}$ **.**

4) Trace la curva de nivel $f(x,y)=C$, para cada C dada

4.1) $f(x,y)=x-y-2$; C=4 C=2,C=0,C=-2; **4.2)** $f(x,y)=\dfrac{y}{x}$; C=2; C=4;

4.3) $f(x,y)=x^2-2x-y$; C=-3; C=2; **4.4)** $f(x,y)=y^2-3x$; C=0; C=3;

4.5) $f(x,y)=y^2+(x-1)^2$ C=-3; C=1, C=4; **4.6)** $f(x,y)=y-e^{-x}$; C=0; C=1.

PROBLEMAS DE ECONOMÍA

1) Una tienda tiene dos tipos de CD virgen. Se ha estimado que si se vende el primer tipo de CD a p_1 y el segundo tipo de CD a p_2 la ecuación de demanda del primer tipo de CD está dada por $D_1(p_1,p_2)=100-5p_1+12p_2$ y la ecuación de demanda del segundo tipo de CD está dada por $D_2(p_1,p_2)=200+6p_1-10p_2$ unidades a la semana..**a)** Si I denota el ingreso total a la semana, determine I como función de p_1 y p_2. **b)** Calcule el ingreso total a la semana si el primer tipo de CD se vende a 3UM y el segundo a 2UM.

Respuestas: 1a) $I(p_1,p_2)=-5p_1^2-10p_2^2+18p_1p_2+100p_1+200p_2$;**1b)** $I(3,2)=723$ UM.

2) Una empresa produce dos tipos de productos X y Y. El costo de material y mano de obra por producir una unidad de X es 3UM y el de Y es 4UM. Suponga que la empresa tiene costos fijos semanales de 1000UM. **a)** Obtenga el costo semanal como función de las unidades de los dos tipos de productos producidas. **b)** Si la compañía vende el producto X a 4UM y el Y a 6UM. Obtenga la función utilidad mensual como función del número de unidades producidas y vendidas a la semana.

Respuesta 2a): $I(x,y)=-3x+4y+1000$; donde x es el número de unidades producidas de tipo X.

2b) $U(x,y)=4x+8y-4000$.

3) Javier piensa comprar 25 unidades de un bien y 6 de un segundo bien. Si la función de utilidad de consumo de Javier está dada por $u(x,y)=\sqrt{x}y$, donde x representa el número de unidades a comprar del primer bien. Represente geométricamente otras alternativas de consumo que le dan el mismo nivel de utilidad.

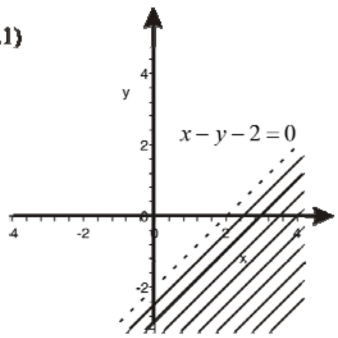
4) La función de costos conjuntos por la fabricación q_1 artículos de tipo 1 y q_2 artículos de tipo 2 está dado por $C(q_1,q_2)=q_1^2+q_2^2+4q_1+60$. Grafique la curva de nivel $C(q_1,q_2)=100$ (Curva de isocosto). (Ayuda: Identifique la ecuación resultante con la de una circunferencia).

Respuestas: 1.1) –125; 0**; 1.2)** -1/2; 2; **1.3)**-1/3; -17/4; **1.4)** 7; -9; **1.5)** √2; 5; **1.6)** 1; $\dfrac{\ln(2-e)}{3-2e}$;

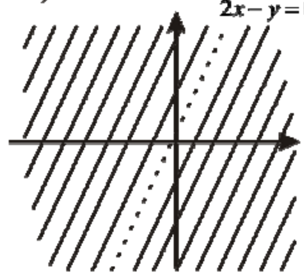
1.7) 0;1; $\dfrac{1}{y+x+h}$; **1.8)** -26; $12-3(y+h)^2$; **2.1)** Domf= $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y<x-2\}$;

2.2) Dom $f=\{(x,y)/x\neq 0\}$ **; 2.3)** Dom $f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y\neq 2x\}$; **2.4)** Dom $f=\{(u,t)/u>t\ \ y\ \ u-t\neq 1\}$**;**
2.5) Dom g= $\mathbb{R}^2$; **2.6)** Dom $h=\{(x,y)/x^2+y^2\geq 4\}$ **;** **2.7)** Dom $\mathrm{g}=\{(x,y)/1+y^2\geq x\}$**;**
2.8) Dom $h=\{(x,y,z)/x^2+y^2+z^2\leq 1\}$**; 2.9)** Dom $g=\{(x,y,z)/2y+x\geq 1\}$ **;**
2.10) Dom $\mathrm{H}=\{(u,v)/2>u^2+v\}$**; 2.11)** Dom $g=\{(x,y,z)/y^2+x^2\leq 4\}$**.**

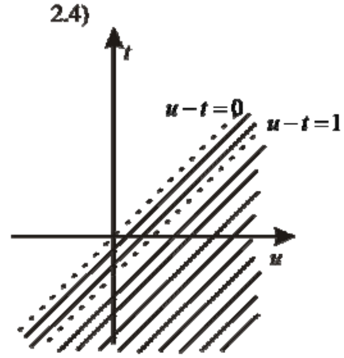
2.1)



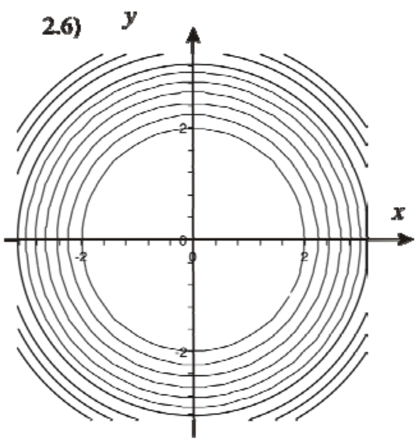
2.3)



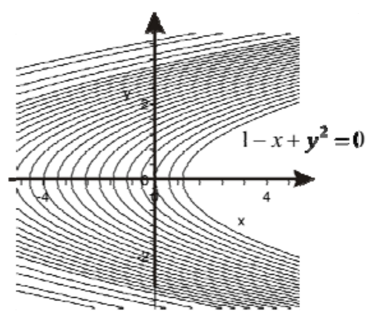
2.4)



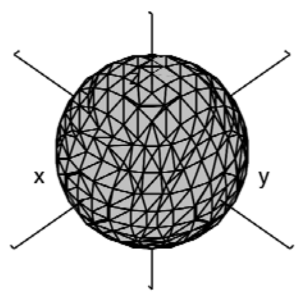
2.6)



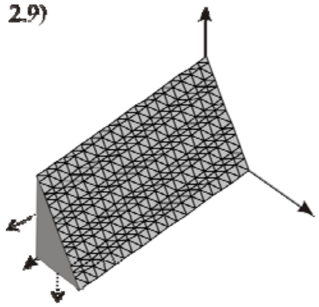
2.7)



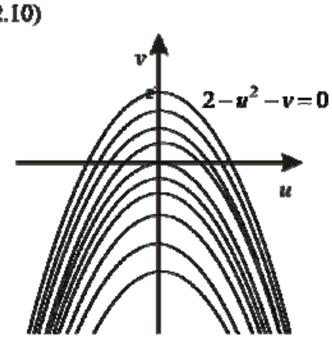
2.8)



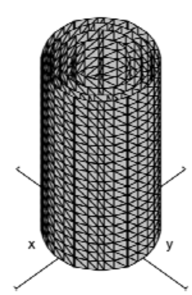
2.9)



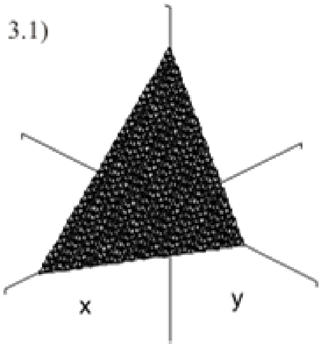
2.10)



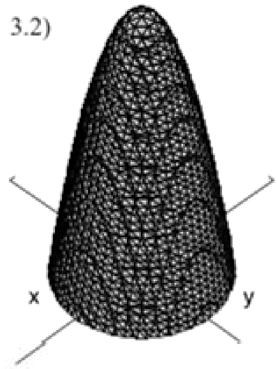
2.11)



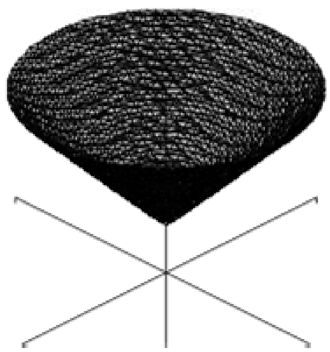
3.1)



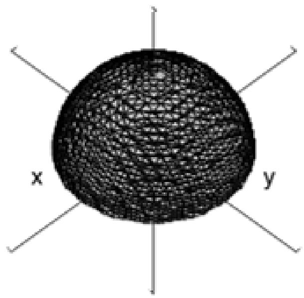
3.2)



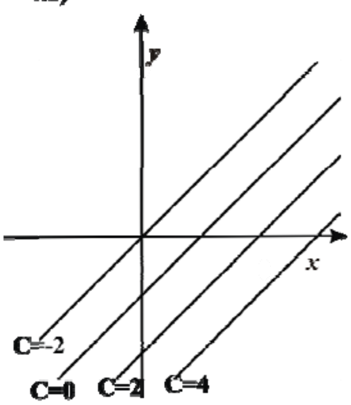
3.3)



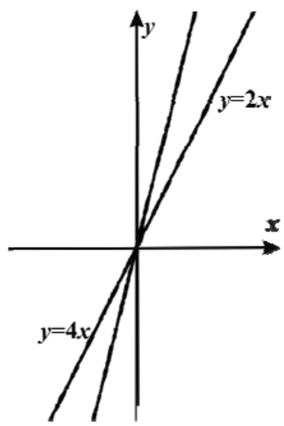
3.4)



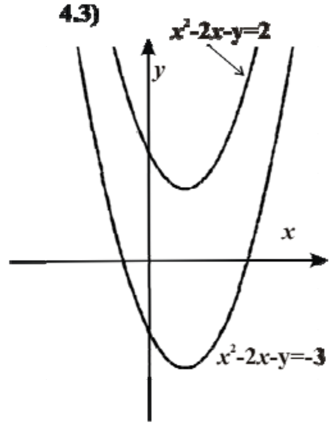
4.1)



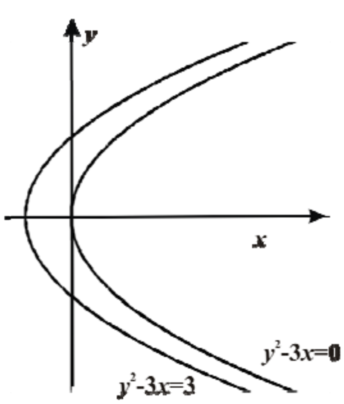
4.2)



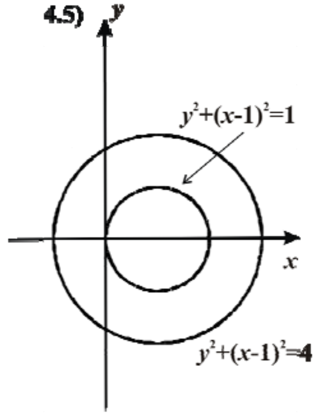
4.3)



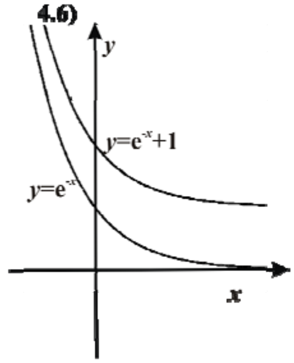
4.4)



4.5)



4.6)



5.2 Derivadas parciales

Suponga que tenemos una función f en dos variable *x* y *y*. Si dejamos una variable fija, por ejemplo la *x*, asumiendo un valor a y variamos la *y*, podemos ver en cierta manera que tenemos una función de una sola variable dada por $g(y) = f(a, y)$. Podemos entonces considerar derivar g con respecto a su variable, el resultado es la derivada parcial de *f* con respecto a la variable *y* en (a, y). En este caso la notación empleada está dada bien por $f_y(a, y)$ o por la notación de Leibniz: $\left.\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right|_{(a.y)}$. A continuación establecemos la definición formal de derivadas parciales para funciones en dos variables:

Definición.- Sea *f* una función en las variables *x* y *y*. Lla derivada parcial de *f* con respecto a *x* está definida por

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

siempre y cuando este límite exista.

La derivada parcial de *f* con respecto a y está definida por.

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

siempre y cuando este límite exista.

Observación: El símbolo $\frac{\partial f}{\partial x}$ se lee derivada parcial de *f* con respecto a *x*. Si los valores de *f* son representados por *z*, esto es si $z = f(x, y)$ entonces también usamos notaciones como $\frac{\partial z}{\partial x}$ para las derivadas parciales.

Otras notaciones usadas para las derivadas parciales están dadas por f_x y f_y, para referirse a las parciales con respecto a *x* y *y* respectivamente.

CÁLCULO DE DERIVADA PARCIALES

Para calcular derivadas parciales nos valemos de las reglas existentes para una sola variable. Si por ejemplo queremos calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ consideramos a y como una constante y derivamos con respecto la x. Si queremos calcular $\frac{\partial f}{\partial y}$ se deriva con respecto a *y* manteniendo a *x* como una constante.

Ejemplo 1.- Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ para $f(x, y) = 3x^2 - 4xy + 5y^3$

Solución: Primero calculamos $\frac{\partial f}{\partial x}$. Derivamos como una suma, recuerde que *y* se comporta como una constante

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2) - \frac{\partial}{\partial x}(4xy) + \frac{\partial}{\partial x}(5y^3)$$

En el segundo factor sacamos 4*y* de factor constante. El término $(5y^3)$ se comporta como una constante, su derivada es 0

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3\frac{\partial}{\partial x}(x^2)-4y\frac{\partial}{\partial x}(x)+0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=6x-4y\cdot 1=6x-4y$$

Ahora calculamos $\frac{\partial f}{\partial y}$. Derivamos como una suma, recuerde que *x* se comporta como una constante

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(3x^2)-\frac{\partial}{\partial y}(4xy)+\frac{\partial}{\partial y}(5y^3)$$

En el segundo factor sacamos 4*x* de factor constante. El término $(3x^2)$ se comporta como una constante, su derivada es 0

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0-4x\frac{\partial}{\partial y}(y)+5\frac{\partial}{\partial y}(y^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-4x\cdot 1+5\cdot 3y^2=-4x+15y^2$$

Otro tipo de notación para la derivada es $D_x f$ que indica la parcial de *f* con respecto a *x*.

Ejemplo 2.- Calcule $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ para $f(x,y)=\frac{(x^2+3xy+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$

Solución:
Derivamos como un cociente

$$f_x(x,y)=\frac{(2x+3y)(x^2+y^2)^{1/2}-\frac{1}{2}(x^2+3xy+y^2)2x(x^2+y^2)^{-1/2}}{(x^2+y^2)}$$

Se simplifica el 2 en el segundo término y luego se saca Factor común $(x^2+y^2)^{-1/2}$ en el numerador.

$$=(x^2+y^2)^{-1/2}\frac{(2x+3y)(x^2+y^2)-x(x^2+3xy+y^2)}{(x^2+y^2)}$$

Se realiza la multiplicación en el primer término y se distribuye la *x* en el segundo término.

$$f_x(x,y)=(x^2+y^2)^{-1/2}\frac{(2x^3+2xy^2+3x^2y+3y^3)-x^3-3x^2y-y^2x}{(x^2+y^2)}$$

Sumamos términos semejantes. Pasamos al denominador el factor con exponente cambiado de signo y sumamos los exponentes porque tienen igual base. Finalmente obtenemos

$$f_x(x,y)=\frac{x^3+xy^2+3y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Como la función es simétrica en *x* y *y*, para obtener la parcial de *y* intercambiamos *x* por *y* en esta última. Esto es

$$f_y(x,y)=\frac{3x^3+x^2y+y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Las derivadas parciales de funciones de dos variables también son funciones de estas variables. Ellas pueden ser evaluadas. A continuación introducimos las distintas notaciones para las derivadas parciales evaluadas en el punto (a,b).

	Derivada con respecto a x	Derivada con respecto a y
Notación de subíndice	$f_x(a,b)$	$f_y(a,b)$
Notación de Leibniz	$\left.\frac{\partial}{\partial x}\big(f(x,y)\big)\right\|_{(x,y)=(a,b)}$	$\left.\frac{\partial}{\partial y}\big(f(x,y)\big)\right\|_{(x,y)=(a,b)}$
	$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_{(x,y)=(a,b)}$	$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right\|_{(x,y)=(a,b)}$

Ejemplo 3.- Calcule $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)=(1,-2)}$ y $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y)=(2,0)}$ para $z=\sqrt{x^2-y^3}$

Solución:

Primero calculamos $\frac{\partial z}{\partial x}$. Para derivar reescribimos $z=\left(x^2-y^3\right)^{1/2}$ y derivamos con la regla de la potencia generalizada.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(x^2-y^3\right)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2-y^3\right)$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^3}}.$$

Finalmente evaluamos

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)=(1,-2)}=\frac{1}{\sqrt{1^2-(-2)^3}}=\frac{1}{3}$$

Para $\frac{\partial z}{\partial y}$ aplicamos las mismas consideraciones

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(x^2-y^3\right)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2-y^3\right)$$

$$=\frac{-3y^2}{2\sqrt{x^2-y^3}}$$

Al evaluar queda

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y)=(2,0)}=\frac{-3\cdot 0^2}{2\sqrt{4-0}}=0.$$

Ejercicio de desarrollo.- Sea $z=x^2-xy^2-x\ln(y+1)$. Calcule:

a) $\frac{\partial z}{\partial x}$ **b)** $f_y(-1,3)$

En ocasiones podemos tener funciones de tres o más variables, por ejemplo $w = f(x, y, z)$ es una función de tres variables, en este caso podemos considerar tres derivadas parciales: $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ y $\frac{\partial w}{\partial z}$.

El conjunto de todas las derivadas de una función las llamaremos las derivadas de primer orden de la función.

Ejemplo 4.- Sea $w = \frac{x^2 + y^2}{z(x+y)}$. Encuentre todas las derivadas de primer orden de w, esto es en este caso calcular: $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ y $\frac{\partial w}{\partial z}$.

Solución: Primero calculamos $\frac{\partial w}{\partial x}$. Derivamos como un cociente manteniendo y y z como constantes:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2xz(x+y) - (x^2 + y^2)z}{\left(z(x+y)\right)^2} \qquad \text{Se distribuye y se agrupan términos semejantes}$$

$$= \frac{2x^2 z + 2xzy - x^2 z - y^2 z}{\left(z(x+y)\right)^2}$$

$$= \frac{x^2 z - y^2 z + 2xzy}{z^2 (x+y)^2} \qquad \text{Se sacar factor común } z \text{ y se simplifica}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2 + 2xy}{z(x+y)^2}$$

Como la función es simétrica en x y y entonces tenemos que

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2 + 2xy}{z(x+y)^2}$$

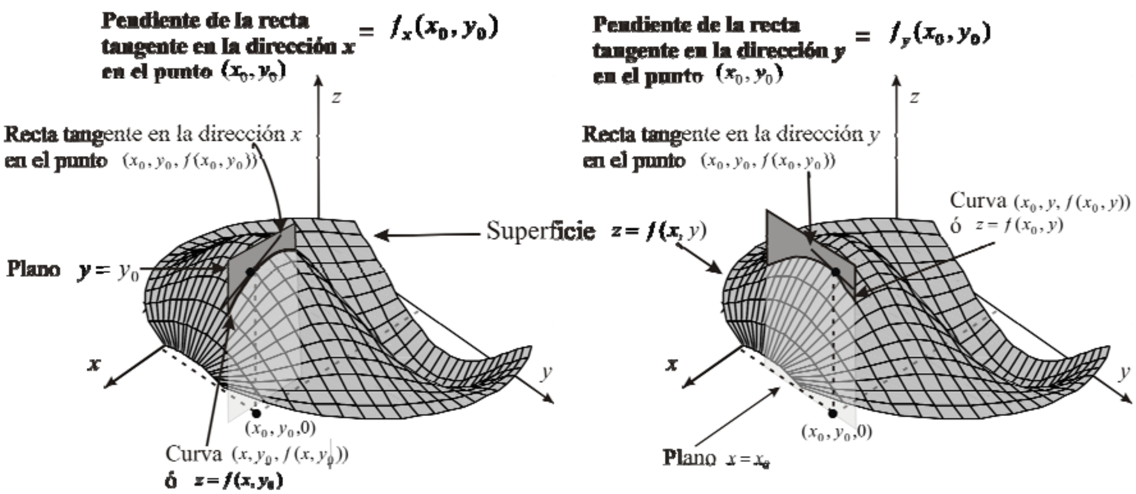
Antes de calcular $\frac{\partial w}{\partial z}$ reescribimos la función como $w = \frac{x^2 + y^2}{(x+y)} \cdot \frac{1}{z}$. Así que cuando derivamos con respecto a z, el primer factor , $\frac{x^2 + y^2}{(x+y)}$, se considera una constate y sale fuera de la derivación

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{x^2 + y^2}{(x+y)} \cdot \left(\frac{1}{z}\right)' = \frac{x^2 + y^2}{(x+y)} \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{x^2 + y^2}{z^2 (x+y)}.$$

Ejercicio de desarrollo.- Para $f(x, y, z) = \frac{1}{xy} + xyz$, calcule todas las derivadas parciales de primer orden.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS DERIVADAS PARCIALES

Suponga tenemos la función $z = f(x, y)$, esta función tiene como representación gráfica una superficie en R^3. Cuando fijamos $y = y_0$ entonces $z = f(x, y_0)$ es función de x y está representada geométricamente por la curva que se obtiene de intersectar el plano $y = y_0$ con las superficie $z = f(x, y)$. En esta curva $z = f(x, y_0)$ se puede calcular la recta tangente en cualquier punto (x_0, y_0, z_0) que satisfaga $z_0 = f(x_0, y_0)$. La pendiente está dada por la derivada de la función $z = f(x, y_0)$ con respecto a su variable *x* evaluada en $x = x_0$. Ésta es la derivada de la función *f* en la dirección *x* que no es otra cosa que la derivada parcial de *f* con respecto a *x*, véase la figura de la izquierda. La figura de la derecha ayuda a interpretar la derivada parcial de *f* con respecto a *y* de manera análoga a como se expuso con la derivada con respecto a *x*.



EJERCICIOS 5.2

1) Para cada una de las siguientes funciones, calcule todas las derivadas parciales de primer orden.

1.1) $z = x^2 - x + y^2$, $f_y(a,b)$; **1.2)** $z = -x^2 - 3\ln y + 4$;

1.3) $f(x, y) = 2x - x^2 y + xy^2$; **1.4)** $z = \dfrac{x}{y} - 2xy^2$;

1.5) $z = xye^{xy}$; **1.6)** $g(x, y) = \sqrt{x^4 - y^2}$, $f_y(a,b)$;

1.7) $z = -\dfrac{y}{x-1}$; **1.8)** $h(x, y) = \sqrt[3]{y}(1-x)$; **1.9)** $f(x, y) = \dfrac{x}{e^{x/y}}$;

1.10) $z = \ln(x - e^x y)$; **1.11)** $z = e^{-x-3y}(2-y)$; **1.12)** $z = xy\sqrt{x^2 + y^2}$;

1.13) $z = -x^2 - 3\ln y + 4$; **1.14)** $f(x, y, z) = 2xz - x^2 y + xy^2$;

1.15) $f(u, v, w) = \dfrac{u+1}{uv^2} - 2u^2 w$; **1.16)** $f(x, y, z) = xye^{xyz}$; **1.17)** $f(x, y, x) = \dfrac{1 - xyz}{xyz}$.

2) Evalúe las derivadas parciales indicadas.

2.1) $f(x,y)=x^2-xy^2+y^3$ **,** $f_y(2,-7)$ **;** **2.2)** $z=-(y+2)^2-x\ln(y^2+1)+7$ **;** $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y)=(2,0)}$

2.3) $z=ye^{3x}+\dfrac{x}{y}$ **,** $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y)=(0,1)}$ **;** **2.4)** $z=\dfrac{x}{y}-2xy^2$ **,** $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)=(-1,2)}$ **;**

2.5) $f(x,y)=xye^{xy}$ **,** $f_x(2,1)$ $f_y(2,1)$ **;** **2.6)** $g(x,y)=x\sqrt{3x+y^2}$ **,** $\left.\dfrac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x,y)=(1,-1)}$ **;**

2.7) $f(x,y,z)=\dfrac{e^{2y+3x}}{z}$ **,** $f_x(2,1,-1)$ $f_z(2,1,3)$ **;**

2.8) $h(r,s,t,u)=st\ln(s+t+u)$ **,** $\left.\dfrac{\partial h}{\partial t}\right|_{(s,t,u)=(1,-1,1)}$ **,** $\left.\dfrac{\partial h}{\partial t}\right|_{(s,t,u)=(1,-1,e)}$ **;** $\left.\dfrac{\partial h}{\partial s}\right|_{(s,t,u)=(-1,1,1)}$, $\left.\dfrac{\partial h}{\partial s}\right|_{(s,t,u)=(-1,1,e)}$

Respuestas:

1.1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-1;$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y$ **; 1.2)** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-2x;$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{3}{y}$ **1.3)** $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2-2xy+y^2;$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-x^2+2xy$ **;**

1.4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{y}-2y^2;$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}-4xy$ **;** **1.5)** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}+xy^2e^{xy};$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}+x^2ye^{xy}$ **;**

1.6) $\dfrac{\partial g}{\partial x}=\dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4-y^2}};$ $\dfrac{\partial g}{\partial y}=-\dfrac{y}{\sqrt{x^4-y^2}}$ **;** **1.7)** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{(x-1)^2};$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1}{x-1}$ **;**

1.8) $\dfrac{\partial h}{\partial x}=-\sqrt[3]{y};$ $\dfrac{\partial h}{\partial y}=\dfrac{1-x}{3\sqrt[3]{y^2}}$ **;** **1.9)** $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-e^{-x/y}(-1+\dfrac{x}{y});$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x^2e^{-x/y}}{y^2}$ **;**

1.10) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1-e^xy}{x-e^xy};$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{e^x}{x-e^xy}$ **;** **1.11)** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(-2+y)e^{-x-3y};$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=(-7+3y)e^{-x-3y}$ **;**

1.12) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y(2x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}};$ $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x(x^2+2y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}};$ **1.13)** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-2x;$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-3/y$ **;**

1.14) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2z-2xy+y^2;$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-x^2+2xy$ **;** $\dfrac{\partial f}{\partial z}=2x$ **;** **1.15)** $\dfrac{\partial f}{\partial u}=-\dfrac{1+4u^3v^2w}{u^2v^2};$ $\dfrac{\partial f}{\partial v}=-2\dfrac{(u+1)}{uv^3}$ **;** $\dfrac{\partial f}{\partial w}=-2u^2$ **; 1.16)** $\dfrac{\partial f}{\partial x}=y(xyz+1)e^{xyz};$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x(xyz+1)e^{xyz}$ **;** $\dfrac{\partial f}{\partial z}=x^2y^2e^{xyz}$ **;** **1.17)** $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-\dfrac{1}{x^2yz}$ **;** $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{1}{xy^2z};$ $\dfrac{\partial f}{\partial z}=-\dfrac{1}{xyz^2}$ **.**

2.1) 175 **; 2.2)** -4 **; 2.3)** 1; **2.4)** $-\dfrac{15}{2}$; **2.5)** $3e^2$ **,** $6e^2$ **;** **2.6)** $-\dfrac{1}{2}$ **; 2.7)** $-3e^8$ **,** $-\dfrac{e^8}{9}$ **;2.8)** -1 **;** $\dfrac{e-1}{e}$ **;** -1 **;** $\dfrac{e-1}{e}$ **.**

5.3 Aplicaciones a la economía

COSTO MARGINAL

Suponga que una industria fábrica dos tipos de artículos. Sea $C(q_1,q_2)$ la función de costos conjuntos. Se define $\frac{\partial C}{\partial q_1}$ como el costo marginal con respecto a q_1 y se interpreta como la razón de cambio de C con respecto a q_1 cuando q_2 permanece fija. Normalmente se usa para aproximar el cambio en los costos cuando la producción aumenta una unidad en q_1 y q_2 no aumenta (permanece constante). Una definición e interpretación similar tiene $\frac{\partial C}{\partial q_2}$. Recuerde, de la definición de derivada parcial que

$$\frac{\partial C}{\partial q_1} \approx \frac{C(q_1+h,q_2)-C(q_1,q_2)}{h}, \quad \text{para } h \text{ pequeño}$$

y si h=1, tenemos que

$$\frac{\partial C}{\partial q_1} \approx \frac{C(q_1+1,q_2)-C(q_1,q_2)}{1} = C(q_1+1,q_2)-C(q_1,q_2) =$$

Cambio en los costos cuando la producción aumenta una unidad en q_1 y q_2 permanece constante.

Pero el cambio en el costo es debido a que se produce una unidad adicional de tipo I. Es por eso que también podemos decir que el costo marginal $\frac{\partial C}{\partial q_1}$ es el costo de la unidad adicional si se decide aumentar la producción del primer tipo en una unidad.

Ejemplo 1.- Una compañía elabora dos tipos de celulares, el básico y el sofisticado. La función de costos conjuntos está dada por

$$C(x,y)=0.1x^2+0.5y^2+4xy+2000$$

donde x es el número de celulares básicos y y el número de celulares sofisticados a producir.
a) Encuentre los costos marginales cuando se producen 500 celulares del tipo básico y 100 del otro tipo. **b)** Interprete sus resultados
Solución: a) Primero calculamos las funciones de costo marginal

$$C_x(x,y)=0.2x+4y$$

$$C_y(x,y)=y+4x$$

Evaluamos los costos marginales en (500,100)

$$C_x(500{,}100)=100+400=500$$

$$C_y(500{,}100)=100+2000=2100$$

b) Interpretación: Con un nivel de producción de 500 celulares de tipo básico y 100 del sofisticado, el costo total aumentará 500 UM si la producción del tipo básico aumenta en una unidad y la del tipo sofisticado permanece constante. Por otro lado el costo total aumentará 2100 UM si la producción del celular tipo sofisticado aumenta en una unidad y la del tipo básico permanece constante.

Ejercicio de desarrollo.- Si la función de costos conjunto de una fábrica que elabora dos productos X y Y está dada por $C(x,y)=y^2+40xy+5x+400$, donde x el número de artículos de tipo X y y el número de artículos tipo Y. **a**) Encuentre el costo marginal con respecto a y si se producen 4 artículos de tipo X y 7 de tipo Y. **b)** Interprete sus resultados.
.

PRODUCTIVIDAD MARGINAL

El nivel de producción de un producto depende de muchos factores, mano de obra, maquinaria, capital, capacidad de almacenamiento, etc. Llamaremos función de producción, *P*, a la cantidad de artículos que se producen. En esta sección supondremos que depende sólo del capital invertido, *K*, y de la cantidad de mano de obra empleada *L*. Así que en general escribiremos $P = P(K, L)$.

Llamaremos $\frac{\partial P}{\partial K}$ la función de productividad marginal con respecto a *K* y se interpreta como el cambio aproximado en la producción cuando la unidad de capital se incrementa en una unidad y el nivel de mano de obra se mantiene fija.

Similarmente, $\frac{\partial P}{\partial L}$ es la función de productividad marginal con respecto a *L* y se interpreta como el cambio aproximado en la producción cuando se incrementa en una unidad la mano de obra contratada y el nivel de inversión de capital se mantiene fija.

Ejemplo 2.- La función de producción de un producto elaborado por cierta empresa está dada por $P(K, L) = 10K^{0.4}L^{0.6}$ unidades, donde *L* es el tamaño de la fuerza laboral medido en horas-trabajador por semana y *K* es el monto de capital invertido por semana en UM. **a)** Determine las productividades marginales cuando *K*=100 y *L*=500.
b) Interprete sus resultados.
Solución: a) Calculemos primero las derivadas parciales

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}\left(10K^{0.4}L^{0.6}\right) = 10 \cdot 0.4 \cdot K^{-0.6}L^{0.6}$$

$$\frac{\partial P}{\partial K} = 4 \cdot \left(\frac{L}{K}\right)^{0.6}$$

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\left(10K^{0.4}L^{0.6}\right) = 10 \cdot 0.6 \cdot K^{0.4}L^{-0.4}$$

$$\frac{\partial P}{\partial L} = 6 \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{0.4}$$

Al evaluar las derivadas parciales obtenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial K} = 4 \cdot \left(\frac{500}{100}\right)^{0.6} = 4 \cdot 5^{0.6} = 10.5 \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial L} = 6 \cdot \left(\frac{100}{500}\right)^{0.4} = 6 \cdot (0.2)^{0.4} = 3.15$$

b) Interpretación: Si se ha estado contratando 500 horas-hombres, la producción se incrementa en aproximadamente 3.15 unidades semanales por cada hora-hombre adicional contratada cuando *K* se mantiene fija en 100 UM. La producción se incrementa en aproximadamente 10.5 unidades semanales por cada UM adicional de incremento en el monto semanal del capital invertido cuando *L* se mantiene fijo en 500 horas hombre y el capital era de 100UM.

Ejercicio de desarrollo.- La función de producción de un artículo está dado por $P(K, L) = \frac{KL}{K + L}$ determine la productividad marginal con respecto a *K*.

FUNCIONES DE DEMANDA MARGINAL. PRODUCTOS COMPETITIVOS Y COMPLEMENTARIOS

Suponga dos productos en el mercado que están relacionados en el sentido que el cambio en el precio de uno afecta la demanda del otro. Por supuesto, el aumento de precio de uno de los productos afecta la demanda de él mismo. Así que podemos en ocasiones pensar que la función de demanda del producto 1 depende tanto del precio de él mismo como del producto 2. Igual consideración podemos hacer con respecto al segundo producto. Así tenemos

$$q_1 = f_1(p_1, p_2)$$
$$q_2 = f_2(p_1, p_2)$$

Si estas funciones son derivables con respecto a p_1 y p_2, estas derivadas se llaman las funciones de demanda marginal.

$\frac{\partial q_i}{\partial p_j}$ es la demanda marginal de q_i con respecto a p_j.

Normalmente sabemos que si el precio del producto 1, p_1, aumenta, entonces la demanda de este producto, q_1, disminuye, si existe la demanda marginal pertinente, tenemos que $\frac{\partial q_1}{\partial p_1} < 0$.

Puede haber muchos tipos de situaciones de como se puedan relacionar estos dos productos. Una de ellas es el caso de **dos productos complementarios**, se refiere a la situación en que el aumento de los precios de un producto lleva a que la demanda del otro disminuya.

Formalizamos lo dicho:

Definición.- Diremos que dos productos son complementarios si

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} < 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial q_2}{\partial p_1} < 0.$$

Un ejemplo de dos productos complementarios es la gasolina y el aceite de carro. Es claro que si el precio de la gasolina sube los carros se usarán menos y por tanto la demanda de aceite disminuirá.

Otro tipo de relación entre dos productos es cuando el aumento de los precios de un producto lleva a que la demanda del otro aumente. En este caso nos referimos a productos competitivos o sustitutivos. Un ejemplo de esta situación es el pollo y la carne. La carne sustituye al pollo como fuente de proteína cuando el precio de éste sube. Similarmente si el precio de la carne sube, las personas tienden a comprar más pollos.

La definición de productos competitivos o sustitutivos la podemos caracterizar a través de las demandas marginales.

Definición.- Diremos que dos productos son competitivos o sustitutivos si

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial q_2}{\partial p_1} > 0.$$

Ejemplo 3.- Las ecuaciones de demanda de dos productos que se interrelacionan están dadas por

$$q_1 = 1000 - 0.01p_1 - 0.005p_2\,; \quad q_2 = 1500 + \frac{2}{p_1+4} + \frac{3}{p_2+2}.$$

Determinar, usando derivadas parciales, si los productos son competitivos, complementarios o ninguno de los dos.

Solución: Calculamos las derivadas parciales $\frac{\partial q_1}{\partial p_2}$ y $\frac{\partial q_2}{\partial p_1}$

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = -0.005 \quad \text{y} \quad \frac{\partial q_2}{\partial p_1} = -\frac{2}{(p_1+4)^2}$$

Es claro que $(p_1+4)^2 > 0$ y de aquí $\frac{\partial q_2}{\partial p_1} < 0$, para cualquier valor de p_1 . Como $\frac{\partial q_1}{\partial p_2} < 0$
Entonces los productos son complementarios.

Ejemplo 4.- Las ecuaciones de demanda de dos productos que se interrelacionan están dadas por

$$q_1 = 100 - 0.02p_1^2 + 0.005p_2^2\,; \quad q_2 = 120 + \frac{p_1}{p_2+2}.$$

Determinar, usando derivadas parciales, si los productos son competitivos, complementarios o ninguno de los dos.

Solución: Las demandas marginales $\frac{\partial q_1}{\partial p_2}$ y $\frac{\partial q_2}{\partial p_1}$ están dadas por

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = 0.01p_2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial q_2}{\partial p_1} = \frac{1}{p_2+2}$$

Tomando en cuenta que $p_2 > 0$, entonces $p_2 + 2 > 0$ y de aquí

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = 0.01p_2 > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial q_2}{\partial p_1} = \frac{1}{p_2+2} > 0$$

En conclusión estos dos productos son competitivos.

Ejemplo 3.- Las ecuaciones de demanda de dos productos que se interrelacionan están dadas por

$$q_1 = 200 - 0.03p_1 - 0.005p_2^2\,; \quad q_2 = \frac{240p_1}{p_2+12}.$$

Determinar, usando derivadas parciales, si los productos son competitivos, complementarios o ninguno de los dos.

Solución:

Calculamos las demandas marginales

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = -0.01p_2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial q_2}{\partial p_1} = \frac{240}{p_2+12}$$

Tomando en cuenta que $p_2 > 0$, entonces $p_2 + 12 > 0$ y de aquí

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = -0.01p_2 < 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial q_2}{\partial p_1} = \frac{240}{p_2+12} > 0$$

En conclusión estos dos productos no son ni competitivos ni complementarios.

Ejercicio de desarrollo.- Las ecuaciones de demanda de dos productos que se interrelacionan están dadas por $q_1 = 400 - p_1 + 7p_2$; $q_2 = 600 + 3p_1^2 - 8p_2^2$. Determinar, usando derivadas parciales, si los productos son competitivos, complementarios o ninguno de los dos.

EJERCICIOS 5.3

1) La función de producción de cierta empresa está dada por $P(L,K)=30K^{1/3}L^{2/3}$, donde L es el tamaño de la fuerza laboral medido en horas-trabajador por semana y K es el monto de capital invertido por semana en UM.

a) Determine las productividades marginales cuando K=1100 y L=4500.

b) Interprete sus resultados.

c) Asuma que una hora de trabajador le cuesta al empresario 1UM. ¿Qué debería hacer el productor para aumentar la producción?

Respuesta 1a) $P_L =$ 12.505; $P_k =$ 25.579 **b)** Interpretación: La producción se incrementa en aproximadamente 12,5 artículos semanales por cada hora-hombre adicional contratada cuando K se mantiene fija en 1100 UM. La producción se incrementa en aproximadamente 25,58 artículos semanales por cada UM adicional de incremento en el monto semanal del capital invertido cuando L se mantiene fijo en 4500 horas hombre. **c)** Si el pago de una hora de trabajador es 1 UM, al fabricante le conviene aumentar el capital para aumentar su productividad .

2) Una función de producción de la forma $P(L,K)=cK^aL^b$, en donde c, a y b son constantes positivas, es llamada una función de producción Cobb-Douglass si a+b=1. Demuestre que

a) $\partial P/\partial K = aP/K$; **b)** $L\dfrac{\partial P}{\partial L}+K\dfrac{\partial P}{\partial K}=P$; **c)** Demuestre que $\dfrac{\partial P}{\partial L}=\dfrac{\partial P}{\partial K}$ cuando $L/K=b/a$.

3) Para cada una de las funciones de costos conjuntos para dos productos dadas abajo, encontrar los costos marginales en los niveles dados. Interpretar los resultados.

3.1) $C(x,y)=0.1x^2+2x+3y+200$; x=20; y=15.

3.2) $C(x,y)=0.01(x+y)^3-0.2(x+y)^2+3(x+y)+300$; x=30; y=35.

3.3) $C(x,y)=3000\sqrt{xy+1}$; x=45; y=15.

Respuestas: 3.1) $\dfrac{\partial C}{\partial x}\Big|_{(20,15)}=6$ **;** $\dfrac{\partial C}{\partial y}\Big|_{(20,15)}=3$ **. 3.2)** $C_x(30,35)=103{,}75$ **;** $C_y(30,35)=103{,}75$

3.3) $C_x(45{,}15)=865{,}38$ **;** $C_y(45{,}15)=2.596{,}2$ **.**

4) Para cada una de las funciones de costos conjuntos de dos productos dadas abajo, encontrar los costos marginales.

4.1) $C(x,y)=y\sqrt{x^2+2}$; **4.2)** $C(x,y)=15000+2500\ln(xy+1)$.

Respuesta: 4.1) $\dfrac{\partial c}{\partial x}=\dfrac{yx}{\sqrt{x^2+2}}$ **;** $\dfrac{\partial c}{\partial y}=\sqrt{x^2+2}$; **4.2)** $\dfrac{\partial C}{\partial x}=\dfrac{y}{xy+1}$ **;** $\dfrac{\partial C}{\partial y}=\dfrac{x}{xy+1}$.

5) Para cada uno de los pares de ecuaciones de demanda de dos artículos A y B dados abajo, determine si son competitivos o complementarios o ninguno de los dos.

5.1) $q_A=125-p_A^2-0.1p_B^2$ **;** $q_B=130-0.1p_A^2-2p_B^2$ **;**

5.2) $q_A=1000+\dfrac{2}{p_A+1}+20p_B$ **;** $q_B=1500-70p_A+\dfrac{2}{p_B+2}$ **;**

5.3) $q_A=50p_Bp_A^{-1/2}$ **;** $q_B=30p_Ap_B^{-1/3}$ **;** **5.4)** $q_A=250p_A^{-1/2}p_B^{-3/2}$ **;** $q_B=300p_A^{-1/2}p_B^{-1/2}$ **;**

5.5) $q_A=\dfrac{2p_B}{p_A^2+1}$ **;** $q_B=\dfrac{2p_A}{p_B^2+2}$ **.**

Respuestas: 5.1) complementarios; **5.2)** Ninguna de las dos **5.3**) competitivo; **5.4)** Complementarios; **5.5)** Competitivo.

6) Un modelo para la producción P de miles de kilos de azúcar refinada está dado por

$$P(L,K)=12\sqrt{KL}$$

donde L es el tamaño de la fuerza laboral medido en miles de horas-trabajador por semana y K es el monto de capital invertido en UM por semana.
a) Determine las productividades marginales cuando K=6000 y L=2500.
b) Interprete sus resultados.
Respuesta a) P_L = 2.3238 ; P_k = 0.96825 **b)** Interpretación: La producción se incrementa en aproximadamente 2323,8 kilos semanales por cada mil horas-hombre adicional de mano de obra empleada cuando K se mantiene fija en 6000. La producción se incrementa en aproximadamente 968 artículos semanales por cada UM adicional de incremento en el monto semanal del capital invertido cuando L se mantiene fijo.en 2500 miles de horas-hombre.

7) La función de producción de una empresa está dada por

$P(L,K)=\frac{36}{100}K^2-\frac{1}{100}K+\frac{42}{100}L^2-\frac{2}{100}L^3$ miles de unidades, donde L es medido en miles de horas-trabajador por semana y K es el monto de capital invertido por semana en miles de UM
a) Determine las productividades marginales cuando L=10 *y* K=40.
b) Interprete sus resultados.
Respuesta a) P_L = 2,4; P_k = 28.8 **b)** Interpretación: La producción se incrementa en aproximadamente 2.400 unidades semanales por cada mil hora-hombre adicional de mano de obra empleada cuando K se mantiene fija en 40.000UM. La producción se incrementa en aproximadamente 28.800 unidades semanales por cada mil UM adicional de incremento en el monto semanal del capital invertido cuando L se mantiene fijo en 10.000 horas hombres.

8) El número de cientos de libros que una editorial puede empastar semanalmente depende de L y K de acuerdo al modelo

$$P(L,K)=K^2+5KL+2L^2,$$

donde L es medido en miles de horas-trabajador por semana y K es el monto de capital invertido por semana.
a) Determine la cantidad de libros que puede empastar semanalmente si se dispone de 10 obreros en una semana y la inversión de capital es de 6UM
b) Use la derivada parcial pertinente para estimar el incremento en la producción cuando se contrate un obrero más, dejando fijo la inversión de capital en 6UM.
c) Use la derivada parcial pertinente para estimar el incremento en la producción cuando se invierte una unidad adicional de capital, el número de trabajadores permanece fijo en 10. Estime la nueva producción. Haga el cálculo exacto.
Respuestas: a) 680 cientos de libros; **b)** 70; **c)** 110, Estimación de la productividad para K=7 y L=10 es 79000 libros. Calculo exacto es 79500.

9) La fórmula del monto compuesto anual está dada por $A=P(1+r)^t$ y se puede interpretar como función de P, el capital de inversión, r la tasa anual de interés anual y t los años de inversión.
a) Calcule $\frac{\partial A}{\partial P}$, $\frac{\partial A}{\partial r}$ y $\frac{\partial A}{\partial t}$; **b)** Interprete $\frac{\partial A}{\partial P}$.

10) Repita el ejercicio 9 con el monto compuesto continuamente dado por la fórmula $A=Pe^{rt}$.

5.4 Derivación de orden superior

Si f es una función en las variables x y y entonces, en general, las derivadas parciales son funciones también de x y y , y por tanto se puede calcular su derivada tanto para x como para y. Estas derivadas se llaman segundas derivadas parciales de f y son cuatro en total. Abajo presentamos las notaciones y su significado.

Segunda derivada	Notación de subíndice	Notación de Leibniz
$(f_x)_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y))\right)$	$f_{xx}(x,y)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
$(f_y)_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}(f(x,y))\right)$	$f_{yx}(x,y)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$
$(f_y)_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}(f(x,y))\right)$	$f_{yy}(x,y)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
$(f_x)_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y))\right)$	$f_{xy}(x,y)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

Ejemplo 1.- Encuentre las derivadas de segundo orden de $f(x,y)=x^2y^4+e^{3x}$.

Solución: Calculamos primero las derivadas de primer orden

$$f_x(x,y)=2xy^4+3e^{3x}$$

$$f_y(x,y)=4x^2y^3$$

Procedemos ahora a calcular las derivadas de segundo orden:

$$f_{xx}(x,y)=\left(2xy^4+3e^{3x}\right)_x=2y^4+9e^{3x}$$

$$f_{xy}(x,y)=\left(2xy^4+3e^{3x}\right)_y=8xy^3$$

$$f_{yy}(x,y)=\left(4x^2y^3\right)_y=12x^2y^2$$

$$f_{yx}(x,y)=\left(4x^2y^3\right)_x=8xy^3$$

Comentario: En el ejemplo anterior resultó $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$. En la mayoría de los casos que presentaremos en este texto resultará esta igualdad. Pero no siempre es así. Existe un Teorema, fuera del alcance de estas notas, que garantiza que si las segundas derivadas parciales son continuas entonces la igualdad se cumple.

Las notaciones para evaluar derivadas parciales de segundo orden son similares al caso de derivadas de primer orden.

Ejemplo 2.- Encuentre $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{(1,-2)}$ donde $f(x,y)=\frac{x^2}{y}-xy\ln(x+1)$.

Solución: Calculamos la derivada de primer orden con respecto a x. La función es reescrita como $f(x,y)=x^2y^{-1}-yx\ln(x+1)$. En el primer término sale y^{-1} de factor constante, en el segundo término también sale y de factor constante y derivamos con respecto a x como si fuera un producto

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^{-1}-\left(y\ln(x+1)+yx\frac{1}{x+1}\right)=2xy^{-1}-y\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-2xy^{-2}-\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(1,-2)} = \left.\left(-2xy^{-2} - \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}\right)\right|_{(1,-2)} = \frac{-2}{(-2)^2} - \ln(2) - \frac{1}{2} = -1 - \ln 2$$

De manera similar se pueden definir las derivadas de orden mayor a 2. Por ejemplo $\left(f_{xx}\right)_y$ es denotada por f_{xxy} o también por $\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}\right)$ y es la derivada de f_{xx} con respecto a y.

Para funciones de tres o más variable también podemos definir las derivadas de orden superior.

Ejemplo 3.- Sea $g(u,v,w) = u^2v^4w^2 + uvw\ln u$, calcule $g_{uwv}(u,v,w)$.
Solución: Calculamos la derivadas sucesivas.

$$g_u(u,v,w) = 2uv^4w^2 + \left(vw\ln u + uvwu^{-1}\right) = 2uv^4w^2 + vw\ln u + vw$$

$$g_{uw}(u,v,w) = 4uv^4w + v\ln u + v$$

$$g_{uwv}(u,v,w) = 16uv^3w + \ln u + 1$$

EJERCICIOS 5.4

1) Calcule todas las derivadas de segundo orden incluyendo las parciales cruzadas.

1.1) $z = x + 3xy - y^2$ **;** **1.2)** $f(t,s) = t^3 - st^2 - 4s^2t$ **;** **1.3)** $g(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ **;**

1.4) $z = \dfrac{2y}{1-x}$ **;** **1.5)** $z = \sqrt{\dfrac{x}{y+2}}$ **;** **1.6)** $f(x,y,z) = \ln x + y^2 - \dfrac{1}{z}$ **;**

1.7) $f(x,y) = xye^{2x}$ **;** **1.8)** $g(u,v) = -e^{3uv}$

2) Calcule y evalúe la derivada parcial indicada.

2.1) $f(x,y) = x^2$ **,** $f_{yx}(2,1)$ **;** **2.2)** $z = y(x+2)^2$ **;** $z_{yy}(2,1)$

2.3) $z = ye^{3y} + \dfrac{x}{y}$**,** $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right|_{(x,y)=(-1,1)}$ **;** **2.4)** $z = \dfrac{x\ln(y^3-1)}{y+1} - 2xy^2$**,** $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(x,y)=(1,2)}$ **;**

2.5) $f(x,y) = xe^{-y}$ **,** $f_{xy}(2,1)$, $f_{yx}(2,1)$ **;**

2.6) $g(x,y,z) = xyz^2 - x^2yz$ **,** $g_{zz}(1,2,0); g_{xy}(1,-1,2); g_{yy}(6,8,1)$ **;**

2.7) $f(x,y,z) = e^{2y+3x}/z$ **,** $f_{xxx}(2,1,-1)$, $f_{zxx}(2,1,3)$ **; 2.8)** $h(s,t,u) = (s+2t+3u)^4$ **,** $h_{tt}(1,-1,1)$ **,** $h_{ut}(1,-1,0)$.

Respuesta:: 1.1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial\ x \partial y} = 3$**; 1.2)** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 6t - 2s$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2} = -8$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial\ t \partial s} = -2t - 8s$

1.3) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \dfrac{2(y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ **;** $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = -\dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$ **; 1.4)** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{-4y}{(x-1)^3}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial\ x \partial y} = \dfrac{2}{(x-1)^2}$ **;**

1.5) $z_{xx} = \dfrac{-1}{4x(y+2)}\sqrt{\dfrac{y+2}{x}}$ **;** $z_{yy} = \dfrac{3x}{4(y+2)^3}\sqrt{\dfrac{y+2}{x}}$ **;** $z_{xy} = \dfrac{-1}{4(y+2)^2}\sqrt{\dfrac{y+2}{x}}$ **; 1.6)** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial^2 z} = -\dfrac{2}{z^3}$

1.7) $f_{xx} = (4y + 4xy)e^{2x}$ **;** $f_{yy} = 0$ **;** $f_{xy} = (1+2x)e^{2x}$ **;1.8)** $g_{xx} = -9y^2e^{3xy}$ **;** $g_{yy} = -9x^2e^{3xy}$ **;**

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = -3e^{3xy}(1+3xy)$ **; 2.1)** 0; **2.2)** 0; **2.3) -**1 **; 2.4)** 0 **; 2.5)** $-e^{-1}$ **,** $-e^{-1}$; **2.6)** 4, 0, 0 **; 2.7)** $-27e^8, -9e^8$ 48 **; 2.8)** 192; 72.

5.5 Regla de la cadena

Para derivar funciones compuestas de una sola variable podíamos usar la regla de la cadena. Si $y = f(x)$ y x a su vez es una función de *t*, entonces podíamos pensar a *y* como función de *t* y para calcular su derivada lo podíamos hacer directamente por la regla de la cadena: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$.

En el caso de varias variables tenemos muchas situaciones. Veamos la primera.

Versión 1 de la regla de la cadena.- Sea $z = f(x, y)$ función con derivadas parciales continuas y $x = x(t)$ y $y = y(t)$ funciones derivables. Entonces $z = f(x(t), y(t))$ es derivable en *t* y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Observación.- Note como se ha usado los signos $\frac{\partial \bullet}{\partial \bullet}$ de derivadas parciales cuando corresponde a una función de varias variable y la notación $\frac{d\bullet}{d\bullet}$ cuando se refiere a la derivada de una función en una sola variable.

Ejemplo 1.- Sean $z = y^2\sqrt{x+1}$ donde $x(t) = t^3 - t$ y $y(t) = t^2 - 2t + 4$. Encontrar $\frac{dz}{dt}$.

Solución: Por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{y^2}{2\sqrt{x+1}} \cdot (3t^2 - 1) + 2y\sqrt{x+1} \cdot (2t - 2)$$

Esta derivada la podemos expresar sólo en términos de *t* al hacer las sustituciones $x = t^3 - t$ y $y = t^2 - 2t + 4$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(t^2 - 2t + 4)^2}{2\sqrt{t^3 - t + 1}} \cdot (3t^2 - 1) + 2(t^2 - 2t + 4)\sqrt{t^3 - t + 1} \cdot (2t - 2).$$

Una segunda versión surge cuando tenemos $z = f(x, y)$ pero ahora las variables *x* y *y* dependen de otras dos variables *u* y *v*. Entonces podemos pensar que indirectamente *z* es función de *u* y *v*. Así que tiene sentido calcular las derivadas de *z* con respecto a *u* y a *v*. Formalmente tenemos:

Versión 2 de la regla de la cadena.- Sea $z = f(x, y)$, $x = x(u, v)$ y $y = y(u, v)$ funciones con derivadas parciales continuas en sus variables. Considere $z(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ entonces

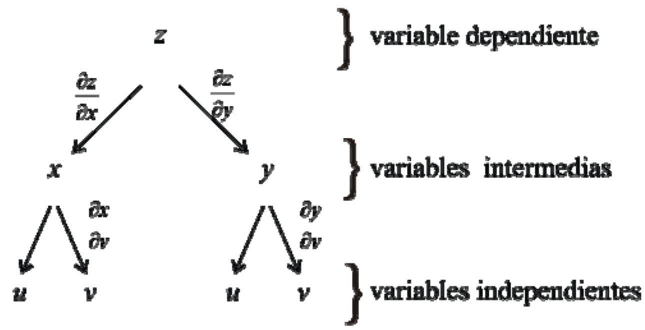
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

En toda regla de la cadena tenemos tres tipos de variables: Las variables independientes, en este caso son *u* y *v*, las variables intermedias, en este caso *x* y *y*, y por último la variable dependiente, una sola y en este caso *z*.

Normalmente las fórmulas de las distintas versiones de la regla de la cadena no se aprenden sino se reconstruyen a partir de ciertas observaciones. Una importante es que toda regla de la cadena tiene tantos términos como variables intermedias. Otra observación importante es que si se quiere calcular por ejemplo $\frac{\partial z}{\partial v}$, uno de los términos de la fórmula de la regla de la cadena está asociado a la variable intermedia *x* y es fácilmente reconstruible, éste es $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}$. Fíjese que si canceláramos, no se puede, $\frac{\partial z}{\cancel{\partial x}}\cdot\frac{\cancel{\partial x}}{\partial v}$ obtenemos la expresión de la derivada deseada: $\frac{\partial z}{\partial v}$.

Es útil recordar la regla de la cadena para $\frac{\partial z}{\partial v}$ a través del diagrama del árbol. Para construir el diagrama se coloca arriba la variable dependiente, en este caso z, luego las intermedias y en la última fila las variables independientes. Luego se establece todos los caminos que van de *z* a *v*. Las derivadas parciales involucradas en cada trayectoria se multiplican y por último se suman estos resultados.

DIAGRAMA DEL ÁRBOL



$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

Ejemplo 2.- Sean $z=e^{x-3y}$, $x(u,v)=vu^3-v$ y $y(u,v)=u-4v$. Encontrar $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$.

Solución: Por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=e^{x-3y}\cdot 3vu^2+(-3e^{x-3y})\cdot 1$$ Sacando factor común $3e^{x-3y}$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=3e^{x-3y}\cdot(vu^2-1)$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=e^{x-3y}\cdot(u^3-1)+(-3e^{x-3y})\cdot(-4)$$ Sacando de factor común e^{x-3y} y agrupando constantes

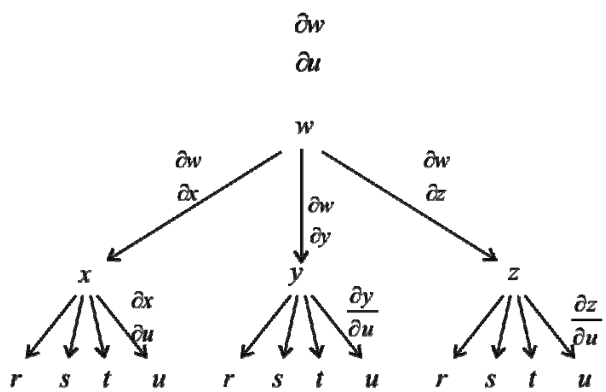
$$\frac{\partial z}{\partial v}=e^{x-3y}\cdot(u^3+11).$$

Ejercicio de desarrollo.- Sean $z=e^{x-2y}+x$, $x(u,v)=u^2-uv$ y $y(u,v)=uv-v$. Encontrar $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$.

El lector puede fácilmente generalizar la regla de la cadena a distintas situaciones. Por ejemplo si tenemos $w=f(x,y,z)$, función de tres variables x, y y z los cuales son a su vez funciones de *r,s,t* y *u* entonces podemos considerar *w* como función de *r,s,t* y *u*. Así tiene sentido plantearse la derivada parcial de *w* con respecto a cualquiera de estas cuatro variables. Para obtener, por ejemplo, la parcial de *z* con respecto a *u* debemos tener en consideración las tres variables intermedias que son x, y y z entonces esta derivada parcial está dada por

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}$$

También podemos obtener está derivada parcial planteando el diagrama del árbol y sumando todos los caminos que van de *w* a *u*, como muestra el dibujo.



Ejercicio de desarrollo.-

a) Sea $w=f(x,y,z)$ una función de tres variables y estas a su vez funciones de u y v. Esto es $x=x(u,v)$ y $y=y(u,v)$. Establezca la regla de la cadena para este caso.

b) Sean $w=e^{x-yz}+x$, $x(u,v)=u^2-uv$, $y(u,v)=uv-v$ y $z(u,v)=2u^2-v$. Encontrar $\frac{\partial w}{\partial u}$ y $\frac{\partial w}{\partial v}$.

APLICACIÓN

Ejemplo 3.- Suponga que la función de costos conjuntos de una empresa que elabora dos tipos de paraguas está dada por $C(q_1,q_2)=q_1^2+2q_2^2+4q_1q_2+700$. Se tiene planeado reducir la producción de los dos tipos de paraguas en los próximos meses de acuerdo a las fórmulas $q_1=150-3t$ y $q_2=100-2t$, donde *t* está medido en meses. Exprese la razón de cambio de los costos con respecto al tiempo.

Solución: La razón de cambio de los costos con respecto al tiempo es $\frac{dC}{dt}$**.** Para determinar rápidamente esta derivada usamos la regla de la cadena

$$\frac{dC}{dt}=\frac{\partial C}{\partial q_1}\cdot\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial C}{\partial q_2}\cdot\frac{dq_2}{dt}$$

$$\frac{dC}{dt} = (2q_1 + 4q_2)\cdot(-3) + (4q_2 + 4q_1)\cdot(-2)$$

$$\frac{dC}{dt} = -14q_1 - 20q_2$$ Esta derivada puede ser expresada en términos de *t*.

$$\frac{dC}{dt} = -14(150-3t) - 20(100-2t)$$ Simplificamos

$$\frac{dC}{dt} = 80t - 4100.$$

EJERCICIOS 5.5

1) Usando la regla de la cadena, encuentre las derivadas indicadas de las funciones dadas.

1.1) $f(x,y) = x + (y-2)^3$**;** $x = r + 5t$**;** $y = 3r - 4t$**;** $\partial f/\partial t$

1.2) $z = x^2 + xy - y^3$**;** $x = r^2 - 5s$**;** $y = s^3$**;** $\partial z/\partial r$ $\partial z/\partial s$

1.3) $f(x,y) = \sqrt{x + y^2}$ **;** $x = t^2 + t$**;** $y = t - 200$**;** df/dt

1.4) $w = e^{xyz}$**;** $x = r + 5t$**;** $y = 2t^3$**;** $z = 1 - 3r^2$ $\partial w/\partial t$**;** $\partial w/\partial r$

1.5) $y = e^{2x^2}$ **;** $x = r - 3t^2$; $\partial y/\partial r$; $\partial y/\partial t$

1.6) $w = xy - yz - x^2yz$**;** $x = t - 1$**;** $y = 2t^3$**;** $z = t^2 + 1$ $\dfrac{dw}{dt}$

1.7) $z = e^{x+y}$**;** $x = r + t$**;** $y = u - 2t$**;** $z = u - 2r^2$ $\partial w/\partial u$**;** $\partial w/\partial r$**;** $\partial w/\partial t$**.**

2) Sean $z = \sqrt{x^2 + 2xy}$ y $x = r^2 - 5s$ $y = 2t^3$. Use la regla de la cadena para encontrar $\partial z/\partial r$ cuando r=3, s=5 y t=2.

3) Sean $y = x^2(2x-3)$ y $x = t^2 - 2trs$. Encuentre $\partial y/\partial t$ cuando r=0, s=1 y t=-2.

4) Sea $z = f(u,v)$ y u y v funciones de t. **a)** Establezca la regla de la cadena para este caso. **b)** Defina $w = f(t,v)$ donde v también es función de t, aplicar a) para calcular $\dfrac{dw}{dt}$. Simplifique.

5) Suponga $z = f(t,u,v,w,x)$ y además t,u,v,w y x son funciones de r y s. Establezca las reglas de las cadenas aplicables a este caso.

6) Sea $z = f(u-v, v-w, w-u)$. Demostrar que $\dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial w} = 0$.

Respuestas: 1.1) $\partial f/\partial t = 5 - 12(y-2)^2$; **1.2)** $\dfrac{\partial z}{\partial r} = (2x+y)2r; \dfrac{\partial z}{\partial s} = -5(2x+y) + (y - 3y^2)3s^2$

1.3) $df/dt = \dfrac{2t^2 + 4t + 1}{2\sqrt{x+y^2}}$ **; 1.4)** $\dfrac{\partial w}{\partial t} = 5yze^{xyz} + xze^{xyz}6t^2$ **;** $\dfrac{\partial w}{\partial r} = yze^{xyz}6xye^{xyz}r$ **;**

1.5) $\partial y/\partial r = 4xe^{2x^2}$ **;** $\partial y/\partial t = -24txe^{2x^2}$ **; 1.6)** $\dfrac{dw}{dt} = (y - 2xyz) + (x - z - x^2z)6t^2 - (y + x^2y)2t$ **;**

1.7) $\dfrac{\partial w}{\partial u} = e^{x+y}$ **;** $\dfrac{\partial w}{\partial r} = e^{x+y}$ **;** $\dfrac{\partial w}{\partial y} = e^{x+y}$**; 2)** 0**; 3)** -288.

APLICACIONES

1) La función de costos conjuntos de dos productos viene dada por

$$c(q_A,q_B)=0.02(q_A+q_B)^3-0.1(q_A+q_B)^2+3(q_A+q_B)+300$$

y las funciones de demandas son $q_A=125-p_A^2-0.1p_B^2$; $q_B=130-0.1p_A^2-2p_B^2$.

Use la regla de la cadena para calcular $\partial c/\partial p_A$. Evaluar dicha derivada cuando $p_A=2$ y $p_B=3$.

Respuesta: $\left(0.06(q_A+q_B)^2-0.2(q_A+q_B)+3\right)(-2p_A-4p_B)$; 54041,36.

2) La función de producción de una fabrica está dada por $P(K,L)=120K^{1/3}L^{2/3}$, donde L es el tamaño de la fuerza laboral medido en horas-trabajador por semana y K es el monto de capital invertido por semana en UM. Cuando la empresa tiene *L*=27 y *K*=8, mantiene un ritmo de crecimiento en el tamaño de la fuerza laboral de 1,5 horas trabajador/semana y de 0.5UM/semana en su tasa de inversión. Calcule el ritmo de crecimiento en la producción para estos niveles de producción.

Respuestas: $\dfrac{dP}{dt}=125$unidades/semana

3) La ecuación de demanda de un producto depende del precio, p_1, de este producto y del precio, p_2, de otro producto a través de la relación

$$q_1=30\frac{\sqrt{p_2}}{\sqrt[3]{p_1^2}} \text{ miles de artículos}$$

Se piensa aumentar los precios de estos dos productos en los próximos meses. El precio de cada artículo dentro de *t* meses estará dado por: $p_1=120+0.4t+0.02t^2$ y $p_2=90+0.1t+0.03t^2$

Determine el ritmo de crecimiento de la demanda dentro de un año.

Respuesta: -0.0035 miles de unidades/año;

4) La función de costos conjuntos de dos productos viene dada por:

$$C(q_1,q_2)=120+2q_1^3+2q_1q_2-25q_1-10q_2+0.3q_2^2$$

y la funciones de demanda de estos productos son $q_1=12-p_1+p_2$ y $q_2=15+p_1-2p_2$

Usando la regla de la cadena, calcule $\dfrac{\partial C}{\partial p_1}$ y $\dfrac{\partial C}{\partial p_2}$ para $p_1=7$ y $p_2=5$. **Respuestas: -**581.8; 446,6.

5) Un ceramista está haciendo un florero en forma de cilindro circular recto. Cuando tiene una forma con radio 6cm y altura 12cm cambia de dimensiones: la altura a una razón de 0.8cm/min y el radio disminuye a razón de 0.4cm/min. **a)** ¿A qué razón cambiará aproximadamente el volumen del cilindro? **b)** ¿A qué razón cambiará la superficie con tapa? **Respuesta: a)** 0; **b)** $1{,}8\pi\cdot cm^2/\min$.

5.6 Aproximaciones lineales

Sea $z = f(x,y)$. En el análisis marginal se estimaba el cambio en una cantidad cuando una de sus variables cambiaba una unidad por medio de la derivada parcial. Si el cambio es en sus dos variables podemos estimar el cambio de la función a través de la fórmula:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y$$

Esta fórmula es una generalización de la diferencial en una variable:

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

Esto es

$$f(x) - f(x_0) \approx dy$$

En el caso de dos variables definiremos la diferencial de *z*, denotada por *dz* como

$$\boxed{dz = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y}$$

Similar al caso de una sola variable tenemos que

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx dz$$

Esto es

$$\boxed{\Delta z \approx dz}$$

El cambio de la función es aproximado por la diferencial de la función.

Ejemplo 1.- El número de cientos de libros que una editorial puede empastar semanalmente depende de L y K de acuerdo al modelo

$$P(L,K) = 2\cdot K^2 - \frac{KL}{2} + \frac{L^2}{2}$$

donde L es medido en horas-trabajador por semana y K es el monto de capital invertido por semana.

a) Determine la cantidad de libros que puede empastar semanalmente si se dispone de 40 horas en una semana y la inversión de capital es de 6UM.

b) Use la diferencial para estimar el incremento en la producción cuando se contrate un obrero más y la inversión se reduce de 6 a 5.5 UM.

Solución:

a) $P(40,6) = 2\cdot 6^2 - \frac{6\cdot 40}{2} + \frac{40^2}{2} = 752$

b) Para estimar el cambio usamos

$$P(L,K) - P(L_0,K_0) \approx P_L(L_0,K_0)\Delta L + P_K(L_0,K_0)\Delta K$$

donde $(L_0,K_0) = (40,6)$, $(L,K) = (41,5.5)$; $\Delta L = 1$ y $\Delta K = -0.5$

Así tenemos

$$\Delta P \approx \left(-\frac{K_0}{2} + L_0\right)\Delta L + \left(4K_0 - \frac{L_0}{2}\right)\Delta K$$

$$\Delta P \approx \left(-\frac{6}{2}+40\right)1+\left(4\cdot 6-\frac{40}{2}\right)(-0.5)$$
$\Delta P \approx 37-2=35$ unidades.

Podemos estimar valores de la función en un punto dado cerca de otro para el cual podemos determinar rápidamente el valor de la función y su derivada. Si sumamos a ambos lados de una aproximación una cantidad constante, el orden de la aproximación se mantiene. Así en

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$$

sumamos en ambos miembros de la aproximación $f(x_0,y_0)$ obteniendo

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$$

Interpretación: Observe que se está diciendo que si (x,y) está cerca de (x_0,y_0) entonces el valor de $f(x,y)$ es $f(x_0,y_0)$ más un error que estimamos por $f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+\underbrace{dz}_{error}$$

Ejemplo 2.- Estime por medio de diferenciales el valor de $\frac{\sqrt{1.03}}{1.99}$.

Solución: Debemos proponer una función tal que al evaluarla en un punto conveniente (x,y) de como resultado este valor numérico y que al evaluarla en puntos cercanos (x_0,y_0) a este punto conveniente, sepamos calcular rápidamente el valor de la función y de las derivadas.
Se propone entonces

$f(x,y)=\frac{\sqrt{x}}{y}$ y como valores $(x_0,y_0)=(1,2)$ y $(x,y)=(1.03,1.99)$

Para estimar en valor de la función en $(x,y)=(1.03,1.99)$ usamos:

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$$

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+\frac{1}{2y_0\sqrt{x_0}}(0.03)+\left(-\frac{\sqrt{x_0}}{y_0^2}\right)(-0.01)$$

$$f(x,y)\approx\frac{\sqrt{1}}{2}+\frac{1}{4\sqrt{1}}(0.03)+\left(-\frac{\sqrt{1}}{2^2}\right)(-0.01)$$

$$\frac{\sqrt{1.03}}{1.99}\approx\frac{1}{2}+\frac{0.03}{4}+\frac{0.01}{4}=0.5+0.01=0.51\,.$$

Observación: Cuando se usa una calculadora para estimar $\frac{\sqrt{1.03}}{1.99}$ se obtiene 0,50999**…**

Ejercicio de desarrollo.- a) Estime por medio de diferenciales el valor de $2.51\ln(1.03)$. **b)** Compare el resultado con el obtenido en la calculadora.

Ejemplo 3.- La función de producción de una empresa está dada por $P(L,K)=240L^{2/3}K^{1/3}$, donde L es medido en miles de horas-trabajador por semana y K es el monto de capital invertido por semana.
a) Determine la productividad cuando L=27 *y* K=216.
b) Estime la producción cuando L aumenta a 29 y K se reduce a 200.
Solución:
a) $P(27,216)=240(27)^{2/3}(216)^{1/3}=240\cdot 9\cdot 6=12960$
b) Estimamos la producción por medio de la fórmula

$$P(L,K)\approx P(L_0,K_0)+P_L(L_0,K_0)\Delta L+P_K(L_0,K_0)\Delta K,\ \text{donde } (L_0,K_0)=(27,216)$$

$$P(29,200)\approx 12960+240\frac{(27)^{2/3}}{3(216)^{2/3}}(-16)+240\frac{2(216)^{1/3}}{3(27)^{1/3}}(2)$$

$$P(29,200)\approx 12.960+240\frac{9}{3\cdot 36}(-16)+240\frac{12}{9}(2)$$

$$P(29,200)\approx 12.960-320+640=13.280 \text{ unidades.}$$

Comentario: Usando la calculadora tenemos el valor exacto $P(29,200)=13.248{,}9$ unidades.

EJERCICIOS 5.6

1) Use la función $f(x,y)=y^2\sqrt{x}$ para estimar el valor de $(2.95)^2\sqrt{9.03}$.

2) En cada uno de los siguientes ejercicios, use diferenciales para estimar su valor numérico. No use calculadora

2.1) $\sqrt{1.03}e^{-0.02}$; **2.2)** $\ln(0.99)+0.99\sqrt{3.97}$; **2.3)** $\sqrt{(4.07)^2+(2.97)^2}$.
Respuestas:
2.1) 0.995; **2.2)** 1.968; **2.3)** 5.038.

PROBLEMAS

1) La demanda de un tipo de automóvil depende del precio de venta del automóvil y del precio de la gasolina de acuerdo al siguiente modelo

$$D(p_a,p_g)=600-40\sqrt{p_a}-120000\cdot\left(\sqrt[3]{0.1p_g+0.005}\right)^2$$

Si actualmente el precio de este carro es de 3600UM y el precio de la gasolina es de 0.03 UM el litro. Estime el cambio en la demanda cuando el precio de la gasolina aumenta en 0.005 UM y el precio del carro aumenta en 5. **Respuesta:** -40/3 unidades.

2) La superficie de un envase cilíndrico está dado por $S=2\cdot\pi\cdot r^2+2\cdot\pi\cdot r\cdot h$.Estime el cambio en la superficie cuando
a) El radio aumenta de 4 a 4.2cm. y la altura aumenta de 9 a 9.4 cm.
b) El radio disminuye de 4 a 3,7 cm. y la altura aumenta de 9 a 9.1cm.
Respuesta: $114\cdot\pi$; 94.6π cm^2.

3) La función de costos conjuntos de dos artículos viene dada por $C(q_1,q_2)=2q_1^2+q_2^2-2q_1q_2+200$
a) Calcule el costo de producir 120 unidades del artículo tipo 1 y 200 unidades del tipo 2.
b) Estime, a través de derivadas parciales, el costo de producir 122 artículos de tipo 1 y 205 de tipo 2.
Respuesta: 21.000; 21.960 UM.

5.7 Derivación implícita

Suponga que z es función de las variables x y y, dada implícitamente a través de una ecuación, por ejemplo $F(x,y,z)=0$, y se quiere determinar la derivada de z con respectos a alguna de las dos variables. Muchas veces resulta imposible despejar z en función de las otras dos variables. El método de derivación implícita no requiere el despeje de z para calcular las derivadas parciales de z con respecto a x ó y.

Para encontrar la derivada, por ejemplo $\partial z/\partial y$, podemos derivar con respecto a y ambos lados de la ecuación que define a z como función de x y y. Luego se despeja $\partial z/\partial y$. Recuerde que $\partial x/\partial y=0$, pues se considera que x no depende de y.

Ejemplo 1.- Encuentre $\partial z/\partial y$ por el método de diferenciación parcial implícita donde
$e^z-3yz-y^2\sqrt{x^2+1}-x=0$

Solución:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^z-3yz-y^2\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{\partial}{\partial y}(x)=0$$ x se comporta como una constante

$$e^z\frac{\partial z}{\partial y}-3\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)-2y\sqrt{x^2+1}=0$$ Distribuimos el 3

$$e^z\frac{\partial z}{\partial y}-3z-3y\frac{\partial z}{\partial y}-2y\sqrt{x^2+1}=0$$ Agrupamos los términos con $\partial z/\partial y$ en el lado izquierdo

$$e^z\frac{\partial z}{\partial y}-3y\frac{\partial z}{\partial y}=3z+2y\sqrt{x^2+1}$$ Sacamos factor común $\partial z/\partial y$

$$\left(e^z-3y\right)\frac{\partial z}{\partial y}=3z+2y\sqrt{x^2+1}$$ Finalmente despejamos

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3z+2y\sqrt{x^2+1}}{e^z-3y}.$$

Podemos abreviar el proceso de derivación desarrollando una fórmula para las derivadas parciales que hace uso de la regla de la cadena. Consideremos la ecuación $F(x,y,z)=0$ que define a z como función de las otras variables. Si quiere conseguir $\partial z/\partial y$, se deriva ambos miembros de la ecuación $F(x,y,z)=0$ con respecto a y, al derivar el lado izquierdo se usa la regla de la cadena:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

Se despeja $\partial z/\partial y$ y se toma en cuenta que $\partial x/\partial y=0$ y $\partial y/\partial y=1$ quedando

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}}$$

Se puede demostrar similarmente que $$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}}$$

En el ejemplo anterior se tenía que $F(x,y,z)=e^z-3yz-y^2\sqrt{x^2+1}-x$. Observe que $F_y=-3z-2y\sqrt{x^2+1}$ y $F_z=e^z-3y$, efectivamente $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$.

Ejemplo 2.- La ecuación $zy + e^{zx} = 2x^2 - y$ define a z como función de x y y. Encuentre $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y,z)=(1,2,0)}$ por diferenciación parcial implícita.

Solución (Método 1):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(zy + e^{zx}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2 - y\right)$$ Recuerde que y se comporta como una constante

$$\frac{\partial z}{\partial x} y + \frac{\partial (zx)}{\partial x} e^{zx} = 4x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} y + (x\frac{\partial z}{\partial x} + z)e^{zx} = 4x$$ Realizamos la multiplicación

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial x} e^{zx} = 4x - ze^{zx}$$ Agrupamos los términos con $\partial z / \partial x$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4x - ze^{zx}}{y + xe^{zx}}$$ Al sacar factor común la derivada se despeja rápidamente

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y,z)=(1,2,0)} = \frac{4-0}{2+1} = \frac{4}{3}.$$ Finalmente se evalúo.

Solución (Método 2): Primero se define F, para ello escribimos la ecuación en la forma $zy + e^{zx} - 2x^2 + y = 0$. Ahora $F(x,y,z) = zy + e^{zx} - 2x^2 + y$. Para encontrar $\frac{\partial z}{\partial x}$ usamos $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{ze^{zx} - 4x}{y + xe^{zx}}$. Luego al evaluar obtenemos $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y,z)=(1,2,0)} = -\frac{-4}{2+1} = \frac{4}{3}$.

Ejercicio de desarrollo.- Encuentre $\partial z / \partial y$ por cualquiera de los métodos de diferenciación parcial implícita donde $xyz + z^3 = xy^2 + yx^2$.

EJERCICIOS 5.7

1) Las ecuaciones dadas definen a z como función de x y y. Encuentre las derivadas parciales indicadas por diferenciación parcial implícita.

1.1) $z^2 - 3xy = y^2 - 3,\ \partial z / \partial x$; **1.2)** $z^3 + 2e^{zxy} + 2xy = 3,\ \partial z / \partial y$;

1.3) $z^2 + x^2 - zy + zx = 3,\ \partial z / \partial x$; **1.4)** $z^2 - 3xy = x^2 + \sqrt{y^2 - 1},\ \partial z / \partial x$;

1.5) $z^3 + z^2 - 3zxy + x = 2,\ \partial z / \partial y$; **1.6)** $\ln(xz) - xy = 0,\ \partial z / \partial x$;

1.7) $\ln z + z - xy = 0,\ \partial z / \partial x$; **1.8)** $e^{zx} - e^{zy} + y = 0,\ \partial z / \partial y$.

2) Evalúe las derivadas parciales indicadas para los valores dados de las variables.

2.1) $z^2 - 3xy = y^2 - 1;\ \partial z / \partial x; (x,y,z) = (1,2,3)$; **2.2)** $e^{xz} + z - 3xy - y^2 = 1;\ \partial z / \partial y;\ (x,y,x) = (0,2,5)$

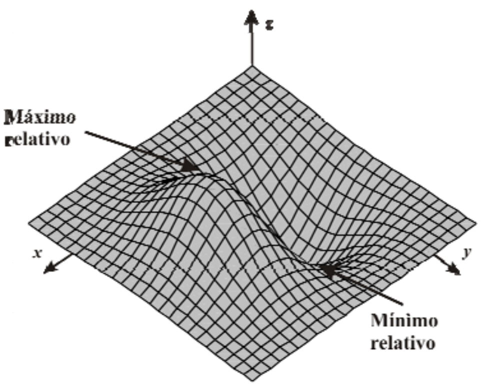
2.3) $\sqrt{x^2 - 2yz} - y^2 = 0,\ \partial z / \partial x,\ x = 2,\ y = 2,\ z = 0$.

Respuestas: **1.1)** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3y}{2z}$; **1.2)** $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2x - 2xze^{xyz}}{3z^2 + 2xye^{xyz}}$; **1.3)** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x - z}{2z - y + x}$; **1.4)** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3y + 2x}{2z}$; **1.5)** $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3zx}{3z^2 + 2z - 3xy}$; **1.6)** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z(xy-1)}{x}$; **1.7)** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{zy}{1+z}$; **1.8)** $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{ze^{zy} - 1}{xe^{zx} - ye^{zy}}$; **2.1)** 1; **2.2)** 4; **2.3)** 1.

5.8 Máximos y mínimos en varias variables

El desarrollo de la teoría de máximos y mínimos en funciones de varias variables es una extensión del caso de funciones de una sola variable.

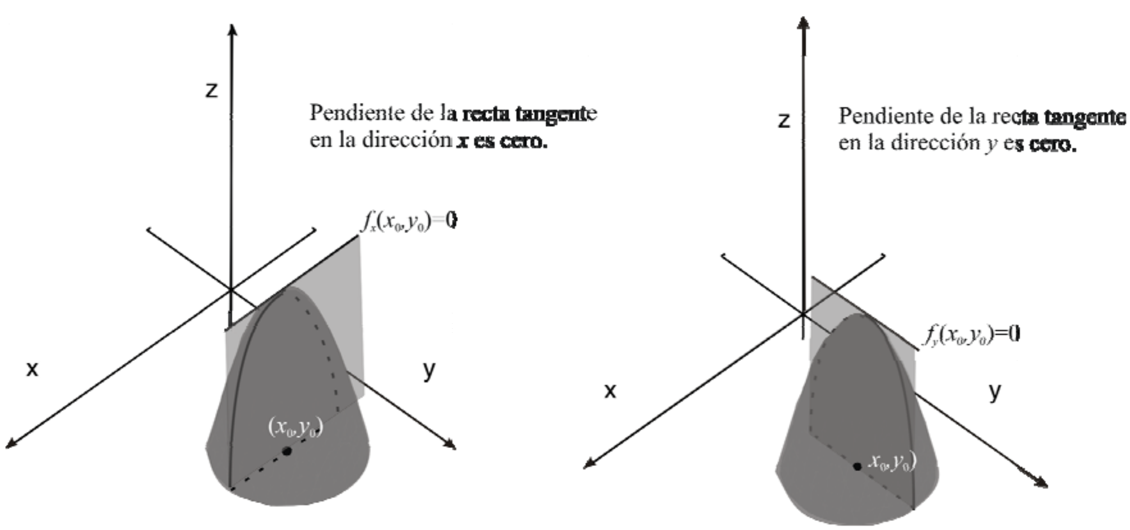
Definición de extremo relativo.- Una función f en dos variables tiene un máximo relativo (local) en (x_0, y_0) si $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ para todo (x, y) en una región rectangular que contenga a (x_0, y_0). Similarmente la función tiene un mínimo relativo en (x_0, y_0) si $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para todo (x, y) en una región rectangular que contenga a (x_0, y_0).



Los máximos relativos corresponden a los picos o cimas de las montañas y los mínimos relativos a los hoyos o pozos. En los picos, alguna de las dos derivadas parciales no existe y en los hoyos o cimas de la montaña las dos derivadas parciales son cero.

En todo este desarrollo supondremos que f es una función con derivadas parciales continuas.

En la siguiente figura se tiene la gráfica de una función que tiene un máximo absoluto en (x_0, y_0). Observe como las pendientes de las rectas tangentes en la dirección de ambos ejes son ceros, estas son las derivadas parciales con respecto a x y a y.



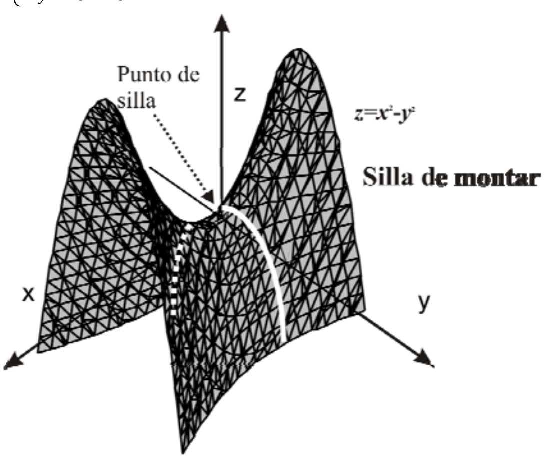
Teorema.- Si *f* tiene un máximo o un mínimo relativo en (x_0, y_0) y las derivadas parciales existen en ese punto y en puntos cercanos a éste entonces $\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$.

De manera análoga a la teoría en una sola variable, si un punto (x_0, y_0) es tal que $\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$ no implica que allí se alcance un extremo relativo.

Pero estos puntos serán los únicos candidatos donde ocurran los máximos y mínimos relativos de la función.

Definición de puntos críticos.- Un punto (x_0, y_0) tal que $\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$ se lo denomina un punto crítico de *f*.

Si los extremos relativos de una función ocurren en un punto (x_0, y_0) tal que las derivadas parciales existen en puntos cercanos a este punto entonces éste es un punto crítico donde $\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$



De manera similar al caso de funciones de una sola variable, existen funciones, como la silla de montar, donde las derivadas parciales son ceros en el punto crítico y sin embargo en ese punto no se alcanza ni un máximo ni un mínimo relativo. Observe que en la dirección *y* la función tiene un máximo y en la dirección *x* tiene un mínimo.

Llamaremos un punto de silla a un punto (x_0, y_0) donde las derivadas parciales se hacen cero y sin embargo no se alcanza ni un máximo ni un mínimo relativo.

En los siguientes ejemplos nos dedicaremos sólo a conseguir los puntos críticos, sin clasificarlos en máximos o mínimos.

Ejemplo 1.- Encontrar los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2y + 10$

Solución:

1.- Conseguimos primero las derivadas parciales de primer orden:

$$f_x(x, y) = 2x + y$$

$$f_y(x, y) = 2y + x - 2$$

2.- Planteamos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$

En este caso queda

$$\begin{cases} 2x+y=0 & (1) \\ 2y+x-2=0 & (2) \end{cases}$$

Este es **un sistema de ecuaciones lineales.** Podemos en este caso resolverlo con cualquiera de los métodos existente. Usamos el método de reducción. Multiplicamos por -2 la primera ecuación

$$\begin{cases} -4x-2y=0 \\ 2y+x-2=0 \end{cases}$$

y sumamos ambas ecuaciones para obtener:

$$-3x-2=0$$

$$x=-\frac{2}{3}$$

Para encontrar *y* cuando $x=-\frac{2}{3}$ sustituimos en (1) o (2), la que consideremos más fácil de resolver, escogemos (1)

$$2\left(-\frac{2}{3}\right)+y=0$$

$$-\frac{4}{3}+y=0$$

$$y=\frac{4}{3}$$

En conclusión el único punto crítico de la función es el punto $(-\frac{2}{3},\frac{4}{3})$.

Ejemplo 2.- Encontrar los puntos críticos de la función $f(x,y)=x^3+y^4-3xy$**.**

Solución:

1.- Conseguimos las derivadas parciales de primer orden:

$$f_x(x,y)=3x^2-3y$$

$$f_y(x,y)=4y^3-3x$$

2.- Planteamos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$

En este caso queda:

$$\begin{cases} 3x^2-3y=0 & (1) \\ 4y^3-3x=0 & (2) \end{cases}$$

Este es **un sistema de ecuaciones no lineal.** Este sistema cae en la situación en que podemos despejar una de las variables en una ecuación y sustituirla en la otra ecuación. En este caso podemos despejar tanto *x* como *y*. Despejamos *y* en la primera ecuación

$$\begin{cases} y=x^2 \\ 4y^3-3x=0 \end{cases}$$

y la sustituiremos en la ecuación (2)

$$4(x^2)^3-3x=0$$

$$4x^6-3x=0$$

Esta última ecuación la resolveremos por la técnica de factorización. Primero factorizamos el lado izquierdo sacando x de factor común

$$x\left(4x^5-3\right)=0$$

Planteamos tantas ecuaciones como factores, igualando cada factor a cero:

$x=0$ ó $4x^5-3=0$ (en la última ecuación despejamos x^5)

$x=0$ ó $x^5=\frac{3}{4}$ (elevamos ambos miembros a $\frac{1}{5}$ o de manera similar tomamos raíz quinta)

$x=0$ ó $x=\sqrt[5]{\frac{3}{4}}$.

- Para encontrar y cuando $x=0$ sustituimos en (1) o (2), la que consideremos más fácil de resolver, escogemos (1)
  $y=(0)^2$
  Así (0,0) es un punto crítico de la función.
- Para encontrar y cuando $x=\sqrt[5]{\frac{3}{4}}$ sustituimos en (1) y despejamos y.

$$y=\left(\sqrt[5]{\frac{3}{4}}\right)^2$$

En conclusión $\left(\sqrt[5]{\frac{3}{4}},\left(\sqrt[5]{\frac{3}{4}}\right)^2\right)$ es el otro punto crítico de la función.

Ejemplo 3.- Encontrar los puntos críticos de la función $f(x,y)=x^3+y^4-12x-2y^2$.

Solución:

1.- Conseguimos primero las derivadas parciales de primer orden:

$$f_x(x,y)=3x^2-12$$

$$f_y(x,y)=4y^3-4y$$

2.- Planteamos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$

En este caso queda:

$$\begin{cases} 3x^2-12=0 & (1) \\ 4y^3-4y=0 & (2) \end{cases}$$

Este también es un sistema de ecuaciones **no lineal,** pero en este caso cada ecuación depende de una sola variable, **no hay interrelación** entre las variables del sistema. Las soluciones de la ecuación (1) son $x=\pm 2$. La ecuación (2) la resolvemos por factorización,

$$4y(y^2-1)=0$$

De aquí

$y=0$ ó $y^2-1=0$

Así las soluciones de $4y^3-4y=0$ son $y=0,\pm 1$

Los puntos críticos en este caso están dados por todas las combinaciones de las soluciones de x y y, ellas son: $(2,0),(2,1),(2,-1)$, $(-2,0),(-2,1)$ y $(-2,-1)$.

Efectivamente cada uno de estos puntos satisface las dos ecuaciones del sistema de ecuaciones.

Para funciones de tres o más variables (asuma que las derivadas parciales existen y son continuas), los conceptos anteriores pueden extenderse rápidamente. Por ejemplo si tenemos $w = f(x,y,z)$ es claro cuales deben ser las definiciones de máximos y mínimos relativos y los puntos críticos definidos como las soluciones del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \\ f_z(x,y)=0 \end{cases}$$

son los únicos candidatos a máximos y mínimos relativos.

Ejemplo 4.- Encontrar los puntos críticos de la función $f(x,y,z)=x^2+xy-3xz-2z-z^2$.

Solución:

1.- Conseguimos primero las derivadas parciales de primer orden:

$$f_x(x,y)=2x+y-3z$$

$$f_y(x,y)=x$$

$$f_z(x,y)=-3x-2-2z$$

2.- Planteamos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \\ f_z(x,y)=0 \end{cases}$

En este caso queda:

$$\begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ x=0 \\ -3x-2-2z=0 \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones lineales tiene como solución $x=0, y=-3$ y $z=-1$.

Ejemplo 5.- Encontrar los puntos críticos de la función $f(x,y,z)=x^2+y^2-xyz+z$.

Solución:

1.- Conseguimos primero las derivadas parciales de primer orden:

$$f_x(x,y)=2x-yz$$

$$f_y(x,y)=2y-xz$$

$$f_z(x,y)=-xy+1$$

2.- Planteamos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \\ f_z(x,y)=0 \end{cases}$

En este caso queda $\begin{cases} 2x-yz=0 \\ 2y-xz=0 \\ -xy+1=0 \end{cases}$

De nuevo estamos ante **un sistema de ecuaciones no lineal,** donde las variables **si están interrelacionadas.** En este sistema podemos despejar una de las variables en una ecuación y sustituirla en las otras ecuaciones, formando con estas últimas un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que se intenta de resolver con las ideas vistas. En este caso podemos despejar cualquiera de las variables. Despejamos *y* en la tercera ecuación:

$y=\frac{1}{x}$ sustituimos esta variable en las dos primeras ecuaciones y formamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas**.**

$$\begin{cases} 2x-\left(\frac{1}{x}\right)z=0 \\ 2\left(\frac{1}{x}\right)-xz=0 \end{cases}$$

Tenemos un sistema de ecuaciones con las variables interrelacionadas, despejamos z en la segunda ecuación

$$z=\frac{2}{x^2}$$

Ahora sustituimos en la primera z por el lado derecho de esta última ecuación

$2x-\frac{1}{x}\left(\frac{2}{x^2}\right)=0$. Sumamos fracciones

$\frac{2x^4-2}{x^3}=0$ Es una ecuación de la forma $\frac{P}{Q}=0$, planteamos $P=0$

$2x^4-2=0$ Despejamos la potencia y tomamos raíz cuarta

$x=\pm 1$

- Para $x=1$, tenemos por la ecuación $z=\frac{2}{x^2}$ que $z=2$ y por la ecuación $y=\frac{1}{x}$ tenemos que $y=1$. Así $(1,1,2)$ es un punto crítico.
- Para $x=-1$, tenemos por la ecuación $z=\frac{2}{x^2}$ que $z=2$ y por la ecuación $y=\frac{1}{x}$ tenemos que $y=-1$. Así $(-1,-1,2)$ es otro punto crítico.

Ejercicio de desarrollo.- Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $f(x,y,z)=x^3-y^3-xz-yz$

b) $f(x,y,z)=x^3+y^3-xz-yz$

c) $f(x,y,z)=x^3+y^3+x-yz$.

Respuestas:

a) Tiene infinitos puntos críticos dados por $\{(x,-x,3x^2)/x\in R\}$.

c) No tiene puntos críticos.

Los puntos críticos pueden ser encontrados usando softwares especializados, como MAPLE, MATHEMATICA, entre otros. A continuación damos una sucesión de comandos en MAXIMA que permite encontrar los puntos críticos de la función del ejemplo 5 de esta sección.

```
(%i2) f(x,y,z):=x^2+y^2-x*y*z+z$
(%i2) fx(x,y,z):=diff(f(x,y,z),x)$
(%i3) fy(x,y,z):=diff(f(x,y,z),y)$
(%i4) fz(x,y,z):=diff(f(x,y,z),z)$
(%i5)  solve([fx(x,y,z)=0,fy(x,y,z)=0,fz(x,y,z)=0],[x,y,z]);
(%o5) [[x = 1, y = 1, z = 2], [x = - 1, y = - 1, z = 2],
       [x = - %i, y = %i, z = - 2], [x = %i, y = - %i, z = - 2]]
```

CRITERIO DE LAS SEGUNDAS DERIVADAS PARA CLASIFICAR LOS PUNTOS CRÍTICOS

Este criterio es la versión del criterio de la segunda derivada para clasificar puntos críticos de una función en una sola variable.

Esta versión para dos variables se basa en una cantidad D que depende de (x_0, y_0). Si esta cantidad es positiva o negativa se concluirá si la función f alcanza o no un extremo relativo en este punto. Luego, si tiene extremo, se procederá a examinar si es máximo o mínimo relativo a través de f_{xx}.

Criterio de las segundas derivadas.- Sea f una función de dos variables y (x_0, y_0) un punto crítico de f donde las primeras derivadas se anulan, tal que en una vecindad de este punto las segundas derivadas parciales son continuas. Sea

$$D = D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - \left(f_{xy}(x_0, y_0)\right)^2$$

1.- Si $D > 0$ entonces se alcanza **un extremo relativo** en (x_0, y_0) y

1.1 Si $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ entonces $f(x_0, y_0)$ es un mínimo relativo.

1.2 Si $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ entonces $f(x_0, y_0)$ es un máximo relativo.

2.- Si $D < 0$ entonces $f(x_0, y_0)$ **no es un extremo relativo**.

3.- Si $D = 0$ el criterio no es concluyente.

Observaciones y comentarios:

1.- Si un punto crítico no es un extremo local entonces se llama **un punto de silla de *f*.**

2.- Resulta útil memorizarse la fórmula de D como un determinante

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

3.- El lector podrá observar la similitud de clasificación de puntos críticos en los puntos **1.1** y **1.2** con relación al criterio de la segunda derivada en una sola variable. Le puede resultar conveniente que cada vez que aplique este criterio asocie extremos relativos y concavidad en la dirección de las *x* para recordar este criterio.

Ejemplo 6.- Encontrar los máximos y mínimos relativos de la siguiente función: $f(x, y) = x^2 + y^3 - 3xy$

Solución:

1.- Conseguimos primero los puntos críticos:

$$f_x(x, y) = 2x - 3y$$

$$f_y(x, y) = 3y^2 - 3x$$

Planteamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

En este caso queda

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 & (1) \\ 3y^2 - 3x = 0 & (2) \end{cases}$$

Solucionamos este sistema despejando una de las variables en una de las ecuaciones y sustituyéndola en la otra ecuación. En este caso despejamos *x* en la segunda ecuación y la sustituimos en la primera.

$$\begin{cases} 2y^2 - 3y = 0 \\ x = y^2 \end{cases}$$

La primera ecuación la resolvemos usando factorización

$$y(2y-3)=0$$

$$y=0 \quad \text{ó} \quad 2y-3=0$$

$$y=0 \quad \text{ó} \quad y=\frac{3}{2}$$

- Si $y=0$ vemos que $x=0$ y así (0,0) es un punto crítico.
- Si $y=\frac{3}{2}$ vemos que $x=\left(\frac{3}{2}\right)^2$ y así $\left(\frac{9}{4},\frac{3}{2}\right)$ es el otro punto crítico.

2.- Para clasificar los puntos críticos usamos el criterio de las segundas derivadas. Pasamos entonces a conseguir las segundas derivadas.

$$f_{xx}(x,y)=2\,; \quad f_{yy}(x,y)=6y \quad \text{y} \quad f_{xy}(x,y)=-3$$

Calculamos

$$D(x,y)=f_{xx}(x,y)\,f_{yy}(x,y)-\left(f_{xy}(x,y)\right)^2$$

$$D(x,y)=(2)(6y)-(-3)^2 = 12y-9$$

Evaluamos $D(x,y)$ en cada punto crítico y aplicamos el criterio:

- $D(0,0)=12\cdot 0-9=-9$. Como $D(0,0)<0$, entonces concluimos que en (0,0) no se alcanza extremos relativos. El punto (0,0) es un punto de silla.
- $D(\frac{9}{4},\frac{3}{2})=12\cdot\frac{3}{2}-9=9$. Como $D(0,0)>0$, entonces en $\left(\frac{9}{4},\frac{3}{2}\right)$ se alcanza un extremo relativo. Pasamos a determinar si es máximo o es mínimo relativo a través del signo de f_{xx} evaluada en este punto crítico.

  $f_{xx}(\frac{9}{4},\frac{3}{2})=2>0$. Usando 1.1 del criterio de la segunda derivada concluimos que en $\left(\frac{9}{4},\frac{3}{2}\right)$ se alcanza un mínimo relativo.

Ejemplo 7.- Encontrar los máximos y mínimos relativos de la función $f(x,y)=4-4y^2-x^4-y^4$.

Solución:

1.- Conseguimos primero los puntos críticos:

$$f_x(x,y)=-4x^3$$

$$f_y(x,y)=-8y-4y^3$$

Planteamos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$

En este caso queda:

$$\begin{cases} -4x^3=0 & (1) \\ -8y-4y^3=0 & (2) \end{cases}$$

La solución de este sistema es x=0 y y=0. Por tanto el punto (0,0) es el único punto crítico de la función.

2.- Para clasificar el único punto crítico intentamos usar el criterio de las segundas derivadas. Pasamos entonces a conseguir las segundas derivadas.

$$f_{xx}(x,y)=-12x^2\,; \quad f_{yy}(x,y)=-8-12y^2 \quad \text{y} \quad f_{xy}(x,y)=0$$

Calculamos

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y)\,f_{yy}(x,y) - \left(f_{xy}(x,y)\right)^2$$

$$D(x,y) = \left(-12x^2\right)\left(-8-12y^2\right) - 0^2$$ Ahora evaluamos D en el punto crítico

$$D(0,0) = (0)(-8) - 0 = 0$$

El criterio no es concluyente.

Comentario.- En el ejercicio anterior podemos emplear un tipo de argumento, usando características propias de la función para determinar que tipo de punto crítico es. En este caso podemos ver la función como

$$f(x,y) = 4\underbrace{-4y^2 - x^4 - y^4}_{\leq 0}$$

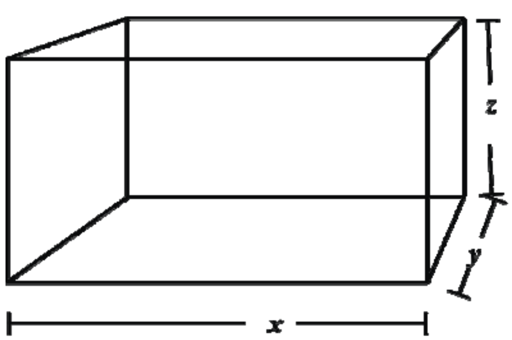
Para clasificar el punto crítico (0,0) de f usamos el siguiente argumento: Los últimos términos de la función son menores o iguales a cero, por tanto $f(x,y) \leq 4$ y es 4 cuando $x=0$ y $y=0$. Así 4 es el máximo valor de f y se alcanza en (0,0).
Observe que no sólo concluimos que es un máximo relativo si no también absoluto.

.

Ejercicio de desarrollo.- a) Encontrar los máximos y mínimos relativos de la siguiente función: $f(x,y,z) = e^{x^2+2y^2-xy+12x}$. **b)** Verifique que $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - xy + 12x$ alcanza sus extremos en los mismos puntos (x,y) que f.

PROBLEMAS

Ejemplo 8.- Encontrar las dimensiones de una caja rectangular sin tapa de volumen igual a 250cc. que tiene el área más pequeña.
Solución: Realizamos un dibujo donde señalamos el significado de la variables.



Queremos encontrar el área mínima.
El área puede ser expresada como

$$A = 2xz + 2yz + xy$$

y ella tiene que cumplir la condición

Volumen=250cc.

Esta condición o restricción está expresado en término de las variables como:
$xyz = 250$ (ecuación de restricción)

Con esta condición podemos expresar A como función de dos variables, por ejemplo de x y y despejando z en $xyz = 250$ y sustituyéndola en $A = 2xz + 2yz + xy$. Esto es

$$z=\frac{250}{xy}$$

Sustituimos z en la función a minimizar

$$A(x,y)=2x\frac{250}{xy}+2y\frac{250}{xy}+xy$$

$$A(x,y)=\frac{500}{y}+\frac{500}{x}+xy\,.$$

Así que el problema se ha transformado en conseguir el mínimo absoluto de $A(x,y)=\frac{500}{y}+\frac{500}{x}+xy$.

Pasamos a encontrar los puntos críticos de $A(x,y)$

$$\begin{cases} A_x=0 \\ A_y=0 \end{cases} \quad \text{esto es} \quad \begin{cases} -\dfrac{500}{x^2}+y=0 \\ -\dfrac{500}{y^2}+x=0 \end{cases}$$

Despejamos *y* en la primera ecuación y la sustituimos en la segunda

$$\begin{cases} y=\dfrac{500}{x^2} \\ -\dfrac{500}{\left(\dfrac{500}{x^2}\right)^2}+x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{500}{x^2} \\ -\dfrac{x^4}{500}+x=0 \end{cases}$$

Resolvemos la segunda ecuación factorizando

$$x\left(-\frac{x^3}{500}+1\right)=0$$

La solución $x=0$ no tiene sentido en el sistema original, pues la división entre cero no está definida. La otra solución es $x=\sqrt[3]{500}$, y para este valor de *x* tenemos que $y=\sqrt[3]{500}$. Así que el único punto crítico de A es $(\sqrt[3]{500},\sqrt[3]{500})$.

Falta clasificar este punto crítico.

Pasamos entonces a conseguir las segundas derivadas.

$$A_{xx}(x,y)=\frac{1000}{x^3}\,;\quad A_{yy}(x,y)=\frac{1000}{y^3}\quad \text{y}\quad A_{xy}(x,y)=1$$

Calculamos

$$D(x,y)=A_{xx}(x,y)A_{yy}(x,y)-\left(A_{xy}(x,y)\right)^2$$

$$D(x,y)=\frac{(1000)^2}{x^3y^3}-1$$

Al evaluar $D(x,y)$ en $(\sqrt[3]{500},\sqrt[3]{500})$ vemos claramente que $D(\sqrt[3]{500},\sqrt[3]{500})>0$ por tanto en el punto crítico se alcanza un extremo y como $A_{xx}(\sqrt[3]{500},\sqrt[3]{500})>0$ resulta ser un mínimo relativo. Como existe un único extremo relativo, éste es absoluto.

Finalmente concluimos que la caja con mínima área tiene dimensiones $\sqrt[3]{500}$ tanto en su largo como en su ancho y la altura está dada por $z = \frac{250}{\sqrt[3]{500}} = \frac{\sqrt[3]{500}}{2}$.

Ejemplo 9.- Una empresa produce dos tipos de artículos A y B. El costo de fabricar un artículo de tipo A es de 4 UM y el costo de B es de 6UM Las ecuaciones de demanda están dadas por:

$q_A = 10 - 2p_A + p_B$; $q_B = 9 + p_A - p_B$ expresada en cientos de unidades.

¿Cuáles serán los precios de venta que maximizan la utilidad?

Solución:

Debemos obtener la función de utilidad conjunta. Ella puede ser obtenida por la relación

$$U = U_A + U_B$$

Para calcular U_A planteamos

$$U_A = I_A - C_A$$

$$U_A = p_A q_A - 4q_A$$

$$U_A = p_A(10 - 2p_A + p_B) - 4(10 - 2p_A + p_B)$$

$$U_A = -2p_A^2 + p_B p_A - 40 + 18p_A - 4p_B$$

Similarmente obtenemos

$$U_B = p_B(9 + p_A - p_B) - 6(9 + p_A - p_B)$$

$$U_B = -p_B^2 + p_B p_A - 54 - 6p_A + 15p_B$$

De aquí

$$U = (-2p_A^2 + p_A p_B - 40 + 18p_A - 4p_B) + (-p_B^2 + p_B p_A - 54 - 6p_A + 15p_B)$$

$$U = -2p_A^2 - p_B^2 + 2p_A p_B + 12p_A + 11p_B - 94$$

Ahora vamos a conseguir los puntos críticos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U(p_A, p_B)}{\partial p_A} = 0 \\ \dfrac{\partial U(p_A, p_B}{\partial p_B} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4p_A + 2p_B + 12 = 0 \\ -2p_B + 2p_A + 11 = 0 \end{cases}$$

Si sumamos ambas ecuaciones se tiene

$$p_A = 23/2$$

$$p_B = 17$$

Tenemos entonces un único punto crítico, pasamos a clasificarlo:

$$\frac{\partial^2 U(p_A, p_B)}{\partial p_A^2} = -4; \quad \frac{\partial^2 U(p_A, p_B)}{\partial p_A \partial p_B} = 2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 U(p_A, p_B)}{\partial p_B^2} = -2$$

Calculamos

$$D(x, y) = \frac{\partial^2 U(p_A, p_B)}{\partial p_A^2} \cdot \frac{\partial^2 U(p_A, p_B)}{\partial p_B^2} - \left(\frac{\partial^2 U(p_A, p_B)}{\partial p_A \partial p_B} \right)^2$$

$$D(p_A, p_B) = -4 \cdot (-2) - (-2)^2 = 4$$

Al evaluar D en $(23/2,17)$ evidentemente nos da positivo. Entonces se alcanza un extremo relativo en este punto y como $\frac{\partial^2 U(p_A,p_B)}{\partial p_A^2}<0$ concluimos que se alcanza un mínimo relativo en este punto.

Ejemplo 10.- Una distribuidora de alimentos quiere establecer un almacén que distribuya sus productos en tres ciudades. Las ciudades han sido ubicadas en un sistema de coordenadas. Las coordenadas de la ciudad A son (0,0). La ciudad B tiene coordenadas (0,2) y la ciudad C está ubicada en el punto (1,3). ¿Dónde debe establecerse la industria con el objeto de minimizar la suma de las distancias del almacén a las ciudades A, B y C?

Solución: Sea (x,y) las coordenadas del almacén.

El cuadrado de la distancia del punto (x,y) a la ciudad A está dada por:

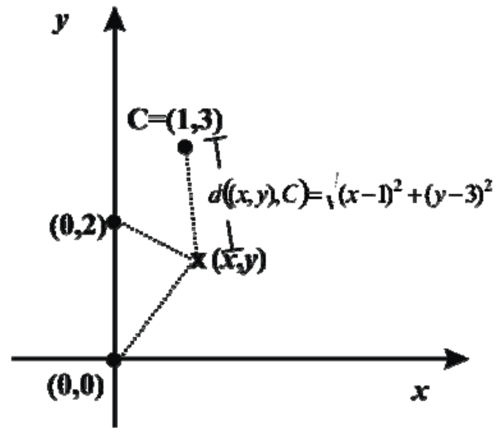
$d^2((x,y),A)=x^2+y^2$ Similarmente obtenemos

$d^2((x,y),B)=x^2+(y-2)^2$ y

$d^2((x,y),C)=(x-1)^2+(y-3)^2$

La cantidad a minimizar es la suma de estas distancias

$$S(x,y)=x^2+y^2+x^2+(y-2)^2+(x-1)^2+(y-3)^2$$



Calculamos las derivadas parciales directamente:

$S_x(x,y)=2x+2x+2(x-1)$

$S_y(x,y)=2y+2(y-2)+2(y-3)$

Queda entonces el sistema

$$\begin{cases} 6x-2=0 \\ 6y-10=0 \end{cases}$$

Las coordenadas del único punto crítico son $(\frac{1}{3},\frac{5}{3})$. Falta verificar que este punto es un máximo relativo de S.

$S_{xx}(x,y)=6$, $S_{xy}(x,y)=0$ y $S_{yy}(x,y)=6$

$D(x,y)=S_{xx}(x,y)S_{yy}(x,y)-\left(S_{xy}(x,y)\right)^2$

Como $D(\frac{1}{3},\frac{5}{3})=36>0$ y $S_{xx}(\frac{1}{3},\frac{5}{3})>0$ entonces el punto con coordenadas $(\frac{1}{3},\frac{5}{3})$ es el que minimiza la suma de los cuadrados de las distancias.

Comentario.- El criterio para ubicar el almacén parece en principio no ser el más razonable, sin embargo a nivel de cálculo permite trabajar mejor, porque no contempla las raíces de las distancias, por otro lado, este criterio penaliza las distancias grandes.

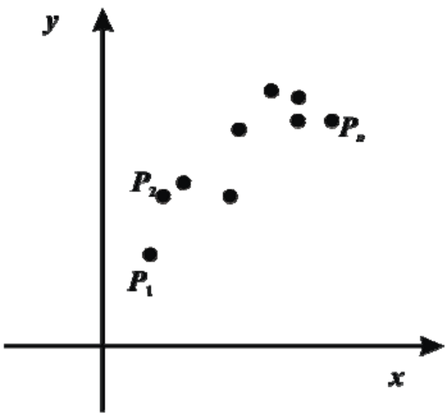
MÍNIMOS CUADRADOS

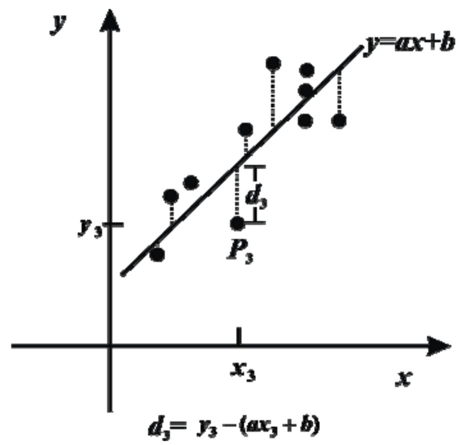
En ocasiones tenemos unos datos (x_1,y_1), (x_2,y_2),…(x_n,y_n) que al graficarlos parecen estar sobre una recta. También podemos tener motivos para pensar que nuestros datos provienen de una relación lineal $y=ax+b$ entre las variables pero que en el momento de tomar los datos se ven perturbados por fenómenos aleatorios. El planteamiento en todo caso es que dados los datos (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$ queremos conseguir la recta $y = \hat{a}x + \hat{b}$ que mejor se ajuste a ellos. No vamos a conseguir la recta $y = ax + b$ sino vamos a proponer una estimación de ella **:** $y = \hat{a}x + \hat{b}$ **.**

Es difícil precisar que quiere decir *la que mejor se ajusta*, pero un criterio para conseguir una buena recta es la que minimiza la suma de las distancias verticales al cuadrado.

Más precisamente: la distancia vertical del i-ésimo dato a la recta está dado por

$|y_i - (ax_i + b)|$ **.**





Así que para conseguir la mejor recta, debemos calcular *a* y *b* que minimizan

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2 \text{ .}$$

Observe que S es una función de *a* y *b*.

Podemos conseguir una fórmula general para la pendiente y para la ordenada en el origen.

Pero preferimos dejar planteado el sistema para conseguir los puntos críticos:

$$\begin{cases} S_a(a,b) = 0 \\ S_b(a,b) = 0 \end{cases}$$

Para las dos derivadas vamos a tener una suma

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b)(-1) = 0 \end{cases}$$

Se puede sacar factor común -2 en la primera ecuación y luego este factor pasa dividiendo. En la segunda ecuación se multiplica ambos miembro por -1.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (y_i x_i - ax_i^2 - bx_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} ax_i - \sum_{i=1}^{n} b = 0 \end{cases}$$

En la primera ecuación se distribuyó x_i. En la segunda ecuación separamos la sumatoria.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} bx_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} b = 0 \end{cases}$$

Se separó la sumatoria y se sacaron los factores constantes fuera de la sumatoria

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - bn = 0 \end{cases}.$$

Si llamamos $S_{xy} = \sum x_i y_i$; $S_x = \sum x_i$; $S_{xx} = \sum x_i^2$ y $S_y = \sum y_i$, el último sistema de ecuaciones queda planteado como:

$$\begin{cases} S_{xy} - aS_{xx} - bS_x = 0 \\ S_y - aS_x - bn = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} aS_{xx} + bS_x = S_{xy} \\ aS_x + bn = S_y \end{cases}$$

Llamamos $\hat{a}$ y $\hat{b}$ las soluciones del sistema anterior, ellas estiman la pendiente y la ordenada en el origen de la recta $y = ax + b$. Esto es conocido como una regresión de *y* sobre *x*.

Veamos primero el procedimiento a través de los datos dados por el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11.- Suponga que un producto tiene una ecuación de demanda lineal con respecto al precio $q = ap + b$. Se tiene los siguientes datos sobre su comportamiento en el mercado

q	12	10	8	9
p	30	33	41	37

Estime la ecuación de demanda usando el criterio de mínimos cuadrados, esto es, haga una regresión de *q* sobre *p*.

Solución: Planteamos la ecuación de demanda como una relación lineal, esto es una recta.

$$q = ap + b$$

Debemos conseguir *a* y *b* que minimizan

$$S = \sum_{i=1}^{4} (q_i - (ap_i + b))^2$$

Sustituimos nuestros datos

$$S = (12 - (a \cdot 30 + b))^2 + (10 - (a \cdot 33 + b))^2 + (8 - (a \cdot 41 + b))^2 + (9 - (a \cdot 37 + b))^2$$

Vamos ahora a buscar los puntos críticos de S

$$\begin{cases} S_a(a,b) = 0 \\ S_b(a,b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(12-30a-b)(-30)+2(10-33a-b)(-33)+2(8-41a-b)(-41)+2(9-37a-b)(-37)=0 \\ 2(12-30a-b)+2(10-33-b)+2(8-41-b)+2(9-37-b)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2702+10078a+282b=0 \\ -78+282a+8b=0 \end{cases}$$

Las soluciones dan
$\hat{b}=\frac{1206}{55}$; $\hat{a}=-\frac{19}{55}$.

Así la ecuación de demanda es estimada en este caso por $q=-\frac{19}{55}p+\frac{1206}{55}$.

EJERCICIOS 5.8

1) Encuentre los puntos críticos de las siguientes funciones.

1.1) $f(x,y)=8x^2+2y^2-\ln(xy)$; **1.2)** $f(x,y)=xy-2x-\frac{1}{2y}$;

1.3) $f(x,y,z,w)=2xyz+w(2x+2y+3z-36)$; **1.4)** $f(x,y,z)=5y^2-2x^2+3xz-2yz-7z$;

1.5) $f(x,y,z)=xy-y+(z-3)^2$; **1.6)** $f(x,y,z)=x^3-y^2+z^2-3x+y-4z+1$.

2) Encuentre los puntos críticos de las siguientes funciones. Clasifique cada punto crítico usando el criterio de la segunda derivada

2.1) $f(x,y)=x^2+y^2-4xy$; **2.2)** $f(x,y)=2x^2+y^2-2x-2y-3$;

2.3) $f(x,y)=1000+3x+12y-x^3-y^3$; **2.4)** $f(x,y)=-3x^2-y^2+2xy-3x-y$;

2.5) $f(x,y)=x^2+3y^2+2xy-3x-y$; **2.6)** $f(u,v)=2uv+\frac{4}{u}+\frac{1}{v}$;

2.7) $f(x,y)=x^3+3xy^2+y^3-x-200$; **2.8)** $f(x,y)=x^2-y^2+2\ln y$;

2.9) $f(x,y)=xy(2y+x)+2y(1+x^2)$; **2.10)** $f(u,v)=ue^{-u}+uv$;

2.11) $f(x,y)=(x-1)(y-1)(x+y-1)$; **2.12)** $f(x,y)=2x^3+3y^2-4xy-4$;

2.13) $f(x,y)=x^3+y^2-4xy$; **2.14)** $f(x,y)=x^3+y^3-2xy$.

Respuestas: 1.1) $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$; **1.2)** $\left(-\frac{1}{8},2\right)$; **1.3)** $(x,y,z,w)=(18,0,0,0)$, $(x,y,z,w)=(6,6,4,-24)$, $(x,y,z,w)=(0,18,0,0)$, $(x,y,z,w)=(0,0,12,0)$; **1.4)** $\left(-\frac{21}{8},-\frac{7}{2},-\frac{343}{16}\right)$; **1.5)** $(1,0,3)$; **1.6)** $\left(-1,\frac{1}{2},2\right)$, $\left(1,\frac{1}{2},2\right)$ $\left(1/\sqrt{15},-2/\sqrt{15}\right)$.

2.1) (0,0) punto de silla; **2.2)** $(\frac{1}{2},1)$ mínimo relativo; **2.3)** (1,2) máximo relativo, (-1,-2) mínimo relativo; (1,-2) y (-1,2) son puntos de silla; **2.4)** En $(-1,3/2)$ se alcanza un máximo relativo; **2.5)** (2,-1/2) mínimo relativo; **2.6)** En (2,1/2) se alcanza un mínimo relativo; **2.7)** En $\left(1/\sqrt{3},0\right)$) se alcanza un mínimo relativo; en $\left(-1/\sqrt{3},0\right)$ se alcanza un máximo relativo, $\left(1/\sqrt{15},-2/\sqrt{15}\right)$ y $\left(-1/\sqrt{15},2/\sqrt{15}\right)$ son puntos de silla; **2.8)** $(0,1),(0,-1)$ son puntos de silla; **2.9)** $\left(-\sqrt{2}/3,\sqrt{2}\right)$ **y** $\left(\sqrt{2}/3,-\sqrt{2}\right)$son puntos de silla; **2.10)** $(0,-1)$ punto de silla; **2.11)** (2/3,2/3) es máximo relativo, (1,1) y (1,0) son puntos de silla; **2.12)** (0,0) es punto de silla; (4/9,8/27) se alcanza un mínimo relativo; **2.13)** $\left(\frac{8}{3},\frac{16}{3}\right)$ Mínimo relativo; (0,0) es punto de silla; **2.14)** $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ Mínimo relativo; (0,0) es punto de silla.

PROBLEMAS

1) Sea $P(L,K)=\frac{36}{100}K^2-\frac{1}{900}K+\frac{42}{100}L^2-\frac{2}{100}L^3$ la función de producción de una empresa, donde L representa el número de unidades de mano de obra y K el número de unidades de capital. Encuentren L y K que maximiza la producción. **Respuesta:** L=14, K=1/648.

2) Una empresa produce dos tipos de artículos A y B. Las ecuaciones de demanda de estos dos artículos están dadas por: $q_A=100-2p_A+p_B$; $q_B=p_A-p_B$. Si el costo unitario del artículo A es 14UM y el del artículo B es 12, ¿Cuáles serán los precios de venta que maximizan la utilidad? **Respuesta:** p_A=57; p_B=56UM.

3) Para fabricar cierto producto se usa dos tipos de materiales X y Y. El número de unidades del producto que se fabrican con x unidades de tipo X e Y unidades de tipo Y viene dado por $P(x,y)=10x+16y+\frac{3}{2}xy-y^2-\frac{25}{20}x^2$. Si el costo de cada unidad de tipo X es 10UM y de tipo Y es 8 UM y la empresa puede vender todas las unidades que produce a 2 UM. **a)** ¿Cuántas unidades de tipo X y de tipo Y debería emplear la empresa para maximizar su utilidad? **b)** ¿Cuántas unidades de ese producto fabricará al emplear esas cantidades de materiales? **Respuesta: a)** y = 150/11, x = 112/11; **b)** 171 unidades.

4) Una empresa produce dos tipos de productos, X y Y. El costo diario de producir q_1 y q_2 unidades de X y Y respectivamente es $C=f(q_1,q_2)=0.1q_1^2-4q_1+0.1q_2^2-8q_2+200$. Determinar el número de unidades de X y de Y a fin de minimizar el costo diario. **Respuesta:** q_1=20, q_2=40 unidades.

5) Una empresa puede elaborar dos tipos de productos: X y Y. El costo unitario del primer producto es 150UM y 10 UM el del segundo. Las ecuaciones de demanda semanales de ambos productos están dadas por $q_x=250-p_x-p_y$ y $q_y=300-2p_x+2p_y$, donde p_x **y** p_y son los precios unitarios de venta para cada producto. ¿Cuáles precios deberá fijar la empresa con el objeto de maximizar la utilidad? **Respuesta:** $p_1=130;\ p_2=180$ UM

6) Una empresa puede elaborar dos tipos de productos: X y Y. La función de costos conjuntos esta dada por: $C=q_A^2+q_B^2+q_A+q_B-2q_Aq_B$. Las ecuaciones de demanda semanales de ambos productos están dadas por $q_A=60-p_A$ y $q_B=40-p_B$, donde p_A y p_B son los precios unitarios de venta para cada producto. ¿Cuáles precios deberá fijar la empresa con el objeto de maximizar la utilidad? ¿Cuál es esa utilidad? **Respuesta:** $p_A=203/6;\ p_B=103/6;\ U=7303/6$ UM.

7) Una empresa quiere vender un nuevo producto a 35UM, cuando su costo es de 15UM la unidad. Se estima que si se invierte x UM en desarrollo y y UM en publicidad, habrá un consumo de

$$\frac{10x}{x+5}+25\frac{y}{y+2}\text{ miles de unidades del producto.}$$

¿Cuánto dinero se deberá invertir en desarrollo y cuánto en publicidad a fin de que la utilidad sea máxima? **Respuesta:** 500 UM en desarrollo y 800 UM en publicidad.

8) Las ventas de carros de una marca X han ido aumentando en los últimos años según muestra la siguiente tabla donde las ventas son expresada en miles de unidades vendidas en el año

Año	1999	2003	2005	2007
Ventas	2.3	2.8	3.1	3.4

a) Haga una regresión de V sobre t contado a partir del año 1999. **b)** Estime las ventas para el año 2010.

9) El porcentaje de analfabetismo ha estado disminuyendo en los últimos años según muestra la siguiente tabla

Año	2000	2002	2004	2007
Porcentaje	3.3	3.1	3.	2.6

a) Haga una regresión de P sobre *t*, el tiempo contado a partir del año 2000 **b)** Estime el porcentaje de analfabetismo para el año 2010. **c)** Para el 2050 ¿le parece razonable su respuesta?

Las siguientes instrucciones en MAPLE resuelven el problema 2.11 de esta sección.
Advertencia: Los ejercicios anteriores debieron ser resueltos sin usar computadora. Esta ejercitación le dará las destrezas algebraicas y de análisis que usted requiere y que es de exigencia en cualquier Universidad de mediano nivel. Sin embargo, hoy en día contamos con este software que le permitirá resolver problemas más complejos que los dados en esta sección.

```
> restart;
> f :=(x,y)-> (x-1)*(y-1)*(x+y-1);
```

$$f := (x, y) \to (x-1)\,(y-1)\,(x+y-1)$$

```
> fx :=diff(f(x,y),x);
```

$$fx := (y-1)\,(x+y-1) + (x-1)\,(y-1)$$

```
> fy :=diff(f(x,y),y);
```

$$fy := (x-1)\,(x+y-1) + (x-1)\,(y-1)$$

```
> solve({fx=0,fy=0});
```

$$\{y=0, x=1\}, \{x=1, y=1\}, \{x=0, y=1\}, \left\{y=\frac{2}{3}, x=\frac{2}{3}\right\}$$

```
> fxx := diff( diff(f(x,y),x), x );
```

$$fxx := 2\,y - 2$$

```
> fxy := diff( diff(f(x,y),x), y );
```

$$fxy := 2\,x + 2\,y - 3$$

```
> fyy := diff( diff(f(x,y),y), y );
```

$$fyy := 2\,x - 2$$

```
> J:=fxx*fyy-(fxy)^2;
```

$$J := (2\,y-2)\,(2\,x-2) - (2\,x+2\,y-3)^2$$

```
> Jeval := Eval( J, {x=2/3,y=2/3} );
```

$$Jeval := \left.\left((2\,y-2)\,(2\,x-2) - (2\,x+2\,y-3)^2\right)\right|_{y=\frac{2}{3},\, x=\frac{2}{3}}$$

```
> Jeval:=value(Jeval);
```

$$Jeval := \frac{1}{3}$$

```
> fxx := Eval( fxx, {x=1,y=0} );
```

$$fxx := \left.\left(\left.(2\,y-2)\right|_{y=0,\, x=1}\right)\right|_{y=0,\, x=1}$$

```
> fxxevalua:=value(fxx);
```

$$fxxevalua := -2$$

5.9 Multiplicadores de Lagrange

En problemas de la vida real se busca maximizar o minimizar funciones de dos o más variables sujetas a una condición o restricción de las variables.

El problema matemático en dos variables y con una sola restricción se plantea como

$$\text{Optimizar } f(x,y) \text{ sujeta a } g(x,y)=0.$$

(Debemos entender que optimizar puede ser maximizar o minimizar dependiendo de la situación o interés que se tenga).

La función $f(x,y)$ es conocida como la función objetivo y la ecuación $g(x,y)=0$ como la ecuación de restricción.

El problema de encontrar las dimensiones de la caja con menor superficie y con volumen igual a 250 cc. se considera un problema de minimización sujeto a restricción. La restricción en este caso es que el volumen debe ser igual a 250cc. y se traduce en la ecuación $xyz=250$.

Este problema pudo ser resuelto despejando una de las variables de esta ecuación y sustituyéndola en la función a minimizar. El problema se reduce entonces a minimizar una función de dos variables.

En ocasiones esta técnica puede resultar engorrosa o simplemente resulta imposible despejar alguna de las variables para sustituirla en la función a optimizar.

Existe un método alternativo conocido como los Multiplicadores de Lagrange, en honor a este Matemático francés, donde no se tiene que despejar una de las variables de la ecuación de restricción.

El método de los Multiplicadores de Lagrange introduce una nueva variable λ, llamada multiplicador de Lagrange y se basa en la función definida por

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$

El método asegura que (x_0,y_0,λ_0) es un punto crítico de F si y sólo si (x_0,y_0) es un punto crítico de *f* que cumple la restricción $g(x,y)=0$.

A continuación formulamos los pasos del método de los multiplicadores de Lagrange.

Pasos para aplicar el Método de los Multiplicadores de Lagrange

Paso 1.- Identifique bien la función a maximizar (minimizar)

Escriba la ecuación de restricción en la forma $g(x,y)=0$, definiendo a *g* como el lado izquierdo de esta ecuación.

Defina

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y).$$

Paso 2.- Calcular los puntos críticos de $F(x,y,\lambda)$. Para ello plantee y resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} F_x=0 \\ F_y=0 \\ F_\lambda=0 \end{cases}$$

(Una recomendación para resolver este sistema es despejar λ de la primera y segunda ecuación e igualar ambas ecuaciones, quedando entonces un sistema de dos ecuaciones en *x* y *y*, que son la obtenida y la ecuación $F_\lambda=0$).

Paso 3.- (Se asume que el valor optimo existe y se alcanza en alguno de los puntos críticos). Evaluar la función en los puntos críticos. El valor más alto (bajo) es el valor máximo (mínimo) en la restricción.

Ejemplo 1.- Use los Multiplicadores de Lagrange para encontrar los puntos críticos de $f(x,y)=xy$ sujeto a la condición $x^2+y^2=1$.

Solución:

Paso 1.- La restricción la escribimos como

$$x^2+y^2-1=0$$

En este caso $g(x,y)=x^2+y^2-1$.

Definimos la función

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$

$$F(x,y,\lambda)=xy-\lambda(x^2+y^2-1)$$

Paso 2.- Encontramos los puntos críticos de F $\begin{cases} F_x=0 \\ F_y=0 \\ F_\lambda=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y-2\lambda x=0 \\ x-2\lambda y=0 \\ -(x^2+y^2-1)=0 \end{cases}$$

Aplicamos la recomendación dada para resolver este sistema (recuerde que simplemente es una recomendación, pudiendo haber alternativas más sencillas para resolver sistemas de ecuaciones particulares).

Despejamos λ de la primera y segunda ecuación

$$\lambda=\frac{y}{2x} \quad \textbf{y} \quad \lambda=\frac{x}{2y}$$

e igualamos ambas ecuaciones

$\frac{y}{2x}=\frac{x}{2y}$ reescribiendo la ecuación

$$x^2=y^2$$

queda entonces un sistema de dos ecuaciones en *x* y *y*, que son ésta y la ecuación $F_\lambda=0$

$$\begin{cases} x^2=y^2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

Sustituimos $x^2=y^2$ en la segunda ecuación

$2y^2=1$ cuyas soluciones son $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Para $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ tenemos $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, dando los puntos críticos $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Para $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ tenemos $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, dando los puntos críticos $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Comentario: Hemos encontrado los puntos críticos sin necesidad de encontrar λ.

Ejercicio de desarrollo.- Use los Multiplicadores de Lagrange para encontrar los puntos críticos de $f(x,y)=x+y$ sujeto a la condición $xy=9$.

APLICACIONES

Son muchas las aplicaciones en Economía donde el método de los Multiplicadores de Lagrange es usado para resolver problemas de optimización con restricciones. Podemos listar a manera general los siguientes:

1) Maximizar la producción con una restricción presupuestaria.
2) Maximizar la satisfacción o utilidad del consumo de dos artículos sujeto a una restricción presupuestaria.
3) Minimizar los costos de producción conjuntos de una fábrica que produce dos modelos de un mismo artículo, restringido a que debe producir una cantidad fija de artículos entre los dos modelos.
4) Minimizar los costos de producción de una empresa que tiene dos fábricas que elaboran un mismo producto, sujeto a la condición que se deben elaborar una cantidad fija de estos productos.
5) Maximizar las ventas sujeta a una restricción presupuestaria.
6) Minimizar los costos conjuntos de mano de obra y capital sujeto, a que tiene que producir una cantidad determinada de artículos.

Ejemplo 2.- La función de utilidad o satisfacción por el consumo de dos productos está dada por $U(x,y)=x^2y$, donde x y y son las unidades de los productos X y Y adquiridas. El precio de una unidad X es 2 UM y el de una unidad de Y es 3UM. Encuentre las cantidades de cada producto que deberá adquirir el consumidor a fin de maximizar su utilidad de consumo con un presupuesto de compra de 30UM.

Solución: La función a maximizar en este caso está dada por $U(x,y)=x^2y$ y la restricción está dada por la condición que el presupuesto es de 30UM. Esta restricción la podemos escribir como la ecuación: $2x+3y=30$ (Observe que el precio de la unidad X es 2UM y x representa el número total de artículos de tipo X a adquirir).

En definitiva el problema se traduce en

$$\text{Maximizar } U(x,y)=x^2y,$$
$$\text{sujeto a la condición } 2x+3y=30.$$

Observe que $y\in[0,30]$ y $x\in[0,15]$

Para resolver este problema usamos Multiplicadores de Lagrange.

Paso 1.- Definimos la función

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$
$$F(x,y,\lambda)=x^2y-\lambda(2x+3y-30)$$

Paso 2.- Encontramos los puntos críticos de F: $\begin{cases} F_x=0\\ F_y=0\\ F_\lambda=0\end{cases}$

$$\begin{cases} 2xy-2\lambda=0\\ x^2-3\lambda=0\\ -(2x+3y-30)=0\end{cases}$$

Despejando λ en las dos primeras ecuaciones e igualándolas obtenemos

$xy=\frac{x^2}{3}$, Recuerde que no podemos simplificar o eliminar las x´s porque perdemos solución.

Igualamos la ecuación a 0 y factorizamos el lado izquierdo

$$xy-\frac{x^2}{3}=0$$

$$x\left(y-\frac{x}{3}\right)=0$$

De aquí

$$x=0 \quad \text{ó} \quad y-\frac{x}{3}=0$$

Usamos la tercera ecuación para precisar los puntos críticos

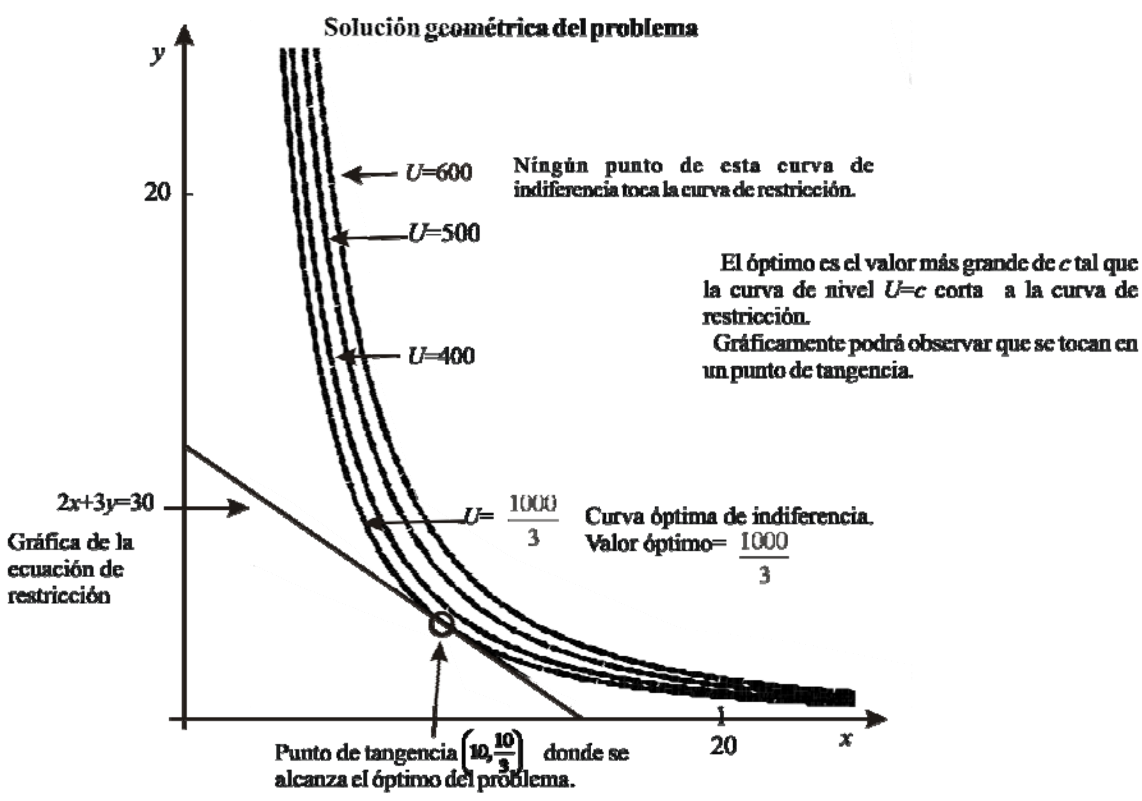
- Para $x=0$ resulta que $y=10$. Así un punto crítico es el punto (0,10).
- Para $y-\frac{x}{3}=0$, despejamos $y=\frac{x}{3}$ y sustituimos en la tercera ecuación $2x+3\left(\frac{x}{3}\right)=30$, obteniendo $x=10$ y de aquí $y=\frac{10}{3}$. Así el otro punto crítico es $\left(10,\frac{10}{3}\right)$.

Paso 3.- Vamos asumir que la función tiene un máximo. Como tenemos dos puntos críticos debemos evaluar estos puntos en la función a maximizar y asumiremos que el valor más alto entre ellos será el máximo absoluto de la función utilidad en la restricción.

$$U(0,10)=0^2 10=0$$

$$U\left(10,\frac{10}{3}\right)=100\cdot\frac{10}{3}=\frac{1000}{3} \text{ valor máximo}$$

En conclusión para un consumo de 10 unidades del producto X y $\frac{10}{3}$ unidades del producto Y se consigue la máxima satisfacción del cliente que tiene un presupuesto de gasto de 30UM.



Ejemplo 3.- La función de producción de una empresa está dada por $P(k,l)=300l^{1/2}k^{1/2}$, donde k es el número de unidades de capital y l es el número de unidades de mano de obra. Suponga que la unidad de mano de obra cuesta 20UM y la unidad de capital cuesta 10UM. La empresa dispone de un presupuesto de 30.000UM para gastar en mano de obra y capital. Calcule el nivel de mano de obra y de capital que maximizan la producción.

Solución: La función a maximizar en este caso es la productividad dada por $P(k,l)=300l^{1/2}k^{1/2}$.

La restricción es que el presupuesto sea de 30.000UM. Esta restricción la podemos escribir como la ecuación: $20l+10k=30.000$

En definitiva el problema se traduce en

Maximizar $P(k,l)=300l^{1/2}k^{1/2}$

sujeto a la condición $20l+10k=30.000$

Paso 1.- En este caso $g(k,l)=20l+10k-30.000$

Para resolver este problema usamos Multiplicadores de Lagrange.

Definimos la función

$$F(k,l,\lambda)=P(k,l)-\lambda g(k,l)$$

$$F(k,l,\lambda)=300l^{1/2}k^{1/2}-\lambda(20l+10k-30.000)$$

Paso 2.- Encontramos los puntos críticos de F

$$\begin{cases} F_k=0 \\ F_l=0 \\ F_\lambda=0 \end{cases}, \quad \text{esto es} \quad \begin{cases} \dfrac{150\sqrt{l}}{\sqrt{k}}-10\lambda=0 \\ \dfrac{150\sqrt{k}}{\sqrt{l}}-20\lambda=0 \\ -(20l+10k-30.000)=0 \end{cases}$$

Despejamos λ en las dos primeras ecuaciones y la igualamos

$\dfrac{15\sqrt{l}}{\sqrt{k}}=\dfrac{15\sqrt{k}}{2\sqrt{l}}$, la cual para valores positivos de la variable es equivalente a

$2l=k$, sustituimos este valor de k en la tercera ecuación:

$20l+10(2l)=30.000$

$40l=30.000$

$l=\dfrac{30.000}{40}=750$.

Para este valor de l tenemos, al usar la relación $2l=k$, que $k=1500$.

Si asumimos que la función tiene un máximo relativo en la restricción, entonces éste será un máximo absoluto. En conclusión si se emplea una fuerza laboral de 750 unidades y se invierte 1500 unidades de capital se obtendrá la máxima productividad.

Ejemplo 4.- La función de producción de una empresa está dada por $P(k,l)=50l+30k-l^2-1.5k^2$, donde k es el número de unidades de capital y l es el número de unidades de mano de obra. Suponga que la unidad de mano de obra cuesta 2UM y la unidad de capital cuesta 3UM. La empresa decide fabricar 500 unidades de su producto. Calcule el nivel de mano de obra y de capital que minimizan los costos producción

Solución: La función a minimizar en este caso es el costo dado por $C(k,l)=2l+3k$

La restricción es que el nivel de productividad sea de 500 unidades. Esta restricción la podemos escribir como la ecuación: $50l+30k-l^2-1.5k^2=500$

En definitiva el problema se traduce en

Minimizar $C(k,l)=2l+3k$

sujeto a la condición $50l+30k-l^2-1.5k^2=500$

Paso 1.- Para resolver este problema usamos Multiplicadores de Lagrange.
Definimos $g(k,l)=50l+30k-l^2-1.5k^2-500$
Definimos la función

$$F(k,l,\lambda)=C(k,l)-\lambda g(k,l)$$
$$F(k,l,\lambda)=2l+3k-\lambda(50l+30k-l^2-1.5k^2-500)$$

Paso 2.- Encontramos los puntos críticos de F: $\begin{cases} F_k=0 \\ F_l=0 \\ F_\lambda=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3-(30-3k)\lambda=0 \\ 2-(50-2l)\lambda=0 \\ -(50l+30k-l^2-1.5k^2-500)=0 \end{cases}$$

Despejamos λ en las dos primeras ecuaciones y las igualamos

$\dfrac{2}{50-2l}=\dfrac{3}{30-3k}$ Invirtiendo las ecuaciones y simplificando obtenemos

$25-l=10-k$ Despejamos una de las variables

$l=15+k$ Sustituimos en la tercera ecuación

$50(15+k)+30k-(15+k)^2-1.5k^2-500=0$ Ecuación de segundo grado que resolvemos

$$25+50k-2.5k^2=0$$
$$k^2-20k-10=0$$
$$k=\frac{20\pm\sqrt{440}}{2}$$

$k=-0{,}48$ y $k=20{,}48$. Descartamos la solución negativa.

Para $k=20{,}48$ tenemos, usando $l=15+k$, que $l=35{,}48$

Asumiendo que el problema tiene un mínimo en la restricción, para una inversión de capital de $k=20{,}48$ unidades de capital y una inversión de mano de obra de $l=35{,}48$ unidades de mano de obra, se tiene el mínimo costo.

EXTENSIONES DEL MÉTODO DE LAGRANGE

Son muchas las extensiones del método, los siguientes ejemplos permitirán al lector intuir cualquier otra generalización.

Tres variables y una restricción. El método de los multiplicadores de Lagrange se puede extender en problemas de optimización de funciones de más de dos variable. Por ejemplo en el caso de tres variables el planteamiento es:

Optimizar $f(x,y,z)$ sujeta a $g(x,y,z)=0$

(Bien puede ser maximizar o minimizar) y para resolver el problema por multiplicadores de Lagrange se siguen los siguientes pasos:

1.- Defina

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z).$$

2.- Calcular los puntos críticos de $F(x,y,z,\lambda)$. Para ello plantee y resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \\ F_\lambda = 0 \end{cases}$$

Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.- Use los multiplicadores de Lagrange para encontrar los puntos críticos de $f(x,y,z) = x + y + 2z$ sujeto a la condición $x^2 + y^2 = z$.

Solución:

Paso 1.- La restricción la escribimos como

$$x^2 + y^2 - z = 0$$

En este caso $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$.

Definimos la función

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$$

$$F(x,y,z,\lambda) = x + y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 - z)$$

Paso 2.- Planteamos el sistema

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \\ F_\lambda = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 2x\lambda = 0 \\ 1 - 2y\lambda = 0 \\ 2 + \lambda = 0 \\ -(x^2 + y^2 - z) = 0 \end{cases}$$

Aprovechamos las peculiaridades de este sistema. Primero observe que el valor de λ se puede despejar de la tercera ecuación.

$\lambda = -2$ Sustituimos este valor en la primera y segunda ecuación obteniendo

$$\begin{cases} 1 - 2x(-2) = 0 \\ 1 - 2y(-2) = 0 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \end{cases}$$

Al despejar tenemos $x = -\frac{1}{4}$ y $y = -\frac{1}{4}$

Sustituimos los valores de *x* y *y* obtenidos en la tercera ecuación para obtener *z*.

$$z = x^2 + y^2$$

$$z = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$z = \frac{1}{8}$$

Así el punto $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$ es el único punto crítico del problema.

Comentario: Si se asume que el problema alcanza un extremo relativo, éste se puede clasificar tomando otro valor en la restricción, por ejemplo el punto (0,1,1) es un punto en la restricción porque satisface la ecuación $x^2 + y^2 = z$. Luego se evalúa este punto y el punto crítico en $f(x,y) = x + y + 2z$,

$f(0,1,1)=3$

$$f\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)=0$$

Como el valor de la función en el punto crítico es menor que en otro punto en la restricción concluimos que $f\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)=0$ es el valor mínimo en la restricción.

Dos restricciones. El método de los multiplicadores de Lagrange es aplicable cuando se tiene más de una restricción. En el caso de dos restricciones con tres variables podemos plantear el problema como

Optimizar $f(x,y,z)$ sujeta a $g_1(x,y,z)=0$ y $g_2(x,y,z)=0$

Cuando se tiene más de una restricción entonces por cada restricción aparece un nuevo Multiplicador. En este caso tendremos el multiplicador λ para la restricción g_1 y μ para g_2.

La función auxiliar queda definida por

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)-\lambda g_1(x,y,z)-\mu g_2(x,y,z).$$

y sus puntos críticos están dados por la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} F_x=0\\ F_y=0\\ F_z=0\\ F_\lambda=0\\ F_\mu=0 \end{cases}$$

Ejemplo 6.- Use los Multiplicadores de Lagrange para encontrar los puntos críticos de $f(x,y,z)=x+2yz$ sujeto a la condición $y+z=4$ y $x+y=2$.

Solución:

Paso 1.- Las restricciones las escribimos como

$y+z-4=0$ **y** $x+y-2=0$

En este caso $g_1(x,y,z)=y+z-4$ **y** $g_2(x,y,z)=x+y-2$

Definimos la función

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)-\lambda g_1(x,y,z)-\mu g_2(x,y,z)$$
$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=x+2yz-\lambda(y+z-4)-\mu(x+y-2)$$

Paso 2.- Planteamos el sistema $\begin{cases} F_x=0\\ F_y=0\\ F_z=0\\ F_\lambda=0\\ F_\mu=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 1-\mu=0\\ 2z-\lambda-\mu=0\\ 2y-\lambda=0\\ -(y+z-4)=0\\ -(x+y-2)=0 \end{cases}$$

Aprovechamos las peculiaridades de este sistema. Lo primero es que rápidamente vemos que $\mu=1$. Este valor lo sustituimos en la segunda y tercera ecuación y despejamos y y z.

$$z=\frac{\lambda+1}{2} \quad \text{y} \quad y=\frac{\lambda}{2}$$

Ahora sustituimos estas variables en la cuarta y quinta ecuación, quedando:

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda}{2}+\dfrac{\lambda+1}{2}-4=0 \\ x+\dfrac{\lambda}{2}-2=0 \end{cases}$$

De la primera ecuación planteada podemos obtener λ

$\lambda+\frac{1}{2}=4$ - Al despejar obtenemos $\lambda=\frac{7}{2}$. Sustituimos este valor en la última ecuación

$x=2-\frac{\frac{7}{2}}{2}$. Al resolver nos da $x=\frac{1}{4}$

De

$z=\frac{\lambda+1}{2}$ y $y=\frac{\lambda}{2}$

Obtenemos los valores de y y z

$z=\frac{9}{4}$ y $y=\frac{7}{4}$.

Finalmente concluimos que el único punto crítico del problema es $\left(\frac{1}{4},\frac{7}{4},\frac{9}{4}\right)$.

EJERCICIOS 5.9

1) Encuentre, por el método de los Multiplicadores de Lagrange, los puntos críticos de las funciones sujeto a las restricciones indicadas,

1.1) $f(x,y)=x^2+y^2-3,\quad x+2y=10$ **;** **1.2)** $f(x,y)=x^2-y^2,\quad x^2+y^2=9$ **;**

1.3) $f(x,y,z)=x^2+y^2+4z^2\quad 2x+y+2z=9$ **1.4)** $f(x,y)=e^{xy},\quad x^2+y^2=1$ **;**

1.5) $f(x,y,z)=x+y+z,\quad xyz=8$ **;** **1.6)** $f(x,y)=\ln(x^2+1),\quad x^2+y^2=1$ **;**

1.7) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2,\quad z^2+2x=y^2+1$ **;** **1.8)** $f(x,y)=xy^2,\quad x^2+y^2=1$ **;**

1.9) $f(x,y)=2x^2+y^2-3z^2,\quad 2x+y-3z=5;\quad 3x-2y-6z=1$ **.**

2) Use los multiplicadores de Lagrange para determinar los máximos y mínimos de las siguientes funciones con las restricciones dadas. (Asuma que en los puntos críticos se alcanzan extremos de la función) .

2.1) $f(x,y)=xy$ sujeto a $x+y=1$; **2.2)** $f(x,y)=x^2+y^2$ sujeto a $x+y=2$;

2.3) $f(x,y)=2x^2+y^2-xy$ sujeto a $x+y=4$; **2.4)** $f(x,y)=x^2+y^2$ sujeto a $xy=1$;

2.5) $f(x,y,z)=x^2-y^2+4z^2$ sujeto a $x+2y+z=0$; **2.6)** $f(x,y)=x+y$ sujeto a $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$;

2.7) $f(x,y,z)=x+y+z$ sujeto a $x^2+2y^2+3z^2=6$;

2.8) $f(x,y,z)=xy+xz$ sujeto a $x^2+z^2=2$; $xy=4$;

2.9) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ sujeto a $x+y+z=1$; $x+y+2z=4$.

Respuestas: 1.1) (2,4); **1.2)** (0,3),(0,-3) **1.3)** (3,3/2,3/4); **1.4)** $(1,1)$, $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$; **1.5)** (2,2,2); **1.6)** 1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1) ; **1.7)** (1/2,0,0); **1.8)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$,

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, (1,0),(-1,0); **1.9)** $\left(-1,\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$ **2.1)** $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ máximo relativo; **2.2)** $f(1,1)=2$ mínimo relativo; **2.3)** $f\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)=7$ mínimo relativo; **2.4)** $f(1,1)=$ $f(-1,-1)=2$ mínimo relativo**;2.5)** $f(0,0,0)=0$ mínimo relativo; **2.6)** $f(2,2)=4$ mínimo relativo: **2.7)** $f(2,1,0)=3$ máximo relativo., $f(-2,-1,0)=-3$ mínimo relativo;**2.8)** $f(1,4,1)=$ $f(-1,-4,-1)=5$ máximo relativo, $f(-1,-4,1)=$ $f(1,4,-1)=3$ mínimo relativo; **2.9)** $f(-1,-1,3)=11$ mínimo relativo.

PROBLEMAS DE ECONOMIA

1) Una empresa tiene dos plantas, planta 1 y planta 2, que fabrican un producto. La función de costo total está dada por: $C=f(q_1,q_2)=30q^2{}_1+0.4q_2^2-14q_1-5q_2+2000$, donde q_1 y q_2 son las unidades producidas por las plantas 1 y 2 respectivamente. Si la empresa tiene que surtir 200 unidades ¿Cómo distribuir la producción para minimizar costos? (Suponga que en los puntos críticos calculados se presenta un mínimo absoluto).**Respuesta:** $q_1=45$ y $q_2=15$ unidades.

2) La función de producción de una empresa es: $P(l,k)=-2l^2-k^2+20l+20k$. l costo de una unidad de mano de obra es 4 y el costo de una unidad de capital es 5. Si la empresa dispone sólo de 120 UM para invertir, ¿cómo distribuir la inversión entre mano de obra y capital de manera que la producción se haga máxima con esta restricción presupuestaria? **Respuesta:** *k*=580/33; *l*=265/33.

3) La función de producción de una empresa está dada por la función $P(l,k)=k^{2/3}l^{1/3}$. El costo de una unidad de mano de obra es 27 y el costo de una unidad de capital es 16. Si la empresa decide elaborar 900 unidades. ¿Cómo distribuir la inversión entre mano de obra y capital de manera de minimizar los costos totales con esta restricción presupuestaria?. ¿Cuál es el costo total mínimo? **Respuesta:** k=1350; l=400; $C_{\min}=32400$ UM.

4) Una empresa puede elaborar dos tipos de productos: X y Y. La utilidad unitaria del primer producto es de 4UM y del segundo es 6UM. Las cantidades de productos de tipos X y Y que puede producir la fábrica están relacionados por la ecuación de transformación de producto dada por $x^2+y^2+2x+4y-4=0$, donde x y y representan el número de número de unidades (en cientos) de X y Y respectivamente producidas semanalmente. ¿Cuántas unidades deben producirse de X y Y a fin de obtener la utilidad máxima? **Respuesta:** (x,y)= (0.664,0.496).

5) Una empresa dispone de 8000UM para invertir en desarrollo y publicidad. Se estima que si se invierte *x* UM en desarrollo y *y* UM en publicidad, habrá un consumo de $C(x,y)=100x^{1/2}y^{3/2}$. ¿Cómo se deberá distribuir este dinero para generar la máxima utilidad? **Respuesta:** *x*=2000, *y*=6000UM .

6) Una persona puede colocar su dinero en tres inversiones A, B, y C con un rendimiento de $\sqrt{p}$, $1.1\sqrt{p}$ y $1.15\sqrt{p}$ UM respectivamente. Una persona desea invertir 8.000UM en estas cuatro inversiones. ¿Cuánto deberá invertir en cada una de ellas a fin de maximizar el rendimiento de su dinero? **Respuesta:** Inversión en A = 2093.28, Inversión en C = 3598.87, Inversión en B = 2307.84.

7) Una empresa elabora dos tipos de teléfonos. Para el próximo mes tiene que producir 900 unidades entre los dos modelos. Se estima que la función de costos conjuntos de producir *x* unidades del primer tipo y *y* del segundo por mes está dada por $C(x,y)=5000+240x+300y-2xy$. ¿Cuántas unidades de cada tipo deberá producir a fin de minimizar los costos totales? **Respuesta:** $x=465$ y $y=435$.

8) Una empresario va a fabricar 600 artículos el próximo mes. El puede colocar su mercancía en tres ciudades distintas X, Y y Z. Las ecuaciones de demanda de este producto en cada ciudad se estima en $p_X=800-\frac{2q_X}{3}$; $p_Y=960-\frac{2q_Y}{5}$ y $p_Z=800-\frac{q_B}{4}$ ¿Cuántas artículos deberá enviar a cada ciudad para generar el mayor ingreso? **Respuesta:** $q_X=75; q_Y=325$ y $q_Z=200$ unidades.

PROBLEMAS DE REPASO DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS (con y sin restricción)

1) La función de producción de una empresa está dada por $P(l,k) = -2l^2 - 4k^2 + 3lk + 180l + 150k$,

a) ¿Cuál es el número de unidades de mano de obra y de capital que deberá emplearse a fin de maximizar la producción de la empresa? **b)** Si el costo de una unidad de mano de obra es 40 y el costo de una unidad de capital es 10 y la empresa vende todo lo que produce a 5UM la unidad ¿Cuántas unidades de capital y de mano de obra deberán invertirse a fin de maximizar la utilidad? ¿Cuál es la utilidad máxima? **c)** Si la empresa dispone sólo de 3000 UM para invertir, ¿cómo distribuir la inversión entre mano de obra y capital de manera que la utilidad se haga máxima? Considere los costos de la parte b . **Respuesta: 1a)** (82.17,49.56) ; **1b)** (79.2,48.2).

2) Suponga que se desea construir una caja rectangular. Para construir los lados laterales se empleará un material cuyo costo es de 1UM el m^2, para la tapa se utilizará un material con costo de 2UM el m^2 y para el fondo el costo de material es de 4UM el m^2. Si se dispone de 36UM ¿Cuáles son las dimensiones de la caja con mayor volumen? **Respuesta:** Dimensiones de la base**:** $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$. Altura= $3\sqrt{2}$ m.

3) Una compañía produce dos artículos competitivos A y B, donde las ecuaciones de demanda de los artículos están dadas por p_A= 700-2q_A-q_B y p_B= 200-q_A-5q_B. ¿Cuántos artículos debería vender de cada tipo con el objeto de maximizar el ingreso? **Respuesta: 3)** q_A=100/6; q_B=200/6 unidades.

4) Una empresa utiliza dos tipos de materias primas, A y B, en la elaboración de un producto. Usando *x* unidades de A y *y* unidades de B, la empresa puede elaborar *T* unidades de su producto, en donde $T = 2000 + 70x + 240y + 3xy - 4x^2 - 5y^2$. **a)** ¿Cuántas unidades de cada materia prima deberá utilizar la empresa a fin de maximizar su producción? **b)** Si le cuesta a la empresa 5UM la unidad de A y 7UM la unidad de B y la empresa puede vender todo lo que produce en 10UM la unidad, ¿qué cantidades de A y B maximizarán las utilidades de la empresa? **c)** Los costos de materias primas son como en la parte b) Si la empresa dispones de 250UM para materias primas. ¿Qué cantidades maximizarán la producción de la empresa? **d)** En la parte c), cuando las cantidades de las dos materias primas utilizadas están en sus niveles óptimos, demuestre que la razón de sus productividades marginales es igual a la razón de sus costos unitarios. **Respuesta**: **a)** 20 de A y 30 de B; **b)** {x = 199/10, y = 299/10}; **c)** 15 de A y 25 de B.

5) Un fabricante puede vender su producto exclusivo en tres mercados A, B y C. Las ecuaciones de demanda de este producto en cada mercado se estima en $p_A = 1200 - \frac{q_A}{4}$; $p_B = 1000 - \frac{q_B}{2}$ y $p_C = 800 - \frac{q_C}{2}$ .Si el fabrica 1000 artículos ¿Cuántas artículos deberá enviar a cada mercado para generar el mayor ingreso? **Respuesta:** (800,200,0).

6) Suponga que se desea construir una caja rectangular con capacidad de 0.35m^3. Para construir los lados laterales se empleará un material cuyo costo es de 10UM el m^2, para la tapa se utilizará un material con costo de 4UM el m^2 y para el fondo el costo de material es de 6UM el m^2. ¿Cuál es la dimensión de la caja menos costosa?

Respuesta: Dimensiones de la base**:** $2 \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{100}} x 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{100}}$. Altura= $\sqrt[3]{\frac{9}{100}}$.

7) Una red de encomienda está pensado en establecer una sucursal de distribución que preste servicio a las tres urbanizaciones A, B y C. El planificador a localizado las tres urbanizaciones en un sistema de referencia, teniendo cada urbanización las siguientes coordenadas A(2,3), B(0,0) y C(0,6). **a)** ¿En qué punto deberá situar la sucursal para que la suma de las distancias al cuadrado de la sucursal a las tres urbanizaciones sea mínima? Suponga (*x*,*y*) las coordenadas de la sucursal. **b)** Si se sabe que la mitad de los envíos corresponde a la ciudad A y la urbanización B y C tienen un cuarto de los pedidos cada una: ¿Qué criterio de minimización escogería usted? **Respuesta:** En el punto con coordenadas $(\frac{2}{3}, 3)$.

8) Maximizar $w = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$, donde $x > 0_i$, sujeto a $x_1 + \ldots + x_n = n$.

A partir de allí demostrar que el promedio geométrico siempre es menor o igual que el aritmético.

9) Una compañía aérea ha colocado la restricción que para los paquetes rectangulares la suma de las longitudes del alto y la diagonal de la base no sobrepase los 150 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del paquete con máximo volumen? **Respuesta:** Alto=50, largo= $50\sqrt{2}$ cm., ancho = $50\sqrt{2}$ cm.

10) Un inversionista puede invertir 250UM en dos fondos. El primero le cuesta 3UM la unidad y el segundo 5UM. Suponga que la utilidad obtenida por el inversionista al invertir *x* unidades del primero y *y* del segundo está dado por $u(x,y)= 50x^{1/4}y^{3/4}$. ¿Cuántas unidades debe invertir en cada fondo a fin de maximizar la utilidad? **Respuesta:** $x = 625/3; y = 375$ UM.

11) Una aerolínea cobra sobredimensiones a cualquier valija cuyas suma de dimensiones sea mayor a 100cm. Diga cuales son las dimensiones del paralelepípedo con más capacidad al que no se le cobra sobredimensiones. **Respuesta:** $\frac{100}{3} x \frac{100}{3} x \frac{100}{3}$ cm^3.

Problema 2.9) de esta sección fue resuelto con las siguientes instrucciones en **MAPLE**

Advertencia: Los ejercicios anteriores debieron ser resueltos sin usar computadora. Esta ejercitación le dará las destrezas algebraicas y de análisis que usted requiere y que es de exigencia en cualquier Universidad de mediano nivel. Sin embargo, hoy en día contamos con este software que le permitirá resolver problemas más complejos que los dados en esta sección.

```
> restart;
> f :=(x,y,z)-> x^2+y^2+z^2;
```
$$f := (x, y, z) \to x^2 + y^2 + z^2$$

```
> g1:=(x,y,z)->x+y+z-1;
```
$$g1 := (x, y, z) \to x + y + z - 1$$

```
> g2:=(x,y,z)->x+y+2*z-4;
```
$$g2 := (x, y, z) \to x + y + 2\,z - 4$$

```
> F:=(x,y,z,lambda1,lambda2)->f(x,y,z)-lambda1*g1(x,y,z)-
lambda2*g2(x,y,z);
```
$$F := (x, y, z, lambda1, lambda2) \to f(x, y, z) - \lambda1\; g1(x, y, z) - \lambda2\; g2(x, y, z)$$

```
> Fx :=diff(F(x,y,z,lambda1,lambda2),x);
```
$$Fx := 2\,x - \lambda1 - \lambda2$$

```
> Fy :=diff(F(x,y,z,lambda1,lambda2),y);
```
$$Fy := 2\,y - \lambda1 - \lambda2$$

```
> Fz :=diff(F(x,y,z,lambda1,lambda2),z);
```
$$Fz := 2\,z - \lambda1 - 2\,\lambda2$$

```
> F1 :=diff(F(x,y,z,lambda1,lambda2),lambda1);
```
$$F1 := -x - y - z + 1$$

```
> F2 :=diff(F(x,y,z,lambda1,lambda2),lambda2);
```
$$F2 := -x - y - 2\,z + 4$$

```
> solve({Fx,Fy,Fz,F1,F2});
```
$$\{y = -1, \lambda2 = 8, \lambda1 = -10, x = -1, z = 3\}$$