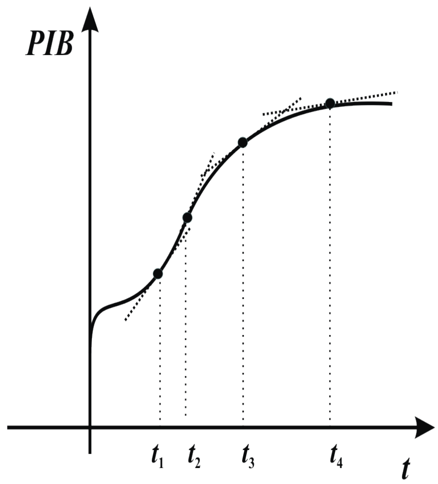
# DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

En esta sección trataremos particularmente sobre la razón de cambio de una razón de cambio. Este concepto está presente en la vida diaria. Medimos la velocidad a través de un velocímetro, recordemos que la velocidad es la razón de cambio o la derivada de la función desplazamiento. Si la velocidad se aumenta se dice que se está acelerando. La medida de este aumento es la aceleración (instantánea) y normalmente la interpretamos como el cambio aproximado de la velocidad en una unidad de tiempo, por ejemplo en un minuto. La aceleración (instantánea) es la derivada de la velocidad, esto es: la derivada de la derivada de la función desplazamiento.

En la figura de al lado está la gráfica de un modelo de predicción del PIB en el tiempo de cierto país. En ella se predice que el PIB aumentará. Por consiguiente la razón de cambio del PIB es positiva en todo momento. Sin embargo se observa que estos aumentos no siempre tiene la misma intensidad. Por ejemplo, el PIB en $t_1$ está acelerado, esto lo podemos visualizar a través de las pendientes de las rectas tangentes en $t_1$ y $t_2$. Recuerde que la pendiente de la recta tangente es la derivada de la función en el punto. La derivada en $t_2$ es mayor que la de $t_1$. En el momento $t_3$ el PIB está desacelerado, esto quiere decir que aún cuando el PIB está en aumento ya no lo hace con la misma intensidad de antes.




En esta discusión estamos interesados en la razón de cambio de la razón de cambio de cantidades relacionadas a la economía como el PIB.

La derivada de una función $f$ es también una función de $x$, la cual denotamos por $f'$, esta función pudiese derivarse, en tal caso sería también una función que denotamos por $f''$ y la llamamos las segunda derivada de $f$.

Ya hemos visto que la aceleración $a$ es la razón de cambio de la velocidad y ésta a su vez es la derivada de la función desplazamiento del objeto, así pues tenemos que

$$a(t) = d''(t)$$

Veremos posteriormente que la segunda derivada de $f$ será utilizada para obtener información valiosa de la función.

**Ejemplo 1.-** Encuentre $f''$ donde $f(x) = x\ln x$.
**Solución:** Se debe primero calcular la primera derivada, para luego derivarla:
Aplicando la regla del producto se tiene:

$$f'(x) = (x\ln x)' = \ln x + 1$$

Luego, al volver a derivar obtenemos la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{1}{x}.$$

Este proceso puede continuar para obtener la tercera, cuarta y más derivadas.

Las definiciones y diferentes notaciones están dadas en el siguiente recuadro:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $f'' = (f')'$ | $y''$ | $\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$ | $\frac{d^2y}{dx^2}$ | Segunda derivada |
| $f''' = (f'')'$ | $y'''$ | $\frac{d^3}{dx^3}[f(x)]$ | $\frac{d^3y}{dx^3}$ | Tercera derivada |
| $f^{(4)} = (f''')'$ | $y^{(4)}$ | $\frac{d^4}{dx^4}[f(x)]$ | $\frac{d^4y}{dx^4}$ | Cuarta derivada |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ | $y^{(n)}$ | $\frac{d^n}{dx^n}[f(x)]$ | $\frac{d^ny}{dx^n}$ | Enésima derivada |

Todas estas derivadas son llamadas derivadas de orden superior.

**Ejemplo 2.-** Encuentre todas las derivadas de orden superior de $f(x) = \frac{3x^4}{2} + 3x^2 + 1$

**Solución:** Reescribimos la función como $f(x) = \frac{3}{2}x^4 + 3x^2 + 1$

Se deriva usando la regla de la suma y del factor constante

$f'(x) = 6x^3 + 6x$; $f''(x) = 18x^2 + 6$; $f'''(x) = 36x$; $f^{(4)}(x) = 36$

$$f^{(n)}(x) = 0, \quad n \geq 5.$$

Las siguientes notaciones se usan para indicar el valor de las derivadas de orden superior en un punto particular:

$$f''(3)\,; \quad y^{(4)}(-1); \quad \frac{d^2}{dx^2}[f(x)]\Big|_{x=2} \quad \frac{d^5y}{dx^5}\Big|_{x=x_0}; \quad \frac{d^4}{dx^4}[\ln x - x]\Big|_{x=2}$$

**Ejemplo 3.-** Encuentre $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=2}$ donde $f(x) = 3\frac{e^2}{e^{3x}}$.

**Solución**: Reescribimos la función como $f(x) = 3e^{2-3x}$

Ahora conseguiremos la función segunda derivada, encontrando en un principio la primera derivada

$$f'(x) = 3e^{2-3x}(2-3x)'$$

$$f'(x) = -9e^{2-3x}$$ Se vuelve a derivar para conseguir la segunda deriva

$$f''(x) = 27e^{2-3x}$$

Luego evaluamos la función segunda derivada en -2.

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=-2} = f''(-2) = 27e^{2-3(-2)} = 27e^8$$

**Recomendaciones:**

- Considere reescribir antes de derivar.
- En el caso de logaritmos de potencias, cocientes o productos las derivaciones se simplifican notablemente si reescribimos usando las propiedades respectivas del logaritmo.
- Después de derivar y antes de la siguiente derivación considere reescribir.

**Ejemplo 4.-** Encuentre $f'''(x)$ donde $f(x)=\ln(\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2})$

**Solución**: Primero reescribimos la función usando las propiedades de logaritmos. Hay que resaltar que es tedioso realizar este ejercicio si no procedemos de esta manera.

$$f(x)=\ln(\sqrt{x})-\ln(x+1)^2$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln x-2\ln(x+1)$$

Podemos en este momento derivar de una manera rápida:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}-2\cdot\frac{1}{x+1}.$$ Antes de seguir derivando reescribimos

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot x^{-1}-2\cdot(x+1)^{-1}$$

Ahora rápidamente obtenemos la segunda y tercera derivada:

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\cdot x^{-2}+2\cdot(x+1)^{-2}$$

$$f'''(x)=x^{-3}-4\cdot(x+1)^{-3}$$

**Ejercicio de desarrollo.-** Encuentre $\frac{d^2h}{dz^2}$ donde $h(z)=\sqrt{e}+\ln\left(\frac{z+1}{\sqrt{(z+1)(2z+1)}}\right)$

## APLICACIONES

**Ejemplo 1.-** Se predice que una población a comienzos del año $t$ tendrá $P(t)=-t^3+8t^2+40t+190$ miles de habitantes. **a)** ¿Cuál será el crecimiento aproximado de la población en el quinto año según el modelo? Haga el cálculo aproximado usando el cálculo diferencial. **b)** ¿Cuál será la razón de cambio del crecimiento al comenzar el quinto año? **c)** Calcule el cambio real del crecimiento en el quinto año, dado por el modelo. **d)** Calcule la razón de cambio promedio del crecimiento en el primer semestre del quinto año

**Solución:**

**a)** Crecimiento es cambio en la población. Podemos estimar el cambio a través de la aproximación

$$\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=4}\approx\frac{P(5)-P(4)}{1}$$

Entonces se calcula la derivada de $P(t)$ y luego se evalúa en 4.

$$\frac{dP}{dt}=-3t^2+16t+40$$

$$\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=4}=\left.-3t^2+16t+40\right|_{t=4}=-48+64+40=56$$

La población crecerá en 56.000 habitantes aproximadamente en ese año.

**b)** En esta parte debemos calcular la segunda derivada de $P(t)$ y evaluarla en 4.

$$\frac{d^2P}{dt^2}=-6t+16$$

$\left.\frac{d^2P}{dt^2}\right|_{t=4}=\left.(-6t+16)\right|_{t=4}=-8$. El crecimiento en el quinto año estará desacelerándose aproximadamente en 8.000 habitantes en ese año con respecto al año anterior.

**c)** El cambio real en el crecimiento en el quinto año, dado por el modelo, viene expresado por:

$$\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=5}-\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=4}=\left.(-3t^2+16t+40)\right|_{t=5}-56=-75+80+40-56=-11 \text{ miles de habitantes por año.}$$

Observe que este cambio del crecimiento en el quinto año no es otra cosa que la razón de cambio promedio del crecimiento en el quinto año:

$$\frac{\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=5}-\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=4}}{1}$$

**d)** La razón de cambio promedio del crecimiento en el primer semestre del quinto está dado por:

$$\frac{\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=4.5}-\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=4}}{0.5}=\frac{\left.(-3t^2+16t+40)\right|_{t=4.5}-56}{0.5}=-9{,}5 \text{ hab/años}^2$$

**Ejemplo 2.-** El ingreso total por la venta de un producto es $I(q)=q(3000-100\ln q)$, donde $q$ es el número de unidades vendidas.

**a)** ¿Con qué tasa cambia el ingreso marginal cuando el número de unidades vendidas es 1000?

**b)** Interprete sus resultados.

**Solución:**

**a)** La tasa de cambio del ingreso marginal es la derivada del ingreso marginal. En otras palabras tenemos que derivar la función ingreso dos veces.

$$I'(q)=\left(q(3000-100\ln q)\right)'$$

$$I'(q)=3000-100\ln q-100=2900-100\ln q$$

Al derivar por segunda vez obtenemos

$$I''(q)=-\frac{100}{q}$$

Se tiene que evaluar esta tasa de cambio del ingreso marginal en $q=1000$.

$$I''(1000)=-0.1$$

**b)** El aumento en la producción lleva a una disminución del ingreso marginal. A un nivel de producción de 1.000 unidades, la unidad adicional disminuye su aporte al ingreso en aproximadamente 0.1UM con respecto a la anterior.

Recuerde que en ocasiones usamos la palabra tasa para referirnos a la razón de cambio o derivada.

## EJERCICIOS

**1)** Para las siguientes funciones halle las derivadas indicadas:

**1.1)** $y=2x^3-6x;\quad y''$; **1.2)** $y=4e^{x^2};\ \frac{d^2y}{dx^2}$; **1.3)** $f(q)=\frac{q+1}{q-1};\ \frac{d^2f}{dq^2}$;

**1.4)** $y=\ln(3x);\quad y'''$; **1.5)** $y=\frac{2}{3+x};\ \frac{d^4y}{dx^4}$; **1.6)** $y=\frac{2}{3-2x};\ \frac{d^4y}{dx^4}$;

**1.7)** $y=2x^{\frac{1}{2}}+(2x)^{\frac{1}{2}};\quad y''$; **1.8)** $y=4e^{-2x}+x^3;\ \frac{d^4y}{dx^4}$;

**1.9)** $f(x)=\ln(\sqrt{x(2x+1)})$; $\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$; **1.10)** $g(z)=\ln(\sqrt{\frac{z^3}{z+1}})+e;\ \frac{d^2g}{dz^2}$

**2)** Si $y = (3x - 1)^5$. Encuentre $\left.\frac{d^4y}{dx^4}\right|_{x=1}$

**3)** Si $f(x) = \sqrt{x}$. Encuentre $f''(4)$

**4)** Si $f(x) = \ln(\frac{x^2}{\sqrt{x-2}})$. Encuentre $\left.\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]\right|_{x=3}$

**5)** Se predice que una población en el tiempo $t$ tendrá $P(t) = 0.9t^2 + 0.3t + 1$ cientos de miles de habitantes. ¿Cuál es la aceleración en el tamaño de la población?

**Respuestas: 1.1)** $12x$; **1.2)** $8e^{x^2}(1+2x^2)$; **1.3)** $\frac{4}{(q-1)^3}$; **1.4)** $\frac{2}{x^3}$; **1.5)** $\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{48}{(3+x)^5}$;

**1.6)** $\frac{768}{(3-2x)^5}$ **1.7)** $-\frac{2+\sqrt{2}}{4\sqrt{x^3}}$; **1.8)** $64e^{-2x}$; **1.9)** $-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{4}{(2x+1)^2}\right]$; **1.10)** $-\frac{3}{2z^2} + \frac{1}{2(z+1)^2}$;

**2)** 19440 **3)**-1/32; **4)**5/18; **5)** 180.000

## PROBLEMAS DE ECONOMÍA

**1)** El ingreso por la venta de un producto es $I(q) = 12q + \frac{20}{3q+1} - 20$ donde $q$ es el número de unidades vendidas.

**a)** ¿Qué tan rápido cambia el ingreso marginal cuando el número de unidades vendidas es 15?

**b)** Interprete sus resultados. **Respuesta:** -15/529 UM/unidades$^2$;

**2)** El número de muñecas LA NENA que pueden ser vendidas en la época decembrina depende del gasto, $x$, en publicidad de acuerdo al siguiente modelo:

$$S(x) = \frac{20x}{x+3} \text{ miles de muñecas}$$

**a)** Encuentre la tasa de cambio del número de artículos vendidos con respecto al gasto en publicidad?

**b)** Use la segunda derivada para estimar como cambia esta tasa para $x$=7 UM.

**Respuesta: a)** $S'(x) = \frac{60}{(x+3)^2}$, **b)** -12/100 miles de muñecas/UM$^2$;

**3)** Con la aplicación de unas medidas económicas se prevee que el precio de un determinado bien siga el siguiente comportamiento en el tiempo:

$$p(t) = 5 + \frac{3t^2 + 4t}{t^2 + 1}$$

donde $t$ está medido en meses a partir que se implementan las medidas económicas.

**a)** Estime la tasa de cambio del precio del artículo y la razón de cambio de la tasa de cambio de los precios para dentro de un mes.

**b)** Estime la tasa de cambio del precio del artículo y la razón de cambio de la tasa de cambio de los precios para dentro de tres meses.

**c)** Interprete sus resultados. **Respuesta: a)** 3/2; **b)** -7/2UM/meses$^2$;

**4)** La cantidad de artículos que habrá producido un trabajador $t$ horas después de comenzar su jornada laboral está dado por

$$Q(t) = -t^3 + 6t^2 + 12t$$

- **a)** Calcule la tasa de producción a la hora de haber comenzado la jornada
- **b)** Calcule la razón de cambio de la tasa de producción a la hora de haber comenzado la jornada.
- **c)** Calcule el cambio promedio real de la tasa de producción durante los quince minutos después de la primera hora de trabajo. (Recuerde que 15 minutos es 0.25 horas)
- **d)** Interprete sus resultados

**Respuesta**: **a)** 21 unidades/horas **b)** 6 unidades/h$^2$; **c)** 5.25 unidades/h$^2$.

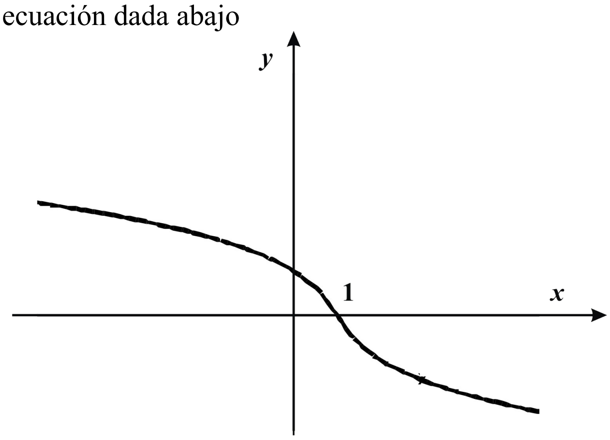
# DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Recordemos que una función es una regla que asigna a cada valor $x$ del dominio un solo valor $y$ del conjunto de llegada. Normalmente hemos expresado las funciones de una manera explícita a través de una fórmula

$$y = f(x)$$

pero no siempre es así. Por ejemplo una ecuación puede definir una función. Esto ocurre si la gráfica de la ecuación pasa la prueba de la recta vertical, es decir si cada recta vertical toca un solo punto de la gráfica de la ecuación.

Tenemos el caso de la ecuación $x + y^3 + y = 1$ que define una función, como puede analizarse a través del gráfico de la ecuación dada abajo



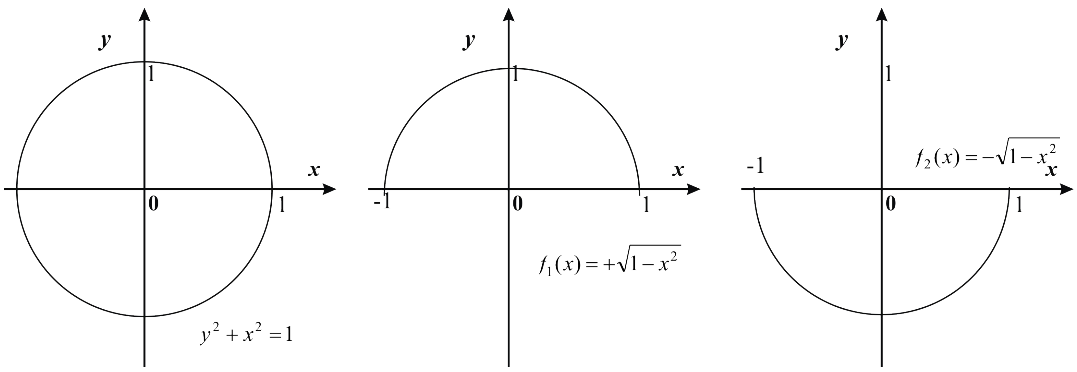

Observe que en esta ecuación es difícil expresar $y$ en función de $x$.

Cuando una función definida a través de una ecuación no está expresada en la forma $y = f(x)$ se dice que la función está definida implícitamente. Normalmente decimos que $y$ es una función implícita de $x$.

En otras ocasiones tenemos que una ecuación determina varias funciones como es el caso de la ecuación

$$y^2 + x^2 = 1$$

la cual tiene como representación gráfica una circunferencia




Aquí podemos interpretar que tenemos dos funciones $f_1(x) = +\sqrt{1 - x^2}$ y $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ .

Nuestro objetivo es derivar funciones dadas implícitamente. Más adelante cuando tengamos la técnica llamada derivación implícita veremos que ella podrá ser aplicada en las funciones definidas explícitamente.

Conviene aclarar que esta técnica no requiere despejar *y* en función de *x*. Es más, resulta a veces más difícil derivar *y* cuando es despejada que aplicando la técnica de derivación implícita.

Por ejemplo, la ecuación $y^5 + 2x^2y^5 - 3x^2 + 4x - 4 = 0$ define a *y* como función de *x*, donde podemos obtener la relación explícita despejando:

$$y = \left(\frac{3x^2 - 4x + 4}{1 + 2x^2}\right)^{1/5}$$

Podemos usar la expresión $y(x)$ para enfatizar que $y$ es una función de $x$. Así que en un comienzo pudiésemos escribir la relación como

$$y(x) = \left(\frac{3x^2 - 4x + 4}{1 + 2x^2}\right)^{1/5}$$

El lector se percatará, luego de desarrollar el ejemplo 2, que es más complicado obtener $y'(x)$ a través de las reglas vistas hasta ahora que usando la técnica de derivación implícita que presentamos.

**Método de derivación implícita**: El método considera a *y* como función de *x* de manera implícita dada a través de la ecuación y consiste básicamente en derivar con respecto a *x* ambos lados de la ecuación, usando la regla de la cadena cuando toque derivar $y(x)$. Luego se despejar $\frac{dy}{dx}$.

En el siguiente ejemplo sustituiremos $y(x)$ por $y$ y $\frac{d}{dx}(y(x))$ por $\frac{dy}{dx}$, para enfatizar que *y* es función implícita de *x*. Posteriormente no seremos tan reiterativos en este aspecto, incluso colocaremos $y'$ por $\frac{dy}{dx}$.

**Ejemplo 1.-** Sea $y^2 + x^2 = 1$, calcule $\frac{dy}{dx}$.

**Solución:** La ecuación la pensamos como $(y(x))^2 + x^2 = 1$.

Al derivar ambos lados de la ecuación con respecto a *x* tendremos en el lado izquierdo una suma, aplicamos la derivada de la suma, en el derecho tenemos una constante, su derivada es 0.

$$\frac{d}{dx}(y(x))^2 + \frac{d}{dx}(x^2) = 0$$

Para derivar $(y(x))^2$ con respecto a *x* usamos la regla de la cadena es su forma de potencia generalizada:

$$\frac{d}{dx}(y(x))^2 = 2y(x)\cdot\frac{d}{dx}(y(x)).$$

$$2y(x)\cdot\frac{d}{dx}(y(x)) + 2x = 0$$

Se despeja la derivada: $\frac{d}{dx}(y(x))$ queda

$$\frac{d}{dx}(y(x)) = \frac{-2x}{2y(x)}$$

Retomamos la notación $y$ por $y(x)$ y $\frac{dy}{dx}$ por $\frac{d}{dx}(y(x))$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

El lector habrá observado que la derivada depende tanto de *x* como de *y*.

**La clave** para entender y aplicar bien la técnica de derivación implícita es pensar en todo momento a *y* como función de *x*: $y(x)$.

**Observación:** Hay distintas maneras en que puede aparecer *y* en una ecuación. Por ejemplo algunos términos podrían ser $\sqrt{y}$ , $\ln(y+1)$, $e^{y^2}$ , $\sqrt{x\cdot y}$ . Para derivar estos términos recuerde que debemos siempre considerar *y* como función de *x*. Usamos la notación prima en algunos de los siguientes desarrollos, ya el lector debería estar claro que el prima indica derivación con respecto a *x*. En cada uno de estos ejemplos la derivada queda.

**1)** $\frac{d\sqrt{y}}{dx}=\frac{d(y^{1/2})}{dx}=\frac{1}{2}\cdot y^{-1/2}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'$. Se usó en $y^{1/2}=(y(x))^{1/2}$ la regla de la cadena en su forma de potencia generalizada

**2)** $\frac{d(\ln(y+1))}{dx}=\frac{1}{y+1}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y+1}\cdot y'$. Se usó en $\ln(y+1)=\ln(y(x)+1)$ la regla de la cadena en su forma $\ln(g(x))$.

**3)** $(e^{y^2})'=e^{y^2}(y^2)'=e^{y^2}\cdot 2y\cdot y'$ . Se usó en $e^{y^2}=e^{y^2(x)}$ la regla de la cadena en su forma $e^{g(x)}$, luego se volvió a usar la regla de la cadena en la forma de potencia generalizada en la expresión $y^2=\left(y(x)\right)^2$ .

**4)** Antes de derivar podemos reescribir usando la notación de exponente fraccionario y luego aplicando propiedades de exponentes

$$\left(\sqrt{x\cdot y}\right)'=\left((x\cdot y)^{1/2}\right)'=\left(x^{1/2}\cdot y^{1/2}\right)' \qquad \text{Para derivar usamos la regla del producto}$$

$$=(x^{1/2})'(y^{1/2})+(x^{1/2})(y^{1/2})'$$

$$=\frac{1}{2}x^{-1/2}(y^{1/2})+(x^{1/2})\frac{1}{2}y^{-1/2}y'\ .$$

**Alternativamente:** También se pudo derivar $(x\cdot y)^{1/2}$ usando la regla de la potencia generalizada.

**Ejemplo 2.-** Sea $y^5+2x^2y^5-3x^2+4x-4=0$ .

**a)** Determine $\frac{dy}{dx}$ por derivación implícita.

**b)** Despeje *y* en función de *x* y compruebe que $y=\left(\frac{3x^2-4x+4}{1+2x^2}\right)^{1/5}$ .

**c)** Determine $\frac{dy}{dx}$ derivando a $y=\left(\frac{3x^2-4x+4}{1+2x^2}\right)^{1/5}$ .

**d)** Compruebe que al evaluar la derivada en el punto $x=1$ en **a)** o en **b**) da el mismo resultado.

**Solución:**

**a)** Se deriva izquierda y derecha con respecto a *x*. Se usa la regla de la suma

$$(y^5)'+(2x^2y^5)'-(3x^2)'+(4x)'-(4)'=0$$

Usamos la regla de la cadena en $y^5$, en el segundo termino del lado izquierdo se usa la regla del producto, previamente se saca 2 de factor constante.

$$5y^4\cdot y'+2(2xy^5+x^2\cdot 5y^4\cdot y')-6x+4=0 \qquad \text{Eliminamos los paréntesis distribuyendo}$$

$$5y^4 \cdot y' + 4xy^5 + 10x^2y^4 \cdot y' - 6x + 4 = 0$$ Agrupamos los términos con $y'$ en un miembro de la ecuación y en el otro miembro los demás términos.

$$5y^4 \cdot y' + 10x^2y^4 \cdot y' = 6x - 4 - 4xy^5$$ Se saca $y'$ de factor común

$$(5y^4 + 10x^2y^4)y' = 6x - 4 - 4xy^5$$ Se despeja $y'$

$$y' = \frac{6x - 4 - 4xy^5}{5y^4 + 10x^2y^4}$$

**b)** En $y^5 + 2x^2y^5 - 3x^2 + 4x - 4 = 0$ agrupamos los términos con $y^5$ en un miembro de la ecuación y en el otro miembro los demás términos.

$$y^5 + 2x^2y^5 = 3x^2 - 4x + 4$$ Sacamos de factor común $y^5$

$$y^5(1 + 2x^2) = 3x^2 - 4x + 4$$ Despejamos

$$y^5 = \frac{3x^2 - 4x + 4}{1 + 2x^2}$$ Finalmente obtenemos

$$y = \left(\frac{3x^2 - 4x + 4}{1 + 2x^2}\right)^{1/5}$$

**c)** Para derivar esta función usamos la regla de la potencia generalizada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2 - 4x + 4}{1 + 2x^2}\right)^{1/5} = \frac{1}{5}\left(\frac{3x^2 - 4x + 4}{1 + 2x^2}\right)^{-4/5}\left(\frac{3x^2 - 4x + 4}{1 + 2x^2}\right)'$$ Derivamos como un cociente

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{3x^2 - 4x + 4}{1 + 2x^2}\right)^{-4/5} \frac{(6x - 4)(1 + 2x^2) - 4x(3x^2 - 4x + 4)}{(1 + 2x^2)^2}$$ Distribuimos

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{3x^2 - 4x + 4}{1 + 2x^2}\right)^{-4/5} \frac{6x + 12x^3 - 4 - 8x^2 - 12x^3 + 16x^2 - 16x}{(1 + 2x^2)^2}$$ .Agrupamos términos semejantes

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{3x^2 - 4x + 4}{1 + 2x^2}\right)^{-4/5} \frac{8x^2 - 10x - 4}{(1 + 2x^2)^2}.$$

**d)** Para calcular la derivada con la primera fórmula debemos calcular el valor de $y$ cuando $x = 1$. Para ello sustituimos el valor $x = 1$ en la ecuación y despejamos $y$

$$y^5 + 2 \cdot 1^2 y^5 = 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 4$$

$$3y^5 = 3$$ Se pasa 3 dividiendo y se toma raíz quinta de 1.

$$y = 1$$

Ahora calculamos la derivada evaluando en la fórmula obtenida en **a)**

$$y'(1,1) = \left.\frac{6x - 4 - 4xy^5}{5y^4 + 10x^2y^4}\right|_{x=1, y=1} = \frac{6 \cdot 1 - 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1^5}{5 \cdot 1^4 + 10 \cdot 1^2 \cdot 1^4} = \frac{-2}{15}$$

Calculamos la derivada usando la fórmula obtenida en **b)**

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\frac{1}{5}\left(\frac{3\cdot1^2-4\cdot1+4}{1+2\cdot1^2}\right)^{-4/5}\frac{8\cdot1^2-10\cdot1-4}{(1+2\cdot1^2)^2}=\frac{1}{5}\left(\frac{3}{3}\right)^{-4/5}\cdot\frac{-6}{9}=-\frac{2}{15}.$$

En este caso los dos procedimientos conducen al mismo resultado.

Los pasos dados en la parte **a)** de ejercicio anterior pueden servir en la mayoría de los casos para despejar $y'$. A continuación se puntualizan.

**Pasos recomendados para despejar** $y'$

**1)** Eliminar los paréntesis donde está $y'$. La idea es conseguir en ambos lados sumas de términos.

**2)** Agrupar los términos con $y'$ en un miembro de la ecuación y en el otro miembro los demás términos.

**3)** Sacar $y'$ de factor común en el miembro que tiene estos términos

**4)** Despejar $y'$

Estas recomendaciones son las mismas para despejar una variable en una ecuación lineal.

**Ejemplo 3.-** Sea $y+\sqrt{x+y}=1$. **a)** Determine $\frac{dy}{dx}$; **b)** Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función definida por la ecuación en el punto $(1,0)$.

**Solución:**

**a)** Se deriva izquierda y derecha

$$(y)'+\left((x+y)^{1/2}\right)'=1'$$

$$y'+\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2}(x+y)'=0$$

$$y'+\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2}(1+y')=0$$

Para despejar $y'$ seguimos los pasos dados arriba. Eliminamos los paréntesis donde está $y'$

$$y'+\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2}+\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2}y'=0$$

Agrupamos los términos en $y'$ de un lado y los otros en el otro lado

$$y'+\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2}y'=-\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2}$$

Se saca factor común $y'$

$$y'\left(1+\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2}\right)=-\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2}$$

Se despeja $y'$

$$y'=\frac{-\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2}}{1+\frac{1}{2\sqrt{x+y}}}$$

Se va a simplificar el lado derecho, para ello se suma los términos del denominador y luego se aplica la doble C

$$y'=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+y}}}{\frac{2\sqrt{x+y}+1}{2\sqrt{x+y}}}$$

$$y' = \frac{-1}{2\sqrt{x+y}+1}$$

**b)** Observe que el punto (1,0) satisface la ecuación $y+\sqrt{x+y}=1$. Para conseguir la ecuación de la recta tangente en este punto debemos primero conseguir la pendiente que no es otra cosa que la derivada en este punto.

$$y'(1,0) = \left.\frac{-1}{2\sqrt{x+y}+1}\right|_{x=1,y=0} = -\frac{1}{2\sqrt{1+0}+1} = -\frac{1}{3}.$$

Falta ahora establecer la recta que pasa por (1,0) y tiene pendiente $-\frac{1}{3}$. Para ello recurrimos a la ecuación punto-pendiente

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Al sustituir tenemos

$$y - 0 = -\frac{1}{3}(x-1)$$

Reescribiéndola en la forma pendiente-ordenada en el origen queda

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}.$$

**Ejercicio de desarrollo.-** Sea $\ln(xy)+\sqrt{xy}=x$. **a)** Determine $\frac{dy}{dx}$; **b)** Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función definida por la ecuación en el punto (1,1).

**Ejemplo 4.-** La ecuación $(x+1)^{5/3} - y^{5/3} = y$ define a $y$ como una función de $x$. ¿En qué puntos de la gráfica de la función la recta tangente es horizontal?

**Solución**: Se debe calcular $\frac{dy}{dx}$ y luego plantear donde esta derivada vale 0.

Primero se deriva implícitamente

$$\frac{d}{dx}((x+1)^{5/3}) - \frac{d}{dx}(y^{5/3}) = \frac{d}{dx}(y)$$

$$\frac{5}{3}(x+1)^{2/3} - \frac{5}{3}y^{2/3}\cdot y' = y'$$

Para despejar $y'$ se pasan los términos en $y'$ de un lado de la ecuación y los otros en el otro miembro.

$$\frac{5}{3}(x+1)^{2/3} = y' + \frac{5}{3}y^{2/3}\cdot y' \qquad \text{Se saca de factor común } y'$$

$$\frac{5}{3}(x+1)^{2/3} = y'(1+\frac{5}{3}y^{2/3}) \qquad \text{Se despeja } y'$$

$$y' = \frac{\frac{5}{3}(x+1)^{2/3}}{(1+\frac{5y^{2/3}}{3})}$$

Se suman los términos del denominador, se aplica la doble C y se simplifica

$$y' = \frac{5(x+1)^{2/3}}{(3+5y^{2/3})}$$

Queda plantear y resolver la ecuación $y' = 0$. Esto es

$$\frac{5(x+1)^{2/3}}{(3+5y^{2/3})} = 0.$$

Una fracción es cero sólo si el numerador es cero. Así que la solución de esta ecuación la conseguiremos resolviendo esta otra

$$5(x+1)^{2/3} = 0$$

$$(x+1)^{2/3} = 0$$

$$\left((x+1)^{2/3}\right)^{3/2} = 0^{3/2}$$

$$x+1 = 0$$

$$x = -1$$

Para conseguir exactamente los puntos sustituimos este valor en la ecuación $(-1+1)^{5/3} - y^{5/3} = y$, queda $-y^{5/3} = y$, ésta la resolvemos por factorización:

$$y + y^{5/3} = 0$$

$$y(1+y^{2/3}) = 0$$

Este producto es cero cuando $y = 0$ ó $1+y^{2/3} = 0$, la segunda ecuación no tiene solución. Así que el único punto donde la recta tangente a la curva es horizontal es el punto $(-1,0)$.

# APLICACIONES AL CÁLCULO

En el primer tema no habíamos demostrado que la derivada de funciones de la forma $y = x^{1/n}$, mediante derivación implícita lo podemos justificar rápidamente.

**Ejemplo 1.-** Usando derivación implícita demostrar que la derivada de $y = x^{1/n}$ es $y' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.

**Solución:** La relación $y = x^{1/n}$ es equivalente a $x = y^n$. En esta última relación le aplicamos derivación implícita y obtenemos $1 = ny^{n-1}y'$. Despejamos $y'$

$$y' = \frac{1}{ny^{n-1}}$$

Sustituimos $y$ por $x^{1/n}$

$$y' = \frac{1}{n\left(x^{1/n}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}\frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}}$$

$$y' = \frac{1}{n}x^{-(1-\frac{1}{n})} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

## DERIVADA DE LA FUNCION INVERSA

Una aplicación importante de la derivación implícita es que nos permite obtener una fórmula para la derivada de la función inversa, asumiendo que la derivada de esta última existe.

Sea $y = f(x)$, denotemos por $f^{-1}$ la función inversa de $f$ y asuma que es diferenciable. Escribimos $x = f^{-1}(y)$, se quiere calcular $\frac{dx}{dy}$, para ello derivamos implícitamente $y = f(x)$ con respecto a $y$, recordando en todo momento que ahora se tiene que $x$ es función de $y$, esto es $x = x(y)$.

$$\frac{d}{dy}(y) = \frac{d}{dy}(f(x(y)))$$

Se usa la regla de la cadena en su forma $\frac{df(u)}{dy} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dy}$, quedando

$$1 = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dy}$$

Al despejar $\frac{dx}{dy}$ se obtiene

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}}$$

## APLICACIÓN A LA ECONOMÍA

**Ejemplo 1.-** La ecuación de demanda de un determinado producto está dada por $pe^q + 3p = 3e^{q/3}$, donde $q$ está dado en miles de unidades, para $p > 1$. Determine **a)** $\frac{dq}{dp}$ **; b)** $\frac{dp}{dq}$

**Solución:**

**a)** $$\frac{d}{dp}(pe^q) + \frac{d}{dp}(3p) = \frac{d}{dp}(3e^{q/3})$$

$$\frac{dp}{dp} \cdot e^q + p \cdot \frac{d}{dp}(e^q) + 3 = 3\frac{d}{dp}(e^{q/3})$$

$$e^q + p \cdot e^q \frac{dq}{dp} + 3 = 3e^{q/3} \frac{d}{dp}(\frac{q}{3})$$

$$e^q + p \cdot e^q \frac{dq}{dp} + 3 = e^{q/3} \frac{dq}{dp}$$

Se agrupa los términos con $\frac{dq}{dp}$ en un miembro de la ecuación

$$e^q + 3 = e^{q/3} \frac{dq}{dp} - p \cdot e^q \frac{dq}{dp}$$

Se saca $\frac{dq}{dp}$ de factor común:

$$e^q + 3 = (e^{q/3} - p \cdot e^q)\frac{dq}{dp}$$

Se despeja $\frac{dq}{dp}$

$$\frac{dq}{dp} = \frac{e^q + 3}{e^{q/3} - pe^q}$$

**b)** En la parte a) se veía $q$ como función de $p$, esto es $q = q(p)$. También $p$ puede ser vista como una función de $q$. Si es así, la función $p$ es la función inversa de $q = q(p)$. Usamos entonces la relación reciproca entre las derivadas para obtener la derivada de $\frac{dp}{dq}$.

$$\frac{dp}{dq} = \frac{1}{\dfrac{e^q + 3}{e^{q/3} - pe^q}}$$

$$\frac{dp}{dq} = \frac{e^{q/3} - pe^q}{e^q + 3}$$

## EJERCICIOS

**1)** Encuentre $dy/dx$ por derivación implícita

**1.1)** $4y^4 - 5x^4 = 1$; **1.2)** $xy + y^2 = 3$; **1.3)** $x^2y + xy^2 = 4$;

**1.4)** $\sqrt{xy} + \sqrt{x}y = x^2$; **1.5)** $y + x^2e^{3y} = x$; **1.6)** $3x^2 + 3y^2 + e^{x+y} = 0$;

**1.7)** $y^2 + 3\ln(xy) = x$; **1.8)** $(2y^2 - 3x)^4 = y$; **1.9)** $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = y$

**1.10*)** $y^2 + \ln(x + y) = x$; **1.11*)** $\sqrt{x^2 + y} = y + x$; **1.12*)** $\frac{x + y}{y + 1} = x^2 + x$

(* Cuando se quiere despejar una cantidad en una ecuación con denominadores se recomienda multiplicar ambos lados de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores)

**2)** Encuentre la pendiente de la recta tangente de la curva $y^2 = \ln(x + y) + 1$ en el punto (0,1)

**3)** Para las siguientes ecuaciones encuentre la recta tangente a la curva en el punto dado

**3.1)** (0,2): $x^2 + y^2 - 16xy = 4$ **3.2)** (2,-1) $(1 + x + y^5)^3 = 2x^2$; **3.3)** $(e,1)$; $2y - \ln(xy) = 1$

**4)** Para cada una de las siguientes ecuaciones encontrar los puntos en que la recta tangente a la curva en ese punto es horizontal

**4.1)** $x^2 + y^2 = 2y + 3$; **4.2)** $y^3 - y + x^2 - 2x + 1 = 0$; **4.3)** $e^y - 2y = x^2 + 1$

**5)** Encuentre la ecuación (ecuaciones) de la recta tangente a la curva $y^3 - y = x - 2$ en los puntos donde $x$=2.

**Respuestas: 1.1)** $\frac{5}{4}\left(\frac{x}{y}\right)^3$ **;1.2)** $-\frac{y}{x + 2y}$ **1.3)** $-\frac{2xy + y^2}{2xy + x^2}$ **; 1.4)** $-\frac{y + y\sqrt{y} - 4x\sqrt{x}\sqrt{y}}{x(1 + 2\sqrt{y})}$

**1.5)** $\frac{1 - 2xe^{3y}}{1 + 3x^2e^{3y}}$ **; 1.6)** $-\frac{6x + e^{x+y}}{6y + e^{x+y}}$ **1.7)** $\frac{y(x - 3)}{x(2y^2 + 3)}$ **; 1.8)** $\frac{12(2y^2 - 3x)^3}{16y(2y^2 - 3x)^3 - 1}$

**1.9)** $\dfrac{y^2}{x^2 - x^2y^2}$ **; 1.10)** $\dfrac{x + y - 1}{2xy + 2y^2 + 1}$ **; 1.11)** $\dfrac{2x - 2\sqrt{x^2 + y}}{2\sqrt{x^2 + y} - 1}$ **; 1.12)** $\dfrac{2xy + 2x + y}{1 - x - x^2}$

**2)** $y = x + 1$ **3.1)** $y = 8x - 2$ **; 3.2)** $15y + x + 13 = 0$ ; **3.3)** $ey - x = 0$

**4.1)** $(0,-1);(0,3)$ **4.2)** $(1,1),(1,-1)$ y $(1,0)$ ; **4.3)** $(0,0)$.

**5)** $y - 1 = 0.5(x - 2)$ **;** $y + 1 = 0.5(x - 2)$ **;** $y = -x + 2$

**PROBLEMAS DE ECONOMÍA**

**1)** (Curva de transformación de un producto). Una fabrica puede hacer *x* gaveras de refrescos tipo A y *y* gaveras de refrescos tipo B al día. Las variables *x* y *y* están relacionadas por la ecuación

$$y^2 + xy + x^2 = 7(1.000)^2$$

Actualmente la fabrica esta produciendo 1.000 gaveras tipo A y 2.000 gaveras tipo B. **a)** Calcule $dy/dx$ para los niveles actuales de producción. **b)**Interprete sus resultados. **Respuesta:** $-\dfrac{4}{3}$ gaveras/día.

**2)** La demanda de cierto producto es de *q* unidades cuando el precio fijado al consumidor es *p* UM en donde

$$q^2 + p^2 + 250q + 30p = 40.000$$

**a)** Calcule $\dfrac{dq}{dp}$. **b)** Calcule $\dfrac{dp}{dq}$. **c)** Pruebe que son reciprocas una de la otra. **d)** Estime como cambiará la demanda cuando el precio establecido en 10UM se aumente una unidad. **Respuesta: a)** $\dfrac{dq}{dp} = -\dfrac{p + 150}{q + 125}$, **d)** $-\dfrac{5}{47}$

**3)** La ecuación de oferta de un determinado artículo está dada por $p^2 + 2p - q^2 - 4q = 3$. **a)** Calcule $\dfrac{dq}{dp}$ **b)** Calcule $\dfrac{dp}{dq}$. **c)** Pruebe que son reciprocas una de la otra. **d)** Estime como cambiará la oferta cuando el precio establecido en 10UM se aumente una unidad. **Respuesta: a)** $\dfrac{dq}{dp} = \dfrac{p + 1}{q + 2}$; **d)** 1

**4)** Una embotelladora tiene como función de producción $P = 100x^{0.3}y^{0.7}$, donde $P$ son miles de gaveras que produce a la semana. La variable *x* representa la cantidad de empleados y *y* es el presupuesto diario de operación. El nivel de producción es de 200.000 gaveras a la semana. **a)** Determine $dy/dx$; **b)** Calcule esta derivada en *x*=100; **c)** Interprete este resultado. **Respuesta: b)** -31.

# DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

Para derivar funciones que se escriben como productos, cocientes y potencias (radicales) se puede emplear la técnica de derivación logarítmica, resultando en muchas ocasiones un procedimiento más sencillo que la derivación normal. Particularmente se la usa para derivar las formas $\left(f(x)\right)^{g(x)}$ Esta técnica se basa en la derivación implícita y en las reescrituras de la función a derivar usando las propiedades de los logaritmos. Veamos concretamente los pasos de la diferenciación logarítmica.

**Pasos para calcular la derivada de $y = f(x)$ usando derivación logarítmica:**

**1.-** Tome logaritmo a ambos lados de la ecuación.

$$\ln(y) = \ln(f(x))$$

**2.-** Desarrolle el logaritmo del lado derecho usando las propiedades de los logaritmos del producto, cociente y potencia.

**3.-** Derive implícitamente la ecuación obtenida en el paso 2 para obtener $\frac{dy}{dx}$.

(Observe que siempre va a realizar los siguientes pasos:

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = G(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y\cdot G(x) \ ,$$

donde $G(x)$ es una función que sólo depende de $x$.)

**4.-** Sustituya $y$ por $f(x)$ en $\frac{dy}{dx} = y\cdot G(x)$ a fin que la derivada le quede expresada en términos sólo de $x$.

**Ejemplo 1.-** Sea $y = \frac{(x-1)^2(x^2-1)}{\sqrt[3]{x(x-2)}}$. Determine $\frac{dy}{dx}$ por derivación logarítmica

**Solución:** Seguimos los pasos indicados arriba

**1.-** Se toma logaritmo a ambos lados de la ecuación.

$$\ln(y) = \ln(f(x))$$

$$\ln(y) = \ln\left(\frac{(x-1)^2(x^2-1)}{\sqrt[3]{x(x-2)}}\right)$$

**2.-** Se desarrolla el logaritmo del lado derecho usando las propiedades de los logaritmos del producto, cociente y potencia.

$$\ln(y) = \ln((x-1)^2(x^2-1)) - \ln(x(x-2))^{1/3}$$

$$\ln(y) = \ln(x-1)^2 + \ln(x^2-1) - \frac{1}{3}\ln(x(x-2))$$

$$\ln(y) = 2\ln(x-1) + \ln(x^2-1) - \frac{1}{3}\left(\ln(x) + \ln(x-2)\right)$$

$$\ln(y) = 2\ln(x-1) + \ln(x^2-1) - \frac{1}{3}\ln(x) - \frac{1}{3}\ln(x-2)$$

**3.-** Se deriva implícitamente para obtener $\dfrac{dy}{dx}$.

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x^2-1}\cdot(x^2-1)'-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2}$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x-1}+\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3(x-2)}$$ Se despeja $\dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{2}{x-1}+\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3(x-2)}\right).$$

**4.-** Sustituya $y$ por $f(x)$ a fin que la derivada le quede expresada en términos sólo de $x$. Así finalmente obtenemos

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-1)^2(x^2-1)}{\sqrt[3]{x(x+1)}}\cdot\left(\frac{2}{x-1}+\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3(x-2)}\right)$$

El lector debería por lo menos plantear las primeras líneas de la derivada de la función dada en el ejercicio anterior sin usar esta técnica para apreciar las ventajas de la derivación logarítmica.

**Comentario:** Este atento de las siguientes situaciones para las formas $(f(x))^{g(x)}$ y como proceder:

1. La derivación logarítmica se usa para obtener las derivadas de las formas $(f(x))^{g(x)}$, donde tanto la base como el exponente depende de *x*. Algunos ejemplos de esta forma son $y=(1+2x)^{3x}$; $y=(\sqrt{x})^{1/x}$; $y=(x^2)^{\sqrt{x}+1}$.
2. Si la base no depende de *x* tenemos la forma exponencial $y=(k)^{g(x)}$ y en este caso es más rápido usar la fórmula para este caso: $y'=(k)^{g(x)}g'(x)\ln k$. Por ejemplo $y=(4)^{3x-1}$ tiene esta forma y su derivada puede ser obtenida inmediatamente usando esta formula: $y'=(4)^{3x-1}\cdot 3\cdot\ln 4$.
3. Si el exponente no depende de *x* tenemos la forma de la potencia generalizada $y=(g(x))^k$. Por ejemplo $y=(1+x)^{\sqrt{2}}$ tiene está forma y usando la regla de la potencia generalizada obtenemos rápidamente que $y'=\sqrt{2}(1+x)^{\sqrt{2}-1}$.

**Ejemplo 2**.- Encuentre $\dfrac{dy}{dx}$ para **a)** $y=(\sqrt{x})^{1/x}$; **b)** $y=(3)^{4x-1}$; **c)** $y=(1+x)^{\sqrt{2}}$

**Solución:**

**a)** $y=(\sqrt{x})^{1/x}$ es de la forma $(f(x))^{g(x)}$. Tanto la base como el exponente depende de *x*. Empleamos derivación logarítmica para encontrar la derivada.

**1.-** $\ln y=\ln(\sqrt{x})^{1/x}$ Se tomó logaritmo a ambos lados de la ecuación

**2.-** $\ln y=\dfrac{1}{2x}\ln(x)$ Se aplicó propiedades del logaritmo en el lado derecho

$\ln y=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\ln(x)}{x}$ Se reescribió para derivar como un cociente

**3.-** $\dfrac{1}{y}y'=\dfrac{1}{2}\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln(x)\cdot 1}{x^2}$ Se derivó implícitamente

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1-\ln(x)}{2x^2}$$ Se despeja $y'$

$$y' = y\cdot\frac{1-\ln(x)}{2x^2}$$

**4.-** $$y' = (\sqrt{x})^{1/x}\cdot\frac{1-\ln(x)}{2x^2}$$ Se sustituyó $y$ por su formula

**b)** $y = (3)^{4x-1}$ es de la forma $y = (k)^{g(x)}$. Podemos derivar usando la fórmula dada anteriormente para esta forma o alternativamente podemos usar derivación logarítmica.

Usamos la fórmula $y' = (k)^{g(x)}(g(x))'\ln k$

$$y' = (3)^{4x-1}(4x-1)'\ln 3$$

$$y' = (3)^{4x-1}\cdot 4\cdot\ln 3$$

**c)** $y = (1+x)^{\sqrt{2}}$ es de la forma $y = (g(x))^k$, con $k = \sqrt{2}$. Conviene sin duda aplicar la regla de la potencia generalizada: $y' = k(g(x))^{k-1}\cdot g'(x)$

$$y' = \sqrt{2}(1+x)^{\sqrt{2}-1}\cdot(1+x)' = \sqrt{2}(1+x)^{\sqrt{2}-1}$$

**Comentario:** En b) y c) resulta más largo y tedioso calcular esta derivada usando derivación logarítmica. La fórmula de la potencia generalizada debe ser conocida por el estudiante, pues es de uso frecuente. En el caso de la forma exponencial eventualmente se puede usar derivación logarítmica

**Alternativa 2 para b).-** Derivación logarítmica

**1.-** Se toma logaritmo a ambos lados de la ecuación.

$$\ln(y) = \ln(f(x))$$

$$\ln(y) = \ln\left(3^{4x-1}\right)$$

**2.-** Se desarrolla el logaritmo del lado derecho usando las propiedades de los logaritmos del producto, cociente y potencia. En este caso usamos la propiedad del logaritmo de una potencia.

$$\ln(y) = (4x-1)\ln(3)$$

**3.-** Se deriva implícitamente para obtener $\frac{dy}{dx}$. En el lado derecho usamos la regla del factor constante: $\ln(3)$ sale fuera de la derivación.

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = (4x-1)'\ln(3)$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = 4\cdot\ln(3)$$

$$\frac{dy}{dx} = 4\cdot\ln(3)\cdot y$$

**4.-** Se sustituye $y$ por $f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = 4\cdot\ln(3)\cdot(3)^{4x-1}$$

**Ejercicio de desarrollo.-** Diga como derivaría las siguientes funciones:
**a)** $y=(2x)^{\ln 2}$; **b)** $y=(1+e)^{1/x}$; **c)** $y=(2x)^{1/x}$ ; **d)** $y=x^{2x}+x^{2}$

Observe que d) no es producto, ni cociente ni potencia, así que no se puede usar las propiedades del logaritmo en principio. Para determinar la derivada se usa primero la regla de la suma. La derivada del primer termino se calcula aparte usando derivación logarítmica.

**Ejercicio de desarrollo.-** Determine $dy/dx$ por derivación logarítmica donde $y=x(2x+1)^{2/x}$;

## EJERCICIOS

**1)** Encuentre $dy/dx$ por derivación logarítmica

**1.1)** $y=(4x-1)^2(3x+5)(2x-1)$; **1.2)** $y=\dfrac{(x^2+1)}{x(x-1)}$; **1.3)** $y=\sqrt{\dfrac{x(3x-1)}{x^2+1}}$;

**1.4)** $y=(x-1)^2\sqrt{\dfrac{(3x+1)^3}{x}}$; **1.5)** $y=2\cdot\sqrt[4]{\dfrac{x^4+1}{x^4-1}}$;

**1.6)** $f(x)=\sqrt[3]{3x+1}\sqrt{2x+1}\sqrt{(9-x)}$; **1.7)** $y=\sqrt{\dfrac{2\left((3x-1)(4x+1)\right)}{e^{4x}(2x-1)^2}}$

**2)** Para las siguientes funciones encuentre $dy/dx$

**2.1)** $y=(2x-1)^{3x}$; **2.2)** $y=(1+x)^{1/x}$; **2.3)** $y=(1+x^2)^{x^2}$;

**2.4)** $y=(2)^{3x}$; **2.5)** $y=x^{\ln x}$; **2.6)** $y=(xe^{-x^2})^{1/x}$

**2.7)** $y=\left(\dfrac{3}{x}\right)^{3x}+x$; **2.8)** $y=x^{\ln 3}$; **2.9)** $y=(e^{-x^2})^{1/x}$

**3)** Encuentre la recta tangente a la curva $y=(2x)^{\ln x+1}$ en el punto (1,2)

**Respuestas:**

**1.1)** $(4x-1)^2(3x+5)(2x-1)\left[\dfrac{8}{4x-1}+\dfrac{3}{3x+5}+\dfrac{2}{2x-1}\right]$; **1.2)** $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)}-\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2}$

**1.3)** $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x(3x-1)}{x^2+1}}\left[\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{3x-1}-\dfrac{2x}{x^2+1}\right]$; **1.4)** $y'=(x-1)^2\sqrt{\dfrac{(3x+1)^3}{x}}\left(\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{9}{2(3x+1)}-\dfrac{1}{2x}\right)$;

**1.5)** $\dfrac{-4x^3}{x^8-1}\sqrt[4]{\dfrac{x^4+1}{x^4-1}}$; **1.6)** $\sqrt[3]{3x+1}\sqrt{2x+1}\sqrt{9-x}\left[\dfrac{1}{3x+1}+\dfrac{1}{2x+1}-\dfrac{1}{2(9-x)}\right]$;

**1.7)** $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2\left((3x-1)(4x+1)\right)}{e^{4x}(2x-1)^2}}\left[\dfrac{3}{3x-1}+\dfrac{4}{4x+1}-4-\dfrac{4}{2x-1}\right]$;

**2.1)** $(2x-1)^{3x}(3\ln(2x-1)+\dfrac{6x}{2x-1})$ ; **2.2)** $(1+x)^{1/x}(-\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}+\dfrac{1}{x(x+1)})$;

**2.3)** $(1+x^2)^{x^2}(2x\ln(1+x^2)+\dfrac{2x^3}{1+x^2})$ **2.4)** $3(\ln 2)2^{3x}$**; 2.5)** $x^{\ln x}\cdot\dfrac{2\ln x}{x}$

**2.6)** $(xe^{-x^2})^{1/x}(\dfrac{1-\ln x}{x^2}-1)$**; 2.7)** $\left(\dfrac{3}{x}\right)^{3x}\left(3\ln\left(\dfrac{3}{x}\right)-3\right)+1$; **2.8)** $\ln 3\cdot x^{\ln 3-1}$;

**2.9)** $-e^{-x}$; **3)** $y-2=\ln(4e^2)(x-1)$

# DIFERENCIALES

## APROXIMACIÓN LINEAL

Sea $f$ una función derivable en un punto $x_0$. En muchos ejemplos se ha visto como la recta tangente de la función $f$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ aproxima a la gráfica de la función en puntos $x$ cercanos a $x_0$. En esta sección usaremos la recta tangente a la gráfica de una función en un punto para estimar valores numéricos de la función. En el primer ejemplo veremos como ocurre esta aproximación de los valores de *f.*

Recuerde que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(x_0, f(x_0))$ es la derivada de *f* en el punto $x_0$ y la ecuación de la recta tangente está dada por

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

En el siguiente ejemplo calcularemos valores de la función y valores *y* de la recta tangente en puntos cercanos a un punto $x_0$.

**Ejemplo 1.-** Considere la función $f(x) = 1 + x^4$. **a)** Calcular la recta tangente en $x_0 = 1$. **b)** Usar la recta tangente para aproximar la función en 0.9; 0.95; 0.99; 1, 1,01; 1.05 y 1.1. **c)** Calcular el valor exacto de la función en estos puntos por medio de una calculadora

**Solución:**

**a)** Para calcular la recta tangente primero calculamos la pendiente. Tenemos que

$$f'(x) = 4x^3 \quad \text{y} \quad f'(1) = 4$$

Por otro lado tenemos que $f(1) = 2$.

Así que la recta tangente está dada por $y - 2 = 4(x - 1)$**.** Su forma pendiente ordenada al origen es:

$$y = 4x - 2$$

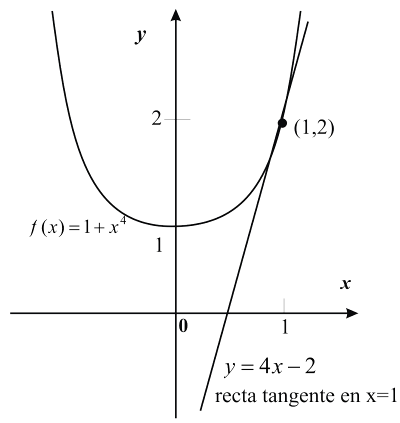
**b)** Para hacer esta parte tenemos que evaluar la recta en cada uno de estos valores.

Por ejemplo en $x = 0.9$**,** tenemos que $y = 4(0.9) - 2 = 1.6$.

Podemos chequear en la calculadora que $f(0.9) = 1 + (0.9)^4 = 1.6561$. Note que el valor de la recta en 0.9 y el de la función en este mismo valor de *x* son iguales hasta en su primer decimal. (segunda cifra significativa)

La siguiente tabla contiene los valores de *f* y *y* de la recta pedidos

| $x$ | 0.9 | 0.95 | 0.99 | 1 | 1.01 | 1.05 | 1.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *y*(recta) | 1.6 | 1.8 | 1.96 | 2 | 2.04 | 2.02 | 2.4 |
| $f(x)$ | 1.6561 | 1.8145 | 1.9606 | 2 | 2.0406 | 2.2155 | 2.4641 |




Observe que conforme $x$ está más cerca de 1, el valor $y$ de la recta en ese $x$ está más cerca del verdadero valor de la función en ese punto: $f(x)$. Esto se puede apreciar en el dibujo: en el punto $x_0 = 1$ ambas curvas coinciden y a medida que $x$ se aleja de 1 las dos curvas se van separando más, hasta un punto que una no tiene nada ver numéricamente con la otra.

## LA DIFERENCIAL PARA ESTIMAR CAMBIOS DE UNA FUNCIÓN

Asuma en esta sección que $f$ es una función derivable en su dominio.

La recta tangente está dada por $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, donde $(x - x_0)$ representa el cambio en $x$ y es denotado por

$$\Delta x = (x - x_0) = \text{cambio en } x.$$

El cambio en $y$ de la recta tangente es $y - y_0$. Viendo la fórmula de la recta tangente podemos interpretar que

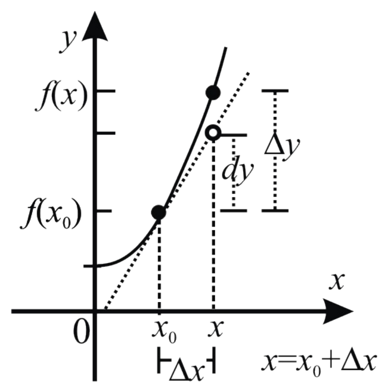
| |
|---|
| El cambio en $y$ de la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ está dado por $f'(x_0)(x - x_0)$. |

Por otro lado, se tiene que como $y$ de la recta aproxima a la función cuando $\Delta x$ es pequeño entonces

Cambio en $y$ de la función $\approx$ Cambio en $y$ de la recta

Sustituyendo el cambio en $y$ de la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ por $f'(x_0)(x - x_0)$ obtenemos

Cambio en $y$ de la función $\approx f'(x_0)(x - x_0)$




El cambio en $y$ de la función $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ lo denotamos por $\Delta y$. Así

$$\Delta y \approx f'(x_0)(x - x_0)$$
$$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$$

**Definición.-** La diferencial de $x$ es $\Delta x$ y es denotado por $dx$, esto es $dx = \Delta x$.

Así que la expresión anterior puede ser escrita como

$$\Delta y \approx f'(x_0)dx$$

El lado derecho es llamada la diferencial evaluada en $x_0$ y denotada por $dy$. Esto es

| |
|---|
| **Definición de la diferencial de $y$ evaluado en $x_0$:** $dy = f'(x_0)dx$ |

Así

$$\Delta y \approx dy.$$

Esto se lee como *el* ***cambio en y de la función es aproximado por la diferencial de y.***

**Recuerde siempre que:**

**1)** El cambio en $y$ de la función es aproximado por el cambio en $y$ de la recta tangente: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ y es calculado a través del lado derecho de esta ecuación la cual es conocida como la diferencial de $y$ y denotado por $dy$.

**2)** El cambio en $x$ dado por $\Delta x = (x - x_0)$ es la diferencial de $x$, esto es $\Delta x = dx$.

**Observaciones:**

**1)** En ocasiones es conocido $x_0$ y el cambio en $x$ ($\Delta x = dx$). De la fórmula $\Delta x = (x - x_0)$ se puede obtener $x$.

**2)** De la definición de diferenciales podemos obtener la siguiente relación entre los diferenciales de $x$ y $y$: $\frac{dy}{dx} = f'(x_0)$. En este contexto $\frac{dy}{dx}$ no representa una derivada (en la notación de Leibniz) sino un cociente de diferenciales.

**Ejemplo 1.-** Para la función $f(x) = x^2$. **a)** Encuentre la diferencial de la función en términos de $x_0$ y $dx$.; **b)** Calcule $\Delta y$ para $x_0 = 1$ y $dx = 0.25$. **c)** Calcule d$y$ para $x_0 = 1$ y $dx = 0.25$. **d)** Grafique la función y la recta tangente en $x$=1. Señale $\Delta y$ y d$y$.

**Solución:**

**a)** Usamos la definición $dy = f'(x_0)dx$. Como $f'(x) = 2x$ tenemos entonces que la diferencial en $x_0$ está dada por:

$$dy = 2x_0 dx$$

**b)** El cambio exacto de la función está dado por: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

**Tenga presente que** $\Delta x = (x - x_0)$, de aquí $x = x_0 + \Delta x$ y recuerde que $\Delta x = dx$. En nuestro caso tenemos $x_0 + \Delta x = 1 + 0.25 = 1.25$. Así

$$\Delta y = f(1{,}25) - f(1) = (1.25)^2 - 1^2$$

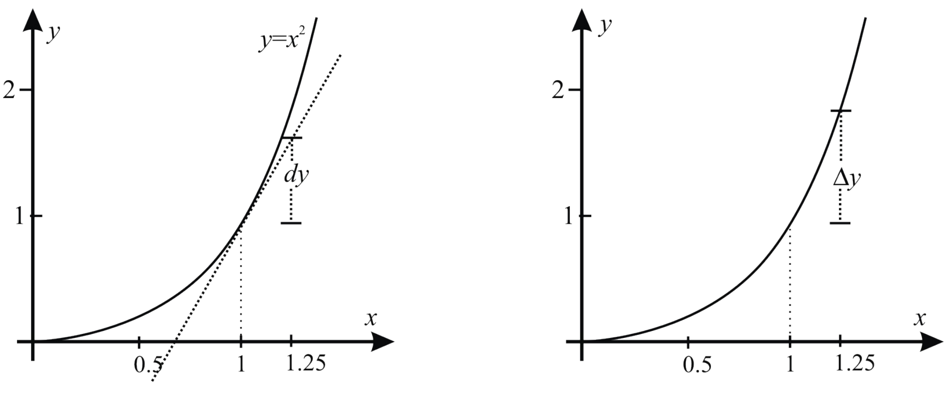
Usando la calculadora obtenemos que:

$$\Delta y = 0.5625$$

**c)** Para la diferencial usamos la fórmula encontrada en la parte **a)** evaluada en $x_0 = 1$ y $dx = 0.25$

$$dy = 2 \cdot 1 \cdot (0.25) = 0.5$$

**d)**



Recuerde que la diferencial representa el cambio vertical en la recta tangente y $\Delta y$ representa el cambio vertical de la gráfica de la función.

**Ejemplo 2.-** Estime por medio de diferenciales cuánto cambiará $y=\sqrt[3]{x}$ cuando $x$ cambia de 8 a 7.95

**Solución:** Para estimar el cambio en $y$ usaremos diferenciales a través de la aproximación $\Delta y \approx dy$.

Calcularemos primero $dx$, que no es otra cosa que el cambio en $x$.

$$dx = \Delta x = x - x_0 = 7.95 - 8 = -0.05$$

La diferencial está dada por

$$dy = f'(x_0)dx$$

$$dy = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x_0^2}}dx$$

Sustituyendo los valores queda

$$dy = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{8}\right)^2}(-0.05)$$

$$dy = -\frac{0.05}{12} = -0.00413\overline{6}$$

De la aproximación $\Delta y \approx dy$ tenemos entonces que el cambio en $y$ de la función es aproximadamente $-0.00413\overline{6}$ cuando $x$ cambia de 8 a 7,95 .

**Ejercicio de desarrollo.-** Estime por medio de diferenciales cuánto cambiará $y$ cuando $x$ cambia de 0 a 0.02., donde $y=\frac{1}{e^x}$.

## LA DIFERENCIAL PARA ESTIMAR VALORES NUMÉRICOS

La diferencial puede ser usada para estimar valores de una función sin usar la calculadora. La idea es basarse en un punto $x_0$ próximo al punto a evaluar que sea fácil de evaluar tanto $f$ como $f'$.

Recuerde que

$$\text{Cambio en } y \text{ de la función} \approx f'(x_0)(x-x_0)$$

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x)dx$$

De aquí, si sumamos una misma cantidad a dos valores que son casi iguales entonces las cantidades resultantes deben ser casi iguales, en este caso sumamos en ambos lados $f(x_0)$ resultando:

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x)dx$$

(Si esto fuera una ecuación (igualdad) lo que tendríamos es el despeje de $f(x_0+\Delta x)$)

Esta última expresión es escrita también como:

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+dy \qquad (1)$$

y se interpreta como:

*El valor de la función en un valor cercano a de $x_0$ es aproximadamente*

*el valor de la función en $x_0$, $f(x_0)$, más un error dado por la diferencial*

Podemos rescribir (1) como

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

El lado derecho es una aproximación lineal de la función

**Ejemplo 3.-** Sea $f(x)=\frac{1}{x}$. **a)** Evalúe $f'(2)$ .**b)** Use diferenciales para estimar $f(1.98)$

**Solución:**

**a)** La derivada está dada por $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$. Al evaluar queda

$$f'(2)=-\frac{1}{4}$$

**b)** Para estimar el valor $f(1.98)$ se usará diferenciales por medio de la aproximación: $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+dy$

- Primero se calcula $dx$, el cambio en $x$.

  $dx=\Delta x=(x+\Delta x)-x=1.98-2=-0.02$

- La diferencial $dy=f'(x_0)dx$ está dada por

$$dy=-\frac{1}{x_0^2}dx$$

Al evaluar queda

$$dy=-\frac{1}{4}(-0.02)=\frac{0.01}{2}=0.005$$

- Sustituyendo los valores en $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+\underbrace{dy}_{error}$ queda

$$f(1.98)\approx f(2)+0.005$$

$$f(1.98)\approx\frac{1}{2}+0.005=0.505$$

**Comentario:** El valor estimado fue $f(1.98)=\frac{1}{1.98}$. Usando la calculadora obtenemos que $\frac{1}{1.98}=0.50\overline{50}$. Es importante que el lector aprecie la exactitud lograda al usar diferenciales.

En el ejercicio anterior se dio la función y un punto $x_0$ cercano al punto *x* para estimar el valor de la función en *x*, con la característica que el punto $x_0$ propuesto es fácil de evaluar tanto en *f* y como en su derivada (sin necesidad de calculadora) y está cercano a *x*. En el próximo ejercicio se deberá proponer primero una función y un punto cercano para poder estimar el valor numérico dado**.**

**Ejemplo 4.-** Use diferenciales para estimar $\sqrt{14}$. No use calculadora.

**Solución:**

- Primero se propone la función. En este caso $f(x)=\sqrt{x}$.
- Luego un valor $x_0$ cercano a 14 de tal manera que sea fácil evaluar tanto $f$ como $f'$. Se propone $x_0=16$ (16 tiene raíz cuadrada exacta). Es claro que $x=14$.
- Con esta función propuesta y este valor se va a estimar $\sqrt{14}$ usando la fórmula

$$\underbrace{f(x_0+\Delta x)}_{\sqrt{14}}\approx\underbrace{f(x_0)}_{\sqrt{16}}+\underbrace{dy}_{error}$$

Debemos calcular $f(16)$, $dx$ y $dy$. En este caso queda

$f(16)=\sqrt{16}=4$

$dx = x - x_0 = 14 - 16 = -2$

$dy = f'(x_0)dx = \dfrac{dx}{2\sqrt{x_0}}$

Sustituyendo los valores obtenemos

$dy = \dfrac{-2}{2\sqrt{16}} = -\dfrac{1}{4}$

Finalmente al sustituir $\sqrt{14} = f(14) \approx \underbrace{4}_{\sqrt{16}} + \underbrace{(-0.25)}_{error} = 3.75$

Si el estudiante tiene una calculadora en la mano sería recomendable que examinará el valor que da la máquina para $\sqrt{14}$ y lo compare con el obtenido por aproximación.

**Ejercicio de desarrollo.-** Use diferenciales para estimar las siguientes cantidades:

**a)** $\dfrac{1}{e^{0.01}}$; **b)** $\sqrt[3]{8.003}$; **c)** $\ln(0.98)$

## EJERCICIOS

**1)** Encuentre la diferencial para cada una de las funciones dadas en términos de $x_0$ y $dx$

**1.1)** $y = xe^{-x}$; **1.2)** $y = \dfrac{e^x}{1+x}$; **1.3)** $y = \ln(1+x^2)$

**1.4)** $y = \sqrt{x^2+x}$; **1.5)** $y = x\ln x$; **1.6)** $y = (x^3-3x)^{10}$

**2)** Encuentre $\Delta y$ y $dy$ para las siguientes funciones con los valores dados de $x$ y $dx$

**2.1)** $y = x^2+2$; $x_0 = 3$; $y$ $dx = 0.01$; **2.2)** $y = \ln(1+x^2)$ $x_0 = 3$; $y$ $dx = 0.01$

**2.3)** $y = \sqrt{x}$ $x_0 = 4$; $y$ $dx = 0.02$; **2.4)** $y = \sqrt{x+2}$ $x_0 = 2$; $y$ $dx = -0.02$

**2.5)** $y = (2x-1)^3$ $x_0 = 1$; $y$ $dx = -0.05$

**3)** Encuentre $\Delta y$ y $dy$ para las siguientes funciones

**3.1)** $y = \sqrt[4]{t}$ si $t_0 = 16$; $\Delta t = 0.1$; **3.2)** $y = t\ln t$; si $t_0 = 1$; $\Delta t = -0.05$

**4)** Estime por medio de diferenciales cuánto cambiará $y = x - 3x^2$ cuando $x$ cambia de 2 a 2.05

**5)** Estime por medio de diferenciales cuánto cambiará $y = x^3 - 2x$ cuando $x$ cambia de 2 a 1.95

**6)** Sea $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$. **a)** Evalúe $f'(2)$. **b)** Use diferenciales para estimar $f(2.05)$

**7)** Aproxime cada expresión por medio de diferenciales. No use calculadora.

**7.1)** $\sqrt{10}$; **7.2)** $\sqrt[4]{15}$; **7.3)** $\ln(1.01)$; **7.4)** $\dfrac{1}{1.03}$

**7.5)** $\dfrac{1}{0.98}$; **7.6)** $e^{-0.02}$; **7.7)** $(63)^{1/6}$;

**Respuestas: 1.1)** $dy = e^{-x_0}(1-x_0)dx$; **1.2)** $dy = \dfrac{x_0e^{x_0}dx}{(1+x_0)^2}$; **1.3)** $dy = \dfrac{2x_0dx}{1+x_0^2}$; **1.4)** $dy = \dfrac{2x_0+1}{2\sqrt{x_0^2+x_0}}dx$;

**1.5)** $dy = (1+\ln x_0)dx$; **1.6)** $dy = 30(x_0^3-3x_0)^9(x_0^2-1)dx$; **2.1)** $\Delta y = 0.0601$; $dy = 0.06$;

**2.2)** $\Delta y = 0.005992$; $dy = 0.006$; **2.3)** $\Delta y = 0.00499$; $dy = 0.005$; **2.4)** $\Delta y = -0.005006$; $dy = -0.005$;

**2.5)** $\Delta y = -0.271$ $dy = -0.3$ **3.1)** $\Delta y = 0.003117$; $dy = 0.003125$; **3.2)** $\Delta y = -0.048$; $dy = -0.05$;

**4)** $dy = -0.55$ **;** **5)** $dy = -0.5$ **;** **6)** $f'(2) = 0.5 \quad f(2.05) \approx 2.525$
**7.1)** 3.166667; **7.2)** 1.9375; **7.3)** 0.01; **7.4)** 0.97; **7.5)**1.02**;** **7.6)** 0.98; **7.7**) 1.994792

## PROBLEMAS DE ECONOMÍA

**1)** La ecuación de demanda de un artículo es $p = \dfrac{15}{\sqrt{q}}$ .Por medio de diferenciales estime el precio cuando se demandan 17 unidades. **Respuesta:** 3.632813

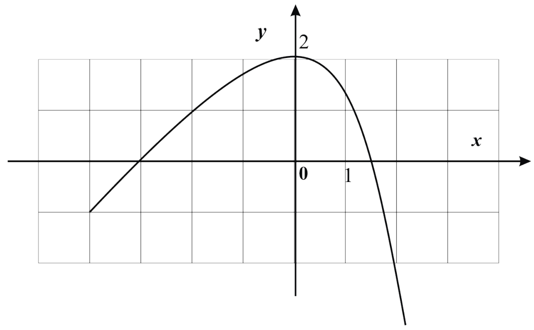
**2**) La función de costo de una empresa es $C(q) = \sqrt{q^2 + 15}$ .Por medio de diferenciales estime el cambio aproximado en el costo si el número de unidades a producir disminuye de 7 a 6 unidades. Calcule el cambio verdadero. **Respuesta:** d$c$≈-0.875; Δ$c$=-0.858.

# METODO DE NEWTON PARA RESOLVER ECUACIONES O ENCONTRAR LOS CEROS DE UNA FUNCIÓN.

Muchas ecuaciones pueden ser resueltas exactamente con métodos matemáticos. Sin embargo hay ecuaciones que aún cuando tienen solución no son conocidos métodos para obtener soluciones exactas.

Por ejemplo la ecuación $x - e^x + 3 = 0$ tiene solución. Para verlo defina la función $f(x) = x - e^x + 3$. Los ceros de esta función son las soluciones de la ecuación $x - e^x + 3 = 0$

Al graficar a través de una computadora podemos ver que cruza el eje $x$ en aproximadamente $x =$ -3 y hay otra solución entre 1 y 2.

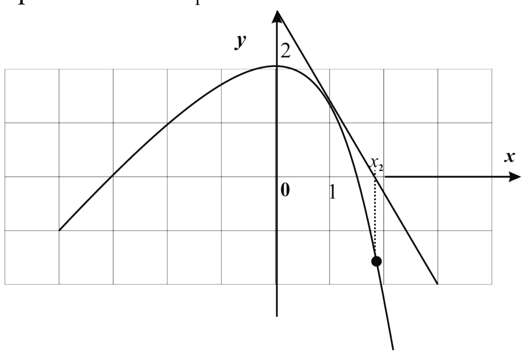



La solución de la ecuación $x - e^x + 3 = 0$ fue obtenida por un método gráfico. En este ejemplo vemos como el problema de resolver una ecuación puede ser formulado como la de encontrar los ceros de una función. (Recuerde que los ceros de una función son los $x$ tales que $f(x) = 0$).

De ahora en adelante trataremos el problema de encontrar los ceros de una función.

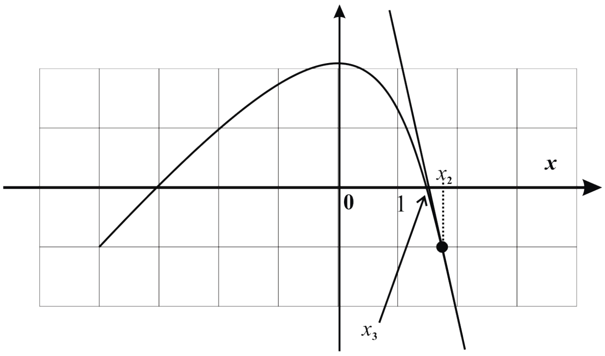
Existen métodos numéricos para encontrar los ceros de una función *f*. Uno de ellos es el método de Newton, el cual hace uso de las rectas tangentes. Estos métodos consiguen más precisión que a través de de las estimaciones de la gráfica, además no necesitan elaborar la gráfica para obtener las estimaciones.

El método de Newton se basa en estimar los cortes de la función a través de las rectas tangentes de *f* en puntos cercanos al corte con *x:* Los cortes de estas rectas tangentes con el eje *x* están cerca de los cortes de *f* con el eje *x*. Para usar el método de Newton necesitamos una primera aproximación $x_1$ del cero de la función.




Vamos a demostrar como trabaja el método de Newton a través de la gráfica de la función anterior. Se ha usado como primera aproximación $x_1 = 1$, en nuestro ejemplo es bastante mala. Donde la recta tangente en $x$=1 corta el eje $x$ es $x_2$, la segunda aproximación al cero de la función dado por el método de Newton, ahora está más cercano al punto donde la función se hace cero

Volvemos a repetir el procedimiento pero ahora con $x_2$, obtenido en la primera iteración. Se traza la recta tangente a la gráfica de *f.* Donde la recta tangente en $x_2$ corta el eje *x* es $x_3$, la tercera aproximación al cero da la función, ahora en términos gráficos se confunde con el cero de la función.




En general el método de Newton consigue una buena aproximación en pocos pasos de un cero de la función. Para conseguir los otros ceros hay que proponer un primer $x_1$ cercano al cero.

# TASAS RELACIONADAS

Los problemas de tasas relacionadas tratan de cómo calcular la tasa de cambio respecto al tiempo de una variable a través de la derivada de esta variable con respecto a otra variable que está relacionada con ella y de la tasa de cambio de esta segunda con respecto al tiempo usando la regla de la cadena. En el siguiente recuadro se esquematiza de que se trata el problema y como se obtiene la solución.

**PROBLEMA:** Determinar $\frac{dx}{dt}$ a partir del cambio de otra cantidad *y* que está relacionada con *x*.
(Existen dos cantidades *x* y *y* que están cambiando y están relacionadas)

**INFORMACIÓN A CONSEGUIR:**

**1)** $\frac{dy}{dt}$ **(**Es una cantidad conocida o que se puede determinar**.)**

**2)** Ecuación o función que relaciona $x$ y $y$ . En ocasiones está la ecuación dada, otras veces hay que determinarla.

**3)** Se calcula $\frac{dx}{dy}$ por medio de la ecuación del punto 2. (Se calcula por derivación normal o por derivación implícita según sea el caso.)

**SOLUCIÓN:** $\frac{dx}{dt}$ se calcula a través de la Regla de la Cadena:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$$

El recuadro de arriba muestra de que se trata los problemas de tasas relacionadas. A continuación se dan una secuencia de pasos recomendados para resolver estos problemas.

**Estrategias para resolver este tipo de problemas:**

**1)** Identificar cuál es la derivada que se pide.

**2)** Establecer cuál es la otra cantidad que esta relacionada con la cantidad cuya derivada se pide y como viene dada o conseguir está relación

**3)** Luego establecer la regla de la cadena.

**4)** Conseguir la información a colocar en el lado derecho de la regla de la cadena.

**5)** Sustituir los valores encontrados en el lado derecho de la regla de la cadena

**Recordemos** que la tasa de cambio de $x$ con respecto a *t* se interpreta como la velocidad, en ocasiones nos referimos a razones de cambio o ritmo de crecimiento.

**Ejemplo 1.-** En cierta fábrica la cantidad requerida de combustible para fabricar *q* unidades de un determinado artículo está dado por $C(q) = 1000 + 2q + \frac{1}{4}q^2$**.** La cantidad de artículos producidos *t* horas después de iniciar la producción está dado por la siguiente relación: $q = 3t^2 + 50t$**.** Determinar la razón con que aumentan la cantidad de combustible consumido 2 horas después de iniciada la producción.

**Solución:**

**1)** Nos piden calcular $\frac{dC}{dt}$ dos horas después de iniciada la producción**.**

**2)** La variable o cantidad que está relacionada con $C$ es $q$. La relación entre ellas viene dada por la función $C(q)=1000+2q+\frac{1}{4}q^2$

**3)** La regla de la cadena en este caso está planteada como:

$$\frac{dC}{dt}=\frac{dC}{dq}\cdot\frac{dq}{dt}$$

**4)** Se necesita conseguir $\frac{dq}{dt}$ y $\frac{dC}{dq}$ dos horas después de iniciada la producción

- Se calcula $\frac{dq}{dt}$ a través de la ecuación $q=3t^2+50t$**.** Se obtiene $\frac{dq}{dt}=6t+50$

  $\left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=2}=6\cdot 2+50=62$ unidades/horas

- Determinaremos $\frac{dC}{dq}$ por medio de la ecuación $C(q)=1000+2q+\frac{1}{4}q^2$**.** Esta es

$\frac{dC}{dq}=2+\frac{1}{2}q$**.** Tenemos que conseguir el valor de esta derivada dos horas después de iniciada la producción. Para ello debemos calcular cual es el nivel de producción, *q,* dos horas después de iniciada la jornada para poder evaluar la formula anterior. Este número lo determinamos usando la relación dada por $q=3t^2+50t$

$\left.q\right|_{t=2}=3\cdot 2^2+50\cdot 2=112$ unidades

Así

$$\left.\frac{dC}{dq}\right|_{\substack{t=2,\\ q=112}}=2+\frac{1}{2}112=58$$

**5)** Ahora se está listo para evaluar en la regla de la cadena:

$$\frac{dC}{dt}=\frac{dC}{dq}\cdot\frac{dq}{dt}$$

$$=58\cdot 62=3596 \text{ UM por hora}$$

**Ejemplo 2.-** La ecuación de oferta de un artículo exclusivo está dada por la relación: $4p^2-q^2=20$**,** donde $q$ es la cantidad de artículos que el distribuidor ofrece a un precio $p$ dado en miles de U.M. Si el precio es de 5.000UM y está aumentando a un ritmo de 1.200 UM por mes, ¿con que rapidez aumentará la oferta?

**Solución:**

**1)** Se pide calcular $\frac{dq}{dt}$ cuando el precio es de cinco mil UM.

**2)** La variable o cantidad que está relacionada con $q$ es $p$. La relación entre ellas viene dada por la ecuación $4p^2-q^2=20$

**3)** La regla de la cadena en este caso está planteada como:

$$\frac{dq}{dt}=\frac{dq}{dp}\cdot\frac{dp}{dt}$$

**4)** Se necesita determinar los valores $\frac{dp}{dt}$ y $\frac{dq}{dp}$ cuando el precio es 5.000

- $\frac{dp}{dt}$ viene dada directamente. Observe la redacción del problema:

"Si el precio es de 5.000UM y está aumentando a un ritmo de 1.200 UM por mes…"

Es claro que $p$=5.000 y la segunda afirmación que se ha subrayado habla del ritmo de crecimiento del precio, esto es la derivada del precio con respecto al tiempo:

$\frac{dp}{dt} = 1.200$ UM por mes

- Podemos obtener $\frac{dq}{dp}$ por derivación implícita: Aplicamos entonces derivación implícita

a $4p^2 - q^2 = 20$ obteniendo:

$$8p - 2q\frac{dq}{dp} = 0 \qquad \text{Despejamos la derivada}$$

$$\frac{dq}{dp} = \frac{4p}{q}.$$

Para obtener el valor numérico de $\frac{dq}{dp}$ faltaría averiguar la demanda cuando el precio ofrecido es de 5.000UM. Lo calculamos a través de la ecuación de oferta: $4p^2 - q^2 = 20$,

$4 \cdot 5^2 - q^2 = 20$

$q^2 = 80$

$q = \sqrt{80}$ mil unidades.

Así $\frac{dq}{dp} = \frac{4 \cdot 5}{\sqrt{80}}$

**5)** Sustituyendo en el planteamiento de la regla de la Cadena tenemos:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{dp}{dt}$$

$$= \frac{20}{\sqrt{80}} \cdot 1{,}2$$

$$\frac{dq}{dt} \approx 2{,}68 \text{ miles de unidades por mes.}$$

En conclusión la oferta está aumentando a razón de 2.680 unidades por mes.

**Ejercicio de desarrollo.-** Una empresa tiene costos totales dados por $C(q) = 25 + 2q - \frac{1}{50}q^2$**.** El nivel de producción actual es de 5 unidades y está creciendo a una tasa de 0.7 por año. ¿Cómo cambia el costo promedio?

**Ejemplo 3.-** Suponga que un derrame de petróleo se expande de manera circular donde el radio cambia a razón de 2m/min. ¿A que razón crecerá el área contamina cuando el radio es de 20 metros?

**Solución:**

**1)** Se pide calcular $\frac{dA}{dt}$ cuando el radio es de 20 metros**.**

**2)** La variable o cantidad que está relacionada con $A$ es $r$. La relación entre ellas viene dada por la formula del área del circulo: $A = \pi \cdot r^2$

**3)** La regla de la cadena en este caso está planteada como:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

**4)** Se necesita determinar los valores $\frac{dr}{dt}$ y $\frac{dA}{dt}$ cuando el radio es 20 metros.

- La expresión "… el radio cambia a razón de 2m/min." Nos habla de la razón de cambio del radio con respecto al tiempo medido en minutos. Esto es

$\frac{dr}{dt} = 2$ m./min.

- De la fórmula $A = \pi \cdot r^2$ podemos determinar $\frac{dA}{dr}$

$\frac{dA}{dr} = 2\pi \cdot r$ **.** Falta determinar el valor numérico de esta derivada cuando el radio es 20 metros.

$$\left.\frac{dA}{dr}\right|_{r=20} = 2\pi \cdot 20 = 40\pi$$

**5)** Sustituimos estas derivadas en la regla de la cadena planteada en el punto 3

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 40 \cdot \pi \cdot 2 = 80\pi \quad m^2/\text{min}.$$

## EJERCICIOS

**1)** Calcule $\frac{dx}{dt}$ en cada caso en el nivel dado de $x$

**1.1)** Si $x = 20 - y^2$ y $\frac{dy}{dt}$=10, cuando $x$=4;

**1.2)** Si $x = \sqrt{y} - 2y$ y $\frac{dy}{dt}$=10, cuando $y$=9

**1.3)** Si $xy = 20$ y $\frac{dy}{dt}$=20, cuando $x$=4 ;

**1.4)** Si $9y - 4x^2 = 45$, $\frac{dy}{dt} = -12$ cuando $x$=-3

**1.5)** Si $\sqrt{xy} = 20$ y $\frac{dy}{dt}$=10, cuando $x$=40

**Respuestas: 1.1)** $-80$**; 1.2)** $-150$**; 1.3)** $-16$**; 1.4)** $\frac{9}{2}$**; 1.5)** $40$

## PROBLEMAS DE ECONOMÍA

**1)** Suponga que la ecuación de demanda de un producto está dada por $p = \frac{50.000}{q^{3/2}}$**,** donde $q$ es el número de artículos que se pueden vender en el mes a un precio de $p$ UM. Si la demanda de este mes es de 900 unidades y está creciendo a una razón de 100 unidades por mes. ¿A qué razón está cambiando el precio? **Respuesta:** El precio disminuye a una tasa aproximada de 0.309UM por producto al mes

**2)** La ecuación de demanda de un artículo está dada por $p = 4 + 100/\sqrt{q}$ donde $q$ es el número de artículos que se pueden vender por mes a un precio de $p$ UM. Si el precio actual es de 5UM y se piensa aumentar a 2UM este mes, ¿a qué razón bajará la demanda? **Respuesta:** Las ventas bajarán a razón de 40 mil unidades al mes)

**3)** La función de producción de una empresa está dada por:

$$P = 10x^{0.3}y^{0.7} \text{ (Ec. de Cogg-Douglas)}$$

donde $P$ es la cantidad de artículos que se producen al año, $x$ es el número de trabajadores laborando y $y$ el capital invertido anualmente. En la actualidad se piensa mantener el nivel de producción en 1000 unidades. Si hay 150 trabajadores y el número de trabajadores aumenta a razón de 10 trabajadores al año. ¿Cuál es la razón de cambio del presupuesto de operación? **Respuestas:** El presupuesto de operación baja a razón de 2,4UM por año

**4)** La ecuación de demanda de un producto está dada por $2p + q = 400$. Cuando la demanda es 50 ella disminuye a una tasa de 2 unidades por año ¿A qué tasa cambia el ingreso si la compañía ajusta el precio a la demanda? **Respuesta.** El ingreso aumenta a razón de 300UM por año

**5)** El costo y el ingreso total por producir $q$ artículos semanales está dado por: $C(q) = 1500 + 20q$ $I(q) = 90q - \dfrac{q^3}{10.000}$. Si la producción actual es de 400 artículos y aumenta a 25 unidades en la semana. Calcula la tasa de cambio de la utilidad total **Respuesta:** Aumenta a razón de 550UM/semana

**6)** La ecuación de demanda de cierto artículo está dada por la ecuación $q^2 + 5pq + p^2 = 60$, donde q es medido en miles de artículos por mes. Si el precio actual es de 4UM y está creciendo a un ritmo de 0,05UM por mes. ¿Con que rapidez cambia la demanda *q*? **Respuesta**: Esta disminuyendo a una razón de 75 artículos por mes.

**7)** La cantidad, *q*, de toneladas de tomates que estaría dispuesto colocar un productor a un precio $p$ está dada por la relación $p = 0.01q^2 + 0.4q$. Actualmente el precio del kilo de tomate está en 5UM. Se sabe por experiencia pasada que el precio va aumentar a una razón de 0.05 UM por semana para los próximos meses. ¿A qué razón aumentará la oferta? **Respuesta:** $\dfrac{1}{12}$ toneladas/semana

**PROBLEMAS GENERALES**

**1)** Suponga que un globo esférico es inflado La tasa con que crece el radio es 0.001cm/seg ¿Cuál es la rapidez con que crece el volumen en el momento en que el radio es de 0.5cm? **Respuesta:** $0.001\pi$ cc/seg.

**2)** Un globo se desinfla a razón de 8cc/min. Calcule la intensidad con que decrece el radio cuando el diámetro es de 4cm . Volumen de la esfera: $\dfrac{4}{3}\pi \cdot r^3$ **Respuesta:** $\dfrac{1}{2\cdot\pi}$ cm/min

**3)** Un tanque de almacenaje de grano tiene forma de cono con una altura de 3 metros y el radio más grande de 1 metro. ¿Con que rapidez sube el nivel de granos almacenados cuando hay 2 metros de altura en grano y se está vertiendo 0.3m$^3$/min? (El volumen de un cono con estas características es $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot r^2 h$)

**PROBLEMAS DE CIENCIAS NATURALES**

**1)** Se estima que la cantidad de contaminantes, *C*, en el aire en una zona depende de la cantidad de habitantes, *p*, en la misma dada por el modelo $C(p) = p^2 + 5p + 1200$ unidades. Si la población está creciendo de acuerdo al siguiente modelo $p = 0.3t^2 + 500t + 20.000$ donde *t* es el número de años después del 2005, ¿a que tasa crecerá la contaminación en el 2005?

**2)** La ley de Boyle establece la siguiente relación entre la presión, *P*, y el volumen, *V*, de un gas: $PV = C$, donde *C* es una constante propia del gas. En un momento dado un gas es sometido a una presión de 50lb/pulg$^2$, en un volumen de 30pulg$^3$. Si el volumen se aumenta a un ritmo de 15pulg$^3$/seg. ¿Con que rapidez cambia la presión en ese momento?

**3)** Las ecuaciones alométricas modelan la relación entre dos medidas del cuerpo, por ejemplo el tamaño del cuerpo, *C,* y la longitud del fémur, *F*. Un modelo típico es $C = kF^{\alpha}$, donde $k>1$ y $\alpha \in (0,1)$ son constantes que depende de la especie. Exprese la velocidad de crecimiento del cuerpo en función de la velocidad de crecimiento del fémur.

# LÍMITES AL INFINITO

¿A que valor tenderá $\frac{1}{1+x}$, cuando $x$ toma valores cada vez más grande? Si $x$ toma valores cada vez más grande, sin cota, los valores de $1+x$ también lo harán y por lo tanto $\frac{1}{1+x}$ tenderán a 0. Esto lo expresaremos como

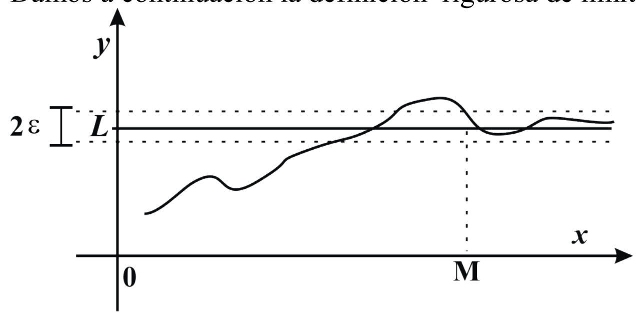
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x}=0$$

Intuitivamente la expresión

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$$

quiere decir que cuando $x$ toma valores arbitrariamente cada vez más grande, sin cota, entonces los valores de la función $f(x)$ se aproximan al número $L$.

Damos a continuación la definición rigurosa de límite




**Definición formal de límite al infinito.** Sea $f$ definida en $(c,\infty)$.
Decimos que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$ si para cualquier $\varepsilon>0$, existe $M$ tal que si $x>M$, entonces

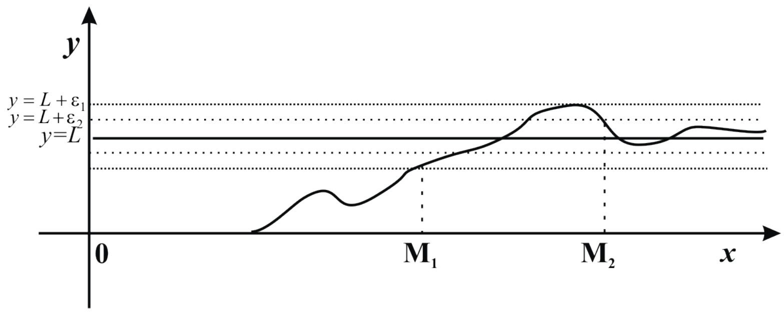
$$|f(x)-L|<\varepsilon$$

Para demostrar formalmente que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$, deberíamos plantearnos buscar $M$ para cualquier $\varepsilon$ que se proponga de manera que si $x>M$, entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$.

El número $\varepsilon$ se considera la precisión que queremos alcanzar, dicho de otro modo la distancia de los valores de $f(x)$ a $L$ para cualquier $x$ mayor que $M$ debe ser menor que $\varepsilon$ y para que un límite exista debe ser posible conseguir el $M$ para cualquier precisión propuesta.

En términos geométricos, decimos que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$ si para cualquier banda comprendidas por rectas horizontales en torno a la recta $y=L$ definidas por la forma $y=L-\varepsilon$ y $y=L+\varepsilon$, podemos conseguir $M$ tal que la gráfica de la función cae completamente en la banda cuando $x$ es mayor que $M$ y esto ocurre para cualquier banda.

Es intuitivamente claro que si se tiene una banda más estrecha es probable que la gráfica caerá en la banda a partir de $x$ más lejanos que si la banda en menos estrecha.



La definición, interpretación y análisis de $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$ es similar.

Nosotros admitiremos que $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^k} = 0$ y $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$, con $k>0$, sin una demostración rigurosa. Cuando $x \to +\infty$, el valor de $x^k$ también lo hace, al dividir 1 entre números cada vez más grande obtenemos números que se acercan a 0. Este resultamos lo enunciamos formalmente.

**Proposición.-** $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^k} = 0$ y $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$, con $k>0$.

Cuando escribimos $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$ estamos diciendo que este límite no existe y los valores de la función se hacen cada vez más grandes cuando $x$ aumenta sin límite.

Tenemos la siguiente proposición la cual es muy intuitiva:

**Proposición.-** $\lim_{x\to +\infty} x^k = \infty$ ,con $k>0$.
Asumiremos también que $\lim_{x\to +\infty} e^{kx} = \infty$ y $\lim_{x\to -\infty} e^{kx} = 0$, con $k>0$.

*Las propiedades de límites al infinito son similares a las de límites cuando x tiende a una constante.*

Enunciemos por lo menos algunas de ellas

**Proposición.** Suponga $f$ y $g$ funciones definidas en $(K,\infty)$ tal que $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to +\infty} g(x)$ existen.
Entonces

$\lim_{x\to +\infty} (c\cdot f(x)) = c \lim_{x\to +\infty} f(x)$, donde $c$ es una cte — Propiedad del factor constante

$\lim_{x\to +\infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to +\infty} f(x) \pm \lim_{x\to +\infty} g(x)$. — Propiedad de la suma y diferencia

$\lim_{x\to +\infty} (f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to +\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to +\infty} g(x)$. — Propiedad del producto

En el caso que $\lim_{x\to +\infty} g(x) \neq 0$, entonces

$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to +\infty} f(x)}{\lim_{x\to \infty} g(x)}$ — Propiedad del cociente

Si $f$ es continua y $\lim_{x\to +\infty} g(x)$ existe entonces

$\lim_{x\to +\infty} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to \infty} g(x)\right)$

**Ejemplo 1.-** Calcular $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^{-x+1}+1}$. Justifique de línea en línea la propiedad que está usando.

**Solución:** Primero usamos la propiedad del cociente asumiendo en principio que los límites del numerador y denominador existen

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{-x+1}+1}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+e^{-x+1}\right)}$$ Se aplica la propiedad de la suma en el denominador

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}e}$$ Se aplica la propiedad del factor constante en el segundo término

$$=\frac{1}{1+e\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}}$$ Por ultimo se usa $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$

$$=1$$

**Aclaratoria.-** Cuando decimos que un límite tiene una forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ (también $\frac{0}{0}$, $\infty-\infty$ ) queremos expresar que cuando evaluamos directamente el límite nos da la expresión $\frac{\infty}{\infty}$, la cual no tiene sentido. Sin embargo puede ser que el límite exista. Para obtenerlo, si existe, hay que manipular o reescribir la expresión a la que se le está tomando límite.

Por ejemplo los siguientes límites presentan indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

**a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}$; **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}$

Observe que si para cada límite reescribimos la función a la que le estamos tomando límite, podemos determinarlo. Por ejemplo en el caso a) tenemos que si simplificamos obtenemos $\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}$, Estas dos expresiones son iguales salvo en 0 donde ambas no están definidas. Así podemos concluir que

**a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

El lector puede concluir rápidamente que el límite en b) no existe, $f(x)$ crece si cota y esto lo abreviamos escribiendo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

**Ejercicio de desarrollo.-** Verifique que los siguientes límites tienen la forma indeterminada $\infty-\infty$
Calcule en cada caso el límite reescribiendo la función

**a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-\left(x^2-2\right)\right)$; **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-\left(x^2+x\right)\right)$

Las situaciones que encontraremos en general no son tan triviales como las dadas arriba. Para cada situación daremos recomendaciones de reescrituras para resolver el límite.

**Ejemplo 2.-** Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{x^3}$

**Solución:** Observe que al evaluar se tiene la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Una posibilidad para resolver un límite donde se tiene una función racional, donde el denominador es un monomio es reescribir la expresión, descomponiendo la fracción como suma de fracciones con igual denominador. Veamos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}\right]$$

En el caso que la fracción sea un monomio descomponemos la fracción como suma de fracciones con igual denominador y simplificamos.

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]$$

Aplicamos la propiedad del límite de la suma

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

**Ejemplo 3.-** Calcular $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+x+1}$

**Solución:** De nuevo al evaluar se tiene la forma $\frac{\infty}{\infty}$, una indeterminación. En este caso no se tiene un monomio en el denominador. Una manera de resolverla es dividir el numerador y el denominador entre $x^n$, donde $n$ es el grado del polinomio del denominador. En este caso entre $x^2$. Veamos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2+x+1}{x^2}}$$

Descomponemos la fracción como suma de fracciones y simplificamos

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}$$

Se simplifica

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

Aplicando la propiedad del límite de un cociente queda

$$=\frac{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

Se aplica la propiedad del límite de una suma en el denominador

$$=\frac{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}{\lim_{x\to+\infty}1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}$$

Ahora se usará el hecho que $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^k}=0$, $k$=1,2

$$=\frac{0}{1+0+0}=0$$

A continuación damos la recomendación general que sirve al límite tratado en el ejemplo anterior.

**Recomendación.-** Si tenemos que calcular $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)}$, con $p$ y $q$ polinomios, que produzca la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, una recomendación para resolverlo es dividir el numerador y el denominador entre $x^n$, donde $n$ es el grado del polinomio del denominador.

**Ejemplo 4.-** Calcular $\lim_{x\to +\infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 1}{2x^3 + 1}$

**Solución:** Se tiene la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, se aplica la recomendación para esta situación

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 1}{2x^3 + 1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{5x^3 - 2x^2 + 1}{x^3}}{\frac{2x^3 + 1}{x^3}}$$

Se dividió el numerador y el denominador por $x^3$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{5x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3} + \frac{1}{x^3}}$$

Se descompuso las fracciones como suma de fracciones con igual denominador

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{5 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to +\infty}\left[5 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right]}{\lim_{x\to +\infty}\left[2 + \frac{1}{x^3}\right]}$$

Se usó la propiedad del límite de un cociente

$$= \frac{\lim_{x\to +\infty} 5 - \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x} + \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^3}}{\lim_{x\to +\infty} 2 + \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^3}}$$

Se aplicó la propiedad del límite de una suma

$$= \frac{5 - 0 + 0}{2 + 0} = \frac{5}{2}.$$

Por propiedad de la constante y $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^k} = 0$, para $k>0$

Damos el siguiente ejemplo con menos detalle

**Ejemplo 5.-** Calcular $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^4 - x}{2x^3 - x^2 + 1}$

**Solución:** Tenemos de nuevo una indeterminación $\infty/\infty$ **.** Se divide el numerador y el denominador por $x^3$, dado por el grado del denominador

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^4 - x}{2x^3 - x^2 + 1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{3x^4 - x}{x^3}}{\frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^3}}$$

Se descompuso las fracciones como suma de fracciones con igual denominador

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{3x^4}{x^3} - \frac{x}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3} - \frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}}$$

Se simplifica

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{3x - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Se sabe que una secuencia de pasos similares a los ejemplos pasados nos lleva a evaluar directamente cada término del numerador y denominador como un límite a menos infinito. Usando que $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$ con $k>0$, obtenemos

$$= -\infty$$

**Observación.-** En los últimos ejemplos hemos visto tres situaciones de límites en infinitos de funciones racionales. En el primer ejemplo el grado del numerador es menor que el del denominador el resultado da cero, en este último ejemplo que eran iguales los grados dio una constante y en el segundo ejemplo donde el grado del numerador es mayor que el denominador el resultado es infinito (menos).

En muchas ocasiones, hay que usar el hecho que

$x = \sqrt{x^2}$ , si $x>0$ y

$x = -\sqrt{x^2}$ si $x$ es negativo.

**Ejemplo 6.-** Calcular $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-1}$.

**Solución**: **Alternativa 1:**

Recuerde que los $x$ que consideramos en el límite son negativos.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{\frac{2x-1}{x}}$$

Hay que introducir $x$ dentro de la raíz para ello reescribimos. Tenemos $x = -\sqrt{x^2}$ , pues los $x$ son negativos

$$\overset{x=-\sqrt{x^2}}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}}{\frac{2x}{x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{2x}{x} - \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}{2 - \frac{1}{x}}$$

Se usó la propiedad de la raíz de un cociente: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ de derecha a izquierda

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}}{2 - \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{2 - \frac{1}{x}} = -\frac{1}{2}.$$

**Alternativa 2:** (Este paso es una alternativa a la sustitución $-x=\sqrt{x^2}$ ).
Se hace el cambio de variable $x=-y$. Si $x\to -\infty$ , entonces $y\to +\infty$ . Así tenemos

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-1}=\lim_{y\to +\infty}\frac{\sqrt{(-y)^2+1}}{-2y-1}=\lim_{y\to +\infty}\frac{\sqrt{y^2+1}}{-2y-1}$$

Dividimos ahora entre la potencia del denominador en este caso $y$ .

$$=\lim_{y\to \infty}\frac{\dfrac{\sqrt{y^2+1}}{y}}{\dfrac{-2y-1}{y}}$$

Se usa que $y=\sqrt{y^2}$ , los $y$ son positivos

$$=\lim_{y\to \infty}\frac{\dfrac{\sqrt{y^2+1}}{\sqrt{y^2}}}{\dfrac{-2y-1}{y}}$$

$$=\lim_{y\to \infty}\frac{\sqrt{\dfrac{y^2+1}{y^2}}}{-2-\dfrac{1}{y}}=\lim_{y\to \infty}\frac{\sqrt{\dfrac{y^2}{y^2}+\dfrac{1}{y^2}}}{-2-\dfrac{1}{y}}=-\frac{1}{2}$$

**Comentario:** En el caso que tengamos radicales en el denominador con radicando un polinomio, el grado se considera *n*/*i*, donde *n* es la máxima potencia del radicando e *i* el índice del radical.

**Ejemplo 7.-** Calcular $\lim_{x\to \infty}\dfrac{x}{2\sqrt{x^3+x+1}}$ .

**Solución:** El grado del denominador lo consideramos $\sqrt{x^3}=x^{3/2}$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x}{2\sqrt{x^3+2x+1}}=\lim_{x\to \infty}\frac{\dfrac{x}{x^{3/2}}}{\dfrac{2\sqrt{x^3+2x+1}}{x^{3/2}}}$$

Se simplifica el numerador y se reescribe $x^{3/2}$ como una raíz

$$=\lim_{x\to \infty}\frac{\dfrac{1}{x^{1/2}}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{x^3+2x+1}}{\sqrt{x^3}}}$$

Se usa la propiedad de la raíz de un cociente: $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ de derecha a izquierda

$$=\lim_{x\to \infty}\frac{\dfrac{1}{x^{1/2}}}{2\sqrt{\dfrac{x^3+2x+1}{x^3}}}$$

$$=\lim_{x\to \infty}\frac{\dfrac{1}{x^{1/2}}}{2\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}}=0$$

El siguiente ejemplo muestra como pudiese resolverse algunas formas indeterminadas $\infty-\infty$

**Ejemplo 8.-** Calcular $\lim_{x\to\infty}(2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 1)$.

**Solución:** En este caso se nos presenta la indeterminación $\infty - \infty$ ,

Se saca de factor común $x^4$, la potencia de mayor grado a fin que el límite del segundo factor sea una constante.

$$\lim_{x\to\infty}(2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 1) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to\infty} x^4\left(2 - \frac{5x^3}{x^4} - \frac{2x^2}{x^4} + \frac{1}{x^4}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^4\left(2 - \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) = \infty .$$ Se evalúo y se uso el hecho que $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^k} = 0$ con $k$>0

Presentamos ahora un ejemplo con la forma $\infty - \infty$ en donde se presentan radicales. En el caso de tener dos términos es útil introducir la conjugada.

**Ejemplo 9.-** Calcular $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2 - x} - x\right)$.

**Solución:** En este ejemplo al evaluar tenemos $\infty - \infty$ , introducimos la conjugada

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2 - x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2 - x} - x\right)\cdot 1$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2 - x} - x\right)\frac{\sqrt{x^2 - x} + x}{\sqrt{x^2 - x} + x}$$ Se efectúa el producto

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2 - x}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x}$$ Se realiza el producto notable

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - x - x^2}{(\sqrt{x^2 - x} + x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{(\sqrt{x^2 - x} + x)}$$

El orden del numerador es $x$ y el del denominador es $\sqrt{x^2} = x$. Dividimos numerador y denominador por $x$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{x}{x}}{\left(\frac{\sqrt{x^2 - x}}{\sqrt{x^2}} + \frac{x}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1\right)} = -\frac{1}{2}$$

**Ejercicio de desarrollo.-** Calcular los siguientes límites:

**a)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2 - x}{x^3 - 1}$ ; **b)** $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3 + x}{2x^2(x-1)}$; **c)** $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{x^2 - 1}{x + 1}\right)$;

**d)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3 - 5}}{x - 2x^3}$; **e)** $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2 - 1} + x\right)$ ; **f)** $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2 - 1} - x\right)$;

Podemos generalizar la técnica de dividir entre la mayor potencia del denominador. Dividiendo entre el término de denominador de mayor orden

**Ejemplo 10.-** Calcular $\lim_{x\to\infty}\frac{1-3e^{2x}}{e^{2x}-2e^{x}}$.

**Solución:** El mayor orden del denominador está dado por $e^{2x}$. $\left(\frac{2e^{x}}{e^{2x}}\to 0\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-3e^{2x}}{e^{2x}-2e^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1-3e^{2x}}{e^{2x}}}{\frac{e^{2x}-2e^{x}}{e^{2x}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{e^{2x}}-\frac{3e^{2x}}{e^{2x}}}{\frac{e^{2x}}{e^{2x}}-\frac{2e^{x}}{e^{2x}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{e^{2x}}-3}{1-\frac{2}{e^{x}}}=-3$$

Se usó el hecho que $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{kx}}=0$, con $k$>0.

## EJERCICIOS

**1)** Calcule los siguientes límites. Si alguno no existe, justifique

**1.1)** $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x^2+1}{2x^3+1}$; **1.2)** $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-2x^2+4}{3x^3+x^2+1}$; **1.3)** $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^3+1}$;

**1.4)** $\lim_{x\to\infty}x\sqrt{x+1}$; **1.5)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5-2x^2+1}{x^3+x}$; **1.6)** $\lim_{y\to\infty}\frac{2y^2-3y^4}{y^3+5y^4}$;

**1.7)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2+1}$; **1.8)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^4-1}{x^2+1}$; **1.9)** $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{2x^2}{x^2+1}\right)$;

**1.10)** $\lim_{t\to\infty}\frac{2t^2+t^3}{t^3+t^4-t^5}$; **1.11)** $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}$

**1.12)** $f(x)=\begin{cases}-1, & si \quad x<0\\ 1 & si \quad x=0\\ 1-x & si \quad x>0\end{cases}$ **a)** $\lim_{x\to\infty}f(x)$ **b)** $\lim_{x\to-\infty}f(x)$;

**1.13)** $f(x)=\begin{cases}x^2, & si \quad x<1\\ 1 & si \quad x=1\\ \frac{2x-1}{x} & si \quad x>1\end{cases}$ **a)** $\lim_{x\to\infty}f(x)$ **b)** $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

**2)** Calcule los siguientes límites. Si no existe, justifique

**2.1)** $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-2x+1\right)$; **2.2)** $\lim_{x\to\infty}\left(2x^3-2x-1\right)$; **2.3)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3+x}}{x^2-1}$;

**2.4)** $\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$; **2.5)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-(x+1)\right)$; **2.6)** $\lim_{x\to-\infty}\left(2\sqrt{x^2-1}-x\right)$;

**2.7)** $\lim_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x}\right)$; **2.8)** $\lim_{x\to\infty}\left(x^2-2x\sqrt{x}+1\right)$; **2.9)** $\lim_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

**2.10)** $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+1}-\frac{2x-1}{x+2}\right)$ **2.11)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x+1}{\ln x^2+\ln x^3}$ **2.12)** $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-1}{e^{2x}+1}$

**2.13)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x-1}{3^x+1}$; **2.14)** $\lim_{x\to\infty}\frac{2^{-x}-2}{3^{2x}+1}$; **2.15)** $\lim_{x\to\infty}\frac{2^{2x}-3^x}{3^x+1}$

**4)** Sea $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, un polinomio de grado $n$ y $q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0$, un polinomio de grado *m*. Defina $r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$.

Demuestre que

$$\lim_{x\to\infty}r(x)=\begin{cases}\frac{a_n}{b_n}, & si \quad n=m\\ 0, & si \quad n<m\\ \operatorname{sgn}(\frac{a_n}{b_m})\cdot\infty & si \quad n>m\end{cases}$$

**5)** Sea $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, un polinomio de grado $n$ >0. Describa **5.1)** $\lim_{x\to\infty}p(x)$ y **5.2)** $\lim_{x\to-\infty}p(x)$. **Ayuda**: Vea el ejercicio anterior para $\lim_{x\to\infty}p(x)$.

**APLICACIONES**

**1)** Se estima que la población de peces en un lago en $t$ años a partir del año 2005 está dada por $P(t)=5000-\frac{3000}{(t+1)^2}$. Estime la población a largo plazo. Esto es, calcule $\lim_{t\to-\infty}P(t)$. Si esta cantidad es finita entonces este tamaño es llamado límite de la población. **Respuesta:** 5000 peces

**2**) Suponga que el porcentaje de persona que se han dedicado al trabajo agrícola en el año *t,* se lo puede modelar por $PA(t)=100-\frac{95.3}{1+3.2e^{-0.051t}}$, donde $t$ es el número de años después de 1910.**a)** Calcule $\lim_{t\to\infty}PA(t)$; **b)** Interprete sus resultados.

**Respuesta:** 4.7%

**Respuestas: 1.1)** $\frac{5}{2}$; **1.2)** $\infty$; **1.3)** 0; **1.4)** $\infty$; **1.5)** $\infty$; **1.6)** -3/5; **1.7)** 0; **1.8)** $\infty$; **1.9)** -2;
**1.10)** 0; **1.11)** 1; **1.12) a)** $-\infty$; **b)** -1; **2.13) a)** 2; **b)** $\infty$
**2.1)** $\infty$; **2.2)** $\infty$; **2.3)** 0; **2.4)** 2; **2.5)** $-\infty$; **2.6)** $+\infty$; **2.7)** $\infty$; **2.8)** $\infty$; **2.9)** $\infty$; **2.10)** -1; **2.11)** 1/5;
**2.12)** 0; **2.13) -1**; **2.14)** 0; **2.15)** $\infty$;

**5.2)** $\lim_{x\to-\infty}p(x)=\begin{cases}sign(a_n)\infty, & n \quad par\\ sign(a_n)(-\infty) & n \quad impar\end{cases}$

# REGLAS DE L´HOPITAL

Anteriormente se han estudiado límites $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, ellos se resolvían realizando manipulaciones algebraicas, pero no siempre se puede. Por ejemplo el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$

es de esta forma y no se puede resolver por manipulación algebraica. La manera de resolver este límite es a través de la regla de L´Hopital.

**Teorema de L´Hopital.-** Suponga $f$ y $g$ derivables en un intervalo abierto *I* conteniendo a $c$, excepto posiblemente en $c$ y $g'(x)\neq 0$ en *I* excepto posiblemente en $c$.

Si $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ entonces

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre y cuando el límite de la derecha exista.

En el caso que $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$ entonces $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$

*El límite del cociente de funciones es igual al límite del cociente de las derivadas siempre que se cumpla la condición de indeterminación.*

**Observación.-** Si $\lim_{x\to c}f(x)=0$ y $\lim_{x\to c}g(x)=0$ entonces tenemos la forma indetermina 0/0 en $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ y por tanto podemos aplicar la regla de L´Hopital.

**Ejemplo 1.-** Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

**Solución:** Observe que $\lim_{x\to 0}(e^x-1)=0$ y $\lim_{x\to 0}x=0$. Aplicamos el Teorema de L´Hopital

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}$$ Como ya la indeterminación desapareció podemos evaluar el límite

$=1$.

El siguiente ejemplo muestra como L´Hopital puede ser aplicado reiterativamente hasta que desaparezca las indeterminaciones

**Ejemplo 2.-** Calcular $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-3x+2}$

**Solución:** Observe que $\lim_{x\to 1}x^2-2x+1=0$ y $\lim_{x\to 1}x^3-3x+2=0$. Aplicamos el Teorema de L ´Hopital

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-2x+1)'}{(x^3-3x+2)'}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{3x^2-3}$$ Al evaluar, de nuevo obtenemos la forma 0/0, podemos volver aplicar L´Hopital

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(2x-2)'}{(3x^2-3)'}.$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2}{6x}=\frac{1}{3}$$

**Observación.-** El ejemplo anterior también pudo ser resuelto por manipulación algebraica.

**Ejercicio de desarrollo.-**Calcular

**a)** $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^3+1}$ **b)** $\lim_{x\to 0}\frac{sen(3x)}{x}$

**Teorema de L´Hopital.-** Suponga $f$ y $g$ derivables, $g'(x)\neq 0$ en un intervalo abierto, $I$ conteniendo a $c$ , excepto posiblemente en $c$ .
Si $\lim_{x\to c}f(x)=\infty$ , $\lim_{x\to c}g(x)=\infty$ entonces

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre y cuando el límite de la derecha exista.
En el caso que $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$ entonces $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$

El Teorema de L´Hopital se sigue aplicando para los límites $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ de las formas $\frac{\infty}{\infty}$ .

**Observación.-** Estos dos Teoremas de L´Hopital también son aplicables en cualquiera de los siguientes casos:

$$x\to c^+;\quad x\to c^-;\quad x\to +\infty \text{ o } x\to -\infty .$$

**Ejemplo 3.-** Calcular $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$

**Solución:** Observe que $\lim_{x\to\infty}\ln(x)=\infty$ y $\lim_{x\to\infty}x=\infty$ . Aplicamos el Teorema de L´Hopital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(x))'}{(x)'}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}$$ Este último límite puede ser evaluado, así

$$=0$$

**Ejemplo 4.-** Calcular $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}}{x^2+1}$

**Solución:** Observe que $\lim_{x\to\infty} e^{3x}=\infty$ y $\lim_{x\to\infty} x^2-1=\infty$ . Aplicamos el Teorema de L´Hopital

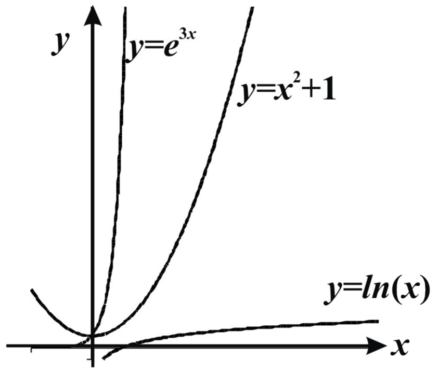
$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^{3x})'}{(x^2+1)'}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3e^{3x}}{2x}$$ Al evaluar obtenemos la forma $\frac{\infty}{\infty}$, podemos volver aplicar L´Hopital

$$\underset{l'H}{\overset{\infty/\infty}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{(3e^{3x})'}{(2x)'}.$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{9e^{3x}}{2}=\infty$$ En este último límite ya no hay indeterminación, se evalúa

**Comentario.-** Podemos corroborar los resultados de los ejemplos 3 y 4 geométricamente. La función logaritmo crece muy lentamente frente al crecimiento de polinomios, en este caso $p(x)=x$. Por eso es de esperarse que el resultado del límite $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$ sea 0. Por otro lado las funciones exponenciales crecen rápidamente a $\infty$ frente a cualquier tipo de polinomio, en el caso del ejemplo, frente al polinomio $p(x)=x^2+1$.




**Ejemplo 5.-** Calcular los siguientes límites: **a)** $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}$; **b)** $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{e^{x^2}-1}$; **c)** $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3}{e^{x^2}-1}$

**Solución:**

**a)** En este límite tenemos una indeterminación 0/0, aplicamos L´Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}\underset{L'H}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2x(x^2+1)}$$ Se simplifica y desaparece la indeterminación

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x^2+1)}=1$$

**Recomendación:** En ocasiones una vez aplicado L´Hopital persiste la indeterminación $\frac{0}{0}$, se puede seguir aplicando L´Hopital, pero si se puede simplificar puede resultar la cuenta mucho más sencilla. En este ejemplo se pudo simplificar y la cuenta se realizó de una manera más rápida que sino se hubiera simplificado.

**b)** En $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{e^{x^2}-1}$ se presenta una indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicamos L¨Hopital

$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{e^{x^2}-1} \overset{0/0}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{2xe^{x^2}}$ Se simplifica

$= \lim_{x\to 0}\frac{3x}{2e^{x^2}}$ Se evalúa pues desapareció la indeterminación

$=0$

**Comentario:** Observe como el límite $\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{2xe^{x^2}}$ es una forma indeterminada, se simplificó y desapareció la indeterminación. Antes de aplicar L´Hopital verifique si puede simplificar. Si ese es el caso simplifique y vuelva analizar la situación.

**c)** En $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3}{e^{x^2}-1}$ se presenta una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicamos L¨Hopital

$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3}{e^{x^2}-1} \overset{\infty/\infty}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to -\infty}\frac{3x^2}{2xe^{x^2}}$ Se simplifica

$= \lim_{x\to -\infty}\frac{3x}{2e^{x^2}}$ Persiste la indeterminación y se vuelve a aplicar L´H

$\overset{\infty/\infty}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to -\infty}\frac{3}{4xe^{x^2}} = 0$ Se evalúo pues desapareció la indeterminación

**Ejercicio de desarrollo.-**Calcule los siguientes límites**:**

**a)** $\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt[3]{x^5}}{x^3+1}$; **b)** $\lim_{x\to \infty}\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)}$; **c)** $\lim_{x\to \infty}\frac{x^3-x+1}{x^2-\sqrt{4x^4+1}}$; **d)** $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}$

**Comentarios.-** Observe que en c) tanto en el numerador como el denominador tenemos la forma indeterminada $\infty-\infty$. En este caso es recomendable dividir numerador y denominador entre el mayor orden del denominador.
En d) no es recomendable dividir entre el termino de mayor orden del denominador. Esta recomendación era apropiada cuando $x$ va al infinito y este no es el caso.

## Formas indeterminadas $0\cdot\infty$

Los límites $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$ con forma indeterminada $0\cdot\infty$ se intenta llevar a la forma $0/0$ ó $\infty/\infty$ reescribiendo $fg$ como un cociente: $\frac{f}{1/g}$ ó $\frac{g}{1/f}$. Normalmente el criterio de escogencia es aquel que resulte más fácil de derivar o posteriormente resulten más sencillos los cálculos.

**Ejemplo 6.-** Calcule $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$

**Solución:** Estamos en la forma $0\cdot\infty$. Reescribimos el límite pasando uno de los dos factores invertido en el denominador.

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$ Esta última tiene la forma $\infty/\infty$, reescribimos antes de derivar

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}$$ Ahora aplicamos L´Hopital

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}$$ Ahora se aplica la doble C y se simplifica

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{2}{x\cdot x^{-\frac{3}{2}}}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} 2x^{1/2} = 0$$

Anteriormente ya hemos estudiado algunos límites con forma indeterminada $\infty-\infty$. Es conveniente tener en mente todas las posibles manipulaciones. En el siguiente recuadro resumimos algunas de las recomendaciones a tomar en cuenta que consisten básicamente en llevar a un límite con la forma indeterminada $0/0$ ó $\infty/\infty$ para aplicar L´Hopital o bien manipular para seguir recomendaciones ya vistas.

**Las formas indeterminadas** $\infty-\infty$ **.** Es conveniente para ello tomar en cuenta si es el caso de:

**1.-** Sacar factor común
**2.-**Multiplicar y dividir por la conjugada
**3.-** Sumar de fracciones
**4.-** Usar alguna propiedad o definición particular de las funciones que se están trabajando.

Por ejemplo en $\lim_{x\to\infty}(2x^4-5x^3-2x^2+1)$ es recomendable sacar factor común. En el caso de $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)$ es recomendable aplicar conjugada. Estos dos ejemplos ya han sido desarrollados anteriormente.

**Ejemplo 7.-** Calcular $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{1}{x-1}\right)$

**Solución:** Estamos en la forma $\infty-\infty$ donde hay fracciones involucradas, se sigue la primera recomendación: Se suman fracciones.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln(x)}{(x-1)\ln(x)}\ .$$

Se convirtió en la forma $0/0$. Ahora se puede aplicar L´Hopital

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln(x)+\frac{x-1}{x}}$$

Se reescribe

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln(x)+x-1}\ .$$

Se convirtió en la forma $0/0$ . Aplicamos de nuevo L´Hopital

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln(x)+\frac{x}{x}+1}$$

En esta última desapareció la indeterminación y al evaluar concluimos

$$=\frac{1}{2}$$

**Ejemplo 8.-** Calcular $\lim_{x\to\infty}\left[\ln x-\ln(2x+1)\right]$

**Solución:** Tenemos la forma $\infty-\infty$ Usamos las propiedades de los logaritmos para reescribir.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\ln x-\ln(2x+1)\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)$$

Si este límite existe, entonces aplicamos la propiedad del límite de funciones continuas: el límite del logaritmo es el logaritmo del límite, pues logaritmo es una función continua

$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)\right)$$

Tenemos un límite de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, se aplica L´Hopital.

$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

**Ejercicio de desarrollo.-** Calcular los siguientes límites:

**a)** $\lim_{x\to\infty}\left[e^{2x}-\frac{e^{2x}}{e^x+1}\right]$; **b)** $\lim_{x\to 0}\left[x\ln(x+1)\right]$; **c)** $\lim_{x\to -1^+}\left[2\ln(x+1)-\ln(e^{x+1}-1\right]$; **d)** $\lim_{x\to\infty}\left[xe^{1/x}-x\right]$

**Formas indeterminadas** $1^\infty,\infty^0,0^0$ . Ellas se producen cuando tenemos un límite de la naturaleza $\lim_{x\to c}f(x)^{g(x)}$ que al evaluar en $c$ producen cualquiera de estas formas, donde $f$ y $g$ son funciones no constantes y $c$ puede ser una constante o $\infty$ .

**Comentario.-** Los límites $\lim_{x\to c}\left(2^{x^r}\right)^{1/x}$ ofrecen las formas $1^\infty,\infty^0,0^0$ , dependiendo si *c* es 0, $\infty$ o $-\infty$ , para *r* positivo. Este límite es igual a $\lim_{x\to c}2^{x^{r-1}}$ dando distintos resultados dependiendo del exponente *r*, es decir puede dar una constante, o ir a infinito o dar cero. En este caso una simple manipulación algebraíca permite resolver este tipo de límite. Pero en general no tendremos esta suerte.

**Procedimiento 1** para resolver límites no triviales $\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)}$ con formas indeterminadas $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$

**1.-** En $y = \lim_{x\to c} f(x)^{g(x)}$

Tomar logaritmo neperiano a ambos lados:

$$\ln y = \ln\left(\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)}\right)$$

**2.-** Usar la propiedad de continuidad del logaritmo, esto es justificado siempre y cuando $y = \lim_{x\to c} f(x)^{g(x)}$ exista.

$$\ln y = \lim_{x\to c}\left(\ln f(x)^{g(x)}\right).$$

**3.-** Usar la propiedad de la potencia de los logaritmos.

$$\ln y = \lim_{x\to c}\left(g(x)\cdot \ln f(x)\right)$$

En este paso se ha transformado el límite original en uno de la forma $0\cdot\infty$. Se resuelve esta indeterminación aplicando la recomendación de esta forma.

Suponga que $\ln y = \lim_{x\to c}\left(\ln f(x)^{g(x)}\right) = K$

**4.-** Como estamos interesados en el valor de $y = \lim_{x\to c}\left(f(x)^{g(x)}\right)$, entonces finalmente en la igualdad $\ln y = K$, se despeja $y$

$$y = e^{K}$$

**Solución:** Tenemos una indeterminación de la forma $1^{\infty}$

**Procedimiento 1:** Seguimos los pasos dados por el procedimiento

**1.-** En $y = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

Tomar logaritmo neperiano a ambos lados:

$$\ln y = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$$

**2.-** Usamos la propiedad de continuidad del logaritmo, esto es justificado siempre y cuando

$y = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ exista.

$$\ln y = \lim_{x\to 0}\left(\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right).$$

**3.-** Usamos la propiedad de la potencia de los logaritmos (por eso se tomó logaritmos)

$$\ln y = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot \ln(1+x)\right)$$

Tenemos ahora un límite de la forma $\infty\cdot 0$. Se resuelve esta indeterminación aplicando la recomendación de llevarlo a la forma 0/0 en este caso. Aquí simplemente se realiza el producto de fracciones.

$$\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}$$ aplicamos L´Hopital

$$\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1$$

**4.-** Como estamos interesados en el valor de $y=\lim_{x\to 0}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$, entonces finalmente en la igualdad $\ln y=1$, se despeja $y$

$$y=e^{1}$$

Concluimos finalmente que $\lim_{x\to 0}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=e$

Para resolver este límite también pudimos aplicar el procedimiento 2, que a continuación establecemos

**Procedimiento 2.** Se usa la identidad $a=e^{\ln a}$, donde $a$ es la función a la que se toma límite.

$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to c} e^{\ln f(x)^{g(x)}}$ Se aplica la propiedad del logaritmo de una potencia.

$=\lim_{x\to c} e^{g(x)\ln f(x)}$ Se aplica la propiedad de continuidad de la función exponencial

$=e^{\lim_{x\to c} g(x)\ln f(x)}$

Finalmente se resuelve el límite indeterminado $\lim_{x\to c}\left(g(x)\cdot \ln f(x)\right)$ aplicando la recomendación

**Solución** de $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ dado por el **procedimiento 2.** Se usa la identidad $a=e^{\ln a}$

$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}$

$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$ Se aplicó la propiedad del logaritmo de una potencia.

$=e^{\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]}$ Se aplicó la propiedad del límite de funciones continuas: La función exponencial es continua.

$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}}$ Se resuelve el límite por L´Hopital, llevándolo a la forma 0/0

$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}}$ Finalmente, al evaluar obtenemos el resultado

$=e$

**Observación.-** El límite en las últimas expresiones está en el exponente.

**Ejemplo 10.-** Calcular $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{x}$

**Solución:** Tenemos una indeterminación de la forma $\infty^{0}$,

**Procedimiento 1.-** Seguimos las recomendaciones de este procedimiento paso por paso:

**1.-** En $y=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{x}$ tomamos logaritmos neperianos a ambos lados:

$$\ln y = \ln\left(\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x\right)$$

**2.-** Usamos la propiedad de continuidad del logaritmo

$$.\ln y = \left(\lim_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x\right)$$

**3.-** Usamos las propiedades de los logaritmos, queda: $\ln y = \lim_{x\to 0^+}\left(-x\ln\sqrt{x}\right)$

Tenemos ahora un límite de la forma $0\cdot\infty$ . Se resuelve esta indeterminación aplicando la recomendación de llevarlo a la forma $\frac{\infty}{\infty}$ en este caso.

$$\ln y = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\ln(x)}{2x^{-1}}$$ aplicamos L´Hopital

$$\ln y = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2} = 0$$

**4.-** Como estamos interesados en el valor de $y = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x$ , entonces finalmente en la igualdad $\ln y = 0$ , se despeja $y$ . De esta forma:

$$y = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x = 1$$

**Procedimiento 2.** Se usa la identidad $a = e^{\ln a}$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$ Se aplicó la propiedad del logaritmo de una potencia.

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{-x\ln\left(\sqrt{x}\right)}$$ Se aplicó la propiedad del logaritmo de un cociente y luego ln1=0

$$= e^{\lim_{x\to 0^+}\left[-x\ln x^{1/2}\right]}$$ Se aplicó la propiedad de continuidad de la función exponencial

$$= e^{\lim_{x\to 0^+} -\frac{\ln(x)}{2x^{-1}}}$$ Se resuelve el límite por L´Hopital, llevándolo a la forma $\frac{\infty}{\infty}$

$$= e^{\lim_{x\to 0^+} -\frac{\frac{1}{x}}{2x^{-2}}} = e^{\lim_{x\to 0^+} -\frac{x}{2}}$$ Finalmente, al evaluar obtenemos el resultado

=1

**Ejercicio de desarrollo.-** Calcule el siguiente límite $\lim_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{1/\sqrt{x^2+1}}$**.**

Recuerde que hay otras formas que no son indeterminadas como por ejemplo:

**a)** $\frac{0}{\infty}=0$;  **b)** $\infty+\infty=\infty$;  **c)** $\infty\cdot\infty=\infty$;  **d)** $\infty^{\infty}=\infty$

**Ejemplo 11.-** Calcular los siguientes límites: **a)** $\lim_{x\to\infty} x^5+3x^2$; **b)** $\lim_{x\to-\infty} x^5+3x^2$

**Solución: a)** No hay indeterminación: $\lim_{x\to\infty} x^5+3x^2 \overset{\infty+\infty}{=} +\infty$

**b)** Hay indeterminación: $\lim_{x\to-\infty} x^5+3x^2 \overset{-\infty+\infty}{=} \lim_{x\to-\infty} x^5(1+3\frac{1}{x^5}) = -\infty$

## EJERCICIOS

**1)** Calcule los siguientes límites, de ser posible use la regla de L´Hôpital.

**1.1)** $\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{1-x^2}$; **1.2)** $\lim_{x\to-2}\frac{2+3x+x^2}{4-x^2}$; **1.3)** $\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x^2}$;

**1.4)** $\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-\sqrt{x}}$; **1.5)** $\lim_{x\to3^+}\frac{3-x}{\sqrt{x^2-9}}$; **1.6)** $\lim_{x\to2^-}\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}$;

**1.7)** $\lim_{x\to0}\frac{1+\ln(1+x)-e^x}{x^2}$; **1.8)** $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{x+1}$; **1.9)** $\lim_{x\to\infty}\frac{2+3x+x^2}{4-x^2}$;

**1.10)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}$; **1.11)** $\lim_{x\to1^+}(x-1)\ln(x-1)$; **1.12)** $\lim_{x\to\infty}(1-x)\ln(x)$;

**1.13)** $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}+x}{e^{2x}-x}$; **1.14)** $\lim_{x\to\infty}(1-x+\frac{x^2-2x}{1+x})$; **1.15)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^{2x}+1)}{x}$;

**1.16)** $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1}$; **1.17)** $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1}$; **1.18)** $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x(x-1)}\right)$;

**1.19)** $\lim_{x\to0^+}\left(x-xe^{1/x}\right)$; **1.20)** $\lim_{x\to\infty}e^{-x}\ln x$; **1.21)** $\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$;

**1.22*)** $\lim_{x\to0}x\cdot sen\frac{1}{x}$; **1.23*)** $\lim_{x\to\pi}(x-\pi)tag(\frac{x}{2})$; **1.24*)** $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{sen^2(x)}-\frac{1}{x^2}\right)$;

**1.25)** $\lim_{x\to0}(1-3x)^{1/x}$; **1.26*)** $\lim_{x\to0}(\cos(3x))^{5/x}$; **1.27)** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x-3}\right)^{2x-1}$;

**1.28)** $\lim_{x\to0^+}(-\ln x)^x$; **1.29)** $\lim_{x\to0}\frac{2^x-3^{2x}}{x^2}$; **1.30)** $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$;

**1.31)** $\lim_{x\to-\infty}e^{x^2}-x$ **1.32)** $\lim_{x\to0^+}x^2\ln(\sqrt{x})$ **1.33)** $\lim_{x\to-\infty}e^x-x$;

**1.34)** $\lim_{x\to0^+}(1+\sqrt{2x})^{\sqrt{2/x}}$ **1.35)** $\lim_{x\to+\infty}(x^2-x\sqrt{x^2+1})$; **1.36)** $\lim_{x\to-\infty}(x^2+x\sqrt{x^2+1})$;

**1.37)** $\lim_{x\to1^+}(1-x)^{1-x^2}$; **1.38)** $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{x+1}}$.

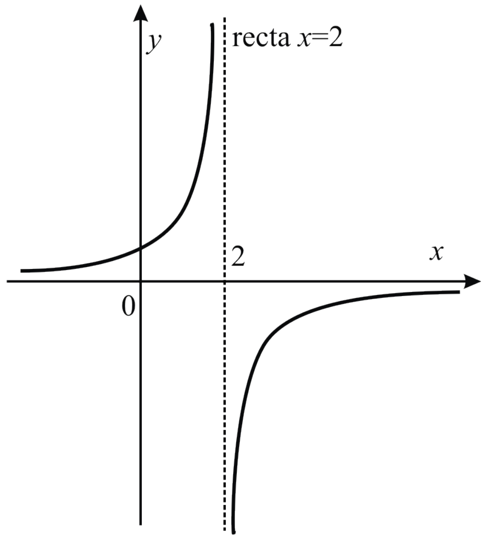
**Respuestas:**

**1.1)** 1/2; **1.2)** -1/4; **1.3)** -1/2; **1.4)** 2; **1.5)** 0; **1.6)** -1; **1.7)** -1 ; **1.8)** $\infty$ ; **1.9)** -1; **1.10)** 0; **1.11)** 0; **1.12)** $-\infty$ ; **1.13)** 1; **1.14)** -2; **1.15)** 2; **1.16)**0; **1.17)** 2/3; **1.18)** $-\infty$ ; **1.19)** $-\infty$ ; **1.20)** 0; **1.21)** 1/2; **1.22)** 0; **1.23)**0; **1.24)**1/3; **1.25)** $e^{-3}$; **1.26)**1; **1.27)** $e^2$; **1.28)** 1; **1.30)** $\infty$ ; **1.31)** $\infty$ **1.32)** 0 ; **1.33)** $\infty$ (no hay indeterminación); **1.34)** $e^2$; **1.35)** -1/2; **1.36)** $-1/2$; **1.37)** 1; **1.38)** 1

# ASINTOTAS VERTICALES

Intuitivamente **una asíntota** de una función **es una recta** tal que la gráfica de la función se acerca cada vez más a ella en cierto sentido. Si hablamos de asíntota vertical nos referimos a una recta vertical.

En la figura se puede apreciar como la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$ crece o decrece sin límite cuando $x$ se acerca a 2. La gráfica de la función se acerca cada vez más a la recta $x$=2 La recta $x$=2 la llamaremos una asíntota vertical de la gráfica de *f*.




Este tipo de comportamiento es descrito por los siguientes límites.

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{2-x}=-\infty\ .$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{2-x}=+\infty\ .$$

Esto dice que cuando $x$ se acerca a 2 por la izquierda, los valores de la función (las $y$) toman valores positivos y arbitrariamente grandes, como efectivamente ocurre en la gráfica. Así que hay una correspondencia entre asíntotas verticales y límites laterales.

**Definición.-** La recta $x=a$ es una asíntota vertical de la gráfica de $f(x)$ si se cumple cualesquiera de las siguientes situaciones:

**a)** $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ **c)** $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ **ó** **d)** $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ **.**

Para buscar las asíntotas verticales de la gráfica de una función, debemos conocer algo acerca de los valores que toma la función. En el caso que la función tenga algún término fraccionario deberíamos buscar asíntotas $x=k$, para aquellos valores $k$ donde el denominador se hace 0.

**Ejemplo 1.-** Encontrar las asíntotas verticales de la gráfica de la función

$$f(x)=\frac{2}{(x-1)(x+3)}\,.$$

Bosquejar la gráfica de la función en la zona donde se aproxima a la asíntota.

**Solución:** Los candidatos $a$ para que $x=a$ sea una asíntota vertical son los $x$ donde se anula el denominador de la función; planteamos entonces la ecuación

$$(x-1)(x+3)=0$$

cuyas soluciones son 1 y –3.

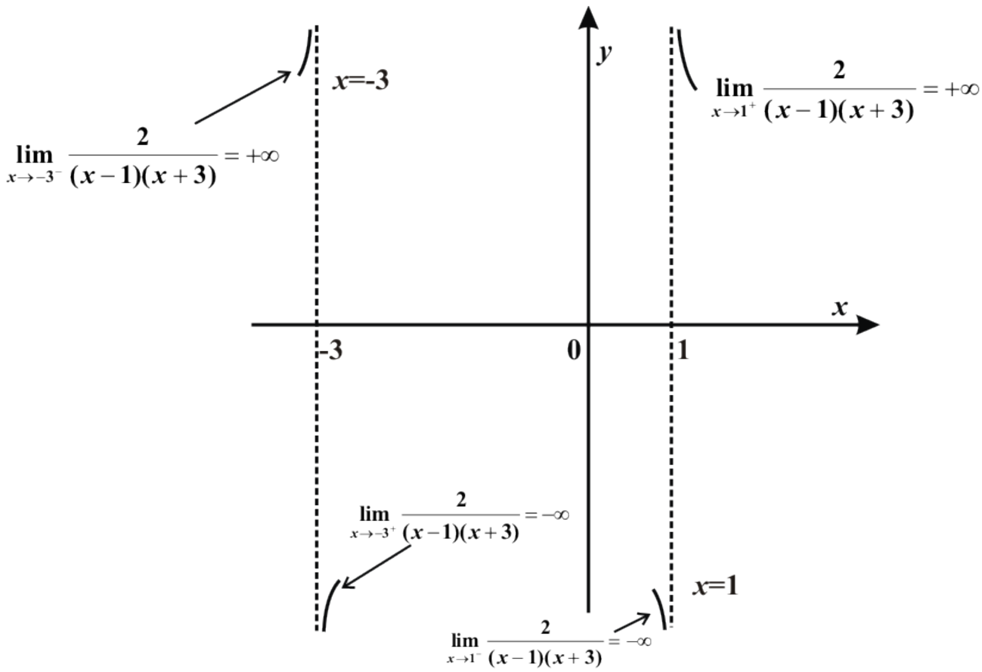
A fin de llevar a cabo la graficación requerida, planteamos todos los límites laterales

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2}{(x-1)(x+3)}\overset{\frac{2}{0^+\cdot 4}}{=}+\infty \qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{2}{(x-1)(x+3)}\overset{\frac{2}{0^-\cdot 4}}{=}-\infty$$

De aquí concluimos que $x$=1 es una asíntota vertical.

$$\lim_{x\to -3^+}\frac{2}{(x-1)(x+3)} \overset{\frac{2}{-4\cdot 0^+}}{=} -\infty \qquad \lim_{x\to -3^-}\frac{2}{(x-1)(x+3)} \overset{\frac{2}{-4\cdot 0^-}}{=} +\infty$$

Tenemos entonces que $x$=-3 también es una asíntota vertical. Esta información de los límites laterales es exhibida en la siguiente figura donde la gráfica está incompleta sólo se ha bosquejado en las zonas cercanas a las asíntotas. Observe que las asíntotas se han dibujado punteadas y la gráfica de la función con una línea sólida.




Se ha dado una pequeña curvatura a los trozos de gráfica para recalcar que la gráfica se aproxima a la asíntota. El estudiante puede realizar este tipo de ejercicio con una pequeña raya vertical lo más arriba posible o más abajo posible según corresponda para indicar que van a $\infty$ o $-\infty$ respectivamente, estos pequeños trazos ayudarán posteriormente a realizar la gráfica completa de la función.

**Comentario**: Una función puede tener o no un número finito de asíntotas verticales. Incluso existen funciones que tienen un número infinito de asíntotas, por ejemplo $f(x)=\tan(x)$.

**Ejemplo 2.-** Encontrar las asíntotas verticales de la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)}$.

**Solución:** Observe que el denominador se hace 0 en $x$=1. Así planteamos

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-2x+1}{(x-1)} \underset{factorizar}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)^2}{x-1} \overset{simplificar}{=} \lim_{x\to 1^+}(x-1)=0\,.$$

Igual valor nos da el límite cuando $x$ tiende a 1 por la izquierda. Concluimos que esta función no tiene asíntotas verticales.

Funciones que tienen logaritmo en su definición pudieran tener asíntotas verticales, recuerde que el logaritmo toma valores tendiendo a $-\infty$ cuando el logaritmo se evalúa en valores tendiendo a cero.

**Ejemplo 3.-** Encontrar las asíntotas verticales de la gráfica de las siguientes funciones **a)** $f(x)=\ln(x-2)+x$; **b)** $g(x)=(x-1)\ln(x-1)^2$.

**Solución:**

**a)** El dominio de esta función es el conjunto $(2,\infty)$.

Observe que el candidato a asíntota vertical es cuando $(x-2)=0$, esto es $x=2$. Para verificar sólo planteamos y resolvemos el límite por la derecha pues no tiene sentido plantear el límite por la izquierda.

$$\lim_{x\to 2^+} \ln(x-2)+x = -\infty$$

Así $x=2$ es una asíntota vertical de la función.

**b)** El dominio de esta función es **R**-$\{1\}$, pues $(x-1)^2>0$, salvo en 1 que es cero. El único candidato a asíntota vertical es $x=1$.

En este caso se plantean los dos límites, pues la función está definida a la izquierda y derecha de 1:

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\ln(x-1)^2 \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{2\ln(x-1)}{(x-1)^{-1}} \underset{L'H}{\overset{\infty/\infty}{=}}$$ se reescribió para poder usar L¨Hopital

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{2\frac{1}{x-1}}{-1(x-1)^{-2}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} -2(x-1)=0$$

Similarmente podemos chequear que $\lim_{x\to 1^-}(x-1)\ln(x-1)^2 = 0$.

En conclusión la función *g* no tiene asíntotas verticales.

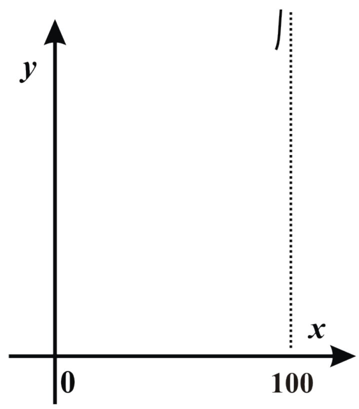
**Ejemplo 4.-** El costo de eliminar el *p* por ciento de contaminación en un lago está dado por $C(p)=\dfrac{1500p}{100-p}$. **a)** Determine la asíntota vertical de la gráfica de $C(p)$

**b)** Dibuje el comportamiento de la función costo cerca de la asíntota

**Solución:**

**a)** Como $\lim_{p\to 100^-}\dfrac{1500p}{100-p}=\infty$, entonces $p=100$ es una asíntota vertical de la gráfica de $C(p)$

**b)** Al lado se muestra la gráfica de $C(p)$ en una vecindad de $p$=100




## EJERCICIOS

**1)** Determinar todas las asíntotas verticales de las gráficas de las funciones dadas. Dibuje la gráfica cerca de las asíntotas

**1.1)** $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$; **1.2)** $g(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$; **1.3)** $f(x)=\dfrac{x}{x^3+2x^2-x-2}$

**1.4)** $f(x)=(2-x)^{-2}$; **1.5)** $h(x)=\dfrac{x^3-2}{x^3+8}$; **1.6)** $f(x)=\dfrac{x^4}{x^3-4x}$

**1.7)** $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{4-x^2}$ **;** **1.8)** $f(x)=\sqrt{x}-\ln(1+x)$ **;** **1.9)** $g(x)=x-\ln(1+x)$ **;**

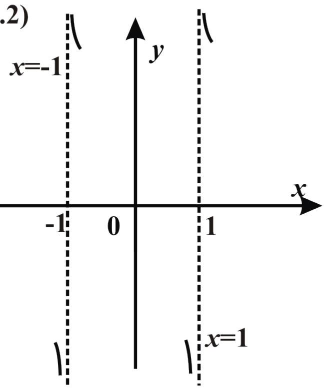
**1.10)** $f(x)=x+\ln(1-x)$ **;** **1.11)** $f(x)=\dfrac{4-x}{2x-x^2}$

**2)** Determinar todas las asíntotas verticales para cada una de las graficas de las funciones dadas. Plantee los resultados de los límites encontrados.

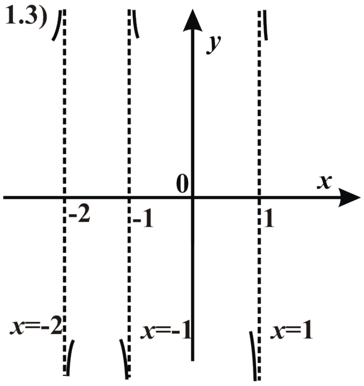
**2.1)** $f(x)=x\ln(x^2-2)$ ; **2.2)** $g(x)=\sqrt{3-x}\,\ln(3-x)$ **2.3)** $g(x)=\ln(x+4)^2-x$

**Respuestas**:

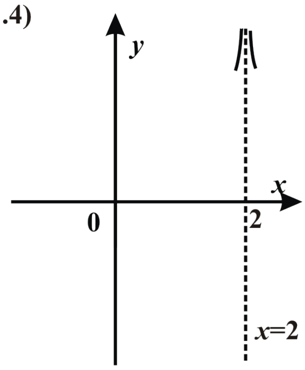
1.2)



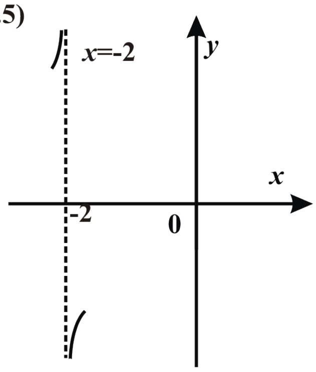

1.3)



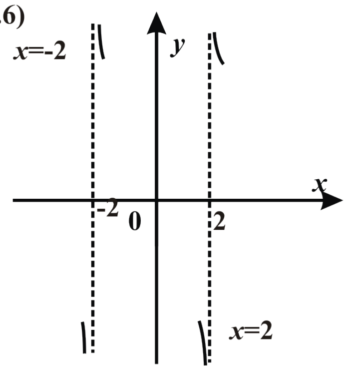

1.4)



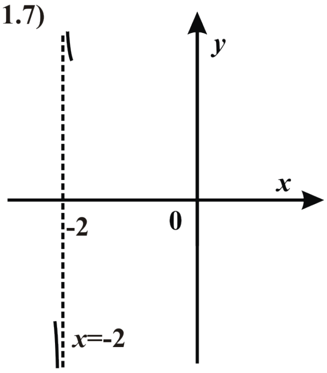

1.5)



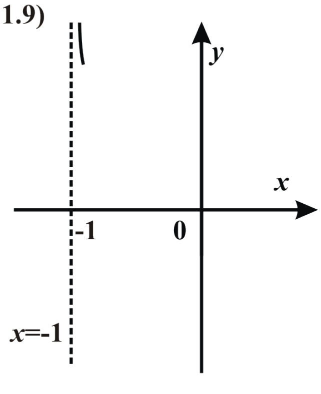

1.6)



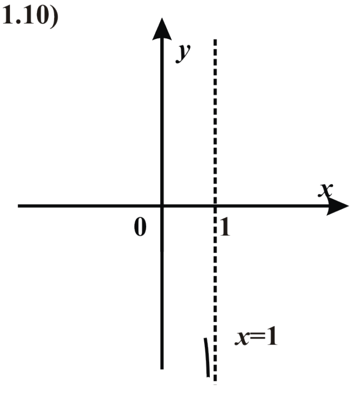

1.7)



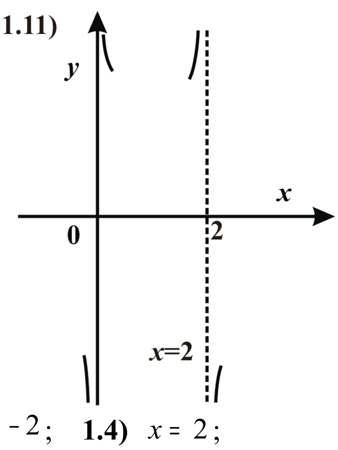

1.9)




1.10)




1.11)




**Respuestas: 1.1)** No hay; **1.2)** $x=-1;\ \ x=1$ ; **1.3)** $x=-1;\ \ x=1;\ \ x=-2$ ; **1.4)** $x=2$ ;

**1.5)** $x=-2$ ; **1.6)** $x=-2;\ \ x=2$ ; **2.1)** $\lim\limits_{x\to 2^+} x\ln(x^2-2)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to -2^-} x\ln(x^2-2)=+\infty$

**2.2)** $\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{3-x}\,\ln(3-x)=-\infty$ **2.3)** $\lim\limits_{x\to -4^+}\ln(x+4)^2-x=-\infty$

# ASINTOTAS AL INFINITO.

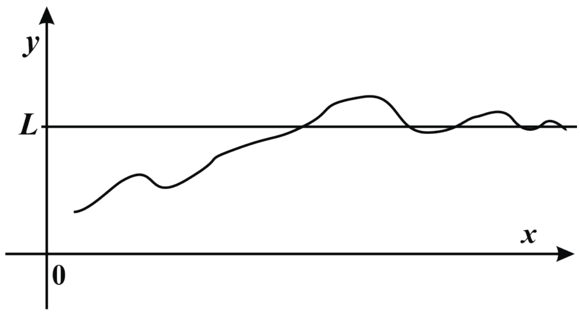
Otra manera en que la gráfica de una función se acerque a una recta es para valores $x$ tendiendo al infinito. Es decir que la gráfica de la función tiende cada vez más a una recta cuando $x$ crece sin límite. Estas asíntotas al infinito las clasificamos en:

- Asíntotas horizontales de la forma $y = L$ y
- Asíntotas oblicuas de la forma $y = mx + b$ con $m \neq 0$

Pronto veremos que si una función tiene una asíntota de un tipo cuando $x$ va a más infinito entonces no la tiene del otro tipo. Será importante entonces intuir que tipo de asíntota tiene.

# ASINTOTAS HORIZONTALES

En la figura se observa la gráfica de una función que se acerca a la recta $y=L$, para valores de $x$ arbitrariamente grandes. Esto significa que $f(x)$ se acerca al valor $L$ cuando $x$ tiende a infinito.




**Definición.-** La recta $y=L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función $y=f(x)$ si se cumple:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \text{ ó } \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Para buscar las asíntotas horizontales debemos plantear estos dos límites, si alguno de ellos da un valor finito $L$ entonces la recta $y=L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función. Más específicamente si **el primer límite ocurre** decimos que $y = L$ **es una asíntota horizontal por la derecha de la función**. Análogamente definimos la asíntota por la izquierda.

**Comentario**: Una función puede tener a lo sumo 2 asíntotas horizontales. Si tiene dos asíntotas horizontales una corresponde a la parte derecha de la gráfica y otra a la izquierda. El siguiente ejemplo muestra distintas situaciones.

**Ejemplo 1.-** Encontrar las asíntotas horizontales de cada una de las gráficas de las siguientes funciones: **a)** $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ ; **b)** $g(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$; **c)** $f(x) = e^{-2x} + \dfrac{1}{x}$.

**Solución:**

**a)** Planteamos el límite $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x+1}$ y lo resolvemos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x+1}{x}}.$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x}} = 2$$

Similarmente podemos verificar que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x+1} = 2.$$

De aquí concluimos que $y$=2 es una asíntota horizontal por la derecha y por la izquierda de la función.

**b)** Planteamos y resolvemos el límite $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+1}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{x}} = +\infty \;.$$

Similarmente podemos verificar que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x+1} = -\infty \;.$$

De aquí concluimos que la gráfica de la función no tiene asíntotas horizontales. (Recuerde que para tener asíntota horizontal el límite en infinito debe existir, valga la redundancia, ser un número finito.)

**c)** Planteamos y resolvemos

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} + \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{2x}} + \frac{1}{x} = 0\,.$$

Por el lado izquierdo tenemos

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-2x} + \frac{1}{x} \overset{e^{\infty}}{=} +\infty$$

Por consiguiente $y$=0 es una asíntota horizontal por la derecha de la gráfica de la función. La gráfica no tiene asíntota horizontal por la izquierda.

**Ejercicio de desarrollo**. Determinar todas las asíntotas de la función $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4x+3}$. Haga un bosquejo de la gráfica de la función en la zona donde la función se acerca a la asíntota

# APLICACIONES

En el siguiente ejemplo trataremos el modelo de Crecimiento logístico, el cuál es usado para modelar crecimientos poblacionales.

**Ejemplo 1.-** Para poblaciones creciendo inicialmente rápido y luego se vuelven tan numerosas que pierden su capacidad de crecer como crecían en un pasado debido a interacciones entre los miembros de la población, resulta apropiado usar un modelo de **crecimiento logístico** para predecir el tamaño de la población, dado por

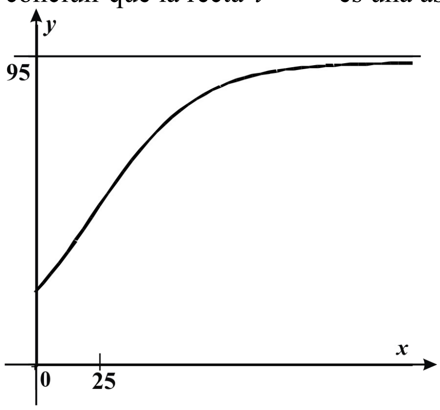
$$P(t) = \frac{a}{1+Ce^{-kt}},$$

donde $a$, $C$ y $k$ son constantes. Veamos que $a$ representa el tamaño de la población límite.

Como $\lim_{x\to+\infty} e^{-kx} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{kx}} = 0$, podemos verificar que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a}{1+Ce^{-kt}} = a$$

Este valor *a* es llamado en ocasiones la capacidad de alojamiento de la población. Podemos concluir que la recta $y=a$ es una asíntota horizontal por la derecha.




La figura del al lado contiene la gráfica de $P(t)=\frac{95}{1+3e^{-0.05t}}$. El lector puede observar en la gráfica como $y$=95 es una asíntota horizontal.

# ASINTOTAS OBLICUAS

En un ejemplo de la sección pasada se determinó que la función $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ no tenía asíntota horizontal. En esta sección vamos a establecer que esta función tiene una asíntota oblicua al infinito. Pero veamos formalmente la definición de asíntotas oblicuas.

**Definición.-** La recta $y=mx+b$, $m\neq 0$ es una asíntota oblicua de la gráfica de la función $f$ si se cumplen al menos uno de los dos límites:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(mx+b)\right]=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(mx+b)\right]=0$$

Si se cumple el primer límite decimos que $y=mx+b$ es una asíntota oblicua por la izquierda. Similarmente si se cumple el segundo límite decimos que es una asíntota por la derecha.

Son muchas las maneras de establecer las asíntotas oblicuas cuando las hay. Presentamos dos consideraciones para establecer rápidamente una asíntota oblicua.

- Si la función $f(x)$ está escrita de la forma:

  $f(x)=ax+b+\delta(x)$, donde la función $\delta(x)\to 0$ cuando *x* va a infinito (a menos infinito).

se concluye de una vez que la recta $y=ax+b$ es la asíntota oblicua por la derecha (por la izquierda) de la gráfica de la función.

- Si la función no se presenta de esta forma entonces se intenta de llevar a esta forma. Normalmente se hace por división de polinomio ó reescribiendo la función descomponiendo como suma de igual denominador.

  La división de polinomios se emplea cuando la función tiene la forma racional $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ y el

grado del numerador es justo uno más que el grado del denominador. Entonces tendremos una asíntota oblicua. Recuerde que la división de polinomios nos permite reescribir la función como:

$$f(x) = C(x) + \frac{R(x)}{q(x)}$$

$$\begin{array}{l|l} \boldsymbol{p(x)} & \boldsymbol{q(x)} \\ \cline{2-2} \boldsymbol{R(x)} & \boldsymbol{C(x)} \end{array}$$

Es fácil verificar que $C(x)$ es de grado 1 y $\frac{R(x)}{q(x)} \to 0$.

En este caso $y = C(x)$ es la asíntota oblicua de la función.

**Ejemplo 1.-** Determine las asíntotas oblicuas de las siguientes funciones en caso de tenerlas:

**a)** $g(x) = 3x + 4 + \frac{1}{3x}$; **b)** $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

**Solución:**

**a)** Esta función ya está escrita en la forma $f(x) = ax + b + \delta(x)$, donde $ax + b = 3x + 4$ y $\delta(x) = \frac{1}{3x}$.

Sólo falta chequear $\delta(x) \to 0$ cuando $x$ va a más o menos infinito, lo cual efectivamente es cierto:

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{3x} = 0$ y $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{3x} = 0$

En conclusión $y = 3x + 4$ es la asíntota oblicua de *g* tanto por la izquierda como por la derecha

**b)** Es una función racional donde el grado del numerador es justo un grado mayor que el denominador. Para establecer la asíntota oblicua usamos división de polinomios

De la división de polinomios $x^2$ entre $(x+1)$, tenemos que como

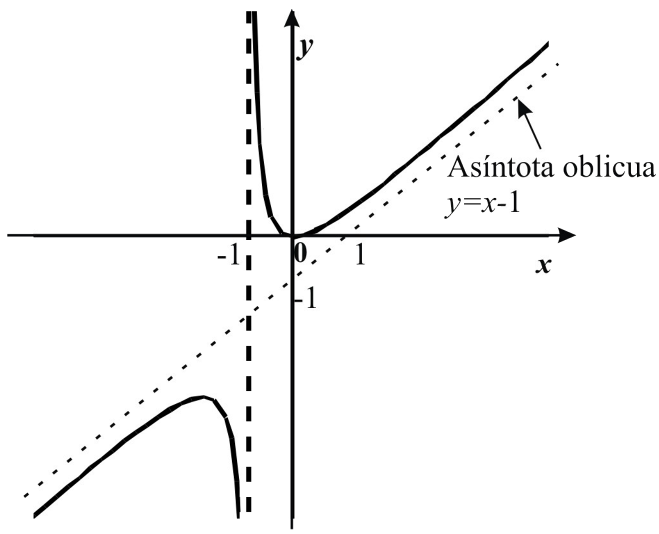
$f(x) = C(x) + \frac{R(x)}{q(x)}$, entonces la función puede ser escrita como

$$f(x) = (x-1) + \frac{1}{x+1},$$

$$\begin{array}{ll|l} \boldsymbol{x^2} & \boldsymbol{0x+0} & \boldsymbol{x+1} \\ \cline{3-3} \boldsymbol{-x^2} & \boldsymbol{-x} & \boldsymbol{x-1} \\ \cline{1-2} & \boldsymbol{-x} & \\ & \boldsymbol{x \quad 1} & \\ \cline{2-2} & \boldsymbol{1} & \end{array}$$

En el infinito vemos que el término $\frac{1}{x+1} \longrightarrow 0$, así podemos concluir que la función $f(x) = (x-1) + \frac{1}{x+1}$ para valores muy grandes de $x$ se comporta como la función $g(x) = x - 1$, la representación de esta última es una recta. Así que la gráfica de $f(x) = (x-1) + \frac{1}{x+1}$ cuando se aleja a la izquierda o a la derecha se acerca a la recta $y = x - 1$.

Al lado está la gráfica de $f$ obtenida gracias a un software de computación También se ha trazado la recta de $y = x - 1$. Se puede apreciar que la gráfica de $f$ se acerca a la asíntota para valores grandes de $x$




**Recuerde que llamamos asíntotas al infinito a las asíntotas horizontales y a las oblicuas.**

El comportamiento en el infinito es único. Si por ejemplo la gráfica de una función tiene asíntota horizontal entonces no tiene oblicua, por otro lado si tiene oblicua no tendrá horizontal. Es por ello importante intuir cual tiene para entonces pasar a establecer la asíntota que tiene y no tener que establecer que la otra no la tiene.

Si tenemos una función racional escrita en la forma $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, polinomio sobre polinomio, entonces

- Si el grado del numerador es menor o igual que el denominador entonces tiene asíntota horizontal se plantea entonces el límite para determinar la asíntota y no se plantea la asíntota oblicua.
- Si en cambio el grado del numerador es exactamente uno más que el denominador se pasa a determinar la asíntota oblicua a través de la división de polinomios, donde y=cociente es la asíntota oblicua. No se plantea asíntota horizontal pues no tiene.
- Si el grado del numerador se diferencia en más de uno del grado del denominador entonces no hay asíntotas al infinito.

Si la función es un cociente pero no necesariamente entre polinomios, los puntos de arriba sirven de guía para intentar de establecer si la función tiene asíntota horizontal u oblicua o no tiene asíntota al infinito.

¿Cómo establecer que una función no tiene asíntota al infinito? Situaciones sencillas son como las que siguen

**1)** Si por ejemplo es de la forma o se pueden reescribir fácilmente como $f(x)=ax^2+bx+c+\delta(x)$ ó $f(x)=\sqrt{x}+c+\delta(x)$ donde $\delta(x)$ va a 0 cuando $x$ va infinito no tienen asíntotas al infinito, el comportamiento en la primera es parabólico, en la segunda es como la raíz en el infinito (no hay un comportamiento lineal)

**2)** Si es una función racional $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ donde el grado del numerador se diferencia en más de un grado que el del denominador entonces no hay asíntotas al infinito

Observe que si es de la forma $f(x)=c+\delta(x)$ donde $\delta(x)$ va a 0 cuando $x$ va infinito es porque tiene asíntota horizontal $y=c$.

**Ejemplo 1.-** Establezca si las siguientes funciones tienen asíntotas en el infinito.

**a)** $f(x)=2x+1-\dfrac{3}{\sqrt{x+1}}$; **b)** $f(x)=\dfrac{x^3}{x+1}$; **c)** $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+1}$; **d)** $f(x)=\dfrac{x^2+3x-\sqrt{x}}{x}$

**Solución:**

**a)** En este caso la gráfica de la función tiene la asíntota oblicua $y=2x+1$ por la derecha, pues $f(x)$ puede ser representada como $f(x)=2x+1+\delta(x)$, donde $\delta(x)=-\dfrac{3}{\sqrt{x+1}}\to 0$ cuando $x\to\infty$. (Observe que la función no está definida por el lado izquierdo, por tanto no tiene asíntota oblicua por la izquierda)

**b)** Es una función racional, donde el grado del numerador es 2 más que el denominador. Por tanto no tiene asíntotas al infinito (ni horizontales ni oblicuas).

**c)** Como el grado del numerador es igual al grado del numerador se sospecha que tiene asíntota horizontal. (observe que no es función racional). Planteamos el límite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{\sqrt{x}}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x}}=1.$$

El límite a menos infinito no tiene sentido. En conclusión $y=1$ es una asíntota horizontal de $f$ por la derecha.

**d)** Como el grado del numerador es justo uno más que el denominador intentamos establecer si la función $f(x)=\dfrac{x^2+3x-\sqrt{x}}{x}$ tiene asíntota oblicua. Se intenta de reescribir la función con la forma $f(x)=ax+b+\delta(x)$ con $\delta(x)\to 0$ cuando $x$ va infinito. El numerador no es un polinomio entonces no podemos recurrir a la división de polinomios para establecer la asíntota. Realizamos la división entre un monomio descomponiendo la expresión en una suma de fracciones con igual denominador

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{x^2+3x-\sqrt{x}}{x}\\&=\frac{x^2}{x}+\frac{3x}{x}-\frac{\sqrt{x}}{x}\\&=x+3-\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{\delta(x)}\end{aligned}$$

De aquí podemos concluir. Como $-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\to 0$ cuando $x$ va infinito entonces $y=x+3$ es la asíntota oblicua por la derecha, pues por la izquierda la función no está definida.

**Comentarios:**

**1.-** Vamos a intentar en b) conseguir la representación $f(x)=g(x)+\delta(x)$ donde la función $\delta(x)\to 0$ cuando $x$ va a infinito, mediante la división de polinomios.

Antes de proceder hacer la división sabemos que el cociente de la división, $g(x)$, es un polinomio de grado 2, así que de una vez sabemos que la gráfica de la función no tiene asíntota oblicua. Sin embargo conseguiremos la representación para hacer un comentario provechoso

$$\begin{array}{llll|l} \boldsymbol{x^3} & \boldsymbol{0x^2} & \boldsymbol{0x+0} & & \boldsymbol{x+1} \\ \boldsymbol{-x^3} & \boldsymbol{-x^2} & & & \boldsymbol{x^2-x+1} \\ \hline & \boldsymbol{-x^2} & \boldsymbol{0x} & & \\ & \boldsymbol{x^2} & \boldsymbol{-x} & & \\ \hline & & \boldsymbol{-x} & \boldsymbol{0} & \\ & & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{-1} & \\ \hline & & & \boldsymbol{-1} & \end{array}$$

$$f(x)=\frac{x^3}{x+1}=\frac{(x^2-x+1)(x+1)-1}{x+1}$$

$$f(x)=x^2-x+1-\frac{1}{x+1}$$

En este caso $g(x)=x^2-x+1$ y $\delta(x)=-\frac{1}{x+1}\to 0$

Sin duda no hay asíntota oblicua, vemos aún más que el comportamiento de la gráfica de la función en el infinito es de tipo parabólico, de acuerdo a la ley $g(x)=x^2-x+1$.

**2.-** En c) observe como la función $f(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{x+1}$ puede ser escrita como

$f(x)=\frac{x}{x+1}-\frac{\sqrt{x}}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}-\frac{\sqrt{x}}{x+1}$. En este caso $\delta(x)=-\frac{1}{x+1}-\frac{\sqrt{x}}{x+1}\to 0$ cuando $x$ va a infinito y la función se comporta como la función $g(x)=1$ en el infinito cuya representación gráfica es una recta horizontal.

**3.-** La función $f(x)=\frac{x^2-2x+4\sqrt{x^3}}{x}$ no tiene asíntota oblicua aún cuando la diferencia de los órdenes entre el numerador y el denominador es 1. Efectivamente, $f$ puede ser escrita como $f(x)=x-2+\underbrace{4\sqrt{x}}_{\delta}$. Esta no es una función lineal y $\delta(x)$ no va a 0 cuando $x$ va a infinito.

**4.-** Las asíntotas al infinito tiene una gran importancia en los modelos de regresión. En estadística se presenta muchas veces una cantidad $y$ que depende linealmente de otra cantidad $x$ y se busca establecer la mejor recta que se adapte a los datos, esto a grosso modo es lo que se llama regresión lineal. No siempre la relación entre dos variables es lineal, pero si sabemos que la relación entre las dos cantidades está dada por una función que tiene una asíntota oblicua entonces una regresión lineal provee un modelo sencillo que explica la relación entre estas dos variables para valores altos de la variable independiente $x$ y permite justificar que un modelo lineal es apropiado cuando se emplea en predicciones de valores y para valores altos de $x$

**Ejemplo 2.-** Determinar todas las asíntotas verticales y en el infinito de la función $f(x)=\frac{x^4-1}{x^3+x^2}$.

Bosqueje la gráfica de la función en las zonas donde se acerca a las asíntotas.

**Solución:**

- **Primero determinaremos las asíntotas verticales**. Los posibles candidatos son donde el denominador se hace 0: $x^3+x^2=0$. Esta ecuación se resuelve por factorización obteniendo como únicas soluciones $x$=0 y $x$=-1. Pasamos a calcular los límites para determinar si efectivamente es una asíntota vertical

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^4-1}{x^2(x+1)}\overset{\frac{-1}{0^+\cdot 1}}{=}-\infty \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{x^4-1}{x^2(x+1)}\overset{\frac{-1}{0^+\cdot 1}}{=}-\infty$$

Así la recta $x$=0 es una asíntota vertical de la gráfica de la función.

Cuando pasamos a examinar $x$=-1 nos conseguimos con la indeterminación 0/0 que resolvemos usando L´Hopital

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^4-1}{x^3+x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to -1} \frac{4x^3}{3x^2+2x} = -4$$

y también podemos verificar que $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^4-1}{x^2(x+1)} = -4$

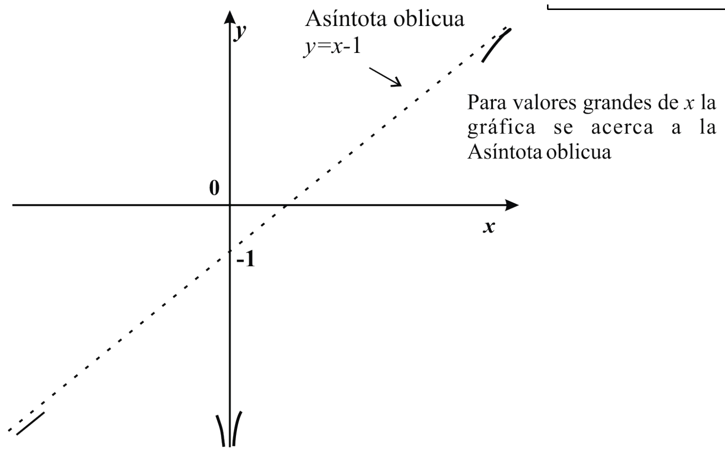
Por tanto $x$=-1 no es una asíntota vertical.

- **Asíntotas al infinito.-** Como tenemos una función racional donde el grado del numerador es justo uno más que el denominador podemos concluir de una vez que tiene asíntota oblicua. Pasamos a determinarla usando la división de polinomios.

La asíntota oblicua es entonces $y = x - 1$

Graficar la función cerca de la asíntota vertical se puede hacer con los límites calculados. Sin embargo, no podemos determinar como se acerca la gráfica a la asíntota oblicua. Una posibilidad bastante razonable es la que muestra la figura. Más adelante se tendrá herramientas que permitirán tener una certeza si la gráfica se acerca por arriba o por debajo de la recta.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\boldsymbol{x^4} & \boldsymbol{0x^3} & \boldsymbol{0x^2} & \boldsymbol{0x} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{x^3+x^2} \\ \cline{6-6}
\boldsymbol{-x^4} & \boldsymbol{-x^3} & & & & \boldsymbol{x-1} \\ \cline{2-5}
 & \boldsymbol{-x^3} & \boldsymbol{0x^2} & \boldsymbol{0x} & \boldsymbol{-1} & \\
 & \boldsymbol{x^3} & \boldsymbol{x^2} & & & \\ \cline{2-5}
 & & \boldsymbol{x^2} & & \boldsymbol{-1} &
\end{array}$$




**Ejercicio de desarrollo.-** Determinar todas las asíntotas verticales y en el infinito de las gráficas de las funciones dadas. **a)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2x^2}$; **b)** $f(x) = 2x + \dfrac{x-1}{x}$; **c)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^3+1}$

## EJERCICIOS

**1)** Determinar las asíntotas horizontales para las graficas de las funciones dadas.

**1.1)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x+1}$; **1.2** $f(x) = \dfrac{x^4+x}{x^3+x-1}$; **1.3)** $f(x) = \dfrac{1-2x^2}{3x^2-3x+2}$

**1.4)** $f(x) = (2-x)^{-2}$; **1.5)** $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^3+8}}$; **1.6)** $f(x) = 2 - \dfrac{1}{2x-1}$

**2)** Determinar todas las asíntotas horizontales de las funciones dadas.

**2.1)** $f(x) = \dfrac{x-1}{|x-1|}$; **2.2)** $f(x) = 3e^{2x}$; **2.3)** $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$; **2.4)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

**3)** Determinar todas las asíntotas horizontales, oblicuas y verticales de las gráficas de las funciones dadas. Representar la función por medio de una calculadora para confirmar la respuesta. (Alternativamente represente la función en las zonas donde la gráfica se acerca a las asíntotas) **3.1)** $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x-2}$; **3.2)** $f(x)=\dfrac{2(1-x^2)}{x^2-3x+2}$; **3.3)** $f(x)=1-x+\ln(x-1)$;

**3.4)** $f(x)=\dfrac{x^3+2x^4}{1-x^3}$; **3.5)** $f(x)=1-\dfrac{2}{1-x^2}$; **3.6)** $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

**4**) Diga cuál de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuales son falsas. Justifique

**4.1) ( )** Una asíntota horizontal puede cortar la curva infinitas veces.

**4.2**) **( )** Una asíntota vertical puede cortar la curva infinitas veces.

**4.3) ( )** Si $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$, pero $\lim_{x\to a^-} f(x)=L<+\infty$. Entonces $x=a$ no es una asíntota vertical.

**4.4**) **( )** Una función racional tiene por lo menos una asíntota vertical.

**4.5) ( )** Si $y=L$ es una asíntota horizontal por la derecha de la gráfica de la función $f$ y $y=M$ es una asíntota horizontal por la derecha de la gráfica de la función $g$. Entonces $y=L+M$ es una asíntota horizontal por la derecha de la función $(f+g)$.

**5)** Establezca si las gráficas de las siguientes funciones tienen asíntotas en el infinito.

**5.1)** $f(x)=2x+1-\dfrac{3x}{\sqrt{x^3+1}}$; **5.2)** $f(x)=\dfrac{1-x^3}{x^2+1}$; **5.3)** $f(x)=\dfrac{x^2+3\sqrt{x}}{x-1}$;

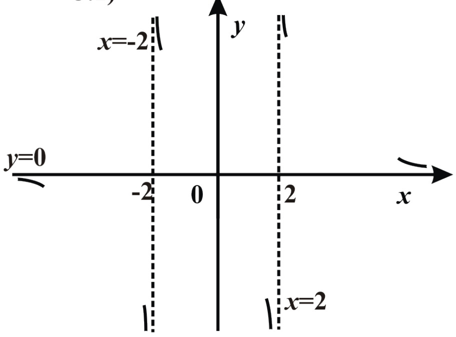
**5.4)** $f(x)=\dfrac{1-x^4}{x^2-1}$; **5.5)** $f(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{x}}$; **5.6)** $f(x)=\dfrac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

(Sugerencia 3.6, 5.3 y 5.5) Descomponga como suma de fracciones con igual denominador, uno de los sumandos es parte de la función delta)

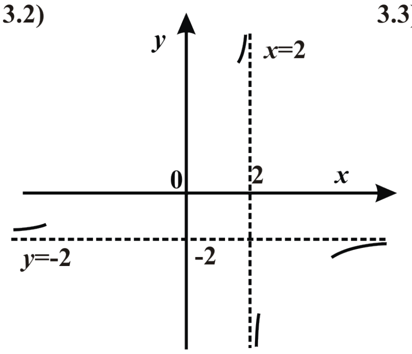
**Respuestas: 1.1)** $y=0$; 1.**2)** No hay; **1.3)** $y=-\dfrac{2}{3}$; **1.4)** $y=0$; **1.5**) $y=0$; **1.6)** $y=2$;

**2.1)** $y=1$ por la derecha; $y=-1$ por la izquierda. **2.2)** $y=0$ por la izquierda; **2.3)** $y=0$ por la derecha; **2.4)** $y=0$ por la izquierda.

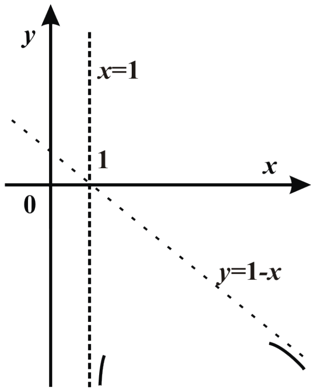
3.1)



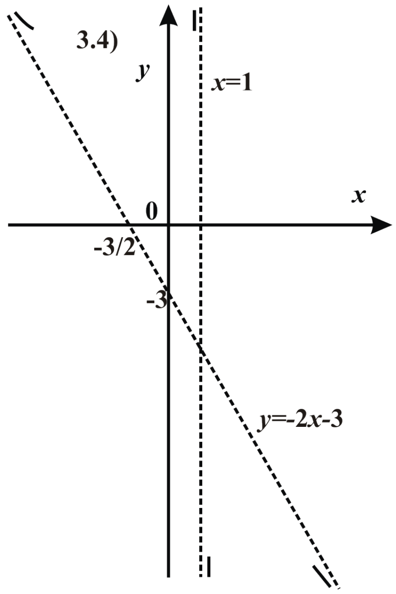

3.2)



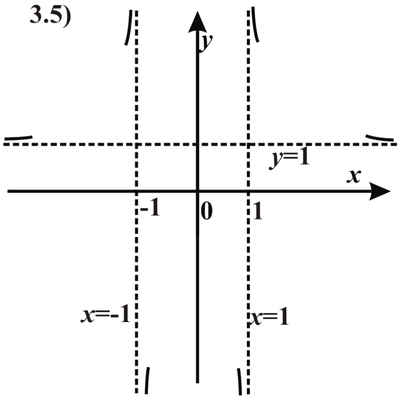

3.3)



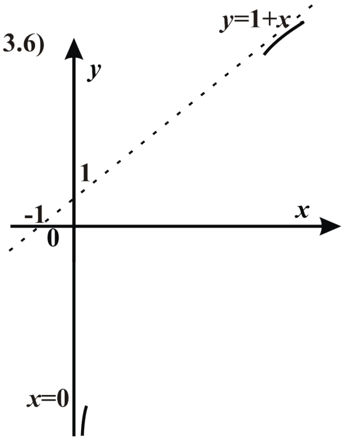

3.4)




3.5)




3.6)




Recuerde que aun no tenemos un método preciso para determinar por cual lado se acerca la gráfica a la asíntota. Las gráficas de estas respuestas se han realizado en base a la suposición que la gráfica de la función es tal que el trazo cerca de la asíntota vertical se une de una manera sencilla al trazo cercano a la asíntota en el infinito.

**4.1)** V; **4.2)** F (si corta infinitas veces no sería función); **4.3)** F (Si cumple una condición de la definición de límite es suficiente para ser asíntota.); **4.4)** F ( $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ no tiene asíntotas); **4.5**) V; **5.1)** $y=2x+1$ oblicua ; **5.2)** $y=-x$ oblicua; **5.3)** $y=x+1$; oblicua por la derecha; **5.4)** No tiene asíntotas; su comportamiento no es lineal si no cuadrático; **5.5)** $f(x)=-\sqrt{x}+1/\sqrt{x}$ no tiene comportamiento lineal en infinito, se comporta como la función $g(x)=-\sqrt{x}$; **5.6**) $y=-2$ es una asíntota horizontal por la derecha.

# ELASTICIDAD DE LA DEMANDA

Suponga que se tiene una disquera que ha venido cobrando 10UM por la venta de los CD más populares. Piensa aumentar el precio en un 5%. Es de esperar que la demanda baje, ¿pero en que porcentaje? Si baja un 2% la demanda esto no significará mucho y el ingreso se verá más bien beneficiado con este aumento de precio. En este caso el mercado no ha sido muy sensible al aumento del precio. Pero si en cambio la demanda baja en un 10% la demanda reacciona fuertemente frente al aumento de precio. En este último tipo de situación se habla de una demanda elástica. Para cuantificar estos fenómenos se usa el concepto de elasticidad de la demanda que es la razón entre el cambio porcentual en la demanda al cambio porcentual en el precio.

La elasticidad puntual de la demanda permite estimar la caída porcentual de la demanda por el aumento en el precio de un artículo. Esta cantidad cuya definición usa una derivada surge de la elasticidad de la demanda. .

Veamos más precisamente el concepto de elasticidad de la demanda y de donde proviene la elasticidad puntual de la demanda. Primero establecemos los cambios porcentuales en la demanda y en el precio.

Sea $q = f(p)$ la ecuación de demanda de un artículo. Considere $\Delta p$ el aumento en el precio

Cambio porcentual en el precio= $\frac{\Delta p}{p} x100$

Cambio porcentual en la demanda= $\frac{\Delta q}{q} x100 = \frac{f(p+\Delta p)-f(p)}{q} x100$

**Elasticidad de la demanda=** $\frac{Cambio \quad porcentual \quad en \quad la \quad demanda}{Cambio \quad porcentual \quad en \quad el \quad precio}$

$$= \frac{\frac{\Delta q}{q} x100}{\frac{\Delta p}{p} x100} = \frac{\Delta qxp}{\Delta pxq} = \frac{p}{q} x \frac{\Delta q}{\Delta p}$$

$$= \frac{p}{q} x \frac{f(p+\Delta p)-f(p)}{\Delta p}$$

Si $\Delta p \to 0$, obtenemos el concepto de elasticidad puntual de la demanda

$$\lim_{\Delta p \to 0} \frac{p}{q} x \frac{f(p+\Delta p)-f(p)}{\Delta p} = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}$$

**Definición.-** Se define la **elasticidad puntual** de la demanda, $\eta$ , como

$$\eta = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}.$$

**Observaciones**

**1**.- En general eta, $\eta$ , es una cantidad negativa

**2.-**Es claro de la definición de límite que

$$\eta \approx \frac{Cambio \quad porcentual \quad en \quad la \quad demanda}{Cambio \quad porcentual \quad en \quad el \quad precio}.$$

Esta aproximación nos permite aproximar el cambio en la demanda al cambiar los precios usando la elasticidad de la demanda:

$$\boxed{Cambio\ porcentual\ en\ la\ demanda \approx \eta \cdot Cambio\ porcentual\ en\ el\ precio}$$

**Ejemplo 1.- a)** Encontrar la elasticidad puntual de la demanda cuando la ecuación de demanda es $q = \sqrt{400-2p}$ **; b)** Usar la elasticidad puntual de la demanda para estimar el cambio porcentual en la demanda cuando el precio de $p = 20$ aumenta en 2%.

**Solución:**

**a)** En este caso tenemos que

$$\frac{dq}{dp} = \frac{-1}{\sqrt{400-2p}}.$$

De aquí

$$\eta = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = \frac{p}{\sqrt{400-2p}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{400-2p}}$$

$$\eta = \frac{-p}{400-2p}$$

**b)** Debemos determinar la elasticidad puntual a un precio de 20:

$$\eta = \frac{-50}{400-2\cdot 50} = -\frac{50}{300} = -\frac{1}{6}.$$

Ahora usamos la estimación

$$Cambio\ porcentual\ en\ la\ demanda \approx \eta \cdot Cambio\ porcentual\ en\ el\ precio$$

$$Cambio\ porcentual\ en\ la\ demanda \approx -\frac{1}{6}\text{x}2\% = -\frac{1}{3}\%$$

A este nivel de precio un aumento de precio del 2% hace que la demanda baje aproximadamente en 0.33%. La demanda a este nivel no es muy sensible al aumento de precio. En esta situación tenemos que $-1 < \eta < 0$. Cuando eta está entre estos valores decimos que la demanda es inelástica.

**Definición.-**

- La demanda es elástica si $\eta < -1$
- La demanda es inelástica si $-1 < \eta < 0$ y
- La demanda tiene elasticidad unitaria si $\eta = -1$

**Ejemplo 2.-**La ecuación de demanda de una artículo está dada por $q = \sqrt{400-2p}$ **a)** Determinar si la demanda es elástica, inelástica o unitaria para el precio de $p$=150**; b)** Estime el cambio porcentual de la demanda a este precio usando la elasticidad puntual cuando se aumenta los precios en un 1% **c)** Determinar el nivel de precio para el cual la demanda es unitaria. **d)** ¿Para qué precios la demanda resulta inelástica?

**Solución: a)** En el ejemplo pasado habíamos determinado

$$\eta = \frac{-p}{400-2p}$$

Para $p$=150 tenemos

$$\eta = \frac{-150}{400-2.150} = -1.5.$$

Para un precio de 150 U.M. la demanda resulta elástica.

**b)** *Cambio porcentual en la demanda* $\approx \eta \cdot$ *Cambio porcentual en el precio*

*Cambio porcentual en la demanda* $\approx -1.5 \text{ x} 1\% = -1.5\%$

Observe que frente a un aumento del precio, la demanda aumenta de manera más fuerte.

**c)** Debemos plantear y resolver $\frac{-p}{400-2p} = -1$, para conseguir el valor de $p$.

$$\frac{-p}{400-2p} = -1$$

$$p = 400 - 2p$$

$$p = \frac{400}{3}$$

En conclusión la elasticidad es unitaria cuando $p = \frac{400}{3}$.

**d)** Para ver cuáles son los precios en que la demanda resulta inelástica tenemos que plantear $\eta > -1$.
En nuestra situación esto es

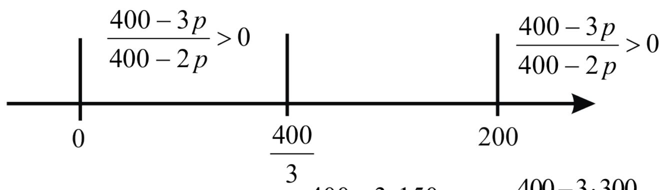
$$\frac{-p}{400-2p} > -1$$

Esto es una desigualdad que tenemos que resolver en $p$, recuerde que la reglas de las desigualdades son muy delicadas, por ejemplo una cantidad que este dividiendo no puede pasar multiplicando porque eventualmente esta cantidad para determinados valores de la variable puede ser negativa y cambiar el sentido de la desigualdad. Resolvemos la desigualdad justificando de paso a paso. Primero pasamos todos los términos a un lado de la desigualdad

$$\frac{-p}{400-2p} + 1 > 0$$ Sumamos fracciones y si es el caso factorizamos el numerador

$$\frac{400-3p}{400-2p} > 0$$

Colocamos las raíces del numerador y denominador en la recta real y tomamos valores de prueba que estén dentro de los intervalos definido por las raíces. Las raíces son $\frac{400}{3}$ y 200




$$\frac{400-3\cdot 1}{400-2\cdot 1} > 0 \qquad \frac{400-3\cdot 150}{400-2\cdot 150} < 0 \qquad \frac{400-3\cdot 300}{400-2\cdot 300} > 0$$

Evaluamos el lado izquierdo en esto valores, si la desigualdad se satisface entonces el intervalo al que pertenece este valor de prueba es parte de la solución. El intervalo $(200, \infty)$ lo descartamos pues allí el modelo de la ecuación de demanda no es valido. Queda entonces que la demanda es inelástica cuando el precio está en el intervalo $(0,\frac{400}{3})$.

**Ejercicio de desarrollo.-** La ecuación de demanda de un producto es $p=900-2q$

**a)** Encuentre la elasticidad puntual de la demanda cuando $p$=60. ¿Es elástica o no?

**b)** Si este precio se disminuye en 2%. ¿Cuál es el cambio aproximado en la demanda?

En los ejemplos anteriores hemos visto como la elasticidad puntual depende del precio. El siguiente ejemplo presenta el caso de una ecuación de demanda donde la elasticidad es siempre unitaria, independiente del precio.

**Ejemplo 3.- a)** Calcule la elasticidad puntual de la demanda para la familia de ecuaciones de demanda de la forma: $q=\frac{k}{p}$, **b**) Calcule el ingreso para un precio de $p$.

**Solución:**

**a)** En este caso tenemos que

$$\frac{dq}{dp}=\frac{-k}{p^2}.$$

De aquí

$$\eta=\frac{p}{q}\cdot\frac{dq}{dp}=\frac{p}{\frac{k}{p}}\cdot\frac{-k}{p^2}$$

$$\eta=-1$$

Así que la demanda tiene elasticidad unitaria para cualquier precio.

**b)** $I=p\cdot q=p\frac{k}{p}=k$.

El ingreso permanece constante igual a $k$ para cualquier variación en el precio.

# INGRESO Y ELASTICIDAD

Ya hemos visto un ejemplo que nos hace intuir que existe una relación entre estas dos cantidades. Podemos pensar un poco más y ver que si a un precio dado la demanda resulta inelástica probablemente se podrá aumentar los precios para aumentar los ingresos, pues la demanda no baja en la proporción que aumenta los precios. En cambio si la demanda resulta elástica un aumento en los precios llevará a una disminución más fuerte en la demanda con respecto al aumento de precio y por tanto el ingreso disminuirá frente a un aumento de precios. Esto lo podemos establecer desde un punto de vista más matemático:

Tenemos que el ingreso total está dado por:

$I(p)=pq$

Al derivar con respecto a $p$ (no es ingreso marginal)

$$\frac{dI}{dp}=q+p\frac{dq}{dp}$$

$$\frac{dI}{dp}=q(1+\frac{p}{q}\cdot\frac{dq}{dp})$$

$$\frac{dI}{dp} = q(1+\eta)$$

De esta última relación tenemos que

$$\frac{dI}{dp} > 0 \Leftrightarrow 1+\eta > 0 \text{, esto es } \eta > -1$$

y

$$\frac{dI}{dp} < 0 \Leftrightarrow 1+\eta < 0 \text{, esto es } \eta < -1$$

De estas dos últimas proposiciones tenemos que

- El ingreso crece en los intervalos donde la demanda es inelástica
- El ingreso decrece en los intervalos donde la demanda es elástica

**Ejemplo 4.-** Considere la ecuación de demanda de los ejemplos 1 y 2 dada por $q = \sqrt{400-2p}$ **a)** Si el precio se aumenta ligeramente de $p$=150 ¿se esperaría un aumento o una disminución del ingreso? **b)** Si el precio se aumenta ligeramente de $p$=100 ¿se esperaría un aumento o una disminución del ingreso?

**Solución: a)** En los ejemplos 1 y 2 habíamos determinado

$$\eta = \frac{-p}{400-2p}$$

para $p$=150 teníamos que

$$\eta = \frac{-150}{400-2.150} = -1.5.$$

para este precio la demanda es elástica y por tanto un aumento en el precio se esperaría una disminución en el ingreso.

**b)** Un precio de 100UM corresponde a una demanda inelástica y por tanto un aumento en el precio se esperaría una disminución en el ingreso.

## EJERCICIOS

**1)** Encuentre la elasticidad puntual para cada una de las ecuaciones de demanda en los valores indicados de $q$ o $p$. Determine si la demanda es elástica, inelástica o si tiene elasticidad unitaria.

**1.1)** $q = \frac{100}{(p+1)^2}$; $p = 9$; **1.2)** $q = \frac{30}{(p+4)^2}$; $p = 6$;

**1.3*)** $p = \sqrt{1000-q^2}$; $q = 30$; **1.4*)** $p = 100-3q$; $q = 5$;

**1.5)** $q = 50e^{-p/50}$; $p = 200$; **1.6)** $q = \frac{100}{p}$; $p = 155$

**1.7*)** $p = \sqrt{1000-3q}$; $q = 200$; **1.8)** $q = b - mp$; $p = p_0$

(*Despejar $q$ o derivar implícitamente)

**2)** Para que valores de $p$ tienen elasticidad unitaria las siguientes ecuaciones de demanda.

**2.1)** $p = 10-3q$;

**2.2)** $q = \frac{100}{(p+4)^2}$;

**2.3)** $q = b - mp$, con $m > 0$

**3)** La ecuación de demanda de un producto es $q = \sqrt{900 - p}$

**a)** Encuentre la elasticidad puntual de la demanda cuando *p*=800

**b)** Si este precio se disminuye en 3/4%. ¿Cuál es el cambio aproximado en la demanda?

**4)** La ecuación de demanda de un producto es $q = \sqrt{900 - p}$

**a)** Encuentre todos los precios que corresponden a una demanda elástica.

**b)** Calcule la elasticidad puntual de la demanda cuando *p*=500. Use su respuesta para estimar el incremento o disminución porcentual en la demanda cuando este precio aumenta en 6%, (esto es a *p*=530).

**5)** La ecuación de demanda para el secador de pelo portátil *Run* está dada por $q = \frac{1}{5}(225 - p^2); \quad 0 \leq p \leq 15$, q, medido en unidades de cientos, es la cantidad demandada por semana y p es el precio de la unidad en UM.

**a)** Comprobar que la demanda es inelástica cuando *p*=8?

**b)** ¿y cuando *p*=10?

**c)** Si el precio de la unidad se baja ligeramente de 10UM, se esperaría un aumento o disminución del ingreso?

**d)** Si el precio de la unidad se aumenta ligeramente de 8 UM, se esperaría un aumento o disminución del ingreso? Justifique sus respuestas usando elasticidad.

**e)** ¿Cuándo la demanda tiene elasticidad unitaria?

**6)** La cantidad demandada para las cajas de Fósforo *Un toque* esta relacionada con el precio (en UM) dada por la ecuación: $q = \sqrt{400 - 5p}; \quad 0 \leq p \leq 80$, (q medidos en unidades de cientos es la cantidad demandada por semana.)

**a)** ¿Es la demanda elástica o inelástica cuando *p*=40? ¿y cuándo *p*=60?

**b)** ¿Cuándo la demanda tiene elasticidad unitaria?

**c)** Si el precio de la unidad se baja ligeramente de 60UM, ¿se esperaría un aumento o disminución del ingreso?

**d)** Si el precio de la unidad se aumenta ligeramente de 40 UM, ¿se esperaría un aumento o disminución del ingreso? Justifique sus respuestas usando elasticidad

**7)** El propietario de un club de video ha estimado que el precio del alquiler *p* en UM de videocasete de regrabados esta relacionado a la cantidad *q* de videos alquilados por semana por la ecuación de demanda $q = \frac{2}{3}\sqrt{36 - p^2}; \; 0 \leq p \leq 6$. Actualmente, el precio es de 2 UM por cinta.

**a)** Para ese precio, ¿es la demanda elástica o inelástica?

**b)** Si el precio del alquiler se aumenta, ¿se esperaría un aumento ó disminución del ingreso? Justifique sus respuestas usando elasticidad

**Respuesta:**

**1.1**) -1,8; **1.2)** -18/25; **1.3)** -1/3; 1.4) –17/3**1.5)** -4; **1.6)** -1; **1.7)** -4/3; **2.1)** 5; **2.2)** 4; **2.3)** b/2

**3a)** –4; **3b)** La demanda aumenta aproximadamente en 0,3 unidades; **4a)** (600,900); **4b**)-5/8; -15/4%; **5.b)** elástica -8/5; **5c)** disminución; **5d)** aumenta ; **5e)** $5\sqrt{3}$ ; **6a)** con p=40 inelástica, con p=60 elástica; **6b)** p=160/3; **6c)** Un aumento, la función ingreso es decreciente; **6d**)aumenta

**7a)** inelástica; **7b)** aumento