# APENDICE I
# EXPONENTES Y RADICALES

La potenciación o notación exponencial es una notación para abreviar una multiplicación:

**Notación:** $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\ veces}$, para $n$ un entero positivo y $a \neq 0$.

Se lee como $a$ elevado a la $n$ o más abreviado: $a$ a la $n$.
La base es $a$ y $n$ el exponente o potencia e indica el número de veces que se repite el factor $a$.

**Ejemplo 1.- a)** $(-5)^3 = (-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = -125$; **b)** $\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3} = \frac{1}{243}$

**Observaciones:**

**1.-** Si $a$ negativo entonces $a^n$ es positivo si $n$ es par y negativo si $n$ es impar, como podemos apreciar en el ejemplo b y d anterior

**2.-** Una expresión como $2\cdot x^n$ o simplemente $2x^n$ es una escritura abreviada de $2\cdot(x^n)$, donde se puede analizar que la convención es que primero se hace la potencia y luego la multiplicación por 2. De manera similar $-x^n$ representa a $-(x^n)$ y $-2\cdot x^n$ quiere decir $(-2)\cdot(x^n)$

**3.-** $-x^n \neq (-x)^n$

**Convención:** La potencia es la primera operación que se ejecuta frente a multiplicaciones, divisiones, sumas o restas o cambio de signo.

**Ejemplo 2.-** Evaluar **a)** $2\cdot 3^3$; **b)** $-2^3$;

**Solución:** **a)** $2\cdot3^3 = 2\cdot27 = 54$; **b)** $-2^3 = -(2^3) = -8$

Los casos exponentes negativos o cero se definen como sigue:

**Definición:** Si $a \neq 0$ se define $a^0 = 1$ y si $n$ un entero positivo $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

**Comentario:** $0^0$ no está definido

**Ejemplo 3.- a)** $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; **b)** $2^0 = 1$; **c)** $(\sqrt{3})^0 = 1$; **d)** $(x+2)^{-n} = \frac{1}{(x+2)^n}$;

En la siguiente tabla se presentan las propiedades más importantes de exponentes

| | Propiedad | Ejemplo | Justificación (del 1-4 sólo para el caso $n$ natural) |
|---|---|---|---|
| 1 | $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ | $2^2\cdot2^4 = 2^{2+4} = 2^6$ | $a^n\cdot a^m = \underbrace{(a\cdot a\cdots a)}_{n\ veces}\cdot\underbrace{(a\cdots a)}_{m\ veces} = \underbrace{a\cdot a\cdots a\cdot a\cdots a}_{n+m\ veces} = a^{n+m}$ |
| 2 | $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$ | $(2^2)^4 = 2^{2\cdot4} = 2^8$ | $(a^n)^m = \underbrace{a^n\cdot a^n\cdots a^n}_{m\ veces}\cdot = a^{n+n+\cdots n} = a^{n\cdot m}$ |
| 3 | $(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$ | $(2\cdot b)^3 = 2^3\cdot b^3 = 8b^3$ | $(a\cdot b)^n = (a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdots(a\cdot b) == a^n\cdot b^n$ |
| 4 | $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ | $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$ | $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b} = \frac{a\cdot a\cdots a}{b\cdot b\cdots b} = \frac{a^n}{b^n}$ |
| 5 | $\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}}$ | $\frac{3^3}{3^5} = \frac{1}{3^{5-3}} = \frac{1}{9}$ | $\frac{a^n}{a^m} = \frac{a^n\cdot a^{-n}}{a^m.a^{-n}} = \frac{a^0}{a^{m-n}} = \frac{1}{a^{m-n}}$ |
| 6 | $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ | $\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 9$ | Ejercicio |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **7** | $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}=\left(\frac{3}{2}\right)^{4}$ | $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{a^{-n}}{b^{-n}}=\frac{1/a^{n}}{1/b^{n}}=\frac{b^{n}}{a^{n}}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$ |
| **8** | $\frac{a^{n}}{b^{m}}=\frac{1}{b^{m}a^{-n}}=\frac{b^{-m}}{a^{-n}}$ | $\frac{2^{-3}}{5^{-1}}=\frac{5}{2^{3}}$ | Ejercicio |

Para definir los exponentes racionales se usan radicales.

**Definición.** Sea $m,n$ números enteros, $n>1$. Si $\sqrt[n]{a}$ existe, entonces se define

$$a^{m/n}=\sqrt[n]{a^{m}}$$

Se exceptúan de la definición los siguientes casos:
1.- *n par y a* negativo.
2.- *m* negativo y *a* cero.

A menos que se diga lo contrario, supondremos que todas las variables representan números positivos.

**Ejemplo 3.-** Exprese los siguientes radicales como potencia de exponentes racionales.
**a)** $\sqrt[3]{2}$; **b)** $\sqrt[5]{x^3}$; **c)** $\sqrt{8}$; **d)** $\sqrt[5]{-2^3}$
**Solución:**
**a)** $\sqrt[3]{2}=2^{1/3}$; **b)** $\sqrt[5]{x^3}=x^{3/5}$; **c)** $\sqrt{8}=8^{1/2}$; **d)** $\sqrt[5]{-2^3}=(-2)^{3/5}$

La siguiente tabla muestra las propiedades de los radicales, se ha colocado en el lado derecho la propiedad equivalente usando la notación con exponente racional.

| **Propiedad** | **Ejemplo** | **Escritura en exponente fraccionario** |
|---|---|---|
| $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ | **1)** $\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}$<br>**2)** $\sqrt[3]{8\cdot 27}=(8\cdot 27)^{1/3}=$<br>$=\left(2^3\cdot 3^3\right)^{1/3}=\left(2^3\right)^{1/3}\cdot\left(3^3\right)^{1/3}=6$ | $(a\cdot b)^{1/n}=a^{1/n}\cdot b^{1/n}$ |
| $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ | $\sqrt[3]{\frac{8}{3}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{3}}=\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$ | $\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}=\frac{a^{1/n}}{b^{1/n}}$ |
| $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$ | $\sqrt{\sqrt[4]{27}}=\sqrt[8]{27}$ | $(a^{1/m})^{1/n}=a^{\frac{1}{n\cdot m}}$ |
| $\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$<br>Si *n* es par y *a* es negativa la propiedad no es válida | **1)** $\sqrt[5]{(32)^3}=\left(\sqrt[5]{32}\right)^3=\left(\sqrt[5]{2^5}\right)^3=2^3=8$<br>**2)** $(-1)^{5/3}=\left((-1)^{1/3}\right)^5=(-1)^5=-1$ | $a^{m/n}=(a^{1/n})^m$ |

Esta última propiedad se usa para evaluar expresiones como $\sqrt[5]{32^3}$. Este número es el mismo que $(\sqrt[5]{32})^3=2^3=8$.

**Ejemplo 4.-** Simplifique las expresiones dadas. Evite radicales en su respuesta, use exponentes positivos
**a)** $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$; **b)** $\sqrt{\left(x^2y\right)^3}\cdot\sqrt{y^5}$
**Solución:**
**a)** $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{18\cdot 2}=\sqrt{36}=6$
**b)** $\sqrt{\left(x^2y\right)^3}\cdot\sqrt{y^5}=(x^2y)^{\frac{3}{2}}y^{\frac{5}{2}}=(x^2)^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}y^{\frac{5}{2}}=x^{2\cdot\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}y^{\frac{5}{2}}=x^3y^{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}=x^3y^4$

**Ejemplo 5.-** Elimine los exponentes negativos y/o los radicales en las siguientes expresiones:

**a)** $\sqrt{x}+\sqrt{2y}$ ; **b)** $x^{-1}+2\sqrt{y^{-1}}$ ; **c)** $x(x^{-1}+\sqrt{y})^{-1}$

**Solución:**

**a)** $\sqrt{x}+\sqrt{2y} = x^{1/2}+(2y)^{1/2}$;

**b)** $x^{-1}+2\sqrt{y^{-1}} = \frac{1}{x}+2\sqrt{\frac{1}{y}} = \frac{1}{x}+2\left(\frac{1}{y}\right)^{1/2}$ ;

**c)** $x(x^{-1}+\sqrt{y})^{-1} = x\cdot\frac{1}{(x^{-1}+\sqrt{y})} = \frac{x}{1}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x}+\sqrt{y}} = \frac{x}{\frac{1+x\sqrt{y}}{x}} = \frac{x^2}{1+x\cdot y^{1/2}}$

**Ejemplo 6.-** Evalúe $(8)^{-2/3}$

**Solución:** Reescribimos el número primero transformando el exponente negativo y luego llevando el exponente a radicales.

$$(8)^{-2/3} = \frac{1}{8^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2} = \frac{1}{4}$$

**Ejemplo 7.-** Reescriba sin términos fraccionarios, ni radicales la expresión $\frac{2}{\sqrt[5]{\left(1+x^5\right)^3}}$

**Solución:** Primero reescribimos el signo radical como un exponente fraccionario, luego pasamos el denominador al otro lado de la fracción con exponente cambiado de signo:

$$\frac{2}{\sqrt[5]{\left(1+x^5\right)^3}} = \frac{2}{(1+x^5)^{3/5}} = 2\left(1+x^5\right)^{-3/5}$$

## EJERCICIOS

**1)** Escriba las formas dadas en otra que use exponentes positivos, evite radicales:

**1.1)** $\sqrt{5}-\sqrt{2x}$**;** **1.2)** $\sqrt{5-2x}$**;** **1.3)** 5-$\sqrt{2x}$ **;** **1.4)** $5-2\sqrt{x}$

**2**) Simplifique las expresiones dadas. Exprese sus respuestas con las variables en el numerador. Evite radicales.

**2.1)** $\sqrt[3]{\frac{27x^6}{-y^3}}$**;** **2.2)** $\frac{\sqrt{27x^2}}{3x}$**;** **2.3)** $\sqrt{x^2y}\sqrt{x^3y^5}$ **;** **2.4)** $\frac{\sqrt{x}}{3x^3}$

**3)** Evalúe los siguientes números**:**

**3.1)** $(-8)^{-1/3}$; **3.2)** $(-32)^{-2/3}$; **3.3)** $(-1)^{2/3}$; **3.4)** $\left(-\frac{27}{1000}\right)^{2/3}$ ; **3.5)** $(-0.008)^{1/3}$

**4)** Reescriba la siguientes expresiones donde la variable no esté en términos fraccionarios, ni dentro de radicales

**4.1)** $\sqrt{1-x^2}$ ; **4.2)** $\sqrt{1+\frac{2}{x}}$; **4.3)** $\sqrt{1+\frac{1}{2x}}$ ; **4.4)** $\frac{3}{\left(\sqrt[3]{3-2x^3}\right)^2}$ ; **4.5)** $\frac{2}{3\sqrt{2x+1}}$ ;

**Respuestas:**

**1.1)** $5^{1/2}-(2x)^{1/2}$**; 1.2)** $(5-2x)^{1/2}$; **1.3)** $5-(2x)^{1/2}$; **1.4)** $5-2x^{1/2}$ **2.1)** $-3y^{-3}x^2$ **2.2)** $\sqrt{3}$ **;** **2.3)** $x^{5/2}y^3$ **; 2.4)** $\frac{x^{5/2}}{3}$**; 3.1)** $-\frac{1}{2}$; **3.2)** $\frac{1}{4}$; **3.3)** 1; **3.4)** 0.09; **3.5)** $-0.2$ **4.1)** $\left(1-x^2\right)^{1/2}$; **4.2)** $\left(1+2x^{-1}\right)^{1/2}$; **4.3)** $\left(1+(2x)^{-1}\right)^{1/2}$; **4.4)** $3\left(3-2x^3\right)^{2/3}$**; 4.5)** $\frac{2}{3}(2x+1)^{-1/2}$

# APENDICE II
# ALGEBRA

## ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una clave para sumar expresiones algebraicas es el concepto de términos semejantes. Se dice que dos términos son semejantes si son iguales salvo en el coeficiente numérico. La expresión $ax^r + bx^r$ tiene dos términos semejantes, pueden ser sumadas, efectivamente al sacar $x^r$ de factor común tenemos $ax^r + bx^r = (a+b)x^r$. Para sumar términos semejantes sumamos los coeficientes de los términos semejantes y colocamos la parte no numérica. Por ejemplo la expresión: $2\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}$ tiene dos términos semejantes. El resultado de esta suma es $3\sqrt{x+1}$

En $\sqrt{x} + 2x^2 + 3x\sqrt{x} + 3x^2$, sólo $+2x^2$ y $3x^2$ son términos semejante, no así $\sqrt{x}$ y $3x\sqrt{x}$, pues difieren en algo más que su parte numérica. Sólo podemos sumar estos dos términos. Así

$\sqrt{x} + 2x^2 + 3x\sqrt{x} + 3x^2 = \sqrt{x} + 3x\sqrt{x} + 5x^2$

**Ejemplo 1.-** Determine $(x^3 - 3\sqrt{x} + 4) - (-4x^3 - 5x^2 + \sqrt{x})$. Simplifique tanto como sea posible

**Solución:** Es una resta entre dos expresiones algebraicas. Esta expresión la podemos interpretar como $(x^3 - 3\sqrt{x} + 4) + (-1)(-4x^3 - 5x^2 + \sqrt{x})$. Realizamos entonces el producto de -1 por su factor. Esto provocará que cada término cambie de signo.

Normalmente decimos que distribuimos el menos cambiando de signo cada uno de los términos entre paréntesis.

$$(x^3 - 3\sqrt{x} + 4) - (-4x^3 - 5x^2 + \sqrt{x}) = x^3 - 3\sqrt{x} + 4 + 4x^3 + 5x^2 - \sqrt{x}$$
$$= 5x^3 + 5x^2 - 4\sqrt{x} + 4$$

Se suma algebraicamente los coeficientes de términos semejantes

## MULTIPLICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Para multiplicar expresiones algebraicas podemos usar la **propiedad distributiva** o bien si es el caso aplicar **un producto notable** de uso frecuente, los cuales se aprenden de memoria y se deducen rápidamente usando la propiedad distributiva.

Una forma muy frecuente a ser usada está dada por

**1)** $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

Tenemos también los siguientes:

### Productos Notables:

**2)** $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

**3)** $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

**4)** $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

**5)** $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

**6)** $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

En el siguiente ejemplo se presentan distintos casos donde es apropiado usar algunos de los productos notables dados arriba

**Ejemplo 1.-** Realizar los siguientes productos:

**a)** $(x+3)(x+6)$; **b)** $(x+3)(x-4)$; **c)** $(3x^2-2)(3x^2+2)$; **d)** $(\sqrt{x^2+1}-2)^2$;

**Solución**:

**a)** Lo identificamos con el producto: $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ en este caso $a=3$ y $b=6$. Así:

$$(x+3)(x+6)=x^2+(3+6)x+3\cdot 6=x^2+9x+18$$

**b)** Este producto lo identificamos de nuevo $(x+a)(x+b)$, en este caso $a=3$ y $b=-4$. Tenemos entonces:

$$(x+3)(x-4)=x^2+(3+(-4))x+3\cdot(-4)=x^2-x-12$$

**c)** En este caso tenemos la forma 2. Aquí identificamos y $b$ =2. Aplicando la formula y propiedades de exponentes obtenemos:

$$(3x^2-2)(3x^2+2)=(3x^2)^2-2^2=3^2x^2-4=9x^4-4$$

**d)** La forma apropiada a aplicar es la 4 con $a=\sqrt{x^2+1}$ y $b$=2. Entonces tenemos

$$(\sqrt{x^2+1}-2)^2=(\sqrt{x^2+1})^2-2\sqrt{x^2+1}\cdot 2+2^2=x^2+1-4\sqrt{x^2+1}+4$$

$$=x^2+5-4\sqrt{x^2+1}$$

En los siguientes ejemplos haremos uso de la propiedad distributiva para efectuar el producto:

**Ejemplo 2.-** Realizar los siguientes productos. Simplifique

**a)** $x(x^3-3x+1)$**;** **b)** $(3y-1)(y^2+2y-4)$

**Solución**: Usamos en ambos casos la propiedad distributiva

**a)** $x(x^3-3x+1)=x^4-3x^2+x$

**b)** En este caso interpretaremos (3$y$-1) como el factor que se distribuye en $(y^2+2y-4)$

$(3y-1)(y^2+2y-4)$ =(3$y$-1) $y^2$+(3$y$-1) 2$y$-(3$y$-1).4.

Ahora interpretamos $y^2$, 2$y$ y 4 como los factores que se distribuyen en (3$y$-1).

=(3$y^3$ - $y^2$)+(6$y^2$- 2$y$)-(12$y$-4)

Finalmente, distribuimos los signos y sumamos términos semejantes

=3$y^3$+5$y^2$- 14$y$+4

Cuando examinamos la primera línea de ejemplo 2b, vemos que en realidad cada término de cada factor se multiplica con cada término del segundo factor:

$$(3y-1)(y^2+2y-4)$$

De esta manera procederemos en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 3.-** Realizar el siguiente productos $(\sqrt{x}+2)(x+2\sqrt{x}+2)$ . Simplifique.

**Solución**: Aplicamos el esquema anterior, cada termino del primer factor lo multiplicamos con cada termino del segundo factor

$$(\sqrt{x}+2)(x+2\sqrt{x}+2)=x\sqrt{x}+2\sqrt{x}\sqrt{x}+2\sqrt{x}+2x+2\cdot 2\sqrt{x}+2\cdot 2$$

$$=x\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}+2x+4\sqrt{x}+4$$ Se suman los términos semejantes

$$=x\sqrt{x}+4x+6\sqrt{x}+4$$

Observe como el lado izquierdo como el lado izquierdo fue reescrito como una suma de términos

# OPERACIONES COMBINADAS

Una expresión como $2\{x-[x-(x^2+1)^2]\}-(x-3)(x+3)$ puede ser escrita de una manera más sencilla tanto para evaluar como en su propia escritura. Para realizar este tipo de operación se debe eliminar primero los paréntesis o separadores más internos, intentando con este criterio de ir eliminando todos los paréntesis o separadores. Una vez eliminados se suman los términos semejantes.

En ocasiones es útil usar las propiedades asociativa, conmutativa o alguna otra dada.

Analicemos algunas expresiones:

**Ejemplo 1**.- Simplificar

**a)** $2-8(t-1)$; **b)** $2-8(t-1)^2$; **c)** $2-\left(8(t-1)\right)^2$; **d)** $2(x-3)^2-x(x-2)(x-3)$;

**Solución**:

**a)** Primero se resuelve el paréntesis más interno, en este caso hay uno sólo

$2-8(t-1)=2-8t+8=-8t+8+2=-8t+10$

Cuidado!!! $2-8(t-1)\neq -6(t-1)$

**b)** Aquí interpretamos que 8 está multiplicando la expresión $(t-1)^2$. Luego de obtener el resultado de este producto se realiza la resta algebraica entre 2 y $8(t-1)^2$.

Realizamos entonces primero el producto notable. Hay que mantener el paréntesis para indicar que -8 esta multiplicando el resultado completo de $(t-1)^2$.

$$2-8(t-1)^2=2-8(t-1)^2=2-8(t^2-2t+1)$$

$$=2-8t^2+16t-8$$

$$=-8t^2+16t-6$$

Recuerde que para realizar esta diferencia, distribuimos primero el -8

**c)** En este caso, podríamos ejecutar primero $8(t-1)$ y luego esta expresión elevarla al cuadrado. Sin embargo, se le sugiere al estudiante aplicar la propiedad $(x\cdot y)^n=x^n y^n$. De esta manera

$$2-[8(t-1)]^2=2-8^2((t-1)^2$$

$$=2-64(t^2-2t+1)$$

$$=2-64t^2+128t-64$$

$$=-64t^2+128t-62.$$

**Observe** como hemos **reescrito** $2-\left(8(t-1)\right)^2$ como una suma de términos sencillos

**d)** Primero efectuamos los productos de los dos términos de la expresión $2(x-3)^2-x(x-2)(x-3)$. Para el segundo usamos la propiedad asociativa:

$$2(x-3)^2-x(x-2)(x-3)=2\left((x-3)^2\right)-x\left((x-2)(x-3)\right)=$$

$= 2\left(x^2-6x+9\right)-x\left(x^2-5x+6\right)$ Ahora se usa la propiedad distributiva

$= 2x^2-12x+18-x^3+5x^2-6x$ Se suman términos semejantes

$= -x^3+7x^2-18x+18$

**EJERCICIOS**

**1**) Realizar los siguientes productos, simplifique tanto como pueda:

**1.1)** $(3x^2+2)^2$ **;** **1.2.)** $(9x^2+2)^2$**;** **1.3)** $(x^3-2)^2$**;**

**1.4)** $(2-\frac{1}{x})^2$**;** **1.5)** $(2x-3)(2x+3)$**;** **1.6)** $(3x^2-x+1)(2x^3-1)$**;**

**1.7)** $(\sqrt{2x}+3)^2$**;** **1.8)** $(t^{1/2}+1)(t^{1/2}-2)$**;** **1.9)** $(\sqrt{x}+2)(2-\sqrt{x})$**;**

**1.10)** $(2\sqrt{x}+3)^2$**;** **1.11)** $(4x^4+3x^2+2)(4x^3-3x)$**;**

**1.12)** $(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-1)$**;** **1.13)** $(3-2t)^2$**;** **1.14);**

**2)** Realice las siguientes operaciones, simplifique tanto como pueda:

**2.1)** $(2x^2-3x-2)\ +2(x-3)$ **;** **2.2)** $(z^2-3z+3)\ -2(z-1)$ **;**

**2.3)** $(\sqrt{x^3}+2\sqrt{x})-(x+3x\sqrt{x}+\sqrt{x})$**;** **2.4)** $(\sqrt[4]{x}+\sqrt{x})+2(2\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})$**;**

**2.5)** $(x+3)^2+2(x-1)^2$**;** **2.6)** $(x-2)^2-3(2x-1)^2$**;**

**2.7)** $(\sqrt{x}+2)^2-(\sqrt{x}+1)^2$

**Respuestas:**

**1.1)** $9x^4+12x^2+4$**; 1.2)** $81x^4+36x^2+4$**; 1.3)** $x^6-4x^3+4$**; 1.4)** $4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}$**; 1.5)** $4x^2-9$**; 1.6)** $6x^5-2x^4+2x^3-3x^2+x-1$**; 1.7)** $2x+6\sqrt{2x}+9$**; 1.8)** $t-t^{1/2}-2$**; 1.9)** $4-x$**; 1.10)** $4x+12\sqrt{x}+9$**; 1.11)** $16x^7-x^3-6x$**; 1.12)** $x^{5/4}+2x-x^{1/2}$**; 1.13)** $9-12t+4t^2$**;**

**2.1)** $2x^2-x\ -8$ **2.2)** $z^2-5z\ +5$**; 2.3)** $-(x+2x\sqrt{x}-\sqrt{x})$ **2.4)** $3\sqrt[4]{x}\ +5\sqrt{x}$

**2.5)** $3x^2+2x+11$**; 2.6)** $-11x^2+8x\ +1$**; 2.7)** $2\sqrt{x}+3$

# DIVISION LARGA DE POLINOMIO

Supongamos que tenemos los polinomios *P(x)=* $2x^4-x^2+3x+1$ y *D(x)=* $x^2-2x+3$. Se pretende mostrar en esta sección como es la división $\frac{P(x)}{D(x)}$ entre polinomios. Al igual que en los número enteros, existirá un cociente y un residuo. Pero en nuestro caso el cociente será un polinomio y el residuo un polinomio de grado estrictamente menor que el divisor.

Para realizar la división arreglaremos *P(x)* en orden decreciente de potencias de $x^n$, colocando 0 en los coeficientes que no aparecen, en este caso el coeficiente de grado 3 de *P*(*x*) es 0. El divisor *D*(x) también es ordenado por grado de mayor a menor, no hace falta completar términos. El proceso es bastante similar a la división de números enteros.

Buscamos un monomio tal que cuando se multiplique por $x^2$ (primer término del divisor) nos de $2x^4$ (primer término del dividendo). Este es $2x^2$ que se obtiene al realizar $\frac{2x^4}{x^2}$. Multiplicamos cada término de *D(x)* por $2x^2$ y los resultados los colocamos con signo cambiado en la columna del grado respectivo.

$$\begin{array}{rrrrr|lll} 2x^4 & 0 & -x^2 & 3x & 1 & x^2 & -2x & 3 \\ \cline{6-8} -2x^4 & 4x^3 & -6x^2 & & & 2x^2 & & \end{array}$$

Sumamos y bajamos el siguiente término de *P(x)*

$$\begin{array}{rrrrr|lll} 2x^4 & 0 & -x^2 & 3x & 1 & x^2 & -2x & 3 \\ \cline{6-8} -2x^4 & 4x^3 & -6x^2 & & & 2x^2 & & \\ \cline{1-3} & 4x^3 & -7x^2 & 3x & & & & \end{array}$$

Repetimos el proceso. Dividimos $4x^3$ entre $x^2$, el resultado $4x$ es el segundo término del cociente, el cual lo multiplicaremos por el divisor ( $x^2-2x+3$) y lo colocamos con signo cambiado debajo de la última línea escrita del lado izquierdo, según su grado, procedemos hacer la suma de estas líneas y repetimos el proceso hasta que el grado de la última línea del lado izquierdo (el residuo) sea menor que el del divisor *D(x)*.

Presentamos a continuación la división completa

$$\begin{array}{rrrrr|lll} 2x^4 & 0 & -x^2 & 3x & 1 & x^2 & -2x & 3 \\ \cline{6-8} -2x^4 & 4x^3 & -6x^2 & & & 2x^2 & +4x & 1 \\ \cline{1-3} & 4x^3 & -7x^2 & 3x & & & & \\ & -4x^3 & 8x^2 & -12x & & & & \\ \cline{2-4} & & x^2 & -9x & 1 & & & \\ & & -x^2 & 2x & -3 & & & \\ \cline{3-5} & & & -7x & -2 & & & \end{array}$$

Cociente $C(x)$

$4x=\dfrac{4x^3}{x^2}$

Resultado de la suma. El grado no es menor que el del divisor, continua la división.

Residuo *R(x)* de grado menor que *D(x)*

Igual como ocurre en la división de los números enteros tenemos que

$$P(x)=D(x)C(x)+R(x)$$

En este caso tenemos entonces que

$$2x^4-x^2+3x+1=(x^2-2x+3)(2x^2+4x+1)+(-7x-2)$$

$$\begin{array}{r|l} 27 & \underline{4} \\ 3 & 6 \end{array}$$

Recuerde que 27=4.6+3

## DIVISIÓN ABREVIADA DE POLINOMIOS. Método de Ruffini.

Este método se usa cuando el divisor es de grado 1.

Para dividir $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ entre *x-c*, usando Ruffini, seguimos los siguientes pasos:

**1.-** Colocamos en orden los coeficientes de mayor a menor en una línea horizontal, incluyendo los coeficientes ceros. En la izquierda colocamos *c*. Observe que es el número que acompaña al menos en *x-c* y trazamos las rayas como en la figura

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
c & & & & & & \\
\hline
 & a_n & & & & &
\end{array}
$$

**2.-** Multiplicamos $a_n$ por $c$ y lo colocamos debajo de $a_{n-1}$, sumamos estas dos cantidades: $a_{n-1} + ca_n$ y lo colocamos en el último nivel al lado de $a_n$ . Volvemos a repetir este proceso hasta llegar a la última columna.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
c & & ca_n & cb_{n-2} & & cb_1 & cb_0 \\
\hline
 & a_n & b_{n-2} & b_{n-3} & & b_0 & r
\end{array}
$$

Multiplicar

Sumar:

como $b_{n-3} = a_{n-2} + cb_{n-2}$

**3.-** El cociente de la división es

*C(x)=* $a_n x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$

El residuo es *R(x)=r*. Observe que en este caso el residuo es un número, ¿por qué?

**Ejemplo 1.-** Divida $P(x)$ entre $D(x)$, determine el cociente y el residuo, donde

$P(x) = -2x^3 - x^2 + 4x + 2$ y *D(x)=x*+1

**Solución:** Como el divisor es un polinomio de grado 1 podemos usar Ruffini.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & -2 & -1 & +4 & 2 \\
-1 & & 2 & -1 & -3 \\
\hline
 & -2 & 1 & 3 & -1
\end{array}
$$

$C(x) = -2x^2 + x + 3$ y $R(x) = -1$. Por lo tanto tenemos

$P(x) = (-2x^2 + x + 3)(x+1)$ +(-1).

**Ejemplo 2**.- Determinar el cociente y el residuo de $P(x) \div D(x)$. Expresar *P* en términos del cociente y el residuo. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3$ y *D(x)=x*-3

**Solución:** De nuevo usamos Ruffini.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -3 & 0 & -3 \\
3 & & 6 & 9 & 27 \\
\hline
 & 2 & 3 & 9 & 24
\end{array}
$$

De esta tabla obtenemos $C(x) = 2x^2 + 3x + 9$; el residuo es $R(x) = 24$ y

$P(x) = (2x^2 + 3x + 9)(x-3) + 24$.

## EJERCICIOS

**1)** Determinar el cociente y el residuo de las siguientes divisiones de $P(x)$ entre $D(x)$, expresar P en términos del cociente y el residuo.

**1.1)** $P(x) = 4x^4 + 3x + 9$ **;** $D(x) = x^2 + 2x$**;** **1.2)** $P(x) = 2x^5 + x^2 + 1$ **;** $D(x) = x^3 + 3x$**;**

**1.3)** $P(x) = x^3 + 16$ **;** $D(x) = x^2 - 3x + 9$**;** **1.4)** $P(x) = 9 - 4x + 8x^5$ **;** $D(x) = 4x - x^3$**;**

**2)** Determinar el cociente y el residuo de las siguientes divisiones $P(x) \div D(x)$, expresar P en términos del cociente y el residuo. Aplique Ruffini.

**2.1)** $P(x) = x^4 - x^2 + 3$ **;** $D(x) = x + 2$**;** **2.2)** $P(x) = 2x^5 - x + 2$ **;** $D(x) = x + 3$

**2.3)** $P(x) = x^3 + 27$ **;** $D(x) = x - 4$**;** **2.4)** $P(x) = 4 - 8x + 3x^3$ **;** $D(x) = x - 1$

**Respuestas:**

**1.1)** $C(x) = 4x^2 - 8x + 16;\ \ R(x) = -29x + 9$**;** $P(x) = (x^2 + 2x)\ (4x^2 - 8x + 16) + (-29x + 9)$

**1.2)** $C(x) = 2x^2 - 6;\ \ R(x) = x^2 + 18x + 1$**;** $P(x) = (x + 3)(2x^2 - 6) + x^2 + 18x + 1$**;**

**1.3)** $C(x) = x + 3;\ \ R(x) = -11$**; 1.4)** $C(x) = -8x^2 - 32;\ \ R(x) = 124x + 9$**;**

**2.1)** $C(x) = x^3 - 2x^2 + x - 6;\ \ R(x) = 15$**;**

**2.3)** $C(x) = x^2 + 4x + 16;\ \ R(x) = 91$**; 2.4)** $C(x) = 3x^2 + 3x - 5;\ \ R(x) = -1$

## FACTORIZACIÓN

Empezamos esta sección recordando que dos expresiones que se multiplican se llaman factores. Por ejemplo, la expresión ($x$+1)($x$-2) está expresado como un producto, donde ($x$+1) y ($x$-2) son los factores. En ocasiones va ser de suma importancia escribir una expresión como un producto, ese proceso de expresarlo como un producto se llama factorización. Por ejemplo, $x^2$-4 no es un producto, pero sabemos que:

$$(x+2)(x-2)= x^2-4,$$

Aquí hemos factorizado la expresión $x^2$-4, identificando con un producto notable.

Hay varias técnicas para factorizar expresiones, listamos algunas:

**1.- Factor común.**
**2.- Identificando con productos notables.**
**3.- Raíces de polinomio.**
**4.- División del polinomio.**

En general buscamos que los factores sean polinomios de grado menor que el polinomio original.

Cuando se pretende factorizar completamente una expresión se busca que los factores no puedan factorizarse más y en ocasiones tendremos que mezclar técnicas.

## 1.-Factor Común*:*

La técnica de factor común consiste en aplicar la propiedad distributiva en sentido inverso:

$$xy + xa = x(y + a)$$

Veamos ejemplos donde es apropiado usar la técnica de factor común

**Ejemplo 1.-** Factorice completamente: **a)** $4a^2x^3-12ax$; **b)** $6yx^3-18x^2+24yx^4$

**c)** $(x+2)^2-2(x+1)(x+2)$; **d)** $x^{1/3}-x^{4/3}$

**Solución:**

**a)** En $4a^2x^3-12ax$ tenemos dos términos en esta expresión. El primer término puede ser expresado como $4a^2x^3=4aaxx^2$. El segundo lo podemos escribir como $12ax=3\cdot 4ax$. Podemos ver que $4ax$ es un factor común en ambos términos. Al identificar $4ax$ como el factor que está en los dos términos aplicamos la propiedad distributiva en sentido inverso:

$$4a^2x^3-12ax=4ax(ax^2-3)$$

**Comentario:** $x$ también es un factor común en ambos, pero nos piden factorizar completamente la expresión, es por ello que sacamos el máximo factor común.

**b)** En este caso, 6 es un factor que está en cada término de $6yx^3-18x^2+24yx^4$ igualmente $x^2$. Observe que $y$ no está en el segundo término, por lo tanto no es común. Así $6x^2$ es el máximo factor común entre los tres términos. Entonces

$$6yx^3-18x^2+24yx^4=6x^2(yx-3+4yx^2)$$

**c)** En este ejemplo conviene sacar factor común $(x+2)$. Así

$$\begin{aligned}&(x+2)^2-2(x+1)(x+2)=\\&=(x+2)((x+2)-2(x+1))=(x+2)(x+2-2x-2)\\&=(x+2)(-x)=-x(x+2)\end{aligned}$$

**d)** Aún cuando esta expresión no es un polinomio se puede factorizar. Sacamos el máximo factor común que es $x$ al mínimo exponente de los términos. En este caso este exponente es 1/3. Así

$$x^{1/3}-x^{4/3}=x^{1/3}(1-x)$$

## 2.- Factorización por productos notables:

Esta técnica consiste en identificar una suma con un producto notable. Antes de continuar damos los productos notables escritos de derecha a izquierda.

**1)** $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

**2)** $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$

**3)** $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

**4)** $x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$

Conviene aprenderse de memoria otros dos resultados, por su frecuencia en el cálculo:

**5)** $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$

**6)** $x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$

**Comentarios**:

**1**) Si tenemos un polinomio de grado 2 de tres términos y el coeficiente principal es 1 podemos intentar aplicar **la fórmula 1.** Para ello debemos pensar en dos números que sumados algebraicamente den el coeficiente en $x$ y multiplicados den el término constante. Por ejemplo al factorizar $x^2-3x-4$, buscamos dos números que multiplicados den -4(el signo – nos dice que tienen que ser de signos contrarios) y sumados -3(el signo – en este caso nos dice que el mayor es el negativo). Estos números son -3 y 1.

Efectivamente ($x$-3)($x$+1)= $x^2$-3$x$-4. (En general, se intenta de aplicar la fórmula **1** cuando el grado del polinomio es par, luego otro término de grado la mitad del anterior y luego la constante, por ejemplo que aparezca el término $x^4$ y también uno con $x^2$ y luego la constante).

**2)** Se puede intentar usar **2, 5** o **6** cuando tenemos dos términos. Usamos **2** cuando la variable está como un cuadrado perfecto: $x^2$,$x^4$,etc . Usamos **5** y **6** cuando la variable está como un cubo perfecto: $x^3$, $x^6$, etc .

Veamos los siguientes ejemplos:

**Ejemplo 1.-** Factorice completamente: **a)** $x^2-5x+4$; **b)** $t^2-9$; **c)** $x^3-27$
**Solución**:
**a)** Intentamos la forma $(x+a)(x+b)$ pues es un polinomio de grado 2 con tres términos. Buscamos dos números que multiplicados den 4 y sumados algebraicamente den -5. Observe que son del mismo signo (lo dice la multiplicación) y este signo debe ser – (lo indica la suma).

Estos números son -1 y -4. Así

$x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$

**b)** Intentamos asociarlos con la forma $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$. En este caso 9=$a^2$, de aquí $a$=3. De esta manera:

$$\begin{aligned} t^2-9 &= t^2-3^2 \\ &= (t-3)(t+3) \end{aligned}$$

**c)** Vemos que es de la forma $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$, con $a^3$=27=$3^3$ . Así $a$=3. Por tanto:

$$x^3-3^3=(x-3)(x^2+3x+9).$$

El siguiente ejemplo muestra una mezcla de los métodos hasta ahora vistos:

**Ejemplo 2.-** Factorice completamente: **a)** $x^3-6x^2+9x$; **b)** $y^4-16$; **c)** $2-2x^3$;
**d)** $x^3(x+1)-x(x+1)(x+2)$

**Solución:**

**a)** Observamos primero que $x$ es factor común en cada término, por lo tanto:

$x^3-6x^2+9x=x(x^2-6x+9)$. Este segundo factor no está completamente factorizado, identificamos con la forma $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$. En este caso $a^2=9$. Así $a$=3 y es efectivamente $2ax=6x$. Entonces finalmente:

$$x^3-6x^2+9x=x(x^2-6x+9)=x(x-3)^2$$

**b)** Intentamos asociarlos con la forma $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$. Aquí $y^4$ se identifica con $x^2$, de donde $y^2$ es $x$ . Por otro lado $16=a^2$, así $a$=4. De esta manera:

$$y^4-16=(y^2-4)(y^2+4)$$

De $(y^2+4)$ no podemos con nuestras herramientas concluir que ya no se puede factorizar más en el campo real, sin embargo $(y^2-4)$ lo identificamos de nuevo con $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$. El lector entonces puede chequear que

$$y^4-16=(y+2)(y-2)(y^2+4).$$

**c)** Para empezar una factorización, el lector ha podido apreciar que primero intentamos extraer factor común. En este caso 2 es el factor común:

$2-2x^3 = 2(1-x^3)$

$= 2(1-x)(1+x+x^2)$

| Factorizamos $(1-x^3)$ usando **5).** Observe que se ha cambiado los papeles de *x* por *a y* de 1 por *a*. |
|---|

Esta última también puede ser expresado como $-2(x-1)(1+x+x^2)$ .

**d)** En este ejemplo, se puede en principio realizar las operaciones para luego factorizar la expresión resultante, sin embargo es más fácil sacar de factor común $x(x+1)$

$x^3(x+1)-x(x+1)(x+2) = x(x+1)[x^2-(x+2)]$

$= x(x+1)[x^2-x-2]$ Se factoriza la última expresión

$= x(x+1)[(x+1)(x-2)]$

$= x(x+1)^2(x-2)$

**EJERCICIOS**

**1)** Factorice completamente los siguientes polinomios:

| | | |
|---|---|---|
| **1.1)** $x^2-9$; | **1.2)** $x^2+3x+2$; | **1.3)** $x^2-6x-7$; |
| **1.4)** $t^2-3t+2$; | **1.5)** $x^6-16x^3+64$; | **1.6)** $y^3+8$ |
| **1.7)** $5x^3-45x$; | **1.8)** $3z^3-12z^2+9z$; | **1.9)** $2x^3-54$; |
| **1.10)** $x^6-64$; | **1.11)** $3x^4+15x^2+18$; | **1.12)** $3x^4-12x^2$; |
| **1.13)** $3x^4+24x$; | **1.14)** $3x^4+15x^3+18x^2$; | **1.15)** $2x^3+10x^2+12x$; |
| **1.16)** $2x(x^2-4)-3x(x+2)$; | **1.17)** $3x(x^2-9)+15x$; | **1.18)** $x^4-8x^2+16$; |
| **1.19)** $(x+3)^3-(x+3)^2(x+1)$; | **1.20)** $(x+2)^5-4(x+2)^3$; | **1.21)** $y^{1/5}-y^{6/5}$ |
| **1.22)** $1-4x^2$; | **1.23)** $81x^2-18x+1$; | **1.24)** $8-27x^3$ |

**Respuestas:1.1)** $(x-3)(x+3)$; **1.2)** $(x+2)(x+1)$; **1.3)** $(x-7)(x+1)$; **1.4)** $(t-2)(t-1)$;
**1.5)** $(x-2)^2(x^2+2x+4)^2$; **1.6)** $(y+2)(y^2-2y+4)$; **1.7)** $5x(x-3)(x+3)$ **1.8)** $3z(z-3)(z-1)$
**1.9)** $2(x-3)(x^2+3x+9)$; **1.10)** $(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$;
**1.11)** $3(x^2+3)(x^2+2)$; **1.12)** $3x^2(x-2)(x+2)$; **1.13)** $3x(x+2)(x^2-2x+4)$
**1.14)** $3x^2(x+3)(x+2)$; **1.15)** $2x(x+2)(x+3)$; **1.16)** $x(2x-7)(x+2)$;
**1.17)** $3x(x-2)(x+2)$ ; **1.18)** $(x+2)^2(x-2)^2$; **1.19)** $2(x+3)^2$;
**1.20)** $x(x+4)(x+2)^3$; **1.21)** $-y^{1/5}(y-1)$; **1.22)** $(1-2x)(1+2x)$; **1.23)** $(9x-1)^2$;
**1.24)** $(2-3x)(4+6x+9x^2)$

## 3.- Factorización por raíces del polinomio.

Si tenemos un polinomio de segundo grado:

$$P(x) = ax^2+bx+c$$

con $a \neq 0$ y si este polinomio tiene raíces reales: $r_1$ $y$ $r_2$, entonces podemos factorizar

$P(x) = ax^2+bx+c$ como:

$$P(x) = a(x-r_1)(x-r_2).$$

(Observe que al multiplicar esta última expresión obtenemos el mismo coeficiente de grado 2. Por otro lado $P(x)=a(x-r_1)(x\ -r_2)$ también se hace cero en $r_1\ \ y\ \ r_2$).

Si $P$ es un polinomio de segundo grado que no tiene raíces reales entonces no admite más factorización en el campo real. Cuando un polinomio no se puede factorizar más como producto de polinomios de grados menor, pero distintos a cero se dice que el polinomio es irreducible en los reales.

**Ejemplo 1**. Factorizar $P(x)=x^2+3x+2$.

**Solución:** Planteamos $x^2+3x+2=0$. Las raíces son:

$$r_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot 2}}{2};$$

De aquí

$$r_1=-2;\quad r_2=-1.$$

Entonces podemos factorizar $P(x)$ como

$P(x)=(x-(-1))(x-(-2))$, es decir $P(x)=(x+1)(x+2)$.

Observe que la factorización por identificación del producto notable $P(x)=(x+a)(x+b)$ es más rápida en este caso. Sin embargo, no siempre resulta este método. En el caso $a\neq 1$ o cuando $a=1$, pero no conseguimos números que multiplicados den $c$ y sumados den $b$ en $ax^2+bx+c$, es recomendable la factorización por las raíces del polinomio.

**Ejemplo 2.-** Factorizar completamente $P(x)=x^2+3x+1$;

**Solución:** En este ejemplo no puede conseguir dos números que multiplicados den 1 y sumados 3. En este caso es apropiado usar el método de las raíces. Busquemos las raíces:

$$r_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot 1}}{2};$$

De aquí

$$r_1=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\ \text{ y }\ r_2=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}.$$

Entonces podemos factorizar $P(x)$ como

$$P(x)=(x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2})(x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}),$$

es decir

$$P(x)=(x+\frac{3-\sqrt{5}}{2})(x+\frac{3+\sqrt{5}}{2}).$$

**Ejemplo 3.-** Factorizar completamente $P(x)=2x^2+3x+1$.

**Solución:** Primero se calcula las raíces: $2x^2+3x+1=0$

$$r_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot 2}}{2\cdot 2};$$

Tenemos

$$r_1=-1\ \text{ y }\ r_2=\frac{-1}{2}$$

Entonces $P(x)=2(x-(-1))(x-(-\frac{1}{2})=(x+1)(2x+1)$.

**Ejemplo 4**.- Factorizar completamente $P(x)=x^2+3x+3$.

**Solución:** Como las raíces de $x^2+3x+3=0$

$r_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot 3}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{-3}}{2}$ no son reales (el discriminante es menor que cero) entonces el polinomio no se puede factorizar más en los reales. El polinomio es irreducible.

## 4.- Factorización por Ruffini.

Supongamos un polinomio de grado *n*: $P(x)=a_n x^n \cdots + a_1 x + a_0$ y que $r_1$ es raíz de $P(x)$. Esto es $P(r_1)=0$. Entonces es fácil ver que $(x-r_1)$ divide exactamente al polinomio $P(x)$. Si el cociente de la división es $C(x)$, entonces

$$P(x)=(x-r_1)C(x)$$

pues $R(x)=0$.

Luego hay que considerar factorizar $C(x)$, pues $(x-r_1)$ es ya irreducible. En el siguiente ejemplo se realiza la división de polinomio a través de Ruffini.

Un resultado conocido en álgebra es que si *r*, número racional, es una raíz de *P*, entonces *r* puede ser escrito en la forma $\dfrac{p}{q}$, donde *p* es divisor de $a_0$ y *q* es divisor de $a_n$.

**Ejemplo 1**. Factorizar completamente $P(x)=x^3+7x^2+16x+12$

**Solución:** Las posibles raíces racionales son: $\pm 1;\pm 2;\pm 3;\pm 4;\pm 6$ y $\pm 12$. Podemos verificar que –2 es raíz. Esto es $P(-2)=0$. Aplicamos Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 7 & 16 & 12 \\ -2 & & -2 & -10 & -12 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

. De esta manera $C(x)=x^2+5x+6$ y $R(x)=0$. Por lo tanto tenemos

$$P(x)=(x^2+5x+6)(x+2).$$

Para finalizar la factorización se identificará con el producto notable $(x+a)(x+b)$. Así rápidamente vemos $C(x)=(x+3)(x+2)$. Finalmente

$$P(x)=(x+3)(x+2)(x+2)=(x+3)(x+2)^2.$$

**Ejemplo 2**.- Factorizar completamente $P(x)=2x^3-3x^2-8x-3$

**Solución:** Las posibles raíces racionales son: $\dfrac{\pm 1}{2};\dfrac{\pm 3}{2};\pm 1;\pm 3$. Podemos verificar que –1 es raíz

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -3 & -8 & -3 \\ -1 & & -2 & 5 & 3 \\ \hline & 2 & -5 & -3 & 0 \end{array}$$

Volvemos aplicar Ruffini con 3 como raíz

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & & 6 & 3 & \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ & 2 & 1 & 0 & \end{array}$$

De esta tabla obtenemos la factorización deseada:

$$P(x) = (2x+1)(x-3)(x+1).$$

Observe que a diferencia del ejemplo pasado en este ejemplo se decidió reiterar la división de polinomio para factorizar completamente a P.

**Ejemplo 3**. Factorizar completamente $P(x) = -2x^3 - x^2 + 3x + 2$

**Solución:** Las posibles raíces racionales son: $\frac{\pm 1}{2}; \pm 1; \pm 2$. Podemos verificar que –1 es raíz. Esto es $P(-1) = 0$. Aplicamos Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & -2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & & 2 & -1 & -2 \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ & -2 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

De esta manera $C(x) = -2x^2 + x + 2$ y $R(x) = 0$. Por lo tanto tenemos

$$P(x) = (-2x^2 + x + 2)(x+1).$$

Para finalizar la factorización se usará el método de las raíces en *C*, pues no hay más raíces racionales. Se puede verificar que las raíces de *C(x)* son $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{-4}$. Estas son los números irracionales $\frac{1-\sqrt{17}}{4}$ y $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$.

Así $C(x) = -2\left(x - \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)\right)\left(x - \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\right)$. Finalmente

$$P(x) = -2(x+1)\left(x - \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)\right)\left(x - \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\right)$$

**Ejemplo 4**. Factorizar completamente $P(x) = x^3 + x - 2$

**Solución:** Las posibles raíces racionales son: $\pm 1; \pm 2$. Podemos verificar que 1 es raíz. Esto es $P(1) = 0$. Aplicamos Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & 1 & 2 \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

. Podemos verificar que no tiene más raíces racionales.

Hasta ahora la factorización es

$$x^3 + x + 2 = (x^2 + x + 2)(x-1).$$

Se intenta de factorizar $(x^2 + x + 2)$ por otro método.

Ahora bien, vemos que las raíces $\frac{-1-\sqrt{1-8}}{2} = \frac{-1-\sqrt{-7}}{2}$ de este polinomio no son reales (es un número complejo). Así podemos concluir que

$(x^2+x+2)$ es irreducible sobre los reales, y la factorización completa de $P$ es:

$$x^3+x+2=(x^2+x+2)(x-1).$$

**EJERCICIOS**

Factorizar los siguientes polinomios

**1.1)** $P(x)=6x^2-16x-6$ **;** **1.2)** $P(z)=-6z^2+3z-4$

**1.3)** $P(x)=2x^2+5x-12$ **;** **1.4)** $P(x)=6x^3-3x^2-9x$

**1.5)** $P(x)=x^5-x^3-x^2+1$ **;** **1.6)** $P(x)=8x^3-16x^2-10x$ **;**

**1.7)** $P(z)=z^3-16z^2+63z$ **;** **1.8)** $P(x)=(x^5-x^3)-(x^2-1)$ **;**

**1.9)** $P(t)=t^3+3t^2+2t-2(t^2+3t+2)$ **;** **1.10)** $P(z)=2z^3+10z^2+14z+4$ ***;***

**1.11)** $P(x)=x^4-10x^3+16x^2+90x-225$ ***;*** **1.12)** $P(z)=2z^4+z^3+2z+1$ ***;***

**1.13)** $P(t)=2t^3-t^2-8t+4$ **;** **1.14)** $P(x)=2x^3-6x^2-8x$ **;**

**1.15)** $P(x)=x^4-3x^3+x^2+3x-2$ **;** **1.16)** $P(x)=4x^4-5x^2+1$ **;**

**1.17)** $P(x)=18x^4-9x^3-11x^2+x+1$ **;** **1.18)** $P(x)=1+3x-4x^3$ **;**

**1.19)** $P(x)=6x^4-7x^3+x$

**Respuestas**: **1.1)** $6(x-3)(x+1/3)$ **1.2)** Es irreducible **1.3)** $2(x+4)(x-3/2)$

**1.4)** $3x(2x-3)(x+1)$; **1.5)** $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$; **1.6)** $2x(2x+1)(2x-5)$; 1.7) $z(z-7)(z-9)$
**1.8)** $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$; **1.9)** (t-2)(t+2)(t+1);

**1.10**) $2(z+2)\left(z-\left(\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(z-\left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$ **1.11**) $(x-3)(x+3)(x-5)^2$;

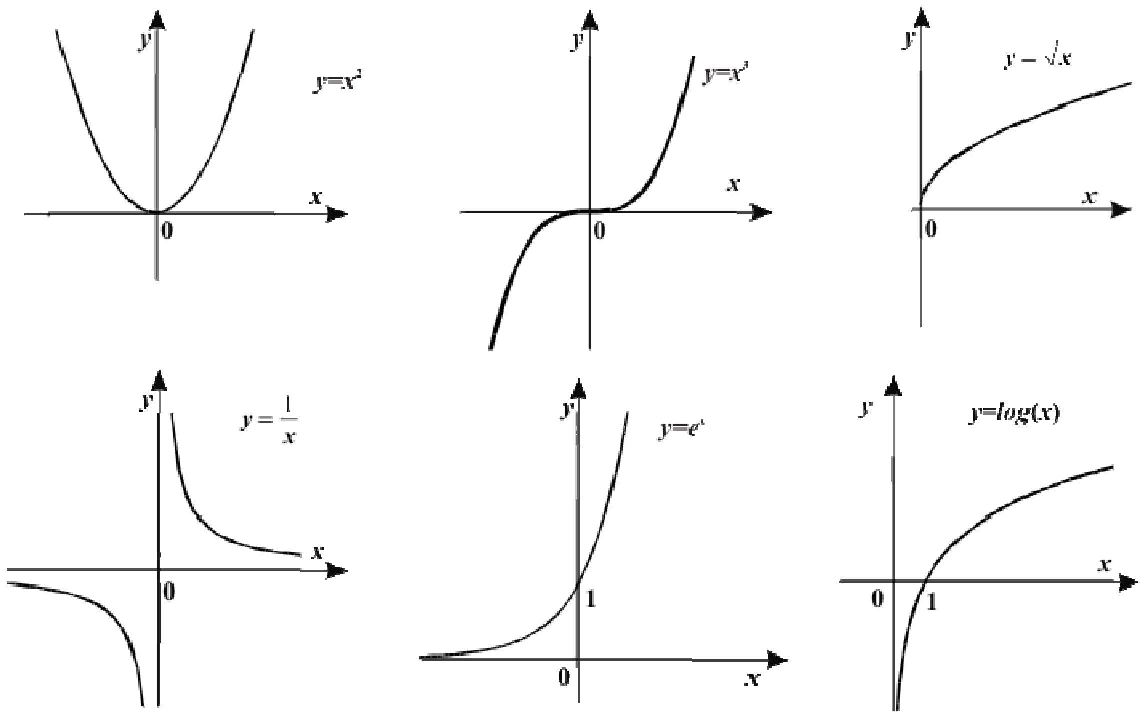
**1.12**) $P(z)=(z^2-z+1)(z+1)(2z+1)$ ;**1.13**) $(2t-1)(t-2)(t+2)$; **1.14**) $2x(x-4)(x+1)$;
**1.15)** $(x-1)^2(x+1)(x-2)$; **1.16)** $(2x+1)(2x-1)(x+1)(x-1)$;
**1.17**) $18(x-1/2)(x+1/3)(x-1/3)(x-1)$; **1.18)** $(1+2x)^2(1-x)$ **;**
**1.19)** $(3x+1)(2x-1)(x-1)x$

# APENDICE III

# Graficación por operaciones geométricas elementales

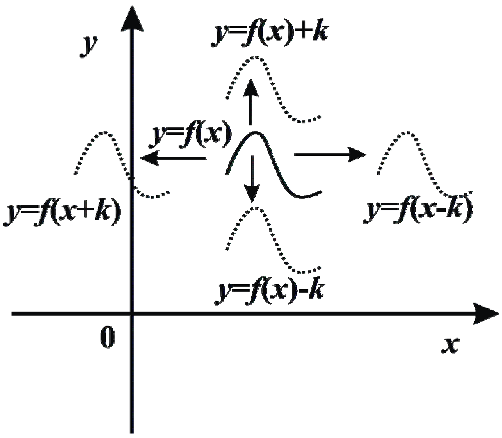
A continuación damos una serie de funciones elementales y sus gráficas las cuales generarán una gran familia de funciones.

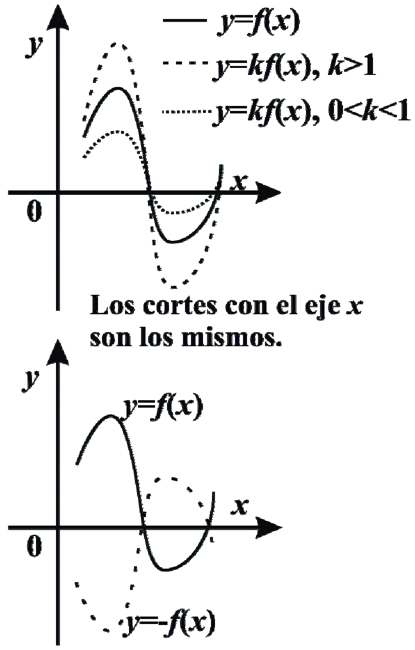
**Algunas gráficas de funciones elementales**



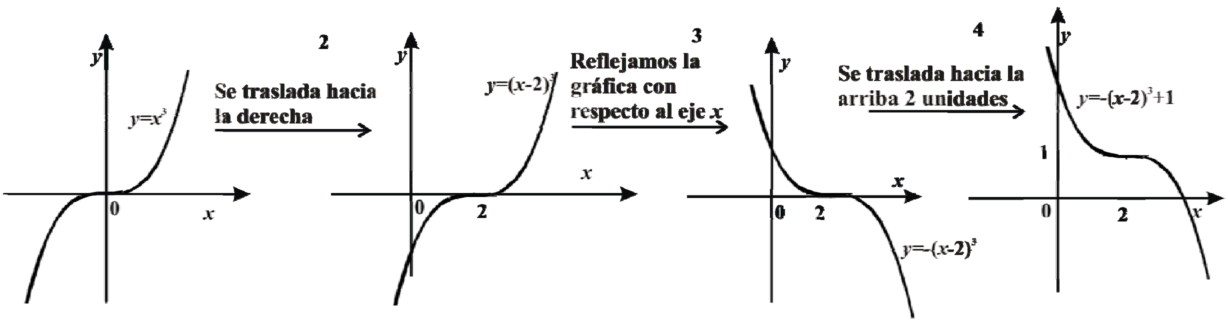

| Nueva función | Efecto geométrico | Ejemplo sobre $f(x)=\sqrt{x}$ | Ejemplo sobre $f(x)=\frac{1}{x}$ |
|---|---|---|---|
| $y=f(x)+k,\quad k>0$ | La gráfica de $y=f(x)$ se desplaza $k$ unidades hacia arriba. | $y=\sqrt{x}+3=3+\sqrt{x}$ | $y=\frac{1}{x}+3$ |
| $y=f(x)-k,\quad k>0$ | La gráfica de $y=f(x)$ se desplaza $k$ unidades hacia abajo. | $y=\sqrt{x}-3$ | $y=\frac{1}{x}-3$ |
| $y=f(x+k),\quad k>0$ | La gráfica de $y=f(x)$ se desplaza $k$ unidades hacia la izquierda. | $y=\sqrt{x+3}$ | $y=\frac{1}{x+3}$ |
| $y=f(x-k),\quad k>0$ | La gráfica de $y=f(x)$ se desplaza $k$ unidades hacia la derecha.. | $y=\sqrt{x-3}$ | $y=\frac{1}{x-3}$ |
| $y=\frac{1}{k}f(x),\quad k>1$ | Se contrae la gráfica de $y=f(x)$ verticalmente. | $y=\frac{1}{2}\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x}}{2}=0.5\sqrt{x}$ | $y=\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}x=0.5x$ |
| $y=kf(x),\quad k>1$ | Se expande la gráfica de $y=f(x)$ verticalmente. La nueva coordenadas $y$ son $k$ veces la anterior. | $y=3\sqrt{x}$ | $y=3\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$ |
| $y=-f(x),$ | Se refleja la gráfica de $y=f(x)$ en torno al eje $x$. | $y=-\sqrt{x}$ | $y=-\frac{1}{x}$ |
| $y=f(-x),$ | | | |

Resumen gráfico de las operaciones elementales



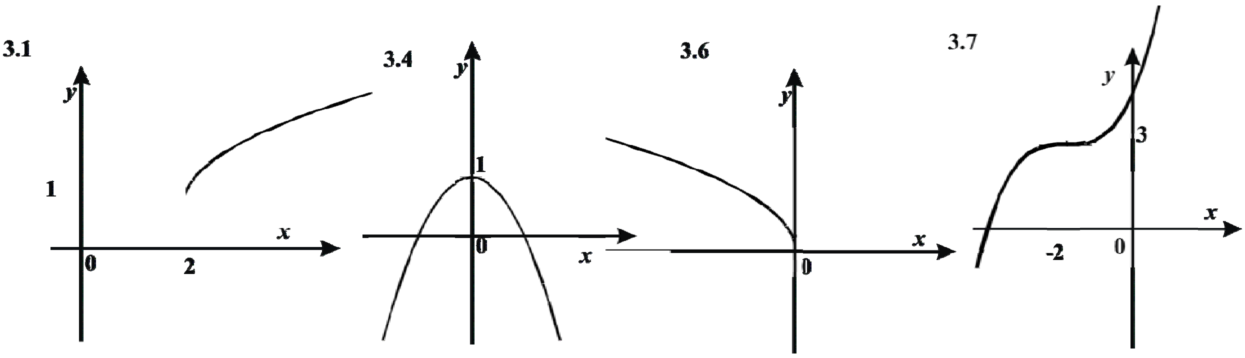

**Ejemplo 1.**-Graficar $y = -(x-2)^3 + 1$




## EJERCICIOS

**1)** Utilice las gráficas de las funciones elementales y la técnica de transformación para graficar las funciones dadas.

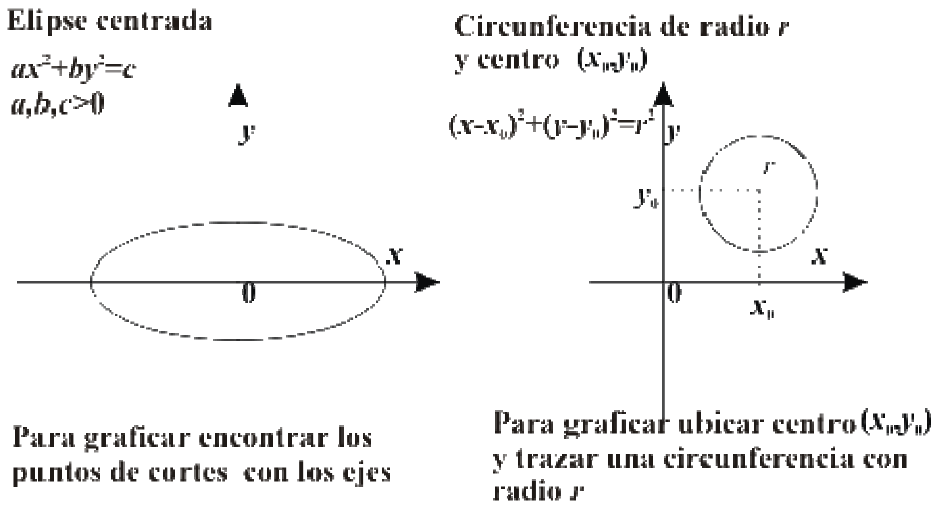
**1.1)** $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$; **1.4)** $f(x) = -x^2 + 1$; **1.6)** $f(x) = \sqrt{-x}$; **1.7)** $f(x) = (x+2)^3 + 3$;



## OTRAS GRÁFICAS DE INTERES

**Funciones cuadráticas** $f(x) = ax^2 + bx + c$ tienen como representación una parábola. Con la teoría dada en este curso puede conseguir el punto crítico y viendo la concavidad puede graficar rápidamente.

**Funciones lineales**: $f(x) = ax + b$ tienen como representación grafica una recta. Puede conseguir los cortes con los ejes



# APENDICE IV
# LOGARITMOS

**Definición**.- Sea $a>0$, $a \neq 1$. El logaritmo de $x$ con base $a$ se define como

$$y = \log_a(x) \text{ si y sólo si } a^y = x,$$

siempre y cuando $x>0$.

**Observaciones**:

**1.-** Conviene recordar siempre al $\log_a(x)$ como **el exponente** al que hay que elevar la base para que se produzca el número $x$. Por ejemplo $3^2=9$, entonces 2 es el logaritmo de 9 en base 3:

$$\log_3 9 = 2.$$

**2.-**Los logaritmos en base 10 son conocidos como logaritmos decimales, En este caso se suprime el subíndice en la notación, esto es: $\log_{10}(x)=\log(x)$. En el caso que la base sea el número $e$, el logaritmo se escribe como $\ln(x)$ para representar el logaritmo en base $e$ de $x$ y se lo llama logaritmo natural de $x$

**3.-** El logaritmo sólo está definido para los números estrictamente positivos. El dominio de la función logarítmica $y=\log_a(x)$ es el conjunto $(0,\infty)$. Recuerde que el rango de la función exponencial es $(0,\infty)$.

**4.-** $y=\log_a(x)$ es conocida como la forma logarítmica y $a^y=x$ la forma exponencial. En ocasiones es útil pasar de la forma exponencial a la logarítmica y viceversa.

**Ejemplo 1.-** Convertir las siguientes formas exponenciales en logarítmicas

**a)** $2^5=32$; **b)** $10^3=1000$; **c)** $e^0=1$

**Solución:** Hay que tener siempre en mente que el logaritmo es el exponente.

**a)** El exponente es 5, por tanto es el logaritmo, así: $5=\log_2 32$

**b)** En este caso 3 es el exponente, por tanto el logaritmo, así: $3=\log 1000$

En este caso la base se suprime por ser decimal.

**c)** 0 es el exponente y la base es $e$, por tanto usamos la notación ln para representar el logaritmo en base e : $0=\ln 1$

**Ejemplo 2.-** Convertir las siguientes formas logarítmicas en exponenciales

**a)** $\log_{16} 4 = 1/2$; **b)** $\log_3 \dfrac{1}{3} = -1$ **c)** $\log(0.001) = -3$

**Solución:** Las respuestas están dadas en la siguiente tabla.

| Forma Logarítmica | Forma exponencial |
|---|---|
| $\log_{16} 4 = 1/2$ | $16^{1/2} = 4$ |
| $\log_3 \dfrac{1}{3} = -1$ | $3^{-1} = \dfrac{1}{3}$ |
| $\log(0.001) = -3$ | $10^{-3} = 0.001$ |

Algunas ecuaciones exponenciales se pueden resolver pasándola a su forma logarítmica y algunas logarítmicas se resuelven pasándolas a su forma exponencial. Veamos las siguientes ecuaciones:

**Ejemplo 3.-** Resolver las siguientes ecuaciones

**a)** $\log_2(x-1)=3$; **b)** $\log_x(27)=3$

**Solución**:

Las pasamos a su forma exponencial, recuerde que el logaritmo **es el exponente** al que hay que elevar la base para que se produzca el número

**a)** $2^3 = x-1 \Rightarrow x=9$; **b)** $x^3=27$.Está es una ecuación cúbica: $x=\sqrt[3]{27}=3$

**EJERCICIOS**
Resuelva las siguientes ecuaciones:
**1.1)** $\ln(x-1)=1$**;** **1.2)** $\log(x+3)-2=0$**;** **1.3)** $\log_2(2x)=-3$**;**

**Respuesta: 1.1)** e+1; **1.2)**97; **1.3)** 1/16

## PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

En esta sección se estudiarán las propiedades de los logaritmos. Como los logaritmos son los exponentes, las propiedades se establecen en base a las propiedades de los exponentes.
Por ejemplo, si $x=\log_a m$ y $y=\log_a n$ entonces $a^x=m$ y $a^y=n$, de donde

$$mn=a^x a^y=a^{x+y}$$

De aquí tenemos, volviendo esta forma $mn=a^{x+y}$ a su forma logarítmica, que $\log_a(mn)=x+y$,
sustituyendo finalmente establecemos nuestra primera propiedad

$$\log_a(mn)=\log_a m+\log_a n\,.$$

En el siguiente recuadro remarcamos ésta y otras propiedades de logaritmos de uso frecuente

**1.-** $\log_a(mn)=\log_a m+\log_a n$
**2.-** $\log_a(\frac{m}{n})=\log_a m-\log_a n$
**3.-** $\log_a(m^c)=c\log_a m$
**4.-** $\log_a(a)=1$
**5.-** $\log_a(1)=0$

Dado que las formas de estas propiedades no son usuales, los estudiantes suelen cometer muchos errores en ellas. Uno muy frecuente es decir que el logaritmo de la suma (diferencia) es la suma (diferencia) de los logaritmos, lo cual es falso.
Esto es

$$\log_a(m+n)\neq\log_a m+\log_a n \quad \text{o bien} \quad \log_a(m-n)\neq\log_a m-\log_a n$$

Una correcta lectura de estas igualdades pueden ayudar a no cometer estos y otros errores muy comunes. Por ejemplo las propiedades las podemos leer como:

**1.-** $\log_a(mn)=\log_a m+\log_a n$: *El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos.*

**2.-** $\log_a(\frac{m}{n})=\log_a m-\log_a n$: *El logaritmo de un cociente es la diferencia de los logaritmos.*

**3.-** $\log_a(m^c)=c\log_a m$: *El logaritmo de una potencia es el exponente por el logaritmo del número.*

**4.-** $\log_a(a)=1$: *El logaritmo de la base es* 1.

**5.-** $\log_a(1)=0$: *El logaritmo de* 1 *en cualquier base es 0.*

Observe que en la propiedad 2 se refiere al logaritmo de un cociente, esto es estamos evaluando el logaritmo en un número expresado como cociente: $\frac{m}{n}$. El logaritmo de un cociente no es el cociente de los logaritmos: $\log_a(\frac{m}{n})\neq\frac{\log_a(m)}{\log_a(n)}$.

Para los logaritmos de una suma, $\log_a(m+n)$,y una diferencia,$\log_a(m-n)$, no hay propiedades generales.

De nuevo estas propiedades son fáciles de demostrar al pasar las formas logarítmicas en exponenciales. Por ejemplo la propiedad 4: $\log_a(a)=1 \Leftrightarrow a^1=a$.

Los siguientes ejercicios serán de utilidad más adelante. Por medio de las propiedades se pide reescribir una expresión con logaritmos:

**Ejemplo 1.-** Expresar $\log(x\sqrt{x})$ en términos de $\log(x)$

**Solución:** Tal como está expresado $\log(x\sqrt{x})$ lo podemos interpretar como el logaritmo de un producto y entonces aplicar la propiedad 1. Pero alternativamente podemos rescribir $(x\sqrt{x})=x^{3/2}$ y aplicar la propiedad 3:

$$\log(x\sqrt{x})=\log(x^{3/2})=\frac{3}{2}\log(x).$$

**Ejemplo 2.-** Expresar $\log(\frac{x^3\sqrt{x+1}}{x-2})$ en términos de $\log(x), \log(x+1)$ y $\log(x-2)$

**Solución:** La forma de resolver este tipo de ejercicio es analizando cual es la última operación que se realiza en la expresión que se le toma logaritmo. En este caso es un cociente, por tanto se aplica la propiedad 2 del cociente:

$$\log(\frac{x^3\sqrt{x+1}}{x-2})=\log(x^3\sqrt{x+1})-\log(x-2).$$

El primer término del lado derecho es un producto, por tanto aplicamos la propiedad 1 del producto

$$=\log(x^3)+\log(\sqrt{x+1})-\log(x-2)$$

El primer término ahora es una potencia, por tanto aplicamos esta regla. El segundo que es un radical Lo expresamos como una potencia y también le aplicamos esta propiedad

$$=3\log(x\ )+\frac{1}{2}\log(x+1)-\log(x-2)$$

## EJERCICIOS

**1)** Expresar $\log(\frac{x^2-1}{x^2})$ en términos de $\log(x), \log(x-1)$ y $\log(x+1)$

**2)** Expresar $\ln(2x(x-1)\sqrt{(x+3)})$ en términos de $\ln(x), \ln(x-1)$ y $\ln(x+3)$

**3)** Expresar $\log(\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x(x+2)}})$ en términos de $\log(x), \log(x-1)$ y $\log(x+2)$

**4)** Expresar $\ln(x\sqrt{\frac{(x+1)}{(x-2)}})$ en términos de $\ln(x), \ln(x+1)$ y $\ln(x-2)$.

**Respuestas:**

**1)** $\log(x-1)+\log(x+1)-2\log x$; **2)** $\ln 2+\ln x+\ln(x-1)+1/2\ln(x+3)$;

**3)** $\frac{1}{2}[3\log(x-1)-\log x-\log(x+2)]$; **4)** $\ln x+1/2(\ln(x+1)-\ln(x-2))$

# APENDICE V
# RESOLUCION DE ECUACIONES

## MÉTODO DE FACTORIZACIÓN PARA RESOLVER ECUACIONES.

Este es un método de resolución de ecuaciones que permite resolver una gran variedad de ecuaciones. Se basa en la propiedad de los números reales en que si $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$. Este método es aplicable si luego de transformar la ecuación original en otra donde el cero este en un miembro de la ecuación, el otro miembro sea fácil de factorizar.

Puntualicemos los pasos para resolver ecuaciones por este método
**1.-** Se lleva a la forma *expresión*=0,
**2.-** Se factoriza la *expresión*

$$\textit{expresión} = (fact.1)\cdot(fact.2)\cdots(fact.k)$$

Así la ecuación queda escrita como

$$(fact.1)\cdot(fact.2)\cdots(fact.k) = 0$$

**3.-** Se usa el razonamiento que si un producto es cero

$$(fact.1)\cdot(fact.2)\cdots(fact.k) = 0$$

entonces algunos de los factores es cero. Por consiguiente se plantean tantas ecuaciones como factores, todas las ecuaciones igualadas a cero.

$$fact.1 = 0; \quad fact.2 = 0; \quad \ldots \quad fact.k = 0$$

**4.-**Se resuelven todas las ecuaciones planteadas. Las soluciones de la ecuación original son las soluciones de todas las ecuaciones planteadas de los factores, excepto aquellas donde no tienen sentido en la ecuación original.

**Ejemplo 1.-** Resolver las siguientes ecuaciones
**a)** $x^2 - 4x + 5 = 0$**;** **b)** $x^3 - 2x^2 + x = 0$**;** **c)** $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 = 0$
**Solución:**
**a)** Primero factorizamos $x^2 - 4x + 5 = 0$

$(x-5)(x+1) = 0$

$(x-5) = 0$ ó $(x+1) = 0$ Un producto es 0 si al menos uno de los factores es 0

$x = 5$ ó $x = -1$

**b)** Primero factorizamos $x^3 - 2x^2 + x = 0$ usando primero factor común.

$x(x^2 - 2x + 1) = 0$

$x(x-1)^2 = 0$ Un producto es 0 si al menos uno de los factores es 0

$x = 0$ ó $(x-1) = 0$ ó $(x-1) = 0$ Alternativamente podemos pensar $\sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{0}$

$x = 0$ ó $x = 1$ ó $x = 1$

Así que el conjunto solución de esta ecuación es {0,1}.

**c)** Usamos la técnica de factorización para resolver la ecuación $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 = 0$, pero para ello debemos de factorizar el lado izquierdo, usamos Ruffini.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | −3 | −8 | −3 |
| −1 | | −2 | 5 | 3 |
| −− | −− | −− | −− | −− |
| | 2 | −5 | −3 | 0 |
| 3 | | 6 | 3 | |
| −− | −− | −− | −− | −− |
| | 2 | 1 | 0 | |

De esta tabla obtenemos

$$P(x) = (2x+1)(x-3)(x+1).$$

Así que la ecuación de arriba es equivalente a

$$(2x+1)(x-3)(x+1) = 0.$$

Planteamos

$$(2x+1) = 0; \qquad (x-3) = 0; \qquad (x+1) = 0$$

Es inmediato ver que las soluciones de estas ecuaciones son $-\frac{1}{2}, 3$ y $-1$, las cuales pueden ser evaluadas en la ecuación original.

Así que el conjunto solución de la ecuación original es $\left\{-\frac{1}{2}, 3, 1\right\}$

**Ejemplo 2.-** Resolver las siguientes ecuaciones

**a)** $x^3 = 2x^2$ **; b)** $(x-1) = 2x(x-1)$

**Solución:**

**a)** Observe que en esta ecuación $x^3 = 2x^2$ no podemos simplificar las *x*, pues perdemos solución, (eliminar las *x* es lo mismo que dividir entre $x^2$). Si pasamos todo al lado izquierdo, dejando en el lado derecho el cero, podemos aplicar la técnica de factorización

$x^3 - 2x = 0$ Factorizamos

$x(x^2 - 2) = 0$

$x = 0$ ó $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$ Un producto es 0 si al menos uno de los factores es 0

$x = 0$ ó $x - \sqrt{2} = 0$ ó $x + \sqrt{2} = 0$

$x = 0$ ó $x = \sqrt{2}$ ó $x = -\sqrt{2}$

Así que el conjunto solución de la ecuación $x^3 = 2x^2$ es $\left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right\}$

**b)** Podemos hacer un comentario similar al ejercicio pasado, así que aplicamos la técnica de factorización, con el primer paso que es dejando de un lado el 0

$(x-1) = 2x(x-1)$

$(x-1) - 2x(x-1) = 0$ Factorizamos sacando de factor común $(x-1)$

$(x-1)(1-2x) = 0$ Planteamos 2 ecuaciones

$(x-1) = 0$ ó $(1-2x) = 0$ **Recuerde:** Un producto es 0 si al menos uno de los factores es 0

$x = 1$ ó $x = \frac{1}{2}$

Así el conjunto solución de la ecuación $(x-1) = 2x(x-1)$ es $\left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$.

El siguiente ejemplo pretende ilustrar que este método se aplica no sólo a ecuaciones polinómicas.

**Ejemplo 3.-** Resolver las siguientes ecuaciones $x(x+1)^{1/2}-3(x+1)^{3/2}=0$.
**Solución**
**a)** $x(x+1)^{1/2}-3(x+1)^{3/2}=0$. Primero factorizamos sacando factor común $(x+1)^{1/2}$

$(x+1)^{1/2}(x-3(x+1))=0$

$(x+1)^{1/2}(x-3x-3)=0$

$(x+1)^{1/2}(-2x-3)=0$. Planteamos 2 ecuaciones

$(x+1)^{1/2}=0$ ó $(-2x-3)=0$

Para resolver la primera ecuación elevamos ambos miembros al cuadrado

$\left((x+1)^{1/2}\right)^2=0^2$ ó $x=-\dfrac{3}{2}$

$x+1=0$ ó $x=-\dfrac{3}{2}$

$x=-1$ ó $x=-\dfrac{3}{2}$.

Siempre se debe chequear que ambas soluciones tengan sentido en la ecuación original, en este caso $x=-\dfrac{3}{2}$ lo descartamos como solución porque al evaluar en la ecuación original obtenemos expresiones que no son reales. Así que la única solución de la ecuación original es $x=-1$.

**EJERCICIOS**
**1)** Resolver las siguientes ecuaciones por factorización

**1.1)** $x^2-6x+8=0$; **1.2)** $(x-1)(x+2)(x+4)=0$; **1.3)** $x^3-x^2-12x=0$;
**1.4)** $x^2\sqrt{x}=\sqrt{x}$ ; **1.5)** $(x-2)(x-1)^3-2(x-2)^2(x-1)^2=0$;
**1.6)** $(x-2)(x^2-3)^{1/2}+4(x^2-3)^{3/2}=0$; **1.7)** $(x-1)^3=(x-1)^2$;
**1.8)** $x^3=x(x+2)$; **1.9)** $3x^3-2x^2-7x-2=0$;
**1.10)** $5x^4-25x^3+30x^2-8x-3=0$

**Respuestas**
**1.1)** 2,4; **1.2)** 1,-2,-4; **1.3)**-3,4; **1.4) -**1,0,1; **1.5)** 1,2,3; **1.6)** 3, 14/5; **1.7**) 1,2; **1.8**)0,-1,2;
**1.9**) $-\dfrac{1}{2},2$ y -1. **1.10)** $-\dfrac{1}{5},3$ y 1

## RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE LA FORMA $\dfrac{P}{Q}=0$

En la sección pasada vimos como la propiedad de los números reales concerniente a un producto igualado a cero nos llevaba a un método de resolución de ecuaciones**.** En esta sección queremos ver el método cuando un cociente es cero.

Veamos primero la propiedad en los números reales:

Si $b\neq 0$, tenemos que $\dfrac{a}{b}=0$ si y sólo si $a=0$.

Si tenemos una ecuación de la forma $\frac{P}{Q}=0$, entonces $P=0$, donde $P$ es una expresión en la variable *x*. Las soluciones de $\frac{P}{Q}=0$ son todas las soluciones de $P=0$ que tienen sentido en $\frac{P}{Q}=0$.

**Ejemplo 1.-** Resolver las siguientes ecuaciones **a)** $\frac{x^2-2}{x-2}=0$; **b)** $\frac{x(x+1)^2-x^2(x+1)}{(x+1)^2}=0$;

**c)** $\frac{2}{2x-1}=0$

**Solución:**

**a)** Las soluciones de $\frac{x^2-2}{x-2}=0$ son las soluciones de $x^2-2=0$ siempre y cuando tengan sentido en la original. Las soluciones de $x^2-2=0$ son $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$. Estas son soluciones de la ecuación original.

**b)** Las soluciones de $\frac{x(x+1)^2-x^2(x+1)}{(x+1)^2}=0$ son las soluciones de $x(x+1)^2-x^2(x+1)=0$ siempre y cuando tenga sentido en la ecuación original.

La ecuación $x(x+1)^2-x^2(x+1)=0$ la resolvemos por factorización:

$x(x+1)\big((x+1)-x\big)=0$ Se sacó $x(x+1)$ de F.C.

$x(x+1)\big((x+1)-x\big)=0$

$x(x+1)\cdot 1=0$ Planteamos dos ecuaciones

$x=0$ ó $(x+1)=0$.

Así que la ecuación $x(x+1)^2-x^2(x+1)=0$ tiene como soluciones $x=0,-1$. En este caso tenemos que $x=0$ satisface la ecuación original $\frac{x(x+1)^2-x^2(x+1)}{(x+1)^2}=0$, sin embargo $x=-1$ no tiene sentido en esta ecuación, pues $\frac{0}{0}$ no está definido . Por tanto la ecuación original tiene una única solución dada por $x=0$.

**c)** En la ecuación $\frac{2}{2x-1}=0$, planteamos $2=0$, esta ecuación no tiene solución, por tanto la ecuación original tampoco.

**Ejemplo 2.-** Resolver ecuación $1-\frac{2}{x-2}=0$

**Solución:** Esta ecuación no es de la forma $\frac{P}{Q}=0$, sin embargo lo podemos llevar a esta forma sumando los términos del lado izquierdo.

$$\frac{x-2-2}{x-2}=0$$

Las soluciones de esta última están contenidas en las soluciones de

$x-4=0$

cuya solución $x=4$ efectivamente satisface la original. Por tanto $x=4$ es la única solución de $1-\dfrac{2}{x-2}=0$.

(Otra forma de resolver esta ecuación es trabajando con la ecuación equivalente $1=\dfrac{2}{x-2}$,
Como el $x-2$ está dividiendo pasa multiplicando al otro lado, equivale a decir que multiplicamos por $x-2$ ambos lados, queda entonces $x-2=2$ cuya solución es la misma que la anterior).

**Ejemplo 3.-** Resolver la ecuación $\sqrt{x+1}-\dfrac{2x}{\sqrt{x+1}}=0$

**Solución:**

**1**) Se suman fracciones a fin de llevarla a la forma $\dfrac{P}{Q}=0$

$\dfrac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-2x}{\sqrt{x+1}}=0$ De aquí

$$(\sqrt{x+1})^2-2x=0$$
$$(x+1)-2x=0$$
$$-x+1=0$$

La solución es $x=1$, la cuál es solución de la ecuación original.

## EJERCICIOS

**1)** Resolver las siguientes ecuaciones identificándola con la forma $\dfrac{P}{Q}=0$

**1.1)** $\dfrac{x^2-8x}{x+1}=0$**;** **1.2)** $\dfrac{\sqrt{4}}{x-1}=0$**;** **1.3)** $\dfrac{2(x-1)(x+2)^3-3(x-1)^2(x+2)^2}{(x+2)^6}=0$**;**

**1.4)** $\dfrac{1}{x}-4x=0$; **1.5)** $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}=0$; **1.6)** $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}-2\sqrt{1-x}=0$; 1.7) $\dfrac{2}{x^{2/3}}-x^{1/3}=0$

**Respuestas:**

**1.1)** $0{,}8$ **;1.2)**No tiene solución; **1.3)** $1{,}7$ **(**el -2 no es solución**) ; 1.4)** $-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}$ (0 no es solución) ;

**1.5)** 1;-1 (0 no es solución); **1.6)** $\dfrac{1}{2}$; **1.7)** 2

# RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE LA FORMA $x^k=d$

Este tipo de ecuación es bastante frecuente. La recomendación para resolver este tipo de ecuación es:
Tomar raíz con índice *k* a ambos lados, considerando que para *k* par está la solución negativa también. Así

$$\begin{cases} x=\sqrt[k]{d} & si\quad k\quad es\quad impar \\ x=\pm\sqrt[k]{d} & si\quad k\quad es\quad par,\quad d\geq 0 \end{cases},$$

Si $k$ es par y $d$<0 la ecuación no tiene solución

**-Justificación para el caso *k*=3**

$x^3 = d$ se escribe como

$x^3 - d = 0$**,** se factoriza

$(x - \sqrt[3]{d})(x^2 + (\sqrt[3]{d})^2 x + d) = 0$ se plantean dos ecuaciones

$(x - \sqrt[3]{d}) = 0$ y $(x^2 + (\sqrt[3]{d})^2 x + d) = 0$

La primera tiene como solución $x = \sqrt[3]{d}$ . Se puede verificar que la segunda no tiene soluciones reales.

**-Justificación para el caso *k*=2**

- Si $d$ en negativo es claro que la ecuación $x^2 = d$ no tiene solución pues cualquier número real al elevarlo al cuadrado da mayor o igual a cero, nunca podrá ser negativo.
- Si $d$ es positivo entonces usamos el método de factorización

$x^2 = d$ se escribe como

$x^2 - d = 0$**,** se factoriza (lo pensamos como $x^2 - (\sqrt{d})^2 = 0$**)**

$(x - \sqrt{d})(x + \sqrt{d)} = 0$ se plantean dos ecuaciones

$(x - \sqrt{d}) = 0$ y $(x + \sqrt{d)} = 0$

La primera tiene como solución $x = \sqrt{d}$ y la segunda tiene como solución $x = -\sqrt{d}$ .

**Ejemplo 1.-** Resolver las siguientes ecuaciones **a)** $x^2 = 4$; **b)** $x^3 = -81$; **c)** $x^6 = -2$;
**Solución:**

**a)** Tomamos raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación: $x^2 = 4$. Recuerde que como el índice es par se agrega la positiva y la negativa. Así las soluciones son: $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

**b)** Al tomar raíz cúbica en ambos lados de $x^3 = -81$ queda $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-81}$.

**c)** Como 6 es un índice par, la ecuación $x^6 = -2$ no tiene solución real, efectivamente $x = \sqrt[6]{-2} \notin R$.

**Ejemplo 2.-** Resolver las siguientes ecuaciones **a)** $2x^6 - 6 = 0$; **b)** $(y+1)^3 = 7$;

**Solución:** La ecuación $2x^6 - 6 = 0$, la llevamos a la forma $x^k = d$, despejando $x^6$.

$2x^6 = 6$

$x^6 = \dfrac{1}{3}$

Ahora tomamos raíz a ambos lados y considerando que al ser el índice de la raíz par se tiene la raíz positiva y la negativa.

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

**b)** La ecuación $(y+1)^3 = 7$ no es exactamente de esta forma, pero igual se puede resolver usando la recomendación.

$\sqrt[3]{(y+1)^3} = \sqrt[3]{7}$

$(y+1) = \sqrt[3]{7}$

$y = \sqrt[3]{7} - 1$

Así que la solución de esta ecuación es $\sqrt[3]{7} - 1$.

**Comentario.-** Ya sabemos que esta ecuación tiene como una única solución un número irracional. Esta ecuación no hubiese podido ser resuelta desarrollando el cubo y luego aplicando Ruffini

**EJERCICIOS**

**1)** Resolver las siguientes ecuaciones identificándola con la forma $x^k = d$

**1.1)** $x^3+8=0$; **1.2)** $x^2+8=0$; **1.3)** $64x^6-1=0$;

**1.4)** $(x+1)^4=16$; **1.5)** $9x^2-25=0$; **1.6)** $8(x+2)^3-1=0$;

**1.7)** $(x+3)^4=0$

**2)** Resolver las siguientes ecuaciones

**2.1)** $2-3x+2x^2=0$; **2.2)** $x^2+\sqrt{2}x-2=0$; **2.3)** $x^3-4x^2-x=0$;

**2.4)** $(x^2-4x+1)^4=0$; **2.5)** $(x^2-25)(x^2-2x-3)=0$; **2.6)** $(x+2)^2-4x=0$;

**Respuestas:**

**1.1)** $\sqrt[3]{-8}$ ; **1.2)** No tiene solución; **1.3)** $\pm\frac{1}{2}$;**1.4)** $1,-3$ **1.5)** $\pm\frac{5}{3}$; **1.6)** $-\frac{3}{2}$ -1,3; **1.7)** $-3$;

**2.1)** No tiene soluciones reales; **2.2)** $\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{10}}{2}$ **2.3)** $0;2+\sqrt{5};2-\sqrt{5}$ ;**2.4)** $2+\sqrt{3};2-\sqrt{3}$ **2.5)** $5;-5;3;-1$; **2.6)** No tiene soluciones reales

## ECUACIONES CON RADICALES

Las ecuaciones con radicales son aquellas donde la incógnita está dentro del radical.

Por ejemplo la ecuación $\sqrt{x^2+3}+3=x$ la llamaremos de esta manera porque la variable está dentro del signo radical. La ecuación $\sqrt{2}x+3=x^2$ no la consideramos una ecuación con radical porque la variable no está dentro de la raíz.

Para resolver este tipo de ecuación se recomienda los siguientes pasos:

**1)** Dejar el término con el radical solo de un lado de la ecuación,
**2)** Elevar ambos miembros a la potencia del índice. Estar pendiente si hay planteado un producto notable.
**3)** Simplifique e identifique la ecuación resultante para resolverla de acuerdo a la recomendación. Recuerde que al elevar a una potencia par puede estar agregando soluciones extrañas, en este caso hay que verificar las soluciones en la original.

**Ejemplo 1.-** Resolver las siguientes ecuaciones
**a)** $\sqrt[3]{x-3}-2=0$; **b)** $x-4\sqrt{x+3}+6=0$
**Solución:** Todas estas ecuaciones son con radicales.
Recuerde: que este tipo de ecuación el primer paso de la recomendación es dejar solo el radical
**a)**

$\sqrt[3]{x-3}-2=0$ Se deja solo el radical

$\sqrt[3]{x-3}=2$; Se eleva al cubo ambos miembros

$(\sqrt[3]{x-3})^3=2^3$

$x-3=8$ Quedó una ecuación lineal que resolvemos

$x=11$

**b)** $x-4\sqrt{x+3}+6=0$ Se deja solo el radical

$x+6=4\sqrt{x+3}$ Se eleva al cuadrado ambos miembros

$(x+6)^2=\left(4\sqrt{x+3}\right)^2$

$x^2+12x+36=4^2\left(\sqrt{x+3}\right)^2$ En el lado izquierdo se desarrolló un producto notable

$x^2+12x+36=16(x+3)$ Se aplica la propiedad distributiva

$x^2+12x+36=16x+48$ Quedó una ecuación cuadrática que se resuelve por la resolvente

$x^2-4x-12=0$ (Se pudo resolver también por factorización)

$$x\frac{4\pm\sqrt{16+48}}{2}=\frac{4\pm 8}{2}$$

$x=6$ y $x=-2$.

Como elevamos al cuadrado pudimos agregar solución. Se comprueba las soluciones en la ecuación original, concluyendo que -2 y 6 son soluciones de la ecuación original.

**Comentario** Una ecuación de la forma $\left(p(x)\right)^{n/m}=k$ , con $k$ una constante, la podemos resolver rápidamente elevando ambos miembros al inverso del exponente : $\frac{m}{n}$. Así

$$\left(\left(p(x)\right)^{n/m}\right)^{m/n}=k^{m/n}$$

$$p(x)=k^{m/n}$$

Esta última ecuación la identificamos y la resolvemos de acuerdo a las recomendaciones.
Debemos tener en cuenta que si $n$ es par entonces $k$ no puede ser negativo y la solución debe tomar en cuenta las dos raíces: $p(x)=\pm\left(k^{m/n}\right)$

Si $m$ es par entonces podemos estar agregando solución.

(Observe que la ecuación $\left(p(x)\right)^{n/m}=k$ puede ser escrita como $\sqrt[m]{(p(x))^n}=k$ o bien como $\left(\sqrt[m]{p(x)}\right)^n=k$, ambas ecuaciones le realizamos dos operaciones consecutivas para llegar a la forma $p(x)=k^{m/n}$.)

**Ejemplo 2.-** Resolver la siguiente ecuación $\sqrt[3]{(x-2)^2}=4$

**Solución:** la escribimos con exponente fraccionario:

$(x-2)^{2/3}=4$

$\left((x-2)^{2/3}\right)^{3/2}=\pm\left(4^{3/2}\right)$

$x-2=\pm\left(4^{1/2}\right)^3$

$x=+8+2$ ó $x=-8+2$

$x=10$ ó $x=-6$

## EJERCICIOS

**1)** Resolver las siguientes ecuaciones con radicales:

**1.1)** $2\sqrt{x-1}-2=0$ **;** **1.2)** $\sqrt{3x^2+6}+3=6x$ **;** **1.3)** $3x+4\sqrt{x+2}+6=0$

**1.4)** $\sqrt[3]{x^2-16}+1=0$ **;** **1.5)** $(x-2)^{1/5}=0$ **;** **1.6)** $(x-2)^{2/5}=1$

**1.7)** $\frac{x}{2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-2}=0$ **;** **1.8)** $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+2}=0$ **;** **1.9)** $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-x=0$

**Respuestas: 1.1)** 2; **1.2)** 1, (1/11 no es solución); **1.3)** -2;( - $\frac{14}{9}$ no es solución);**1.4)** $\sqrt{15};-\sqrt{15}$ **;**

**1.5)** 2 **;** **1.6)** 1,3 **; 1.7) 4/3; 1.8 )** $-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ **; 1.9)** $2+2\sqrt{2}$

# ECUACIONES LOGARITMICAS Y EXPONENCIALES

Las propiedades de los logaritmos permiten solucionar algunas ecuaciones logarítmicas. Básicamente tendremos dos tipos de formas y deberemos llevar la ecuación planteada a una de estas dos formas a través de las propiedades de los logaritmos:

**Forma 1:** $\log_a(g(x)) = c$. La recomendación para resolverla es llevarla a la forma exponencial.

**Forma 2:** $\log_a(g(x)) = \log_a(f(x))$. Para resolverla usamos el hecho que la función logarítmica es biunívoca entonces esta expresión ocurre si y sólo si $g(x) = f(x)$, **la cual es la que resolveremos.**

**Comentarios:**

**1)** Al llevar una ecuación a la forma 1 o 2 podríamos estar agregando solución, así que debemos siempre verificar que las soluciones satisfacen la ecuación original.

**2)** La forma 1 o 2 también se resuelven elevando ambos miembros en base *a*.

Veamos los siguientes ejemplos donde debemos llevar la ecuación que se nos presente a una de estas dos formas usando las propiedades de los logaritmos.

**Ejemplo 1.-** Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

**a)** $\log(3x+1) - \log(x) - 1 = 0$; **b)** $2\log(x) = \log(x+1) + \log(x+2)$

**Solución:**

**a)** Esta ecuación la llevamos a la **forma 1:**

$$\log(3x+1) - \log(x) = 1$$

$$\log\left(\frac{3x+1}{x}\right) = 1$$

Ahora la llevamos a su forma exponencial

$$10 = \frac{3x+1}{x}$$

Esta es una ecuación racional, multiplicamos ambos lados por *x* y así obtenemos una ecuación lineal:

$$10x = 3x + 1$$

Cuya la solución es: $x = \frac{1}{7}$.

Esta solución debe ser verificada en la ecuación racional pues puede ser una solución añadida. En la ecuación logarítmica original, se debe sustituir la solución en cada expresión logarítmica para verificar que cada expresión a la que se le toma logaritmo sea mayor que cero. El lector puede verificar que cumple con la ecuación racional y que 3*x*+1>0 con $x = \frac{1}{7}$.

**b)** Esta ecuación la llevamos a la **forma 2**: $\log_a(g(x)) = \log_a(f(x))$. Para ello en el lado izquierdo usamos la regla de la potencia y en el lado derecho la propiedad de la suma:

$$2\log(x) = \log(x+1) + \log(x+2)$$

$$\log(x^2) = \log\big((x+1)(x+2)\big)$$

Entonces

$$x^2 = (x+1)(x+2),$$

Ahora resolvemos esta ecuación:

$$x^2 = x^2 + 3x + 2$$

$$3x + 2 = 0$$

$$x=\frac{-2}{3}:$$

Esta solución la sustituimos en la ecuación original para verificar que estemos aplicando logaritmos a números positivos:

$2\log(\frac{-2}{3})=\log(-\frac{2}{3}+1)+\log(-\frac{2}{3}+2)$. Como $\log(\frac{-2}{3})$ no esta definido, entonces $x=\frac{-2}{3}$ no es solución. En conclusión esta ecuación no tiene solución.

Si **una ecuación exponencial** puede ser expresada de **forma** $a^{g(x)}=c\cdot k^{f(x)}$, entonces para resolverla aplicamos logaritmos a ambos lados con la idea que los exponentes pasen multiplicando

$$\log_b(a^{g(x)})=g(x)\log_b(a);$$

$$\log_b(c\cdot k^{f(x)})=\log_b(c)+\log_b(k^{f(x)})=\log_b(c)+f(x)\log_b(k)$$

Si estamos interesados en la solución numérica, podemos emplear o bien el logaritmo decimal o el neperiano. Si $k=a^r$, se puede aplicar logaritmos en base *a* para tener una solución exacta.

**Ejemplo 2.-** Resolver las siguientes ecuaciones:

**a)** $5^{x^2-1}=5\cdot 2^{x^2-3}$ **b)** $2^{x^2+2}=2\cdot 4^{x-4}$

**Solución:**

**a)** Tomamos logaritmo decimal en ambos lados:

$\log(5^{x^2-1})=\log(5\cdot 2^{x^2-3})$ y aplicamos propiedades del logaritmo

$$(x^2-1)\log(5)=\log(5)+\log(2^{x^2-3})$$

$$(x^2-1)\log(5)=\log(5)+(x^2-3)\log(2)$$ Se distribuye el logaritmo

$$x^2\log(5)-x^2\log(2)=\log(5)-3\log(2)+\log(5)$$ Se agrupan los términos en $x^2$ en el lado izquierdo y en el derecho las constantes

$$x^2(\log(5)-\log(2))=2\log(5)-3\log(2)$$ Se saca factor común $x^2$ y se despeja

$$x^2=\frac{2\log(5)-3\log(2)}{\log(5)-\log(2)};$$

$x=\pm\sqrt{\frac{2\log(5)-3\log(2)}{\log(5)-\log(2)}}\approx 1.11.$ Puede confirma que $x=\pm\sqrt{\frac{\log(\frac{25}{9})}{\log(\frac{5}{2})}}$

**b)** Para resolver $2^{x^2+2}=2\cdot 4^{x+2}$, primero expresamos 4 como potencias de 2

$$2^{x^2+2}=2\cdot(2^2)^{x+2}$$

$2^{x^2+2}=2\cdot 2^{2(x+2)}$. Aplicamos logaritmo en base 2 a ambos lados de la ecuación

$\log_2(2^{x^2+2})=\log_2(2\cdot 2^{2(x+2)})$.

$$(x^2+2)\log_2(2)=\log_2(2)+\log_2(2^{2(x+2)})$$

$$(x^2+2)=1+(2x+4)\log_2(2\ \ )$$

$$x^2+2=(2x+4)$$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

Las soluciones son $x = 3$ y $x = -1$.

Alternativa 2: Podemos reescribir la ecuación $2^{x^2+2} = 2 \cdot 2^{2(x+2)}$ como $2^{x^2+2} = 2^{2(x+2)+1}$

Como la función exponencial es biunívoca al tener una igualdad con bases iguales los exponentes deben ser iguales, así la ecuación anterior es equivalente a:

$x^2 + 2 = (2x + 4) + 1$ Pasamos a resolver esta ecuación cuadrática

$x^2 - 2x - 3 = 0$

Las soluciones son $x = 3$ y $x = -1$.

**Ejemplo 3.-** Resolver la siguiente ecuación exponencial $2e^{x^3} - 1 = 0$

**Solución:** Se despeja la exponencial $e^{x^3} = \frac{1}{2}$ y se aplica logaritmo neperiano a ambos lados con el fin que el exponente pase multiplicando

$$\ln e^{x^3} = \ln \frac{1}{2}$$

$$x^3 \ln e = \ln 2^{-1}$$

$$x^3 = -\ln 2$$

$$x = \sqrt[3]{-\ln 2}$$

**EJERCICIOS**

**1)** Resuelva las siguientes ecuaciones:

**1.1)** $\ln(x-1) = 1$**;** **1.2)** $\log(x+3) - 2 = 0$**;** **1.3)** $\log_2(2x) = -3$**;**

**1.4)** $e^{-3x+1} = 4$**;** **1.5)** $2 \cdot 4^{x+1} = 1$**;** **1.6)** $2^{\sqrt{x}} = 8$**;**

**1.7)** $2^{x^2} = 8$

**2)** Resolver las siguientes ecuaciones

**2.1)** $\log(x+3) + \log(x) - 1 = 0$**;** **2.2)** $\log(x) + \log(x+3) = 2\log(x+2)$**;**

**2.3)** $\log(x \ ) = \log(x+4) - \log(x+1)$**;** **2.4)** $\log(\sqrt{x}) = \log(x-2)$**;**

**2.5)** $2 = \log(20x+10) - \log(x+2)$**;** **2.6)** $5^{x^2} = 25^{x+4}$**;**

**2.7)** $7^{2x} = 5^{3x-1}$**;** **2.8)** $2\log(x-2) = 4$**;**

**Respuestas:**

**1.1)** e+1; **1.2)**97; **1.3)** 1/16; **31.4)** $\frac{1-\ln 4}{3}$; **1.5)** -3/2; **1.6)** 9; **1.7)** $\pm\sqrt{3}$;

**2.1)**2, (-5 no es solución);

**2.2**) -4 no es solución; 2**.3)** 2 (-2 no es solución); **2.)**4; **2.)** -19/8 no es solución;

**26)** -2;4; **5.7)** $\frac{-\ln 5}{\ln \frac{7^2}{5^3}} \approx 1.71$; **2.4)** 4(0 no es solución)

# TIPIFICACIÓN DE ERRORES

## EXPONENTES Y RADICALES

| Error | Comentarios |
|---|---|
| $(a+b)^{1/n} \neq a^{1/n} + b^{1/n}$ <br> $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ | La propiedad no es con la suma sino con la multiplicación <br> $(a \cdot b)^{1/n} \neq a^{1/n} \cdot b^{1/n}$ |
| $(a+b)^n \neq a^n + b^n$ | |
| $a^n a^m \neq a^{n \cdot m}$ | Los exponentes de igual base se suman, no se multiplican |
| $ab^{-n} \neq \dfrac{1}{ab^n}$ | La potencia es la primera operación a considerar, afecta sólo a *b* |
| $\sqrt[n]{a^n + b} \neq a+b$ <br> $\sqrt[n]{ab^n} \neq a \cdot b$ <br> $\sqrt[n]{a^n + b^n} \neq a+b$ | Para poder simplificar debe ir todo el radicando elevado a la *n*. <br> $\sqrt[n]{(a+b)^n} = a+b$ <br> $\sqrt[n]{(ab)^n} = ab$ |

## EXPRESIONES ALGEBRAICAS

| **Error** | **Comentario** |
|---|---|
| $(a-x)(a-x) \neq a^2 - x^2$ | $(a-x)(a-x) = (a-x)^2$ |
| $(a+x)^m \neq a^m + x^m$ | Por ejemplo, si $m$=2 tenemos $(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$ |
| $(x+y)^{-n} \neq x^{-n} + y^{-n}$ | El lado izquierdo es igual a $\frac{1}{(x+y)^n}$, el lado derecho es igual a $\frac{1}{x^n} + \frac{1}{y^n}$ |
| $a(x-b)^m \neq (ax-ab)^m$ | No vale la propiedad distributiva cuando el segundo factor es una potencia |
| $-(x+a)^n \neq (-x-a)^n$ | |
| $\dfrac{x+y}{y} \neq x$ | Para simplificar *y* tiene que ser un factor en el numerador <br> $\dfrac{x \cdot y}{y} = x$ |
| $a \cdot (xy) \neq (ax) \cdot (ay)$ | No se aplica la propiedad distributiva de un producto con un producto <br> $2 \cdot (4 \cdot 5) \neq (2 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 5)$ El lado izquierdo vale 40 y el derecho 80 |
| $a + x(b+x) \neq (a+x)(b+x)$ | |
| $\dfrac{a}{x+b} - \dfrac{c}{x+d} \neq \dfrac{ax+d-cx+b}{(x+b)(x+d)}$ | Faltan los paréntesis: <br> $\dfrac{a}{x+b} - \dfrac{c}{x+d} = \dfrac{a(x+d)-c(x+b)}{(x+b)(x+d)} = \dfrac{ax+ad-cx-cb}{(x+b)(x+d)}$ |

## LOGARITMOS

| Error | Comentario |
|---|---|
| $\log_a(m+n) \neq \log_a m + \log_a n$ | No hay propiedad para el logaritmo de una suma |
| $\log_a(m-n) \neq \log_a m - \log_a n$ | |
| $\log_a(\frac{m}{n}) \neq \dfrac{\log_a(m)}{\log_a(n)}$ | El primero es el logaritmo de un cociente y es igual a la diferencia de los logaritmos |

## FUNCIONES

| Error | Comentario |
|---|---|
| $f(x+h) \neq f(x) + h$ | Para evaluar funciones en $x+h$ abra y cierre paréntesis donde va la $x$, luego dentro de cada paréntesis coloque $x+h$ |