Contenido

Prólogo

Tous les Problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites, pour les construire.[1]

René Descartes
(La Géométrie, 1637)

Nuestro epígrafe es la frase con la que comienza la obra *La Geometrie* de Descartes: la manera más sintética que conocemos para expresar el principio fundamental de la hoy llamada *Geometría analítica*[2] que, circunscrita al plano, constituye el asunto que nos ocupa en este libro.

Tal como la concibió Descartes, la *Geometría analítica* no es una Geometría diferente o nueva, sino la Geometría misma estudiada con el auxilio del Análisis[3], después de que se han establecido sus fundamentos por separado; y está caracterizada por un método de abordaje de los problemas geométricos que se puede describir en tres etapas:

- transformar el problema geométrico en un problema de Análisis;
- resolver el nuevo problema con los recursos propios del Análisis;
- interpretar geométricamente la solución encontrada, obteniendo así la solución del problema originalmente planteado.

Actualmente nadie duda de los considerables e insospechados aportes de la Geometría analítica a las Matemáticas y sus aplicaciones, siendo la fuente primordial de sus inmensos progresos: en la Geometría métrica euclidiana misma; en el surgimiento de las Geometrías no euclidianas, proyectiva, diferencial y algebraica; en el surgimiento del Cálculo, el Análisis funcional, la Teoría de las Funciones analíticas; en sus aplicaciones a la Estadística, a las Ciencias económicas, a la Mecánica; etc.

Por otro lado, es innegable también el aporte de la Geometría analítica a la formación intelectual del estudiante: da ocasión para que aplique de forma integrada los conocimientos previamente adquiridos, y hasta cierto punto aisladamente, de las Matemáticas elementales (Aritmética, Álgebra, Geometría, Trigonometría); y sirve de fundamento a muchas de las asignaturas que tiene que estudiar posteriormente.

Lamentablemente, hubo un tiempo en el que la Geometría analítica se redujo a las breves y precisas pinceladas requeridas para el estudio del Cálculo presuponiendo, quizás, el conocimiento previamente adquirido por los estudiantes en la secundaria. En la actualidad, vivimos un repunte en la inclusión de la enseñanza de esta disciplina en los primeros semestres de las Carreras de Matemáticas, originado por dos

[1] *Todos los problemas de Geometría se pueden reducir fácilmente a términos tales que, para resolverlos, sólo bastaría conocer la longitud de algunos segmentos*.

[2] El calificativo *analítica* fue adosado al sustantivo *Geometría* muy posteriormente a Descartes: fue utilizado por primera vez en el prólogo del *Tratado de Cálculo diferencial e integral* de Lacroix en 1787, y como título de un libro propio de la materia en *Eléments de Géomètrie Analytique* de J. G. Garnier en 1808.

[3] Sin pretender ser muy precisos podemos decir que, cuando decimos *Análisis*, nos referimos a la Teoría que se funda en la estructura de cuerpo ordenado completo de los Números Reales, aunque algunas veces se incluye el uso de las herramientas del Álgebra y de la Trigonometría.

certezas cada vez más evidentes: la deficiencia en la formación matemática preuniversitaria y la facilidad intrínseca de la asimilación de conceptos matemáticos a través de la Geometría.

Los autores de esta obra tuvieron como primera motivación producir un libro de texto en lengua castellana para la asignatura *Geometría 1* del pensum de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Los Andes: asignatura que está diseñada para dictarse en un semestre, a razón de cuatro horas semanales, y en el primer semestre de la carrera; y pensum que a su vez se diseñó, entre tantas otras razones, con el propósito de actualizar el anterior a las exigencias de los nuevos tiempos y de adaptar el perfil de nuestros licenciados en Matemáticas a las pautas del Convenio Andrés Bello[4].

Pero, como podrá fácilmente constatarse al echar un vistazo a su tabla de contenidos, este libro cumpliría la misma función antes expuesta en cualquier curso de un semestre de Geometría analítica plana de cualquier pensum de estudios de las carreras del área de las Ciencias básicas (Física, Química o Biología), del área de la Tecnología (Ingeniería, Arquitectura, Diseño), o del área de las Ciencias sociales y humanísticas (Economía, Administración, Educación en Matemáticas), de cualquiera de nuestras universidades, pues contiene, en esencia, lo que sería el material de estudios de un tal curso.

Esa primera motivación de la que hablamos se avivó después de haber hecho una revisión exhaustiva de los textos que trataban sobre Geometría analítica plana existentes en el mercado local o en nuestras bibliotecas[5], de haber constatado que no estaban al alcance de la mayoría de nuestros estudiantes (precio, idioma, disponibilidad), de haber encontrado una cantidad no despreciable de desaciertos suficientemente notorios en cada uno de ellos, y de haber creído firmemente que podíamos contribuir en la solución de todas estas dificultades.

Algunos de esos desaciertos corresponden a la forma en que está expuesto el material, y otros al fondo de lo que se expone: se emplean términos y enfoques en desuso actualmente; no se desarrollan suficientemente algunos temas, dejando por fuera algunos tópicos que nos parecen importantes de tratar; se presentan inconsistencias en el uso de algunos términos, errores en la justificación de las afirmaciones que proponen, etc.

Sin embargo, debemos reconocer que la acertada preocupación de los autores de las obras a las que hacemos referencia por la abundancia en la ejercitación práctica, junto a la gratificante experiencia que nos ha dejado el procurar resolver los problemas por ellos planteados, atenúan la sentencia que acabamos de dictar por obligación, en relación con los descuidados intentos de justificar las afirmaciones con cierta candidez en los razonamientos.

Creemos que, al trazar cada uno de los rasgos del perfil que queremos lograr en nuestros licenciados en Matemáticas, se deben tomar en cuenta en el estudiante, tanto la *información* que se le suministra, como su *formación* intelectual; y que no debe sacrificarse ninguna de ellas en favor de la otra.

Es loable proveer al estudiante de los conceptos y resultados que le permitan adentrarse rápidamente en las profundidades de las Matemáticas, pero nos parece indispensable facilitar al estudiante el cultivo de un orden intelectual que lo habilite para discernir claramente los ***principios*** que fundamentan los conocimientos que adquiera, y para alcanzar nuevos conocimientos de manera independiente. En esta obra hemos tratado de no descuidar ninguno de estos aspectos.

[4]Esa asignatura cubre parte del área básica denominada *Geometría*, específicamente lo concerniente al estudio analítico de las figuras geométricas del plano.

[5]Una lista detallada de dichos textos puede verse en la Bibliografía al final del libro.

Ciertamente los temas básicos de la Geometría pueden exponerse con una ligereza tal que pronto se arribe a los resultados más útiles en la resolución de sus problemas más notables, pasando por alto los pequeños detalles que sirven de amalgama a la totalidad del sistema[6].

Nosotros hemos optado por dejar establecidos en esta obra esos pequeños detalles, por engorrosos que sean, con el propósito de que la obra pueda servir de referencia, tanto para el profesor en su quehacer profesional o en el momento en que imparte un curso de Geometría analítica plana, como para el estudiante que lo cursa, a pesar de estar convencidos de que no necesariamente deban cubrirse todos ellos en el salón de clases.

Hemos desarrollado esta obra de tal manera que, por una parte, el estudiante puede llevar a cabo su estudio con éxito por sí mismo, al presentar sintéticamente los resultados relevantes de cada uno de sus capítulos, al ilustrar prolijamente, a través de ejemplos y figuras, algunas aplicaciones de esos resultados, y al plantear los problemas que él debe saber resolver en su nivel de estudios, y que le ayudarán a concretar y aclarar las nociones expuestas; y por la otra, el profesor puede encontrar suficientes recursos que le permitan orientar a sus estudiantes, motivarlos para el estudio de cada uno de los temas tratados, y generar discusiones entre ellos en el desarrollo de su clase.

Esperamos de nuestros colegas la consideración que corresponde a la tentativa que hemos emprendido, en la dirección de realizar una tarea tan grande como la de producir una obra de esta envergadura, así como también todas las recomendaciones que pudieran ayudar al mejoramiento, sin duda posible, de la calidad de esta obra de utilidad colectiva, que ofrecemos como un paso más en la producción de un material didáctico autóctono.

[6]Efectivamente algunos autores prefieren este estilo, muchos de ellos sin poder substraerse de dejar en el lector la sensación de que está haciendo trampa, puesto que ni siquiera lo ponen en alerta respecto a lo que están pasando por alto.

Listado de los Teoremas

CAPÍTULO

COORDENADAS CARTESIANAS

1

Este estudio tiene como marco de referencia⟨1⟩ un conjunto $\mathfrak{P}$, que llamaremos el ***plano***⟨2⟩, a cuyos elementos llamaremos ***puntos***; y un tipo distinguido de subconjuntos del plano que llamaremos ***rectas***.

Para fines ilustrativos usaremos como representación gráfica⟨3⟩: del *plano*, la superficie sobre la que exponemos nuestro estudio (una hoja de este libro, una hoja del cuaderno de apuntes, la pizarra); de un *punto*, la marca visible más pequeña que podamos trazar en dicha superficie; y de una *recta*, la marca que podemos trazar en dicha superficie adosados a un canto que consideremos recto.

Entenderemos por ***figura geométrica***, un subconjunto no vacío del plano, es decir, cualquier conjunto de puntos que tenga por lo menos un elemento.

Denotaremos mediante el símbolo $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales, y mediante $\mathbb{R}^2$ al conjunto de los ***pares ordenados***⟨4⟩ ***de números reales***, es decir:

$$\mathbb{R}^2 := \{(x, y) : \ x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}.^{\langle 5\rangle}$$

OBSERVACIÓN 1.1 (IGUALDAD DE PARES ORDENADOS)
La identidad de los elementos de $\mathbb{R}^2$ se puede caracterizar de la siguiente manera: dados cuatro números reales a, b, c y d, se tiene que

$$(a, b) = (c, d) \text{ si, y sólo si, } a = c \ \text{ y } \ b = d^{\langle 6\rangle};$$

y, en consecuencia,

$$(a, b) \neq (c, d) \text{ si, y sólo si, } a \neq c \ \text{ o } \ b \neq d.$$

Consideremos una relación f cualquiera que asocia, a pares ordenados de números reales, un número real⟨7⟩; es usual utilizar la notación

$$f(x, y) = z$$

para indicar que f asocia, al par ordenado (x, y), el número real z.

Tiene sentido preguntar por los pares ordenados de números reales que f asocia al cero (0); esto equivale a plantear y resolver, para x y y, ***la ecuación***

$$f(x, y) = 0.$$

Del mismo modo, es pertinente preguntar por los pares ordenados de números reales que f asocia a algún número real mayor que cero (0) genérico; esto equivale a plantear y resolver, para x y y, ***la inecuación***

$$f(x, y) > 0;$$

análogamente, para algún número real mayor o igual, menor, menor o igual, que cero (0) genérico, las inecuaciones $f(x, y) \geqslant 0$, $f(x, y) < 0$ y $f(x, y) \leqslant 0$, respectivamente.

Por comodidad, usaremos el símbolo

$$f(x, y) \lesseqqgtr 0$$

para referirnos de manera general, no determinada ni específica, a la ecuación, o a alguna de las inecuaciones, que acabamos de mencionar.

Entenderemos por ***gráfico de la ecuación***, o ***inecuación***, $f(x, y) \lesseqqgtr 0$ al subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por los pares ordenados de números reales que son solución de $f(x, y) \lesseqqgtr 0$, y sólo ellos, es decir, el conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x, y) \lesseqqgtr 0\}^{\langle 8 \rangle};$$

llamaremos ***curva*** al gráfico de la ecuación $f(x, y) = 0^{\langle 9 \rangle}$.

➤ **EJEMPLO 1.1**

Consideremos la relación $f(x, y) = -3x + y - 2$.

(a) *El gráfico de la ecuación* $f(x, y) = 0$ *sería el conjunto*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -3x + y - 2 = 0\}.$$

Pertenecen al gráfico anterior pares como:

$$(1, 5),\ (0, 2),\ (-1, -1),\ (a, 3a + 2),\ (\tfrac{b-2}{3}, b).$$

No pertenecen al gráfico anterior pares como:

$$(1, 4),\ (2, 6),\ (-2, 2),\ (a, 3a + 3).$$

(b) *El gráfico de la inecuación* $f(x, y) \leqslant 0$ *sería el conjunto*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -3x + y - 2 \leqslant 0\}.$$

Pertenecen al gráfico anterior pares como:

$$(1, 5),\ (a, 3a + 2),\ (0, 0),\ (0, 1).$$

No pertenecen al gráfico anterior pares como:

$$(0, 3),\ (-2, 2),\ (a, 3a + 3).$$

QEE ➤

La idea básica de la Geometría analítica plana es identificar al plano ($\mathfrak{P}$) *con el conjunto* $\mathbb{R}^2$, *los puntos del plano con pares ordenados de números reales, y figuras geométricas con gráficos de ecuaciones, o inecuaciones, cuyas variables representan las componentes de los pares ordenados de números reales correspondientes a los puntos que las constituyen*⟨10⟩; diremos de esos gráficos, que son la *representación analítica* de dichas figuras geométricas, y de esas figuras geométricas, que son la *representación geométrica* de dichos gráficos⟨11⟩.
Haciendo uso de una tal identificación se logra representar figuras geométricas, por medio de ecuaciones, o inecuaciones, en dos variables; y esta representación permitirá tratar analíticamente (algebraicamente) algunos asuntos geométricos y, recíprocamente, interpretar geométricamente algunas situaciones analíticas (o algebraicas).

En este estudio admitiremos conocidos algunos principios elementales de la Geometría euclidiana⟨12⟩ que, para no recargar demasiado la exposición, expondremos en el Apéndice E.

La Geometría analítica tiene su fundamento en el siguiente principio de la Geometría métrica, usualmente llamado el ***Postulado de la Regla***⟨13⟩:

(a) *Existe una correspondencia biunívoca*⟨14⟩ *entre los puntos de cualquier recta y los números reales.*

(b) *Dados dos puntos distintos A y B de una recta, siempre podremos escoger la correspondencia anterior de tal manera que al punto A le corresponda el número real cero (0) y al punto B le corresponda cualquier número real positivo prefijado.*

(c) *La correspondencia anterior es tal que* ***la distancia*** *entre dos puntos de la recta se obtiene mediante el valor absoluto de la diferencia de los números reales que les corresponden.*

(d) *La correspondencia anterior es tal que* ***el punto medio*** *del segmento con extremos en dos puntos de la recta se obtiene mediante la semisuma de los números reales que les corresponden.*

Una tal correspondencia es llamada un ***sistema de coordenadas*** de la recta, y el número real que le corresponde a un punto de la recta es llamado la ***coordenada del punto*** (en dicho sistema de coordenadas).

Note que la parte (b) del Postulado de la Regla nos da la libertad de escoger el segmento que usaremos como patrón (la ***escala***) en el momento de medir distancias⟨15⟩, y nos dice que podemos alterar la escala trasladándola, alargándola, achicándola o volteándola.

Para los efectos del presente estudio, cada vez que se presenta una situación que involucre longitudes, supondremos que está fijada una escala, es decir, una unidad de medida de longitud (y, por ende, también de área); sin embargo, por razones prácticas, en las ilustraciones que realicemos nos daremos la libertad de utilizar la escala más conveniente.

➤ **EJEMPLO 1.2**

Considere una recta l, un sistema de coordenadas en l, y dos puntos P y Q en l de coordenadas 5 *y* −6*, respectivamente (ver la figura 1.1).*

(a) *La distancia entre P y Q será, según lo establecido en el Postulado de la Regla,*

$$PQ = |5 - (-6)| = 11.$$

(b) *El punto medio del segmento* $\overline{PQ}$ *será, según lo establecido en el Postulado de la Regla, el punto M de coordenada*

$$\frac{5 + (-6)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

QEE ◄

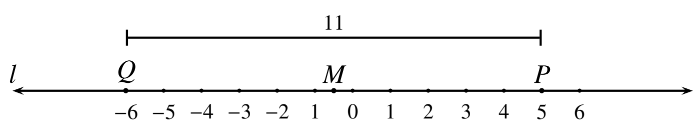


FIGURA 1.1 Representación gráfica correspondiente al ejemplo 1.2

§ 1.1 Sistema de coordenadas cartesianas en el plano

Entenderemos por ***eje*** (o ***recta orientada***), una recta en la que se destacan particularmente:

- dos puntos distintos en ella, a los que llamaremos ***origen*** y ***unidad*** en dicho eje; y
- un sistema de coordenadas en dicha recta, con la particularidad de que al origen le corresponda el número real cero (0), y a la unidad le corresponda el número real uno (1).

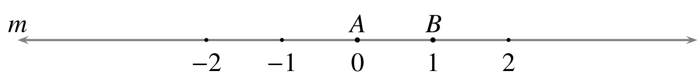


FIGURA 1.2 La recta m como eje

Consideremos una recta m cualquiera. Para poder considerar a m como un eje o, en otras palabras, para *orientar* dicha recta, debemos destacar, en primer lugar, dos de sus puntos distintos cualesquiera, y decidir cuál de ellos hará el papel de origen y cuál el de unidad: denotemos con el símbolo A al punto que, de los dos destacados, hemos decidido que haga el papel de origen, y con el símbolo B al que lo haga de unidad. Hecho esto, debemos luego escoger un sistema de coordenadas en m de tal manera que al punto A le corresponda el número real cero (0) y al punto B le corresponda el número real uno (1); una representación gráfica de la recta m como eje podría realizarse como en la figura 1.2.

Fijado un punto P cualquiera en el eje m, llamaremos ***sentido positivo respecto a*** P al conjunto de los puntos de m que tienen coordenada mayor que la de P (ver la figura 1.3); en contraposición, llamaremos ***sentido negativo respecto a*** P al conjunto de los puntos de m que tienen coordenada menor que la de P[16].

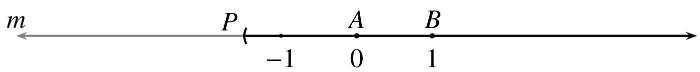


FIGURA 1.3 Sentido positivo respecto a un punto P en el eje m

Fijados dos puntos distintos P y Q cualesquiera en el eje m, diremos que Q ***está delante de*** P, si la coordenada de Q es mayor que la de P; en contraposición, diremos que Q ***está detrás de*** P, si la coordenada de Q es menor que la de P[17].

Es claro que, en el eje m, el sentido positivo respecto al origen A es la semirrecta $\overset{\circ\!\longrightarrow}{AB}$ (ver el Principio E.13 en el Apéndice E); y que la unidad B está delante del origen A (ver la figura 1.4).

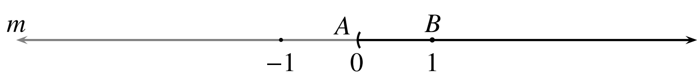


FIGURA 1.4 Sentido positivo respecto al origen en el eje m

Note que, en el eje m, decir que "Q está delante de P" equivale a decir que "la semirrecta $\overset{\circ\!\longrightarrow}{PQ}$ coincide con el sentido positivo respecto a P"; del mismo modo, decir que "Q está detrás de P" equivale a decir que "la semirrecta $\overset{\circ\!\longrightarrow}{PQ}$ coincide con el sentido negativo respecto a P".

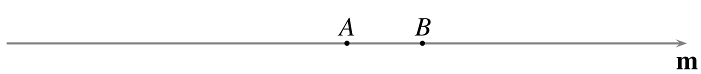


FIGURA 1.5 El eje A**m**

En muchas ocasiones preferiremos denotar por A**m** al eje m, haciendo mención expresa a su origen A; y, al representarlo gráficamente, indicaremos el sentido positivo respecto al punto en que comenzamos su dibujo mediante la única punta de flecha que señalaremos en esa recta, junto a la cual ubicaremos la letra **m** (ver la figura 1.5).

Habrá ocasiones en que digamos, por ejemplo: "consideremos como eje a la recta l orientada positivamente desde A hacia B". Con una expresión como ésta queremos significar que:

(a) A y B son dos puntos distintos de l;

(b) que cualquier sistema de coordenadas que consideremos en l debe ser tal que B está delante de A, es decir, que la coordenada de B es mayor que la de A.

La idea básica de la Geometría analítica plana se puede concretar por medio de un par de ejes perpendiculares, con origen común y nombrados en un cierto orden, cualquiera (ver la figura 1.6)⟨18⟩.

- *Al origen común de ambos ejes lo llamaremos el* ***origen****, y lo denotaremos mediante* O.
- *Al primero de los ejes que se nombre lo llamaremos el* ***eje de las abscisas*** *o* ***eje*** **x**, *que algunas veces denotaremos mediante* O**x***; cuando sea necesario, denotaremos por* U *a su unidad.*
- *Al segundo de los ejes que se nombre lo llamaremos el* ***eje de las ordenadas*** *o* ***eje*** **y**, *que algunas veces denotaremos mediante* O**y***; cuando sea necesario, denotaremos por* U' *a su unidad* ⟨19⟩.
- *Al conjunto formado por los ejes* **x** *y* **y** *lo llamaremos un* ***sistema de ejes rectangulares (ortogonales) en el plano****, y lo denotaremos mediante* **x**O**y** *o, simplemente,* **xy**.

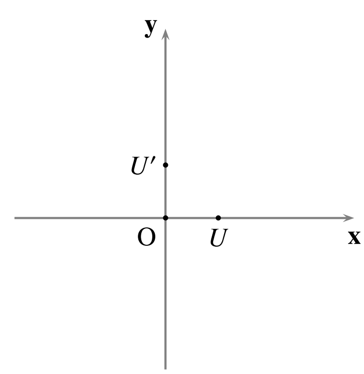


FIGURA 1.6 Par de ejes perpendiculares con origen común

OBSERVACIÓN 1.2

(a) *Un método para construir un sistema de ejes rectangulares en el plano está expuesto en el Apéndice D; note que el método desarrollado en este apéndice permitiría construir, si se necesita, primero el eje de las ordenadas y luego el eje de las abscisas.*

(b) *Por lo general, en las representaciones gráficas de un sistema de ejes rectangulares del plano que realicemos de ahora en adelante, no destacaremos los puntos* U *y* U'*, puesto que hemos supuesto que está fijada de antemano la escala, y las puntas de flecha son suficientes para indicar los sentidos positivos respecto al origen en cada uno de ellos.*

La fijación de un sistema de ejes rectangulares **xy** cualquiera en el plano siempre da lugar, de manera natural y esencialmente dependiente de ella, a una correspondencia biunívoca entre $\mathfrak{P}$ y $\mathbb{R}^2$; con el propósito de simplificar las expresiones, llamaremos ***proyección*** de un punto sobre una recta, al punto de corte de dicha recta con su perpendicular por dicho punto (ver el Principio E.7 en el Apéndice E).

La mencionada correspondencia es la que se puede definir como sigue. A cada punto P del plano le hacemos corresponder el par ordenado de números reales (a, b) definido de la siguiente manera (ver la figura 1.7):

- a es la coordenada en el eje $\mathbf{x}$ de la proyección de P sobre dicho eje;
- b es la coordenada en el eje $\mathbf{y}$ de la proyección de P sobre dicho eje.

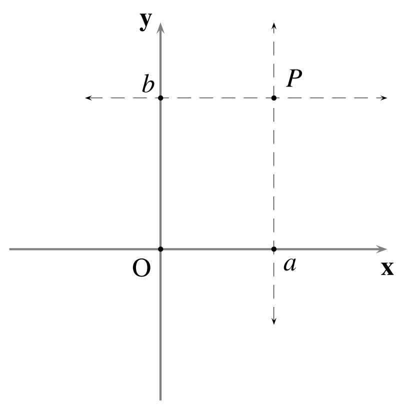


Figura 1.7 Coordenadas cartesianas

Esta correspondencia es biunívoca porque la correspondencia siguiente es su inversa: a cada par ordenado de números reales (a, b) le hacemos corresponder el punto P del plano que resulta del corte entre las siguientes dos rectas:

- la perpendicular al eje $\mathbf{x}$ por aquel de sus puntos que tiene coordenada a;
- la perpendicular al eje $\mathbf{y}$ por aquel de sus puntos que tiene coordenada b.

Los números reales a y b son llamados ***las coordenadas cartesianas*** del punto P, ***respecto al sistema de ejes rectangulares*** **xy**⟨20⟩: a es la ***abscisa*** del punto P, y b es su ***ordenada***; por esta manera de llamar las coordenadas, el sistema de ejes rectangulares **xy** recibe usualmente el nombre de ***sistema de coordenadas cartesianas rectangulares*** (***ortogonales***) ***en el plano***.

De esa correspondencia que hemos descrito, esencialmente vinculada al sistema de ejes rectangulares que se fije en el plano, diremos que *identifica* al plano ($\mathfrak{P}$) con el conjunto $\mathbb{R}^2$, y a cada punto del plano con un único par ordenado de números reales (sus coordenadas cartesianas); en virtud de esa *identificación*, abusaremos del signo de igualdad y escribiremos

$$P = (a, b)$$

para indicar que las componentes del par ordenado (a, b) son las coordenadas cartesianas del punto P (es decir, que el punto P y el par ordenado (a, b) son correspondientes bajo esa identificación); y, si H es el gráfico de una ecuación, o inecuación,

$$\mathcal{G} = H$$

(que leeremos $\mathcal{G}$ y H **coinciden**) para indicar que los puntos correspondientes a los pares (a, b) de H están en $\mathcal{G}$ y, a la vez, que las coordenadas cartesianas de los puntos de la figura geométrica $\mathcal{G}$ están en H (es decir, que la figura geométrica $\mathcal{G}$ y el conjunto H son correspondientes bajo esa identificación).

Otra manera en que indicaremos esto último que hemos dicho, al considerar una ecuación, o inecuación, $f(x, y) \lesseqqgtr 0$ que define a H, será

$$\mathcal{G} : \ f(x, y) \lesseqqgtr 0$$

y que interpretaremos diciendo que $f(x, y) \lesseqqgtr 0$ es una ecuación, o inecuación, que *representa* a la figura geométrica $\mathcal{G}$, o que $\mathcal{G}$ se puede *representar* por la ecuación, o inecuación, $f(x, y) \lesseqqgtr 0$.

Supongamos que se ha fijado un sistema de ejes rectangulares **xy** en el plano.

En la siguiente proposición ofreceremos los primeros dos ejemplos de representación geométrica del gráfico de una ecuación.

LEMA 1.1

(a) *El gráfico de la ecuación $x - h = 0$ (h cualquier número real) coincide con la recta perpendicular al eje* **x** *por aquel de sus puntos que tiene coordenada h.*

(b) *El gráfico de la ecuación $y - k = 0$ (k cualquier número real) coincide con la recta perpendicular al eje* **y** *por aquel de sus puntos que tiene coordenada k.*

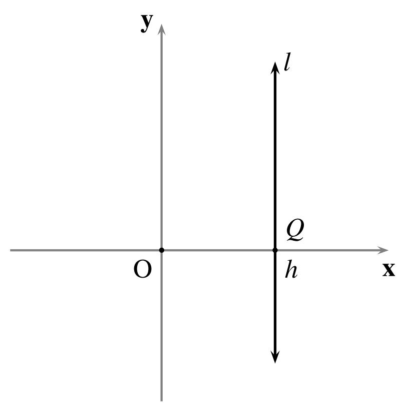


FIGURA 1.8 Recta perpendicular al eje **x**

■ PRUEBA

(a) Fijemos un número real cualquiera h, y consideremos el conjunto

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x - h = 0\},$$

es decir, el gráfico de la ecuación $x - h = 0$. Por simple manipulación algebraica tenemos que

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = h\},$$

es decir, G coincide con el conjunto de los pares ordenados de números reales que tienen primera componente h.

Así, todos los puntos correspondientes a los elementos de G tienen abscisa h.

Consideremos el punto Q del eje **x** que tiene coordenada h en el eje **x** (ver la figura 1.8).

Por la definición de abscisa, la proyección sobre el eje **x** de cualquiera de los puntos correspondientes a los elementos de G es Q.

Así, por el Principio E.7, todos los puntos correspondientes a los elementos de G están en la recta l perpendicular al eje **x** por el punto Q.

Por otro lado, si P es cualquier punto de l, es claro que la abscisa de P es h y, en consecuencia, el par formado por las coordenadas cartesianas de P está en G.

Por tanto, G coincide con l.

(b) Esta afirmación se verifica de manera similar a la de la parte anterior, considerando el punto R del eje **y** que tiene coordenada k en el eje **y**, y la recta m perpendicular al eje **y** por el punto R (ver la figura 1.9).

QEP ■

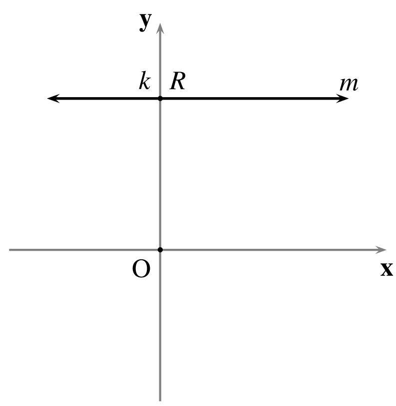


FIGURA 1.9 Recta perpendicular al eje **y**

En el siguiente Teorema ofreceremos los primeros dos ejemplos de representación analítica de una figura geométrica.

TEOREMA 1 (REPRESENTACIÓN ANALÍTICA DE UNA RECTA PERPENDICULAR A UNO DE LOS EJES)

(a) *l es una recta perpendicular al eje **x** si, y sólo si, l se puede representar por una ecuación de la forma*

$$x - h = 0 \tag{1.1}$$

*(h es la abscisa del punto de concurrencia entre l y el eje **x**).*

(b) *m es una recta perpendicular al eje **y** si, y sólo si, m se puede representar por una ecuación de la forma*

$$y - k = 0 \tag{1.2}$$

*(k la ordenada del punto de concurrencia entre m y el eje **y**).*

■ **PRUEBA**

(a) Supongamos que l es una recta perpendicular al eje **x**, y llamemos: Q al punto de concurrencia entre

l y el eje $\mathbf{x}$; h a la coordenada de Q en el eje $\mathbf{x}$ (ver la figura 1.8); y G al gráfico de la ecuación $x - h = 0$, es decir,

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x - h = 0\}.$$

Como, por un punto dado, sólo pasa una recta perpendicular a una recta dada, tendremos que Q es la proyección de cualquier punto de l sobre el eje $\mathbf{x}$.
Así, por la definición de abscisa, todos los puntos de l tienen abscisa h.
Luego, las coordenadas cartesianas de todos los puntos de l satisfacen la ecuación $x - h = 0$ y, en consecuencia, los pares formados por las coordenadas cartesianas de los puntos de l están en G.
Ahora bien, como dos rectas coinciden, si una de ellas está contenida en la otra (pues tendrían dos puntos distintos en común), tenemos que el resto de la prueba de esta afirmación es consecuencia directa del lema 1.1.(a).
(b) Esta afirmación se verifica de manera similar a la de la parte anterior.

QEP ■

La siguiente observación recoge otras maneras de enunciar el Teorema 1.

Observación 1.3

(a) *Otras maneras de decir lo afirmado en el Teorema 1.(a) son:*

- *l es una recta perpendicular al eje $\mathbf{x}$ si, y sólo si, l coincide con el gráfico de una ecuación de la forma $x - h = 0$, es decir,*

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x - h = 0\}$$

(h es la abscisa del punto de concurrencia entre l y el eje $\mathbf{x}$).

- *l es una recta perpendicular al eje $\mathbf{x}$ si, y sólo si, l coincide con el conjunto de los puntos que tienen una misma abscisa e igual a la del punto de concurrencia entre l y el eje $\mathbf{x}$, es decir,*

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x = h\}$$

(h es la abscisa del punto de concurrencia entre l y el eje $\mathbf{x}$).

(b) *Otras maneras de decir lo afirmado en el Teorema 1.(b) son:*

- *m es una recta perpendicular al eje $\mathbf{y}$ si, y sólo si, m coincide con el gráfico de una ecuación de la forma $y - k = 0$, es decir,*

$$m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y - k = 0\}$$

(k es la ordenada del punto de concurrencia entre m y el eje $\mathbf{y}$).

- *m es una recta perpendicular al eje $\mathbf{y}$ si, y sólo si, m coincide con el conjunto de los puntos que tienen una misma ordenada e igual a la del punto de concurrencia entre m y el eje $\mathbf{y}$, es decir,*

$$m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = k\}$$

(k es la ordenada del punto de concurrencia entre m y el eje $\mathbf{y}$).

En la siguiente observación presentamos dos casos particulares y emblemáticos de rectas perpendiculares a los ejes, y algunas consecuencias importantes de lo que hemos dicho hasta ahora.

OBSERVACIÓN 1.4

(a) *Como el eje* **y** *es una recta perpendicular al eje* **x***, y el punto de concurrencia con éste tiene abscisa 0, tendremos que* ***el eje* y *se puede representar por la ecuación*** $x = 0$.

(b) *Como el eje* **x** *es una recta perpendicular al eje* **y***, y el punto de concurrencia con éste tiene ordenada 0, tendremos que* ***el eje* x *se puede representar por la ecuación*** $y = 0$.

(c) *Es claro que el origen* O *es el punto que tiene ambas coordenadas nulas, es decir,* $\mathrm{O} = (0, 0)$.

(d) *Como toda recta queda determinada por dos de sus puntos distintos, en verdad tenemos que:*
una recta es perpendicular al eje* x *si, y sólo si, tiene dos puntos distintos con la misma abscisa.
En consecuencia,
una recta no es perpendicular al eje* x *si, y sólo si, cualesquiera dos de sus puntos distintos tienen abscisas distintas.

(e) *Por las mismas razones de la parte anterior:*
una recta es perpendicular al eje* y *si, y sólo si, tiene dos puntos distintos con la misma ordenada.
En consecuencia,
una recta no es perpendicular al eje* y *si, y sólo si, cualesquiera dos de sus puntos distintos tienen ordenadas distintas.

(f) *Dada una recta distinta a los ejes de coordenadas se tiene que, esa recta es paralela a uno de los ejes si, y sólo si, es perpendicular al otro eje o a cualquier paralela al otro eje (ver el Principio E.11 en el Apéndice E).*
En consecuencia,
una recta no es perpendicular a ninguno de los ejes del sistema de ejes rectangulares* xy *si, y sólo si, corta a ambos ejes.

➤ EJEMPLO 1.3

(a) *La representación geométrica del gráfico de la ecuación* $x = 2$ *es, de acuerdo con el Teorema 1.(a), una recta perpendicular al eje* **x** *(ver la figura 1.10).*

(b) *La representación geométrica del gráfico de la ecuación* $y = -\sqrt{3}$ *es, de acuerdo con el Teorema 1.(b), una recta perpendicular al eje* **y** *(ver la figura 1.10).*

QEE ◄

Fijado un sistema de ejes rectangulares **xy**, el conjunto de los puntos del plano que no están sobre los ejes se puede representar como la unión de cuatro regiones disjuntas, comúnmente llamadas ***cuadrantes***.

Para definir geométricamente cada cuadrante, basta considerar los semiplanos determinados por los ejes (ver el Principio E.14 en el Apéndice E) que, por comodidad, denotaremos por:[21]

- $L_{U'}$ al semiplano determinado por el eje **x** que contiene a U' (ver la figura 1.11);
- $L'_{U'}$ al semiplano opuesto de $L_{U'}$ (ver la figura 1.11);
- L_U al semiplano determinado por el eje **y** que contiene a U (ver la figura 1.12); y
- L'_U al semiplano opuesto de L_U (ver la figura 1.12).

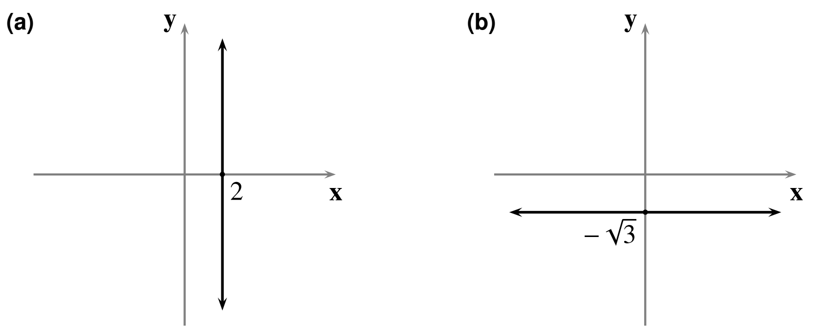


FIGURA 1.10 Representaciones gráficas correspondientes al ejemplo 1.3

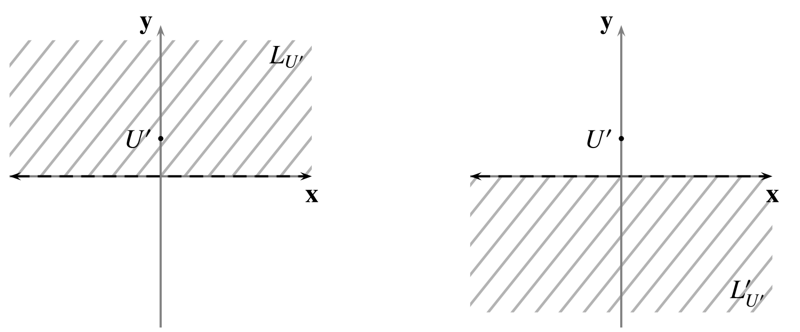


FIGURA 1.11 Semiplanos $L_{U'}$ y $L'_{U'}$ determinados por el eje $\mathbf{x}$

Dichos cuadrantes, representados en la figura 1.13, son:

- el ***primer cuadrante***, que identificaremos con el número romano **I**, formado por los puntos que están en la intersección de L_U y $L_{U'}$.
- el ***segundo cuadrante***, que identificaremos con el número romano **II**, formado por los puntos que están en la intersección de L'_U y $L_{U'}$.
- el ***tercer cuadrante***, que identificaremos con el número romano **III**, formado por los puntos que están en la intersección de L'_U y $L'_{U'}$.
- el ***cuarto cuadrante***, que identificaremos con el número romano **IV**, formado por los puntos que están en la intersección de L_U y $L'_{U'}$.

Ahora, para representar analíticamente cada cuadrante (lema 1.3), representaremos primero analíticamente cada uno de los semiplanos anteriores (lema 1.2).

OBSERVACIÓN 1.5

(a) *La semirrecta* $\overset{\circ\!\!\longrightarrow}{OU'}$ *(el sentido positivo respecto a* O *en el eje* **y***, es decir, el conjunto de los puntos que tienen coordenada positiva en el eje* **y***) coincide con el conjunto de los puntos del eje* **y** *que está contenido en* $L_{U'}$ *(ver el Principio E.16 en el Apéndice E).*

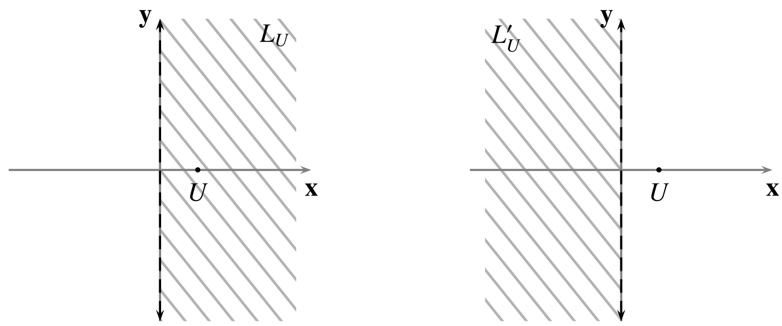


FIGURA 1.12 Semiplanos L_U y L'_U determinados por el eje $\mathbf{y}$

(b) *La semirrecta $\overset{\circ\!\!\longrightarrow}{OU}$ (el sentido positivo respecto a O en el eje* $\mathbf{x}$*, es decir, el conjunto de los puntos que tienen coordenada positiva en el eje* $\mathbf{x}$*) coincide con el conjunto de los puntos del eje* $\mathbf{x}$ *que está contenido en* L_U*.*

LEMA 1.2

(a) *El semiplano $L_{U'}$ se puede representar por la inecuación $y > 0$, es decir,*

$$L_{U'} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y > 0\}$$

(el conjunto de los puntos que tienen ordenada positiva).

(b) *El semiplano L_U se puede representar por la inecuación $x > 0$, es decir,*

$$L_U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x > 0\}$$

(el conjunto de los puntos que tienen abscisa positiva).

(c) *El semiplano $L'_{U'}$ se puede representar por la inecuación $y < 0$, es decir,*

$$L'_{U'} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y < 0\}$$

(el conjunto de los puntos que tienen ordenada negativa).

(d) *El semiplano L'_U se puede representar por la inecuación $x < 0$, es decir,*

$$L'_U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x < 0\}$$

(el conjunto de los puntos que tienen abscisa negativa).

■ **PRUEBA**

(a) Consideramos un punto P cualquiera del plano, la recta t perpendicular al eje $\mathbf{y}$ por el punto P (ver la figura 1.14), el punto Q de corte entre el eje $\mathbf{y}$ y la recta t, y la coordenada k del punto Q en el eje $\mathbf{y}$ (que, a la sazón, es la ordenada del punto P). En estas circunstancias, P está en $L_{U'}$ si, y sólo si, Q está en $L_{U'}$ (ver el Principio E.17 en el Apéndice E); y esto sucede, por la observación 1.5.(a), si, y sólo si, $k > 0$.

(b) Esta afirmación se verifica de manera similar a la de la de la parte anterior, utilizando la observación 1.5.(b).

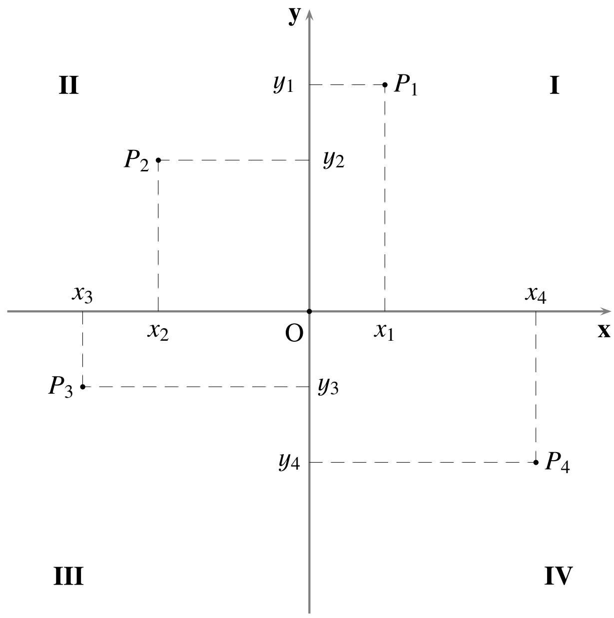


FIGURA 1.13 Los cuatro cuadrantes

(c) Esta afirmación se verifica de manera similar a la de la de la parte (a).
(d) Esta afirmación se verifica de manera similar a la de la de la parte (a).

QEP ■

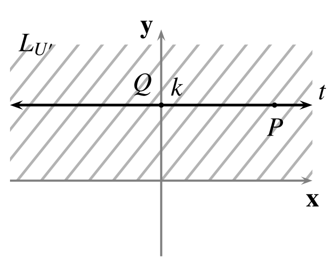


FIGURA 1.14 Ordenadas positivas

Note que hemos ofrecido cuatro ejemplos de representación analítica de una figura geométrica a través de una inecuación, y de representación geométrica del gráfico de una inecuación.

LEMA 1.3

(a) *El cuadrante* **I** *se puede representar por el sistema de inecuaciones*⟨22⟩ $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ *, es decir,*

$$\mathbf{I} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x > 0 \;\wedge\; y > 0\}$$

(el conjunto de los puntos cuyas coordenadas son ambas positivas).

(b) *El cuadrante* **II** *se puede representar por el sistema de inecuaciones* $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$ *, es decir,*

$$\mathbf{II} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x < 0 \ \wedge \ y > 0\}$$

(el conjunto de los puntos de abscisa negativa y ordenada positiva).

(c) *El cuadrante* **III** *se puede representar por el sistema de inecuaciones* $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$ *, es decir,*

$$\mathbf{III} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x < 0 \ \wedge \ y < 0\}$$

(el conjunto de los puntos cuyas coordenadas son ambas negativas).

(d) *El cuadrante* **IV** *se puede representar por el sistema de inecuaciones* $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$ *, es decir,*

$$\mathbf{IV} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0 \ \wedge \ y < 0\}$$

(el conjunto de los puntos de abscisa positiva y ordenada negativa).

■ **PRUEBA**

(a) Esta afirmación es consecuencia de la definición de este cuadrante y de las partes (a) y (b) del lema 1.2 (observe el punto $P_1 = (x_1, y_1)$ en la figura 1.13).

(b) Esta afirmación es consecuencia de la definición de este cuadrante y de las partes (a) y (d) del lema 1.2 (observe el punto $P_2 = (x_2, y_2)$ en la figura 1.13).

(c) Esta afirmación es consecuencia de la definición de este cuadrante y de las partes (c) y (d) del lema 1.2 (observe el punto $P_3 = (x_3, y_3)$ en la figura 1.13).

(d) Esta afirmación es consecuencia de la definición de este cuadrante y de las partes (b) y (c) del lema 1.2 (observe el punto $P_4 = (x_4, y_4)$ en la figura 1.13).

QEP ■

Note que hemos ofrecido cuatro ejemplos de representación analítica de una figura geométrica a través de un sistema de dos inecuaciones, o de la conjunción de dos inecuaciones, y de representación geométrica de la intersección de los gráficos de dos inecuaciones.

➤ **EJEMPLO 1.4**

(a) *La representación geométrica del gráfico de la inecuación* $x \leqslant 2$ *es, al proceder de manera análoga a como lo hicimos en el lema 1.2.(d), uno de los semiplanos determinados por la recta* $x = 2$ *perpendicular al eje* **x** *(ver la figura 1.15).*

(b) *La representación geométrica del gráfico de la inecuación* $y > -\sqrt{3}$ *es, al proceder de manera análoga a como lo hicimos en el lema 1.2.(a), uno de los semiplanos determinados por la recta* $y = -\sqrt{3}$ *perpendicular al eje* **y** *(ver la figura 1.15).*

(c) *La representación geométrica del gráfico del sistema de inecuaciones* $\begin{cases} x \leqslant 2 \\ y > -\sqrt{3} \end{cases}$ *es, al proceder de manera análoga a como lo hicimos en el lema 1.3, la intersección de los dos semiplanos anteriores (ver la figura 1.15).*

QEE ◄

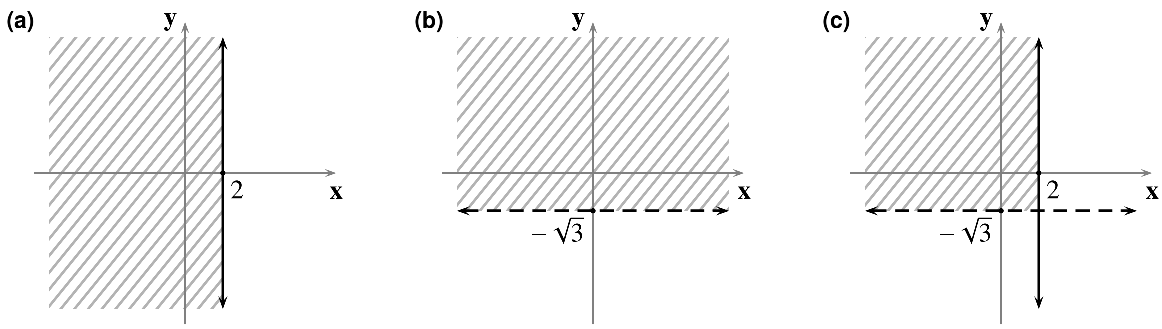


FIGURA 1.15 Representaciones gráficas correspondientes al ejemplo 1.4

En general, la representación geométrica del gráfico de una inecuación de la forma $x \lesseqgtr h$ (o $y \lesseqgtr k$) será uno de los semiplanos determinados por la recta $x = h$ (o $y = k$); incluirá la recta que representa el borde, sólo en el caso en que tuviéramos "$\geqslant$" o "$\leqslant$".
Haremos la siguiente convención respecto a la representación gráfica de uno de esos conjuntos: en el caso en que incluya la recta que representa el borde, dibujaremos la recta con trazo continuo; en el caso en que no la incluya, la representaremos con trazo guionado[23].

OBSERVACIÓN 1.6

(a) *Para obtener una identificación del plano con los pares ordenados de números reales, no necesariamente los ejes tienen que ser perpendiculares, sino que basta con que sean concurrentes (haciendo una modificación de la noción de distancia), lo cual puede convenir en algunas ocasiones; un tal sistema suele ser llamado* ***sistema de coordenadas cartesianas oblicuas del plano****.*

(b) *Para obtener una identificación del plano con los pares ordenados de números reales, no necesariamente los ejes tienen que tener la misma escala (con las consideraciones propias del caso), lo cual puede convenir en algunas ocasiones.*

(c) *Podemos representar los puntos del plano por pares ordenados de números reales, por otro medio distinto del de un par de ejes concurrentes, y que veremos más adelante (Capítulo 9): tomando como referencia solamente un rayo, y que suele ser llamado* ***sistema de coordenadas polares****.*

En todo lo que sigue admitiremos, a menos que se diga explícitamente lo contrario, que:

(a) *se ha fijado un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares* **xy** *en el plano.*

(b) *por medio de dicho sistema hemos identificado: el plano ($\mathfrak{P}$) con el conjunto $\mathbb{R}^2$; cada punto del plano con un par ordenado de números reales (razón por la cual nos daremos la libertad de llamar punto a un par ordenado de números reales, y viceversa*[24]*); cada figura geométrica con una ecuación, o inecuación (razón por la cual nos daremos la libertad de llamar figura geométrica a una ecuación, o inecuación, y viceversa*[25]*).*

(c) *se ha fijado una unidad de longitud (la unidad en el eje* **x***) para la medición de distancias.*

§ 1.2 Distancia entre dos puntos

Hasta ahora sabemos calcular la distancia entre dos puntos usando las coordenadas que les corresponden, en un sistema de coordenadas de una recta que los contenga: si los puntos A y B están en la recta l, el punto A tiene coordenada x_1 en l, y el punto B tiene coordenada x_2 en l, entonces $AB = |x_1 - x_2|$[⟨26⟩].

La pregunta que surge naturalmente es *¿cómo calcular la distancia entre cualesquiera dos puntos del plano, en términos de sus coordenadas cartesianas*?

Para responder a esta pregunta debemos recordar previamente que la distancia entre dos puntos del plano es un número real no negativo, y algunos hechos aritméticos. En primer lugar que, si a es un número real no negativo, $|a| = a$; en segundo lugar, que cualquier número real no negativo a tiene dos raíces cuadradas reales opuestas: denotaremos por $\sqrt{a}$ (sin ninguna marca particular) su raíz positiva, y por $-\sqrt{a}$ (precedida por un guión) su raíz negativa; en tercer lugar que, dado cualquier número real a, $\sqrt{a^2} = |a|$ (de manera que, no siempre $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2$); en cuarto lugar que, dado cualquier número real a, $|a|^2 = a^2$; y, finalmente que, dados dos números reales a y b no negativos se tiene que $a = b$ si, y sólo si, $a^2 = b^2$.

Supongamos dados dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ cualesquiera del plano (ver la figura 1.16). Consideremos los puntos $C = (x_1, y_2)$, $P = (x_1, 0)$ (la proyección de A sobre el eje $\mathbf{x}$), $Q = (x_2, 0)$ (la proyección de B sobre el eje $\mathbf{x}$), $R = (0, y_1)$ (la proyección de A sobre el eje $\mathbf{y}$) y $S = (0, y_2)$ (la proyección de B sobre el eje $\mathbf{y}$).

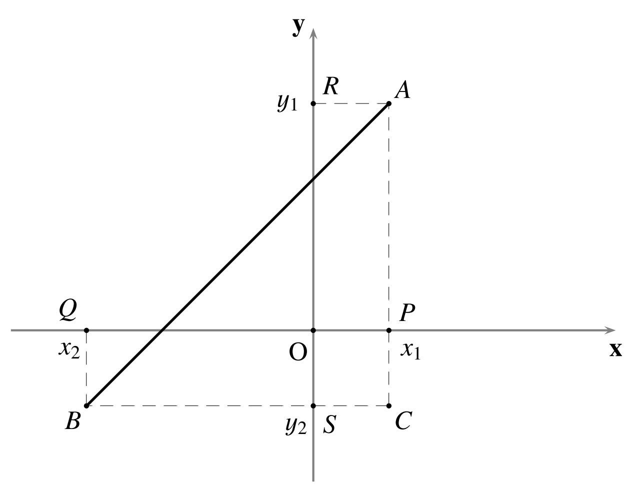


Figura 1.16 Distancia entre dos puntos

Como los puntos A, P y C tienen la misma abscisa, tendremos que esos puntos se encuentran sobre:

- el eje $\mathbf{y}$, en caso de que $x_1 = 0$ (por la observación 1.4.(a)); o
- una recta paralela al eje $\mathbf{y}$, en caso de que $x_1 \neq 0$ (por el Teorema 1.(a) y la observación 1.4.(f)).

Análogamente, los puntos B y Q se encuentran sobre:

- el eje $\mathbf{y}$, en caso de que $x_2 = 0$; o
- una recta paralela al eje $\mathbf{y}$, en caso de que $x_2 \neq 0$.

Por estas razones $\square BCPQ$ es un paralelogramo y, en consecuencia, $BC = PQ = |x_1 - x_2|$.

Del mismo modo, como los puntos B, S y C tienen la misma ordenada, tendremos que esos puntos se encuentran sobre:

- el eje **x**, en caso de que $y_2 = 0$ (por la observación 1.4.(b)); o
- una recta paralela al eje **x**, en caso de que $y_2 \neq 0$ (por el Teorema 1.(b) y la observación 1.4.(f)).

Análogamente, los puntos A y R se encuentran sobre:

- el eje **x**, en caso de que $y_1 = 0$; o
- una recta paralela al eje **x**, en caso de que $y_1 \neq 0$.

Por estas razones $\square ARSC$ es un paralelogramo y, en consecuencia, $AC = RS = |y_1 - y_2|$.

Si $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$, tendremos que los puntos A, B y C son vértices de un triángulo; además, por la observación 1.4.(f), las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ son perpendiculares y, por tanto, el triángulo $\triangle ACB$ es rectángulo con hipotenusa $\overline{AB}$. Así, por el Teorema de Pitágoras (ver el Principio E.20 en el Apéndice E), $AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

Por otro lado, si $x_1 = x_2$, tendremos que $C = B$ y $AB^2 = (y_1 - y_2)^2$; y, del mismo modo, si $y_1 = y_2$, tendremos que $C = A$ y $AB^2 = (x_1 - x_2)^2$.

Así, en cualquiera de los casos, la distancia entre los puntos A y B está dada por

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \tag{1.3}$$

En conclusión:

> Para calcular la distancia entre los puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, en términos de sus coordenadas cartesianas, tenemos la fórmula
>
> $$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

➤ EJEMPLO 1.5

La distancia entre los puntos $P = (-1, -2)$ y $Q = (0, -3)$ será

$$PQ = \sqrt{((-1) - 0)^2 + ((-2) - (-3))^2} = \sqrt{2}.$$

QEE ➤

OBSERVACIÓN 1.7

La función **d** *que asigna, a cada par de puntos A y B, la distancia entre ellos,* $\mathbf{d}(A, B) = AB$, *satisface las siguientes condiciones (que definen lo que suele llamarse una* ***métrica****):*

(a) $\mathbf{d}(A, B) \geqslant 0$.

(b) $\mathbf{d}(A, B) = 0$ *si, y sólo si,* $A = B$.

(c) $\mathbf{d}(A, B) = \mathbf{d}(B, A)$ *(simetría).*

(d) $\mathbf{d}(A, B) + \mathbf{d}(B, C) \geqslant \mathbf{d}(A, C)$ *(Desigualdad triangular).*

Note que la parte (c) destaca el hecho de que podemos intercambiar los lugares de x_1 *y* x_2*, así como de* y_1 *y* y_2*, en la ecuación* (1.3).

Dejamos al lector la verificación de estas afirmaciones (ver los ejercicios 1.37 y 1.38).

§ 1.3 Punto medio de un segmento

Hasta ahora sabemos calcular la coordenada del punto medio de un segmento usando las coordenadas que les corresponden a sus extremos, en un sistema de coordenadas de una recta que los contenga: si los puntos A y B están sobre la recta l, el punto A tiene coordenada x_1 en l, y el punto B tiene coordenada x_2 en l, entonces el punto medio M del segmento $\overline{AB}$ tiene coordenada $\frac{x_1+x_2}{2}$.

La pregunta que surge naturalmente es *¿cómo calcular las coordenadas cartesianas del punto medio de un segmento, en términos de las coordenadas cartesianas de sus extremos*?

Hay que recordar siempre que los puntos extremos de un segmento son distintos entre sí.

Supongamos dado un segmento cualquiera del plano, cuyos extremos son los puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$; como $A \neq B$, tendremos que $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ y, así, $x_1 \neq x_2$ o $y_1 \neq y_2$.

Para el caso en que $x_1 \neq x_2$ (ver la figura 1.17), consideramos los puntos $P = (x_1, 0)$ (la proyección de A sobre el eje $\mathbf{x}$), $Q = (x_2, 0)$ (la proyección de B sobre el eje $\mathbf{x}$), $D = (\frac{x_1+x_2}{2}, 0)$ (el punto medio del segmento $\overline{PQ}$), y la recta l perpendicular al eje $\mathbf{x}$ por el punto D.

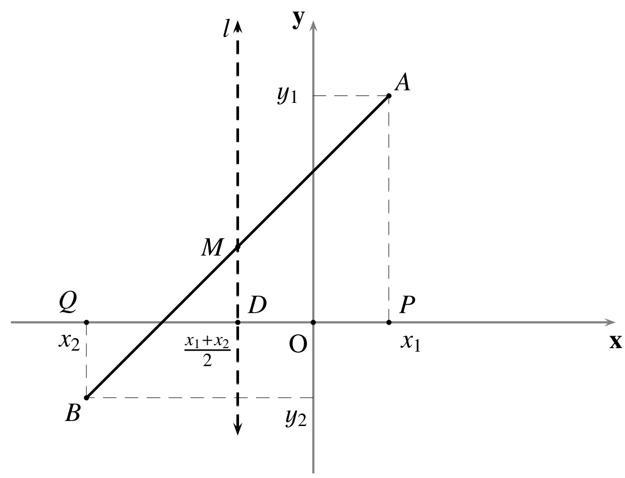


FIGURA 1.17 Punto medio de las proyecciones en el eje $\mathbf{x}$

Por el Teorema 1 y la observación 1.4.(f), los puntos A y P, así como los puntos B y Q, están en sendas rectas paralelas a l. Por el Teorema de Thales (ver el Principio E.19 en el Apéndice E), l contiene al punto medio M del segmento $\overline{AB}$; así, la abscisa de M es $\frac{x_1+x_2}{2}$.

De manera análoga (ver la figura 1.18), considerando los puntos $R = (0, y_1)$ (la proyección de A sobre el eje **y**), $S = (0, y_2)$ (la proyección de B sobre el eje **y**), $E = (0, \frac{y_1+y_2}{2})$ (el punto medio del segmento $\overline{RS}$), y la recta m perpendicular al eje **y** por el punto E, se verifica, para el caso en que $y_1 \neq y_2$, que la ordenada de M es $\frac{y_1+y_2}{2}$.

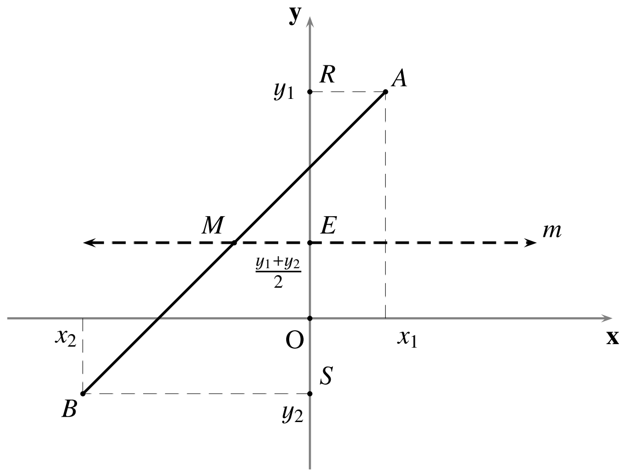


FIGURA 1.18 Punto medio de las proyecciones en el eje **y**

Así, en cualquiera de los casos⟨27⟩, el punto medio del segmento $\overline{AB}$ es el punto

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right). \tag{1.4}$$

En conclusión:

> El punto medio M del segmento con extremos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, en términos de sus coordenadas cartesianas, es
>
> $$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

➤ EJEMPLO 1.6

El punto medio del segmento con extremos $P = (-1, -2)$ *y* $Q = (0, -3)$ *será el punto*

$$M = \left(\frac{(-1)+0}{2}, \frac{(-2)+(-3)}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right).$$

QEE ➤

OBSERVACIÓN 1.8

Por el mismo procedimiento empleado para calcular las coordenadas cartesianas del punto medio de un segmento del plano, es posible calcular las coordenadas cartesianas de un punto que divide a un segmento en una razón no negativa cualquiera (ver el ejercicio 1.22).

§ 1.4 Colinealidad

Una pregunta que surge naturalmente es *¿cómo saber, en términos de sus coordenadas cartesianas, si tres puntos distintos son o no colineales*?

El objetivo central de esta parte del capítulo es ofrecer tres criterios que permitirán responder esta pregunta; para no recargar demasiado la exposición, presentaremos sus pruebas en el Apéndice A, al que referimos al lector interesado.

TEOREMA 2 (PRIMER CRITERIO DE COLINEALIDAD)
Tres puntos distintos son colineales si, y sólo si, se cumple una de las siguientes condiciones:

(a) *los tres puntos tienen la misma abscisa.*

(b) *los tres puntos tienen abscisas distintas entre sí y, al ordenar sus abscisas de menor a mayor, la suma de las distancias entre los dos pares de puntos con abscisas consecutivas es igual a la distancia entre los dos puntos de abscisas extremas; en otras palabras, si el ordenamiento de las abscisas de los tres puntos es $x_1 < x_2 < x_3$, y A es el punto de abscisa x_1, B el de abscisa x_2 y C el de abscisa x_3, se tiene que $AB + BC = AC$.*

➤ **EJEMPLO 1.7**

(a) *¿Serán colineales los puntos* $(4, -7)$, $(4, \sqrt{3})$ *y* $(4, \pi)$*?*
De acuerdo con el Teorema 2 son colineales, puesto que tienen la misma abscisa.

(b) *¿Serán colineales los puntos* $(1, -1)$, $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 3)$ *y* $(-2, -7)$*?*
Al tener abscisas distintas entre sí, ordenamos sus abscisas de menor a mayor:

$$-2 < 1 < \sqrt{2}.$$

Denotamos los puntos dados con A, B y C de acuerdo con el orden de sus abscisas:

$$A = (-2, -7), \quad B = (1, -1) \quad y \quad C = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 3).$$

Calculamos los números AB + BC y AC:

$$\begin{aligned} AB + BC &= \sqrt{(-2-1)^2 + (-7-(-1))^2} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2 + (-1-(2\sqrt{2}-3))^2} \\ &= \sqrt{5}(\sqrt{2}+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(-2-\sqrt{2})^2 + (-7-(2\sqrt{2}-3))^2} \\ &= \sqrt{5}(\sqrt{2}+2). \end{aligned}$$

Como $AB + BC = AC$ tenemos, de acuerdo con el Teorema 2, que los puntos dados son colineales.

QEE ◄

TEOREMA 3 (SEGUNDO CRITERIO DE COLINEALIDAD)
Tres puntos distintos son colineales si, y sólo si, se cumple una de las siguientes condiciones:

(a) *los tres puntos tienen la misma abscisa.*

(b) *los tres puntos tienen la misma ordenada.*

(c) *los tres puntos tienen abscisas, así como ordenadas, distintas entre sí, y son proporcionales las diferencias entre las coordenadas de uno de esos puntos y las coordenadas homónimas de los otros dos; en otras palabras, si las coordenadas de los tres puntos son* (x_1, y_1), (x_2, y_2) *y* (x_3, y_3), *se tiene, para uno de ellos, digamos el de coordenadas* (x_3, y_3), *que*

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2}.$$

OBSERVACIÓN 1.9
Note que la parte (c) del Teorema 3 es equivalente a: los tres puntos tienen abscisas, así como ordenadas, distintas entre sí y, si las coordenadas de los tres puntos son (x_1, y_1), (x_2, y_2) *y* (x_3, y_3), *se tiene, para uno de ellos, digamos el de coordenadas* (x_3, y_3), *que*

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3}.$$

➤ **EJEMPLO 1.8**

(a) *¿Serán colineales los puntos* $(-7, 4)$, $(\sqrt{3}, 4)$ *y* $(\pi, 4)$*?*
De acuerdo con el Teorema 3 son colineales, puesto que tienen la misma ordenada.

(b) *¿Serán colineales los puntos* $(1, -1)$, $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 3)$ *y* $(-2, -7)$*?*
Al tener abscisas, así como ordenadas, distintas entre sí, calculamos los cocientes

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{1 - (-2)}{\sqrt{2} - (-2)} = \frac{3}{\sqrt{2} + 2} \qquad y \qquad \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} = \frac{-1 - (-7)}{2\sqrt{2} - 3 - (-7)} = \frac{6}{2\sqrt{2} + 4}.$$

Como $\frac{3}{\sqrt{2}+2} = \frac{6}{2\sqrt{2}+4}$ *tenemos, de acuerdo con el Teorema 3, que los puntos dados son colineales.*

QEE ➤

TEOREMA 4 (TERCER CRITERIO DE COLINEALIDAD)
Tres puntos distintos son colineales si, y sólo si, es nulo el determinante de la matriz que tiene la primera columna formada por las abscisas de esos puntos, la segunda columna formada por las ordenadas correspondientes, y la tercera por números uno (1); en otras palabras, si las coordenadas de los tres puntos son (x_1, y_1), (x_2, y_2) *y* (x_3, y_3), *se tiene que*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

➤ **EJEMPLO 1.9**

(a) *¿Serán colineales los puntos* $(1,-1)$, $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}-3)$ *y* $(-2,-7)$*?*
Como el determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2}-3 & 1 \\ -2 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

tendremos, de acuerdo con el Teorema 4, que los puntos dados son colineales.

(b) *¿Serán colineales los puntos* $(1,2)$, $(3,5)$ *y* $(7,1)$*?*
Como el determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$$

tendremos, de acuerdo con el Teorema 4, que los puntos dados no son colineales.

QEE ➤

En general, como habrá observado el lector, el resultado destacado en el siguiente cuadro es el criterio más expedito de aplicar en el momento de decidir si tres puntos distintos son colineales.

> Tres puntos distintos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) son colineales si, y sólo si,
>
> $$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Problemas

En cada uno de los problemas en los que sea pertinente, realice una representación gráfica.

1.1 Se ha dicho, en el desarrollo del capítulo, que "existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta y los números reales". Preguntamos entonces:

(a) Si consideramos un punto cualquiera de una recta l, digamos P, ¿qué número real le corresponde?

(b) Si consideramos un número real cualquiera, digamos $\sqrt{2}$, y una recta l ¿qué punto de la recta l le corresponde?

1.2 Se ha dicho, en el desarrollo del capítulo, que "existe una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y los pares ordenados de números reales". Preguntamos entonces:

(a) Si consideramos un punto cualquiera del plano, digamos P, ¿qué par ordenado de números reales le corresponde?

(b) Si consideramos un par ordenado de números reales cualquiera, digamos $(1, 1)$, ¿qué punto del plano le corresponde?

1.3 **(Otra interpretación de las coordenadas cartesianas de un punto del plano)**
Verifique que:

(a) el valor absoluto de la abscisa de un punto es la distancia entre ese punto y el eje **y**.

(b) el valor absoluto de la ordenada de un punto es la distancia entre ese punto y el eje **x**.

1.4 Encuentre la representación gráfica de:

(a) $x > 2$.
(b) $x < -2$.
(c) $y \geqslant 2$.
(d) $y < -2$.
(e) $x = 0 \ \vee \ y = 0$.
(f) $x = 0 \ \wedge \ y = 0$.
(g) $x > 0 \ \wedge \ x \geqslant 2$.
(h) $y > 2 \ \vee \ y < -2$.
(i) $x \leqslant -2 \ \wedge \ y > 2$.
(j) $x < 0 \ \vee \ y < 0$.
(k) $x > -2 \ \wedge \ y \geqslant 0 \ \wedge \ y < 2$.
(l) $x < 0 \wedge x > -2 \wedge y \leqslant 0 \wedge y > -2$.

1.5 **(a)** ¿Podrá usted ofrecer alguna inecuación que represente al plano?

(b) ¿Podrá usted ofrecer alguna ecuación⟨28⟩ que represente al plano?

1.6 Verifique, utilizando el Teorema 4, que tres puntos con la misma abscisa o la misma ordenada son colineales.

1.7 **(a)** Calcule la distancia del origen al punto (a, b), y entre los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$.

(b) Interprete geométricamente el hecho de que los números anteriores coinciden.

1.8 Si uno de los extremos de un segmento de longitud 4 tiene coordenadas $(1, -3)$, y la abscisa del otro extremo es 2, calcule su ordenada.

1.9 Verifique, utilizando alguno de los criterios de colinealidad, que las siguientes ternas de puntos determinan triángulos, clasifíquelos (en escalenos, isósceles o equiláteros; rectángulos, obtusángulos o acutángulos), y calcule la longitud de una mediana de cada uno.

(a) $(2,5), (6,2), (12,2)$.

(b) $(1,3), (7,7), (3,1)$.

(c) $(2,-1), (11,1), (3,-3)$.

(d) $(3,-3), (-3,3), (3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$.

(e) $(2,0), (3,-2), (0,0)$.

(f) $(-3,1), (-5,-5), (-1,-3)$.

(g) $(6,-1), (4,-3), (11,-4)$.

(h) $(1,1), (3,4), (-3,8)$.

(i) $(2,2), (5,1), (2,-3)$.

(j) $(3,-3), (-3,3), (3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$.

(k) $(3,4), (8,6), (7,-6)$.

(l) $(3,4), (8,5), (8,-6)$.

1.10 El ***circuncentro*** de un triángulo es el punto de concurrencia de sus tres mediatrices.

Este punto es el punto que equidista de sus vértices o, lo que es lo mismo, el centro del círculo determinado por sus vértices o del círculo circunscrito al triángulo.

Encuentre el circuncentro de cada uno de los triángulos del ejercicio anterior.

1.11 Verifique, utilizando alguno de los criterios de colinealidad, que las siguientes cuaternas de puntos determinan cuadriláteros y clasifíquelos (paralelogramos, rombos, rectángulos, cuadrados).

(a) $(2,1), (4,3), (9,4), (7,3)$.

(b) $(-3,1), (0,4), (3,1), (0,-2)$.

(c) $(2,4), (4,8), (8,6), (6,2)$.

(d) $(1,1), (4,5), (8,8), (5,4)$.

(e) $(1,3), (7,3), (7,6), (1,6)$.

(f) $(1,0), (5,4), (4,5), (0,1)$.

1.12 Calcule el perímetro, el área y la longitud de una de las alturas de dos de los polígonos de cada uno de los ejercicios 1.9 y 1.11.

1.13 Si $(2,1)$ y $(-1,3)$ son las coordenadas de dos de los vértices de un triángulo equilátero, calcule las coordenadas del tercero.

1.14 Dados los puntos $A = (a,0)$ y $B = (0,b)$, determine k de modo que el punto $P = (0,k)$ sea, junto a los puntos A y B, el tercer vértice de un triángulo equilátero.

1.15 Verifique que el punto $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ es el punto medio del segmento de extremos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, mostrando que M es un punto del segmento $\overline{AB}$ que equidista de sus extremos⟨29⟩.

1.16 Si las coordenadas del punto medio de un segmento son $(0,-3)$, y uno de los extremos tiene coordenadas $(2,5)$, calcule las coordenadas del otro extremo.

1.17 (Simetría respecto a un punto)
El ***punto simétrico*** de un punto P ***respecto a un punto*** M es el punto P' tal que M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.

(a) Si $M = (h,k)$ y $P = (u,v)$, verifique que el punto simétrico de P respecto a M es el punto

$$P' = (2h - u, 2k - v).$$

(b) Con este nuevo concepto, reconsidere el problema anterior.

(c) Verifique que el punto $P' = (-u, -v)$ es el simétrico del punto $P = (u, v)$ respecto al origen.

1.18 Calcule, en cada caso, el punto simétrico del punto P respecto al punto M.

(a) $P = (2, 1)$, $M = (4, 3)$.

(b) $P = (-3, 1)$, $M = (0, 4)$.

(c) $P = (2, 4)$, $M = (4, 8)$.

(d) $P = (1, 1)$, $M = (4, 5)$.

1.19 Si $(-2, 4)$, $(3, 1)$ y $(1, -1)$ son las coordenadas de los puntos medios de los lados de un triángulo, calcule las coordenadas de sus vértices.

1.20 **(a)** Si $M_1 = (h_1, k_1)$, $M_2 = (h_2, k_2)$ y $M_3 = (h_3, k_3)$ son los puntos medios de los lados de un triángulo, verifique que el vértice, que es extremo común de los lados cuyos puntos medios son M_1 y M_2, es

$$(h_1 + h_2 - h_3, k_1 + k_2 - k_3).$$

(b) Reconsidere, con esta nueva fórmula, el problema anterior.

(c) Resuelva el problema anterior, si los puntos dados son $(1, 1)$, $(3, 4)$, $(-3, 8)$.

1.21 Fijado un sistema de coordenadas en una recta l, dados dos puntos distintos en l, A y B de coordenadas x_1 y x_2, respectivamente, y dado un número real no negativo r, verifique que los puntos

$$C = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad \text{y} \qquad D = \frac{x_2 + rx_1}{1 + r},$$

son los únicos puntos de l que dividen al segmento $\overline{AB}$ en la razón $r^{\langle 30 \rangle}$.

1.22 Dados dos puntos distintos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, y un número real no negativo r, verifique que los puntos

$$C = \left(\frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}\right) \qquad \text{y} \qquad D = \left(\frac{x_2 + rx_1}{1 + r}, \frac{y_2 + ry_1}{1 + r}\right)$$

son los únicos puntos que dividen al segmento $\overline{AB}$ en la razón r.

(Note que: con $r = 0$, tenemos las coordenadas de los extremos de $\overline{AB}$; con $r = 1$, tenemos las del punto medio de $\overline{AB}$; con $r = 2$, tenemos las de los puntos de trisección de $\overline{AB}$. Note también que $\frac{AC}{CB} = r = \frac{1}{\frac{AD}{DB}}$ y, en consecuencia, si $r > 1$, entonces C es el más cercano a B.)

1.23 Verifique que el número real $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es la razón en la que un punto C de un segmento $\overline{AB}$ lo divide en ***media y extrema razón***, es decir, es tal que $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$.

(Este número, por demás especial, fue llamado por Leonardo da Vinci ***el número de oro*** o ***proporción áurea***; y por Luca Paccioli, ***divina proporción***).

1.24 Del segmento de extremos $(-5, 1)$ y $(3, 0)$, encuentre los puntos que lo dividen en:

(a) tres segmentos de igual longitud.

(b) cuatro segmentos de igual longitud.

(c) cinco segmentos de igual longitud.

(d) siete segmentos de igual longitud.

1.25 Si uno de los extremos de un segmento es el punto $(5, 3)$, y el punto $(2, 7)$ divide al segmento en la razón $r = \frac{2}{5}$, calcule las coordenadas del otro extremo.

1.26 Si uno de los extremos de un segmento es el punto $(1, -2)$, y el punto $(-5, 1)$ dista de ese extremo las siete décimas partes de la longitud del segmento, calcule las coordenadas del otro extremo.

1.27 El ***baricentro*** de un triángulo es el punto de concurrencia de sus tres medianas.

Este punto es el punto de trisección de cualquiera de sus medianas, que se encuentra más alejado del vértice del triángulo que es extremo de dicha mediana.

Verifique que el baricentro de un triángulo de vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3), es el punto

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right).$$

1.28 Encuentre el baricentro de los triángulos del ejercicio 1.9.

1.29 Calcule las coordenadas de los vértices de un triángulo equilátero de lado a, las coordenadas de los puntos medios de sus lados, la longitud de sus medianas, y su área, si uno de sus vértices está en el origen, otro está sobre el eje **x** con abscisa positiva, y el tercero está en el primer cuadrante.

1.30 Calcule las coordenadas de los vértices de un cuadrado de lado $2a$, y las coordenadas de los puntos medios de sus lados, si su centro (el punto de corte de sus diagonales) está en el origen, y sus lados son paralelos a los ejes; calcúlelas también si sus diagonales están sobre los ejes.

1.31 Si A, B y C son vértices de un triángulo, y M, N y P son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, verifique que:

(a) el segmento con extremos en los puntos medios de cualesquiera dos de los lados del triángulo $\triangle ABC$ mide la mitad del tercer lado.

(b) el perímetro del triángulo $\triangle MNP$, así como el del triángulo $\triangle MNA$, es la mitad del perímetro del triángulo $\triangle ABC$.

(c) el área del triángulo $\triangle MNP$, así como la del triángulo $\triangle MNA$, es la cuarta parte del área del triángulo $\triangle ABC$.

1.32 Si A, B, C y D son vértices consecutivos de un cuadrilátero, y M, N, P y Q son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$, respectivamente, verifique que:

(a) el cuadrilátero $\square MNPQ$ es un paralelogramo.

(b) el perímetro del cuadrilátero $\square MNPQ$ es igual a la suma de las longitudes de las diagonales del cuadrilátero $\square ABCD$.

(c) si el cuadrilátero $\square ABCD$ es convexo, el área del cuadrilátero $\square MNPQ$ es la mitad de la del cuadrilátero $\square ABCD$.

1.33 Calcule el valor de k para que las siguientes ternas de puntos sean colineales.

(a) $(2,5)$, $(7,3)$, $(k,7)$. **(b)** $(2,1)$, $(3,k)$, $(4,-3)$.

1.34 Considere un triángulo de vértices, nombrados en sentido antihorario, $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ y $C = (x_3, y_3)$. Tomando en cuenta que el área de un trapezoide es el producto de la semisuma de sus bases por su altura, y especificando operaciones entre las áreas de algunos trapezoides que determina dicho triángulo junto con el eje $\mathbf{x}$, verifique que:

(a) el área del triángulo $\triangle ABC$ es:

(I) $\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)]$.

(II) $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.⟨31⟩

(b) si los vértices se nombran en sentido horario, el área del triángulo es el opuesto de los números de la parte anterior⟨32⟩.

1.35 Calcule el área de los triángulos del ejercicio 1.9, utilizando las fórmulas del ejercicio anterior.

1.36 Calcule el área de la región pentagonal cuyos vértices, en orden consecutivo, son $(7,0)$, $(10,5)$, $(7,11)$, $(3,9)$ y $(0,2)$.

1.37 Verifique las partes (a), (b) y (c) de la observación 1.7.

1.38 Verifique la Desigualdad Triangular de la métrica presentada en la parte (d) de la observación 1.7, probando los siguientes dos resultados: dados cuatro números reales cualesquiera x_1, x_2, y_1 y y_2, se tiene que:

(a) $x_1y_1 + x_2y_2 \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$.
(Esta relación es conocida como la ***Desigualdad de Schwartz***)

(b) $\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$.

Comentarios

⟨1⟩ Es decir, como contexto o universo; más claramente, el conjunto que contiene todos los objetos que estudiaremos.

⟨2⟩ Este hecho justifica el calificativo **plana** que hemos adosado al nombre de la Geometría que estamos estudiando.

⟨3⟩ Cada vez que hablemos de "representación gráfica" nos referimos a un dibujo, trazado o bosquejo del objeto del que decimos que vamos a representar.

⟨4⟩ Intuitivamente decimos que el par formado por dos objetos, x y y, es un *par ordenado*, si podemos discriminar cuál de esos dos objetos es la primera componente del par y cuál la segunda; para diferenciarlo del conjunto formado por ese par de objetos (el conjunto $\{x, y\}$ que, como sabemos, es exactamente el mismo que el conjunto $\{y, x\}$, sin importar el orden en el que se mencionan), suele denotarse por (x, y) al objeto llamado ***el par ordenado de primera componente*** x ***y de segunda componente*** y.

Algunos autores prefieren usar la notación $\langle x, y\rangle$, o $(x; y)$, para representar el par ordenado de primera componente x y segunda componente y, bajo el pretexto de evitar confundirlo con el intervalo abierto (x, y), de extremos x y y; sin embargo, nosotros usaremos la notación más usual, con los paréntesis y la coma, pues el contexto es, en general, suficiente para evitar tal confusión.

La noción intuitiva de par ordenado se puede formalizar en términos de conjuntos, definiéndolo de la siguiente manera: *el par ordenado de primera componente* x, *y segunda componente* y, es el conjunto

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Note que, tal como los hemos definido, (x, y) es un elemento de $\wp(\wp(X \cup Y))$, donde x esta en X y y está en Y.

⟨5⟩ A lo largo del texto usaremos, en las definiciones de los conjuntos, el símbolo $\wedge$ para representar la conjunción "y" (ya que la letra "y" se utiliza en Geometría analítica para representar objetos diversos), y, en consecuencia, el símobolo $\vee$ para representar la disyunción inclusiva "o".

⟨6⟩ Intuitivamente decimos que dos pares ordenados son iguales, si coinciden componente a componente, es decir, si sus primeras componentes son iguales entre sí, y sus segundas componentes también lo son. En otras palabras, para cuatro objetos a, b, c y d, se espera que $(a, b) = (c, d)$ si, y sólo si, $a = c$ y $b = d$.

De la definición de par ordenado expuesta en la nota anterior podemos verificar que la igualdad de pares ordenados se puede caracterizar de esta manera, procediendo así:

($\Leftarrow$) Claramente, si $a = c$ y $b = d$, entonces $(a, b) = (c, d)$.

($\Rightarrow$) Supongamos que $(a, b) = (c, d)$, es decir, que

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}.$$

Por la definición de igualdad de conjuntos, $\{a\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$, y así $\{a\} = \{c\}$ o $\{a\} = \{c, d\}$. Por la definición de igualdad de conjuntos $a = c$ o $a = c = d$, y así tendremos, en cualquiera de los casos, que $a = c$. Si acaso $a = b$, entonces $\{a, b\} = \{a\}$ y $\{\{c\}, \{c, d\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$; y así $\{a, d\} = \{a\}$, y por tanto $a = d = c = b$. Si acaso $a \neq b$, entonces $\{a\} \neq \{a, b\}$; $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}$; $\{a, b\} \in \{\{a\}, \{a, d\}\}$; $\{a, b\} = \{a, d\}$ y, por tanto, $b = d$.

Puede notar el lector que, como es usual, hemos simbolizado con el mismo símbolo, "=", tres objetos de naturaleza distinta en principio: la igualdad entre pares ordenados, la igualdad entre conjuntos y la igualdad entre los elementos de los conjuntos X y Y.

⟨7⟩ Técnicamente hablando, una relación de este tipo es cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.

⟨8⟩ Algunos autores llaman a este conjunto el ***grafo*** de la relación f.

En muchas ocasiones la relación f se define con algunas restricciones que, por comodidad, nosotros destacaremos inmediatamente después de presentar la ecuación, o inecuación, o su gráfico. Por ejemplo, si $f(x, y) = \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C}$, donde A, B y C son números reales con $\mathsf{A} \neq 0$ o $\mathsf{B} \neq 0$, y queremos considerar el gráfico de la inecuación $f(x, y) > 0$, escribiremos la inecuación en el siguiente formato

$$\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} > 0$$
$$(\mathsf{A}, \mathsf{B} \text{ y } \mathsf{C} \text{ números reales con } \mathsf{A} \neq 0 \text{ o } \mathsf{B} \neq 0),$$

y su gráfico, en el siguiente

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} > 0\}$$
$$(\mathsf{A}, \mathsf{B} \text{ y } \mathsf{C} \text{ números reales con } \mathsf{A} \neq 0 \text{ o } \mathsf{B} \neq 0).$$

⟨9⟩ Como podrá notar el lector acucioso, empleamos el término ***curva*** en un sentido laxo.

⟨10⟩ En algunas ocasiones no bastará con el gráfico de una ecuación, o inecuación, sino que se requiere el resultado de alguna operación conjuntista entre ellos, fundamentalmente la unión, la intersección y la diferencia.

⟨11⟩ Una tal identificación puede pensarse como una especie de diccionario doble por medio del cual, la gramática (léxico y sintaxis) del lenguaje de la Geometría métrica euclidiana puede interpretarse en el lenguaje del Análisis, y recíprocamente.

Aprovecharemos esta ocasión para tomar partido en una discusión que puede no tener fin. Cuando decimos "*Análisis*" incluimos todas las consideraciones acerca del ***Álgebra*** (lo relativo a las operaciones de adición y multiplicación, y sus asociadas: sustracción, división, potenciación, radicación y logaritmación; pero, especialmente, lo que se refiere a *ecuaciones* y sus manipulaciones) y acerca del ***orden*** (su linealidad y compatibilidad con las operaciones pero, especialmente, la propiedad de completitud). De manera que, donde decimos "algebraicamente" podríamos decir "analíticamente", sólo que en ese caso queremos indicar que no estamos tomando en cuenta explícitamente lo que se refiere al orden.

⟨12⟩ Aclaramos que usaremos la Geometría euclidiana, no en su descripción ***sintética***, es decir la que cuenta sólo con un *canto recto* y un *compás*, sino en su descripción ***métrica***, es decir, aquella que cuenta con una *Regla* y un *Transportador*.

Vamos a aprovechar la ocasión para exponer nuestro punto de vista respecto a los calificativos "***sintética***" y "***analítica***" que suelen usarse para designar, no dos Geometrías distintas, sino dos métodos distintos para abordar el estudio de la Geometría: interés que se refuerza por el hecho de que estamos usando este último para designar el estudio que desarrollaremos en este texto.

Una de las maneras de entender estos calificativos se puede encontrar remontándonos a las reflexiones de los griegos de la época llamada clásica, especialmente las que se refieren al archifamoso problema de ***la duplicación del cubo***.

Planteado un problema cualquiera, es posible enfrentarlo de al menos dos maneras:

- buscar su solución directamente, a partir de los datos que ofrece el problema; o
- suponerlo resuelto e investigar las propiedades que debería tener su solución para, entonces, mostrar que una pretendida solución no es correcta, o construir un nuevo problema, equivalente al originalmente planteado, pero que se puede resolver con los datos que éste ofrece.

Ciertamente, esta última alternativa también resuelve el problema planteado, por la vía de la equivalencia, aunque indirectamente; su proceso se puede dividir en dos momentos:

(a) el de construir y resolver el nuevo problema, equivalente al originalmente planteado, con los datos que éste ofrece, al cual se le suele llamar ***análisis*** (palabra proveniente del sustantivo femenino griego *ἀνάλυσις*, que deriva del verbo *ἀναλύω*, compuesto por la preposición *ἀνα* y el verbo *λύω*, y cuyo significado es *soltar*, *desatar*, *deshacer*, *descomponer*, *resolver*, *libertar*, *disolver*); y

(b) el de proponer la solución del problema originalmente planteado, después de haber resuelto el problema equivalente y de adecuar la solución obtenida en este último, al cual se le suele llamar ***síntesis*** (palabra proveniente del sustantivo femenino griego *σύνθεσις*, que deriva del verbo *συντίθημι*, compuesto por la preposición *συν* y el verbo *τίθημι*, y cuyo significado es *poner una cosa junto a*, o *al mismo tiempo que*, *otra*: *reunir*, *juntar*, *combinar*, *componer*, *unir*, *adicionar*, *sumar*, *acumular*, *arreglar*, *disponer*, *comprender*, *concluir*).

Por esta vía se puede decir que: la ***Geometría analítica*** aborda el estudio de las figuras geométricas y sus propiedades, reduciéndolo al estudio de problemas equivalentes propios del Análisis (o del Álgebra); mientras que la ***Geometría sintética*** aborda el estudio de las figuras geométricas y sus propiedades, adecuando y generalizando las soluciones de sus problemas, y los métodos de resolución, que previamente se han obtenido por otro medio (sea éste el empírico, o el analítico, etc.).

Otra manera de entender estos calificativos se puede encontrar en el uso clásico de los mismos, para calificar los juicios (afirmaciones) que predican algo sobre un objeto:

(a) un juicio es ***analítico***, cuando se predica un atributo (o una propiedad) que está contenido, de modo tácito, en la concepción del objeto, explicando, destacando o aclarando, alguno de los atributos que están contenidos en dicha concepción (explicación por identidad, sin añadir nada a la concepción que se tiene del objeto, sino descomponiendo dicha concepción en conceptos parciales comprendidos y concebidos, aunque tácitamente, en la misma), *v. g*, "todos los cuerpos son extensos"; y

(b) un juicio es ***sintético***, cuando se predica un atributo del objeto que no está previamente contenido en su concepción, extendiendo así lo que se concibe del objeto; un predicado que no estaba, en modo alguno, pensado en su concepción ni que se podía extraer por descomposición de la misma, pero que le corresponde de manera necesaria, *v. g*, "todos los cuerpos son pesados", "todo lo que sucede tiene una causa".

Por esta vía se puede decir que: la ***Geometría analítica*** aborda el estudio de las figuras geométricas y sus propiedades, describiendo, quizás desde un punto de vista diferente, lo que ya se conoce previamente de dichas figuras; mientras que la ***Geometría sintética*** aborda el estudio de las figuras geométricas y sus propiedades, estableciendo: los conceptos de cada una de esas figuras; y los atributos que no están contenidos en su concepción, pero que les corresponden de manera necesaria.

⟨13⟩ Este Principio se puede interpretar como una *aritmetización* de la Geometría, al permitir representar los puntos de una recta por números reales.

⟨14⟩ Queremos decir con el término ***biunívoca***, que a cada punto de la recta corresponde un único número real, y que a cada número real corresponde un único punto de la recta.

⟨15⟩ Precisemos lo que entenderemos con la palabra ***medir***; esta palabra significará *comparar con un patrón*. Este patrón se llama ***la unidad de medida***, es decir, lo que mide exactamente 1.

Fijemos provisionalmente el siguiente patrón como unidad de medida de longitud (ver la figura 1.19).

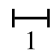


FIGURA 1.19 La unidad o patrón

¿Cómo hacemos para medir el largo de una caja como la representada en la figura 1.20?

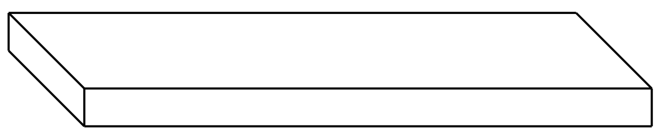


FIGURA 1.20 Una caja

Bueno, en primer lugar, hacemos coincidir el extremo izquierdo del patrón con uno de los extremos del largo de la caja, por ejemplo, el izquierdo también (ver la figura 1.21).

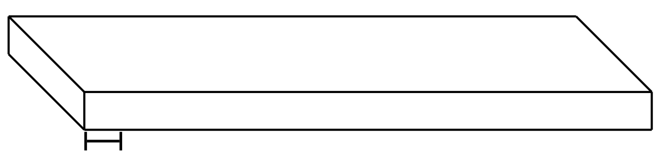


FIGURA 1.21 Una caja y el patrón

Luego, junto al extremo derecho del patrón que tenemos ubicado, ubicamos colinealmente de nuevo el patrón de medida y repetimos el proceso tantas veces como sea necesario para cubrir todo el largo de la caja (ver la figura 1.22).

Finalmente, como hemos podido ubicar 15 veces el patrón de medida en el largo de la caja, decimos que la caja mide 15 unidades de medida de largo.

Para ahorrarnos trabajo se han construido los llamados ***instrumentos de medición***. Uno de los instrumentos adecuados para medir longitud es ***la regla***. El hecho de que en nuestra regla se encuentren marcados los números del 1 al 20 (aunque este último no está señalado), significa que esa regla nos permite medir, sin tener que repetir varias veces el patrón de medida (tal como acabamos de hacer), cualquier objeto que contenga 20 unidades o menos en su longitud (ver la figura 1.23).

Vemos en la figura 1.24 que la regla nos permite saber de una sola vez, ubicando su extremo izquierdo precisamente en el extremo izquierdo del largo de la caja, y sin tener que mover la regla, que la caja mide 15 unidades de medida de largo.

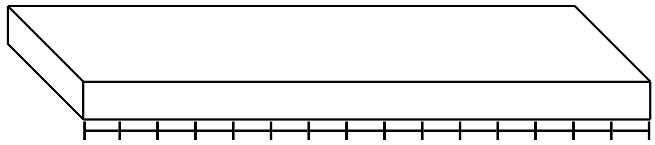


FIGURA 1.22 Una caja y el patrón repetido

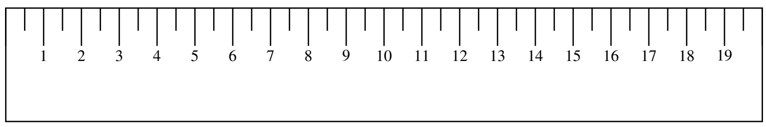


FIGURA 1.23 Una regla

Ordinariamente se usan diferentes ***unidades de medida*** para medir distancias entre puntos, obteniendo así diferentes ***escalas***. La distancia entre puntos dependerá entonces de la escala escogida. Pero debe quedar claro que los resultados que nosotros obtengamos en nuestra teoría no pueden depender de la unidad de medida escogida. Basta, para ello, que seamos consistentes en la elección de una escala, cualquiera que sea, en el sentido de que *no estará permitido cambiar la escala durante el desarrollo de una prueba, o de la solución de algún problema, en la que intervenga el uso de la distancia entre puntos*.

⟨16⟩ Algunos autores prefieren llamar ***derecho*** e ***izquierdo***, respectivamente, a dichos sentidos; otros, ***hacia la derecha***, y ***hacia la izquierda***; otros más, ***de izquierda a derecha***, y ***de derecha a izquierda***.

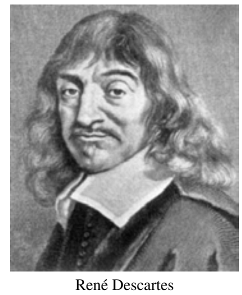
⟨17⟩ Algunos autores prefieren decir que ***Q está a la derecha***, o ***está a la izquierda***, de *P*, respectivamente.

⟨18⟩ La idea se debe a dos franceses:

Pierre Fermat, abogado-matemático, quien, en 1636, escribió una carta dirigida a un amigo en la que usa coordenadas para describir puntos y curvas.
Su interés principal estuvo centrado en problemas geométricos de optimización (máximos y mínimos de longitudes y áreas) y de tangentes a curvas (cónicas, cicloides, espirales, etc.), y en problemas de Aritmética.
Como dato anecdótico, se dice que él solía escribir correspondencias a los miembros de la comunidad matemática, desafiándolos a encontrar soluciones a problemas que él ya había resuelto, reservándose herméticamente su método para obtenerlas.

Pierre Fermat
(17/08/1601 Beaumont-de-Lomagne -
12/01/1665 Castres)

Rene Descartes, filósofo-matemático, quien, en 1637, publicó *La Géométrie* (uno de los tres apéndices de su famoso libro *Discurso del Método*), en el que destaca el uso del álgebra para resolver problemas geométricos, como insinuación del uso de las coordenadas.
Como dato anecdótico, se dice que su experiencia en la escuela le había hecho reconocer lo poco que sabía, y que las Matemáticas eran el único conocimiento *satisfactorio* (entiéndase *cierto*, *no dudoso*) a sus ojos; esta idea se convirtió en el fundamento de su manera de pensar a lo largo de su vida, y estructuró las bases de todos sus trabajos, los cuales presentó basados en Matemáticas.



René Descartes
(Renatus Cartesius)
(31/03/1596 La Haya -
11/02/1650 Estocolmo)

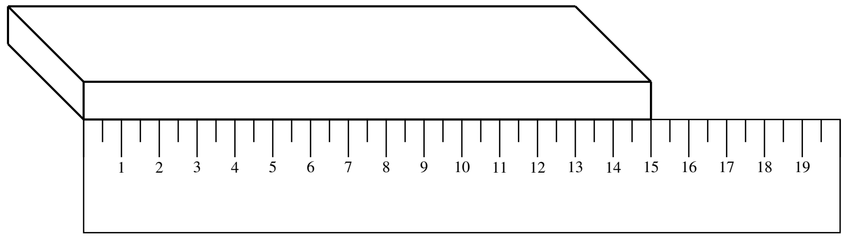


FIGURA 1.24 Una caja y una regla

Ocurrió que la posteridad, en su mayoría, atribuyó a Descartes la creación de esta manera de trabajar la Geometría, hasta el punto de que, de su nombre latinizado "Renatus Cartesius", esta Geometría lleva también el nombre de ***Geometría cartesiana***.

⟨19⟩ Algunos autores prefieren llamar a los ejes O**x** y O**y**, el ***eje horizontal*** y el ***eje vertical***, respectivamente.

⟨20⟩ Las coordenadas de un punto pueden pensarse como las indicaciones que se ofrecen para ubicar, o localizar, un sitio en una ciudad reticulada.

⟨21⟩ En las representaciones gráficas de los semiplanos que siguen a continuación, dibujaremos con trazo guionado los ejes para indicar que no están incluidos en los semiplanos que determinan.

⟨22⟩ Cada vez que hablemos de un sistema de ecuaciones, o inecuaciones, lo representaremos mediante una llave que las agrupe a todas; ésta es una manera sintética de referirnos a la conjunción de las condiciones expresadas por cada una de ellas.

⟨23⟩ Como los ejes coordenados tienen un papel preponderante en el discurso de la Geometría analítica y, por ende, en la representación gráfica de sus objetos, siempre los representaremos gráficamente con trazo continuo, pero con un color distinguido.

Cuando un eje, o una parte de él, no esté incluido en el conjunto que queremos representar gráficamente (por ejemplo, al representar $x > 0$ o $y < 0$), representaremos esa parte del eje con trazo negro guionado superpuesto al trazo continuo de color distinguido.

Cuando un eje, o una parte de él, esté incluido en el conjunto que queremos representar gráficamente (por ejemplo, al representar $x \geqslant 0$ o $y \leqslant 0$), representaremos esa parte del eje con trazo negro continuo.

⟨24⟩ Diremos, por ejemplo, "consideremos el punto (u, v)", o "el punto P satisface la inecuación $2x - 3y + 5 > 0$".

⟨25⟩ Diremos, por ejemplo, "consideremos la recta $2x - 3y + 5 = 0$", o "la recta l coincide con la recta $2x - 3y + 5 = 0$".

⟨26⟩ Este procedimiento equivale a colocar una regla alineada por dichos puntos. El problema que se puede presentar por este procedimiento es el del uso de escalas diversas: una regla puede medir en centímetros, otra en pulgadas, otra en picas, etc. La solución que se pretende ofrecer es que no se necesita alinear una regla a dichos puntos, cada vez que se quiera saber la distancia entre ellos, sino que basta con usar los ejes del sistema como reglas, pues de este modo: se tendría fijada de antemano la unidad de medida; se simplifica el trabajo para medir las distancias entre pares diversos de puntos del plano; y se evitan los problemas de percepción visual que siempre introducen una desviación respecto a la medida real, obteniendo sólo una aproximación.

⟨27⟩ Todos los casos son: $x_1 \neq x_2$ y $y_1 = y_2$; $y_1 \neq y_2$ y $x_1 = x_2$; $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$.

⟨28⟩ En el sentido de "alguna igualdad".

⟨29⟩ Este resultado garantizaría la existencia de un punto medio en cualquier segmento; la deducción hecha en el desarrollo del capítulo es lo que garantizaría su unicidad.

⟨30⟩ ***Un punto divide a un segmento en la razón*** r, si el punto pertenece al segmento y el cociente de la distancia de ese punto a uno de los extremos del segmento, entre la distancia del punto al otro extremo, es r.

En términos un poco más llanos: si consideramos un punto en el interior de un segmento (un punto que está entre los extremos del segmento), dicho punto genera, con cada uno de los extremos del segmento, dos segmentos contenidos en el segmento original; de lo que se trata es de ubicar el punto considerado de tal manera que la longitud de uno de esos segmentos sea r veces la longitud de la del otro.

⟨31⟩ Compare este resultado con el del Teorema 4. Note que este resultado simplifica el cálculo del área de un triángulo a partir de sus vértices, evitando las engorrosas cuentas de la fórmula de Herón.

⟨32⟩ Note que, si tomamos el valor absoluto del determinante, no importaría el orden en que se nombren los vértices del triángulo.
Note que, si permitimos que un triángulo degenere en un segmento, como hacen algunos autores, el área de esos triángulos degenerados es 0 (puesto que los vértices serían colineales).

Orientación para resolver los problemas del Capítulo 1

Creemos que el instructor del curso debería acompañar al estudiante en la resolución de los ejercicios 1.1, 1.2, 1.9, 1.11, 1.17, 1.21, 1.22, 1.32, 1.34 y 1.38.

A continuación ofrecemos ***ayudas*** para algunos de los problemas.

1.3: Ver el Principio E.8 en el Apéndice E.

1.9: Para determinar cuáles son rectángulos, utilice el recíproco del Teorema de Pitágoras; para determinar cuáles son obtusángulos, utilice el hecho de que el cuadrado de la longitud de uno de sus lados debe ser mayor que la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos.

1.11: Para determinar cuáles son paralelogramos, utilice el hecho de que los lados opuestos deben ser congruentes.

1.12: Para calcular el área de un triángulo, utilice la fórmula de Herón de Alejandría, la cual expresa el área en términos de las longitudes de sus lados. Si las longitudes de los lados del triángulo son a, b y c, y denotamos el área del triángulo por A, se tiene que $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, donde s es el ***semiperímetro*** del triángulo o, lo que es lo mismo, la mitad de su perímetro.
Para calcular el área de un cuadrilátero, utilice una triangulación del mismo por medio de una cualquiera de sus diagonales.

1.22: Utilice las proyecciones sobre los ejes de los puntos involucrados, y aplique el Teorema de Thales.

1.38: Para la parte (a), verifique las siguientes relaciones

$$(x_1y_1 + x_2y_2)^2 \leq (x_1y_1 + x_2y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2),$$

y use el hecho de que, dados dos números reales a y $b \geqslant 0$, se tiene que: $a^2 \leqslant b$ si, y sólo si, $|a| \leqslant \sqrt{b}$; y $a \leqslant |a|$.
Para la parte (b), utilice la parte (a) de la siguiente manera: si los puntos escogidos son $A = (u_1, v_1)$, $B = (u_2, v_2)$ y $C = (u_3, v_3)$, tome $x_1 = u_2 - u_1$, $x_2 = v_2 - v_1$, $y_1 = u_3 - u_2$ y $y_2 = v_3 - v_2$.

CAPÍTULO

2

Rectas y ecuaciones lineales

Una de las tantas consecuencias que tiene la introducción de un sistema de ejes ortogonales en el plano, sobre la cual es conveniente llamar la atención, es el hecho de que cualquier recta del plano puede ser representada por una ecuación algebraica en dos variables⟨1⟩ que es satisfecha por las coordenadas cartesianas de sus puntos (respecto a dicho sistema), y sólo por ellas; representación a la cual se debe contraponer el hecho de que, en la Geometría elemental, una recta es un objeto indefinido, sujeto sólo a las condiciones expuestas en sus postulados.

Representadas las rectas por ecuaciones algebraicas, procederemos como apuntamos en el capítulo anterior: trataremos analíticamente (a través de la naturaleza de los coeficientes de sus ecuaciones, y de ciertas relaciones entre ellos) los asuntos geométricos característicos y distintivos de las rectas (igualdad o coincidencia, paralelismo, concurrencia, incidencia, perpendicularidad, los semiplanos que determinan, etc.), e interpretaremos geométricamente (utilizando rectas) algunas situaciones analíticas en las que intervienen ecuaciones lineales en dos variables.

Como veremos, las rectas pueden ser representadas por ecuaciones que, a pesar de tener la misma naturaleza algebraica, tienen **formas** diferentes; cada una de esas formas tendrá ciertas ventajas sobre las otras, dependiendo de las características que se quieran resaltar.

Para poder introducir esas diferentes formas de una misma ecuación, establecemos la siguiente noción que nos facilitará el discurso.

Consideremos dos relaciones f y g que asocian, a pares ordenados de números reales, un número real. Diremos que las ***ecuaciones***, o ***inecuaciones***, $f(x,y) \lesseqqgtr 0$ y $g(x,y) \lesseqqgtr 0$ son ***equivalentes***, *si sus gráficos son iguales*, es decir, si

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x,y) \lesseqqgtr 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ g(x,y) \lesseqqgtr 0\}$$

(cada par ordenado de números reales (u,v) que satisface una de ellas, también satisface la otra).

Por simple manipulación algebraica podemos verificar, por ejemplo, que las ecuaciones

$$\frac{3x+2y}{5} + 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad x - \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}y + 1 = 0$$

así como

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{y} \qquad x + y + \frac{1}{2} = 0$$

son equivalentes.

§ 2.1 Ecuación general de una recta

Consideremos las relaciones f que asocian, a pares ordenados de números reales, un número real, cuyas reglas de asociación son polinomios de primer grado en dos variables no degenerados, es decir, las relaciones de la forma

$$f(x, y) := \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C}$$
$$(\mathsf{A}, \mathsf{B} \text{ y } \mathsf{C} \text{ números reales con } \mathsf{A} \neq 0 \text{ o } \mathsf{B} \neq 0^{\langle 2 \rangle});$$

llamaremos ***ecuación lineal en dos variables*** a una ecuación de la forma $f(x, y) = 0^{\langle 3 \rangle}$.

El objetivo central de esta parte del capítulo es verificar que, dada una figura geométrica $\mathcal{G}$ cualquiera, se tiene lo afirmado en el siguiente Teorema.

Teorema 5 (Representación analítica de una recta)
$\mathcal{G}$ es una recta si, y sólo si, $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación lineal en dos variables

$$\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0 \tag{2.1}$$
$$(\mathsf{A}, \mathsf{B} \text{ y } \mathsf{C} \text{ números reales con } \mathsf{A} \neq 0 \text{ o } \mathsf{B} \neq 0).$$

Verificado esto, la ecuación (2.1) será llamada ***la ecuación general***, o simplemente ***la ecuación***, de la recta $\mathcal{G}^{\langle 4 \rangle}$; de esta manera mostramos lo apropiado del calificativo *lineal* para las ecuaciones *de primer grado* en dos variables, y enjaezamos el Álgebra de las ecuaciones lineales en dos variables a la geometría de las rectas.

Para facilitar la verificación del Teorema 5, probaremos primero lo afirmado en las siguientes dos proposiciones.

Lema 2.1
El gráfico de una ecuación lineal en dos variables coincide con una recta.

■ **PRUEBA**
Consideremos una ecuación lineal en dos variables

$$\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$$
$$(\mathsf{A}, \mathsf{B} \text{ y } \mathsf{C} \text{ números reales con } \mathsf{A} \neq 0 \text{ o } \mathsf{B} \neq 0),$$

y su gráfico

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0\}.$$

En caso de que $\mathsf{B} = 0$, tendremos que $\mathsf{A} \neq 0$ y que

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathsf{A}x + \mathsf{C} = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = -\tfrac{\mathsf{C}}{\mathsf{A}}\}^{\langle 5 \rangle}.$$

Así, por el lema 1.1.(a), G coincide con la recta perpendicular al eje $\mathbf{x}$ por el punto $(-\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{A}}, 0)$.
Supongamos, entonces, que $\mathsf{B} \neq 0$.
Consideremos tres puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) distintos de $G^{\langle 6 \rangle}$. Así,

$$\mathsf{A}x_1 + \mathsf{B}y_1 + \mathsf{C} = 0, \quad \mathsf{A}x_2 + \mathsf{B}y_2 + \mathsf{C} = 0 \quad \text{y} \quad \mathsf{A}x_3 + \mathsf{B}y_3 + \mathsf{C} = 0;$$

de donde, por simple manipulación algebraica, se tiene que

$$y_1 = -\tfrac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}x_1 - \tfrac{\mathsf{C}}{\mathsf{B}}, \quad y_2 = -\tfrac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}x_2 - \tfrac{\mathsf{C}}{\mathsf{B}} \quad \text{y} \quad y_3 = -\tfrac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}x_3 - \tfrac{\mathsf{C}}{\mathsf{B}}.$$

De las dos primeras igualdades tenemos, de paso, que

$$x_1 \neq x_2 \tag{2.2}$$

(pues, en caso contrario, $y_1 = y_2$ y, en consecuencia, $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, contrario a lo supuesto).
Como, después de sacar las cuentas,

$$\begin{vmatrix} x_1 & -\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}x_1 - \frac{\mathsf{C}}{\mathsf{B}} & 1 \\ x_2 & -\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}x_2 - \frac{\mathsf{C}}{\mathsf{B}} & 1 \\ x_3 & -\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}x_3 - \frac{\mathsf{C}}{\mathsf{B}} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

tendremos, por el Teorema 4, que los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) son colineales.
Por tanto, cualesquiera tres puntos distintos de G son colineales o, lo que es lo mismo, todos los puntos de G están sobre una misma recta; llamemos l a la recta que contiene los puntos de G.
Consideremos, ahora, un punto (u, v) cualquiera de l.
Si $(u, v) = (x_1, y_1)$ o $(u, v) = (x_2, y_2)$, es claro que (u, v) está en G.
Si (u, v) es distinto de (x_1, y_1) y (x_2, y_2) tendremos, por el Teorema 4 y el hecho de que (u, v) es colineal con los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), que

$$\begin{vmatrix} x_1 & -\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}x_1 - \frac{\mathsf{C}}{\mathsf{B}} & 1 \\ x_2 & -\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}x_2 - \frac{\mathsf{C}}{\mathsf{B}} & 1 \\ u & v & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir, que $(\mathsf{A}u + \mathsf{B}v + \mathsf{C})(x_2 - x_1) = 0$. Pero, por (2.2), tendremos que $\mathsf{A}u + \mathsf{B}v + \mathsf{C} = 0$ o, lo que es lo mismo, que (u, v) está en G.
En consecuencia, G coincide con l.

QEP ■

LEMA 2.2
Los puntos de cualquier recta están en el gráfico de una ecuación lineal.

■ **PRUEBA**
Consideremos una recta l cualquiera.

Como toda recta queda determinada por dos de sus puntos distintos⟨7⟩, consideremos dos puntos distintos cualesquiera de l, digamos $Q = (x_1, y_1)$ y $T = (x_2, y_2)$; con lo que

$$x_1 \neq x_2 \qquad \text{o} \qquad y_1 \neq y_2. \tag{2.3}$$

Si $P = (x, y)$ es un punto de l distinto de Q y T tendremos, por el Teorema 4 y el hecho de que P es colineal con Q y T, que

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir, que

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

Así, al definir $\mathsf{A} = y_1 - y_2$, $\mathsf{B} = x_2 - x_1$ y $\mathsf{C} = x_1y_2 - x_2y_1$, tendremos que las coordenadas cartesianas de P satisfacen la ecuación $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$ para la que, por (2.3), $\mathsf{A} \neq 0$ o $\mathsf{B} \neq 0$.

Pero, y esto es lo crucial, las coordenadas cartesianas de Q y T también satisfacen esta ecuación.

Por tanto, todos los puntos de la recta l están en el gráfico de la ecuación lineal $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$.

QEP ■

Ahora bien, como dos rectas coinciden, si una de ellas está contenida en la otra (pues tendrían dos puntos distintos en común), tenemos que lo afirmado en el Teorema 5 es consecuencia directa de las dos proposiciones anteriores.

Observación 2.1 (Un procedimiento para calcular la ecuación general de una recta)
El Teorema 5 nos dice cuál es el tipo de ecuaciones con las que se pueden representar las rectas, pero no nos dice cómo encontrarlas. Sin embargo, el procedimiento para obtenerla está descrito en la prueba del lema 2.2, a saber: tomando dos puntos distintos cualesquiera de l, digamos $Q = (x_0, y_0)$ y $T = (x_1, y_1)$, la ecuación de la recta l será

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.\text{⟨8⟩} \tag{2.4}$$

➤ Ejemplo 2.1
Para encontrar la ecuación general de la recta determinada por los puntos $(1, 3)$ *y* $(5, 7)$*, planteamos la ecuación*

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

y desarrollamos el determinante por la primera fila, obteniendo que la ecuación requerida es

$$-4x + 4y - 8 = 0,$$

que es equivalente a la ecuación

$$x - y + 2 = 0.$$

QEE ◄

OBSERVACIÓN 2.2

Note que, si $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$ *es la ecuación general de una recta, tendremos que:*

$$si\ \mathsf{A} = 0,\ entonces\ \mathsf{B} \neq 0;$$

y,

$$si\ \mathsf{B} = 0,\ entonces\ \mathsf{A} \neq 0.$$

La siguiente observación recoge el primer ejemplo de tratamiento analítico de algunos asuntos geométricos de las rectas: sus posiciones respecto al eje **x**, al eje **y**, y al origen.

OBSERVACIÓN 2.3

(a) *Gracias al Teorema 1.(a) tendremos que*

una recta l ***es perpendicular al eje* x *si, y sólo si,*** $\mathsf{B} = 0$ ***en su ecuación general***

(en cuyo caso, por la observación 2.2, $\mathsf{A} \neq 0$ *y, además: la recta puede ser representada también por la ecuación* $x + \frac{\mathsf{C}}{\mathsf{A}} = 0$*; y el punto de concurrencia entre l y el eje* **x** *es* $(-\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{A}}, 0)$*).*
En consecuencia,

una recta l ***no es perpendicular al eje* x *si, y sólo si,*** $\mathsf{B} \neq 0$ ***en su ecuación general***.

En este caso, la recta l corta al eje **y***; para saber en qué punto lo corta, damos el valor* 0 *a* x *en su ecuación y despejamos* y*, obteniendo* $y = -\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{B}}$*. Así, el punto donde la recta l concurre con el eje* **y** *es*

$$(0, -\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{B}});$$

razón por la cual el número

$$-\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{B}}$$

recibe el nombre de ***ordenada en el origen*** *de la recta l.*

(b) *Gracias al Teorema 1.(b) tendremos que*

una recta l ***es perpendicular al eje* y *si, y sólo si,*** $\mathsf{A} = 0$ ***en su ecuación general***

(en cuyo caso, por la observación 2.2, $\mathsf{B} \neq 0$ *y, además: la recta puede ser representada también por la ecuación* $y + \frac{\mathsf{C}}{\mathsf{B}} = 0$*; y el punto de concurrencia entre l y el eje* **y** *es* $(0, -\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{B}})$*).*
En consecuencia,

una recta l ***no es perpendicular al eje* y *si, y sólo si,*** $\mathsf{A} \neq 0$ ***en su ecuación general***.

En este caso, la recta l corta al eje **x***; para saber en qué punto lo corta, damos el valor* 0 *a* y *en su ecuación y despejamos* x*, obteniendo* $x = -\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{A}}$*. Así, el punto donde la recta l concurre con el eje* **x** *es*

$$(-\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{A}}, 0);$$

razón por la cual el número

$$-\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{A}}$$

recibe el nombre de ***abscisa en el origen*** *de la recta l.*

(c) *Note que, de acuerdo con las dos partes anteriores, si la recta l no es perpendicular a ninguno de los ejes, su ordenada en el origen (o el punto de concurrencia con el eje* **y***) no depende del coeficiente de x; y su abscisa en el origen (o el punto de concurrencia con el eje* **x***) no depende del coeficiente de y.*

(d) *Como el punto (0,0) satisface la ecuación $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y = 0$, tendremos que*

una recta l pasa por el origen si, y sólo si, $\mathsf{C} = 0$ ***en su ecuación general.***

En consecuencia,

una recta l no pasa por el origen si, y sólo si, $\mathsf{C} \neq 0$ ***en su ecuación general.***

En la siguiente observación ofrecemos un procedimiento que, a pesar de que pueda parecer de conocimiento común y corriente, nos permitirá hacer referencia a él cada vez que lo necesitemos.

Observación 2.4 (Cálculo de puntos de una recta a partir de su ecuación)
Si $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$ es la ecuación de una recta, y tenemos que encontrar un punto de ella, podemos proceder de la siguiente manera.

Si la recta es perpendicular al eje **x** *(en cuyo caso, por la observación 2.3.(a), su ecuación se puede expresar en la forma $x + \frac{\mathsf{C}}{\mathsf{A}} = 0$), entonces cualquier punto de la forma $(-\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{A}}, v)$, donde v es cualquier número real, es un punto de la recta en cuestión.*

Si la recta no es perpendicular al eje **x** *(en cuyo caso, por la observación 2.3.(a), $\mathsf{B} \neq 0$), entonces fijamos cualquier número real u; lo sustituimos por x en su ecuación, obteniendo $\mathsf{A}u + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$; despejamos y en esta última ecuación, obteniendo $y = -\frac{\mathsf{C}+\mathsf{A}u}{\mathsf{B}}$; así, el punto $(u, -\frac{\mathsf{C}+\mathsf{A}u}{\mathsf{B}})$ es un punto de la recta en cuestión.*

§ 2.2 Otras formas de la ecuación de una recta

Veamos ahora otras formas clásicas, y útiles en algunos contextos, en que se puede presentar la ecuación de una recta.

Consideremos una recta l cualquiera.

En las partes (a) y (b) de la observación 2.3 hemos precisado la forma que tiene la ecuación de cualquier recta perpendicular a alguno de los ejes.

Supongamos, entonces, que l no es perpendicular al eje **x** ni al eje **y**.

Para facilitar las referencias en lo que resta de esta sección, listamos a continuación algunas propiedades que tiene esta recta l.

(I) Por supuesto, l no es perpendicular a ninguno de los ejes.

(II) Por (I) y las partes (d) y (e) de la observación 1.4, cualesquiera dos puntos distintos de l tienen abscisas distintas y ordenadas distintas.

(III) Por (I), la recta l no coincide con ninguno de los ejes.

(IV) Por (I) y la observación 1.4.(f), la recta l corta a ambos ejes (y, de acuerdo con las partes (a) y (b) de la observación 2.3, corta: al eje **x**, en el punto $(-\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{A}}, 0)$; y al eje **y**, en el punto $(0, -\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{B}})$).

(V) Por (III), (IV) y el lema 1.2.(a), la recta l tiene puntos con ordenada positiva (ver el Principio E.23 en el Apéndice E)⟨9⟩.

2.2.1 Forma cartesiana

Consideremos dos puntos distintos cualesquiera de l, digamos $Q = (x_0, y_0)$ y $T = (x_1, y_1)$. Por (II) y la observación 1.9 tendremos, para cualquier punto $P = (x, y)$ de l, distinto de Q y T, que

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \tag{2.5}$$

Como Q y T también satisfacen esta igualdad, tenemos que toda recta que no es perpendicular a ninguno de los ejes, considerada como la recta que pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) se puede representar por una ecuación de la forma

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0), \tag{2.6}$$

llamada ***forma cartesiana*** de la ecuación de la recta l.

Observación 2.5

(a) *Alguien podría argumentar que, al construir la ecuación* (2.6)*, se escogieron arbitrariamente los puntos Q y T; y que si tomáramos otro par de puntos $R = (x_2, y_2)$ y $S = (x_3, y_3)$ sobre la recta, la ecuación se vería como*

$$y - y_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}(x - x_2).$$

Pero, esta ecuación y la ecuación (2.6) *son equivalentes ya que, aplicando el Teorema 3 a los puntos P, Q y R, tendremos que*

$$\frac{x - x_0}{x - x_2} = \frac{y - y_0}{y - y_2}$$

y, en consecuencia, que

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

(b) *Alguien podría argumentar que, al construir la ecuación* (2.4)*, se escogieron arbitrariamente los puntos Q y T; y que si tomáramos otro par de puntos $R = (x_2, y_2)$ y $S = (x_3, y_3)$ sobre la recta, la ecuación se vería como*

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pero, por razones análogas a las expuestas en la parte anterior, esta ecuación y la ecuación (2.4) *de la observación 2.1 son equivalentes.*

En la siguiente observación presentamos un procedimiento para encontrar la forma cartesiana de la ecuación de una recta, a partir de su ecuación general, y viceversa.

Observación 2.6

(a) *Si la ecuación general de la recta l es*

$$\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$$
(A, B y C números reales con $\mathsf{A} \neq 0$ y $\mathsf{B} \neq 0$),

y queremos encontrar la forma cartesiana de su ecuación, buscamos dos puntos distintos cualesquiera de ella. Para tal fin podemos usar el procedimiento expuesto en la observación 2.4, o aprovechar, por (IV), sus puntos de corte con los ejes y construir la ecuación

$$y - 0 = -\frac{-\frac{C}{B} - 0}{0 - (-\frac{C}{A})}(x - (-\tfrac{C}{A}));$$

que, después de sacar las cuentas, resulta

$$y = -\tfrac{A}{B}(x + \tfrac{C}{A}).$$

(b) *Si la forma cartesiana de la ecuación de la recta l es*

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0),$$

y queremos encontrar su ecuación general, distribuimos y agrupamos para obtener la ecuación

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x - y - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x_0 + y_0 = 0.$$

Así, al definir $A = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, $B = -1$ *y* $C = -\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x_0 + y_0$, *tendremos que las coordenadas cartesianas* (x, y) *de todos los puntos de la recta l satisfacen la ecuación* $Ax + By + C = 0$, *para la que* $A \neq 0$ *o* $B \neq 0$.

➤ **EJEMPLO 2.2**

Para encontrar la forma cartesiana de la ecuación de la recta determinada por los puntos $(1, 3)$ *y* $(5, 7)$, *planteamos la ecuación*

$$y - 3 = \frac{7 - 3}{5 - 1}(x - 1);$$

o, lo que es lo mismo,

$$y - 3 = (x - 1).$$

Si se requiere la ecuación general de esa recta, podemos ofrecer

$$x - y + 2 = 0,$$

que es equivalente a la ofrecida en el ejemplo 2.1.

QEE ➤

Ofreceremos, a continuación, una interpretación geométrica de la forma cartesiana de la ecuación de una recta, usando un léxico propio de la dinámica.

OBSERVACIÓN 2.7

(a) *La ecuación* (2.5) *de la recta l se puede reescribir en la forma*

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

En la recta l, llamemos ***elevación*** *desde el punto Q hasta el punto T, a la diferencia de la ordenada de T menos la ordenada de Q, es decir,* $y_1 - y_0$*; y llamemos* ***avance*** *desde el punto Q hasta el punto T, a la diferencia de la abscisa de T menos la abscisa de Q, es decir,* $x_1 - x_0$.
Sabemos, por (II), que la elevación y el avance desde el punto Q hasta el punto T son no nulos. Además, es claro que la elevación (el avance) desde el punto Q hasta el punto T es el opuesto de la elevación (el avance) desde el punto T hasta el punto Q, pues $y_1 - y_0 = -(y_0 - y_1)$ $(x_1 - x_0 = -(x_0 - x_1))$.
Como los puntos Q y T escogidos en la recta l no tienen nada de particular, podemos asegurar que, si tomamos dos puntos distintos cualesquiera de l, el cociente

$$\frac{\textit{elevación desde un primer punto hasta un segundo punto}}{\textit{avance desde un primer punto hasta un segundo punto}} \tag{2.7}$$

siempre está definido, es no nulo y es independiente del orden en que se tomen los dos puntos, siempre y cuando se conserve, entre el numerador y el denominador, dicho orden: si tomamos el punto Z como primero en el numerador, debemos tomar Z como primero en el denominador.
Pero también, y esto es lo crucial, el cociente (2.7) *es independiente del par de puntos distintos que se tomen en l (y ya no sólo del orden en que se tomen).*

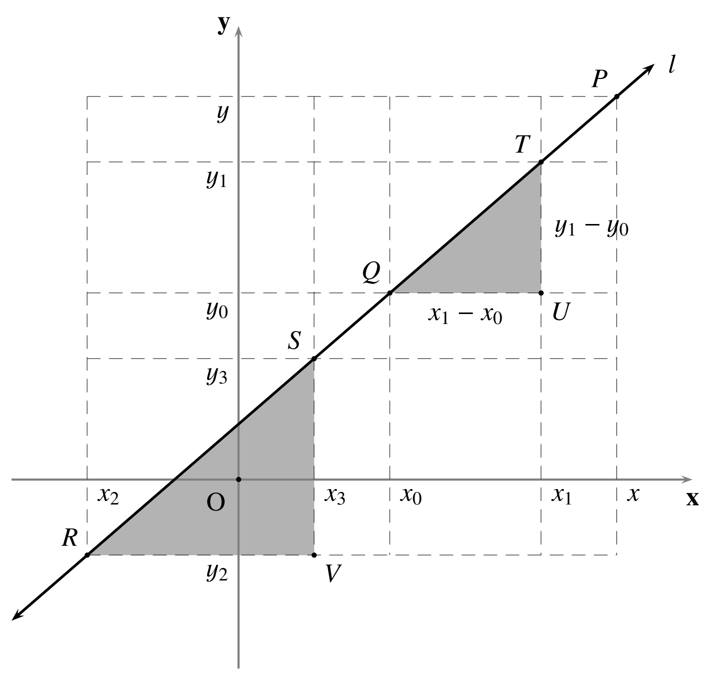


FIGURA 2.1 Elevación y avance

Para verificarlo, consideremos otro par de puntos distintos cualesquiera de l, digamos $R = (x_2, y_2)$ *y* $S = (x_3, y_3)$*, y los puntos* $U = (x_1, y_0)$ *y* $V = (x_3, y_2)$ *(ver la figura 2.1). Como los ángulos* $\angle TQU$ *y* $\angle SRV$ *son congruentes (ver el Principio E.24 en el Apéndice E)*$^{\langle 10\rangle}$*, tenemos que los triángulos* $\triangle TQU$ *y* $\triangle SRV$ *(sombreados en la figura) son semejantes (ver el Principio E.21 en el Apéndice E); de donde* $\frac{TU}{QU} = \frac{SV}{RV}$*. Por tanto,*

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}.$$

(b) *Por el Teorema 3, la propiedad de que* el cociente (2.7) permanece constante, independientemente del par de puntos distintos que se consideren*, es exclusiva de las rectas y de sus subconjuntos; es decir, si una figura geométrica es tal que, para cualesquiera dos de sus puntos distintos, el cociente* (2.7) *permanece constante, entonces dicha figura geométrica está contenida en una recta.*

2.2.2 Forma punto-pendiente o canónica

El cociente (2.7) representa una constante característica de la recta l, pues es independiente del par de puntos distintos que tomemos en ella; dicho cociente es llamado la ***pendiente*** de la recta l, y suele denotarse con la letra m, es decir,

$$m := \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}. \tag{2.8}$$

Así, sustituyendo $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ por m en la ecuación (2.6), tenemos que toda recta que no es perpendicular a ninguno de los ejes, considerada como la recta que tiene pendiente m y pasa por el punto (x_0, y_0), se puede representar por una ecuación de la forma

$$y - y_0 = m(x - x_0) \tag{2.9}$$
$$(m \text{ número real con } m \neq 0),$$

llamada forma ***punto-pendiente*** (o ***canónica***) de la ecuación de la recta l.

En la siguiente observación presentamos un procedimiento para encontrar la forma canónica de la ecuación de una recta, a partir de su ecuación general, y viceversa.

Observación 2.8

(a) *Si la ecuación general de la recta l es*

$$\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$$
$$(\mathsf{A}, \mathsf{B} \text{ y } \mathsf{C} \text{ números reales con } \mathsf{A} \neq 0 \text{ y } \mathsf{B} \neq 0),$$

y queremos encontrar la forma punto-pendiente de su ecuación, buscamos dos puntos distintos cualesquiera de ella. Para tal fin podemos usar el procedimiento expuesto en la observación 2.4, o aprovechar, por (IV), sus puntos de corte con los ejes para calcular la pendiente

$$m = -\frac{-\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{B}} - 0}{0 - (-\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{A}})} = -\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}$$

y construir, luego, la ecuación

$$y = -\tfrac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}(x + \tfrac{\mathsf{C}}{\mathsf{A}}).$$

Note que la pendiente de la recta l no depende del término independiente de su ecuación general.

(b) *Si la forma canónica de la ecuación de la recta l es*

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

y queremos encontrar su ecuación general, distribuimos y agrupamos para obtener la ecuación

$$mx - y - (mx_0 - y_0) = 0.$$

Así, al definir $\mathsf{A} = m$, $\mathsf{B} = -1$ y $\mathsf{C} = -(mx_0 - y_0)$, tendremos que las coordenadas cartesianas (x, y) de todos los puntos de la recta l satisfacen la ecuación $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$, para la que $\mathsf{A} \neq 0$ o $\mathsf{B} \neq 0$.

➤ **EJEMPLO 2.3**

Para encontrar la forma canónica de la ecuación de la recta determinada por los puntos $(-3,2)$ *y* $(5,-1)$*, calculamos la pendiente*

$$m = \frac{-1-2}{5-(-3)} = \frac{-3}{8}$$

y planteamos la ecuación

$$y - 2 = \frac{-3}{8}(x+3).$$

Si se requiere la ecuación general de esa recta, podemos ofrecer

$$\frac{-3}{8}x - y + \frac{7}{8} = 0,$$

que es equivalente a la ecuación

$$3x + 8y - 7 = 0.$$

QEE ➤

Ofreceremos, a continuación, algunas interpretaciones de la pendiente de una recta.

OBSERVACIÓN 2.9

(a) *La pendiente de una recta se puede interpretar como la variación que experimenta la ordenada de un punto sobre la recta, digamos* (x, y)*, cuando se da un incremento de una unidad en su abscisa, pues, llamando* y_1 *a la ordenada del punto sobre la recta que tiene abscisa* $x+1$*, tenemos que*

$$m = \frac{y_1 - y}{(x+1)-x} = y_1 - y.$$

(b) *De manera general, la pendiente de una recta se puede interpretar como la* ***razón de cambio*** *(o* ***tasa de crecimiento****) de las ordenadas respecto al cambio de las abscisas, cuando pasamos de la consideración de un punto de la recta a otro distinto.*

2.2.3 Forma punto-inclinación

Por (IV), podemos considerar el punto S de corte entre la recta l y el eje **x** y, por (V), un punto P de l con ordenada positiva (ver las figuras 2.2 y 2.3).

Consideremos además un punto R sobre el eje **x** que esté delante de S [11].

El ángulo $\angle PSR$ es llamado el ***ángulo de inclinación*** (o ***de dirección***) de la recta l, y su medida, que denotaremos por α, es llamada la ***inclinación*** de la recta l.

Por Geometría elemental sabemos que $0 < \alpha < 180$ (ver el Principio E.25 en el Apéndice E) y, por (I), que $\alpha \neq 90$.

En el caso en que α sea agudo ($0 < \alpha < 90$), como es el caso en la figura 2.2, sabemos, por Geometría elemental, que $\tan\alpha = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$, pues $\overleftrightarrow{QU}$ coincide con, o es paralela a, el eje **x** (ver el Principio E.24 en el Apéndice E).

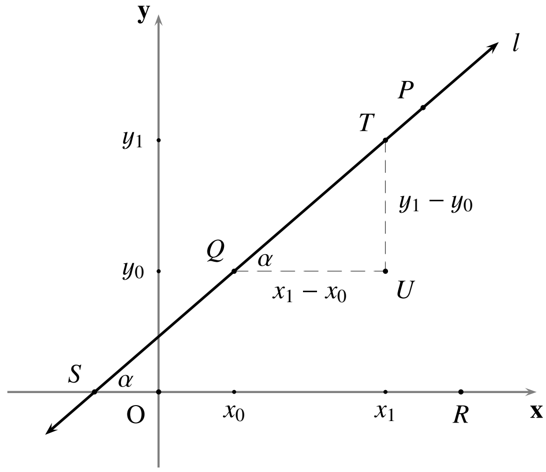


FIGURA 2.2 Ángulo de inclinación agudo

En el caso en que α sea obtuso ($90 < \alpha < 180$), como es el caso en la figura 2.3, sabemos, por Trigonometría, que $\tan\alpha = -\tan(180-\alpha) = -\frac{y_1-y_0}{x_0-x_1} = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$, pues $\overleftrightarrow{QU}$ coincide con, o es paralela a, el eje **x**.

Como, por lo dicho en el parágrafo anterior,

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

tendremos, en cualquiera de los casos, que

$$m = \tan\alpha; \tag{2.10}$$

es decir, la pendiente de una recta es un indicador de su inclinación: *es la tangente del ángulo de inclinación*. Por esta razón la pendiente recibe también el nombre de ***coeficiente angular***.

Así, sustituyendo $\tan\alpha$ por m en la ecuación (2.9), tenemos que toda recta que no es perpendicular a ninguno de los ejes, considerada como la recta que tiene inclinación α y pasa por el punto (x_0, y_0), se puede representar por una ecuación de la forma

$$y - y_0 = \tan\alpha(x - x_0) \tag{2.11}$$
$$(\alpha \text{ número real con } 0 < \alpha < 180 \text{ y } \alpha \neq 90),$$

llamada forma ***punto-inclinación*** de la ecuación de la recta l.

La siguiente observación presenta un procedimiento para encontrar la forma punto-inclinación de la ecuación de una recta, a partir de su ecuación general, y viceversa.

OBSERVACIÓN 2.10

(a) *Si la ecuación general de la recta l es*

$$\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$$
$$(\mathsf{A}, \mathsf{B} \textit{ y } \mathsf{C} \textit{ números reales con } \mathsf{A} \neq 0 \textit{ y } \mathsf{B} \neq 0),$$

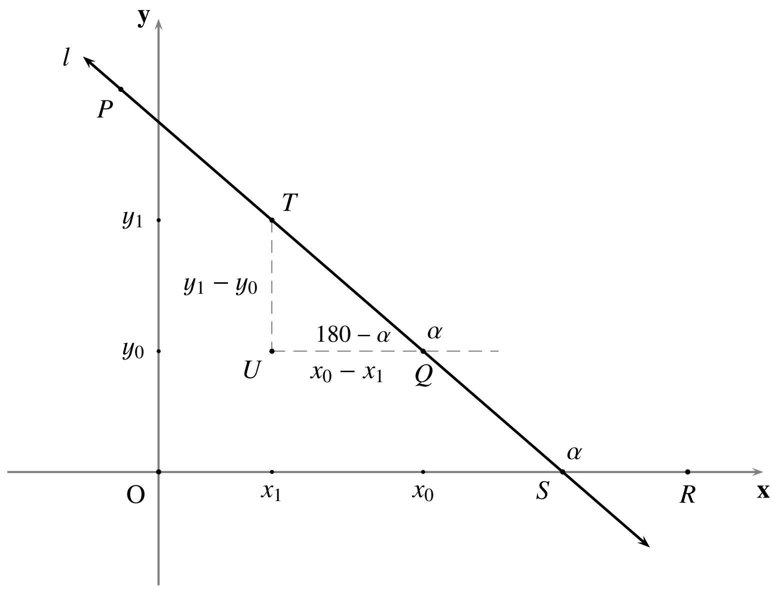


FIGURA 2.3 Ángulo de inclinación obtuso

y queremos encontrar la forma punto-inclinación de su ecuación, buscamos dos puntos distintos cualesquiera de ella. Para tal fin podemos usar el procedimiento expuesto en la observación 2.4, o aprovechar, por (IV), sus puntos de corte con los ejes para calcular la inclinación

$$\alpha = \arctan(-\tfrac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}})$$
$$(0 < \alpha < 180).$$

y construir, luego, la ecuación

$$y = -\tfrac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}(x + \tfrac{\mathsf{C}}{\mathsf{A}}).$$

Note que la inclinación de una recta no depende del término independiente de su ecuación general.

(b) *Si la forma punto-inclinación de la ecuación de la recta l es*

$$y - y_0 = \tan\alpha(x - x_0),$$

y queremos encontrar su ecuación general, distribuimos y agrupamos para obtener la ecuación

$$\tan\alpha x - y - (\tan\alpha x_0 - y_0) = 0.$$

Así, al definir $\mathsf{A} = \tan\alpha$, $\mathsf{B} = -1$ *y* $\mathsf{C} = -(\tan\alpha x_0 - y_0)$, *tendremos que las coordenadas cartesianas* (x, y) *de todos los puntos de la recta l satisfacen la ecuación* $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$, *para la que* $\mathsf{A} \neq 0$ *o* $\mathsf{B} \neq 0$.

➤ EJEMPLO 2.4

Para encontrar la forma punto-inclinación de la ecuación de la recta cuya inclinación es 60 y pasa por el punto $(-2, 2)$, *planteamos la ecuación*

$$y - 2 = \tan 60(x + 2);$$

o, lo que es lo mismo,

$$y - 2 = \sqrt{3}(x + 2).$$

Si se requiere la ecuación general de esa recta, podemos ofrecer

$$\sqrt{3}x - y + 2(\sqrt{3} + 1) = 0.$$

QEE ◀

Ofreceremos, a continuación, algunas interpretaciones de la pendiente y la inclinación de una recta.

Observación 2.11

(a) *Como es usual en los estudios del Cálculo diferencial, convendremos en que: una recta es perpendicular al eje* **y** *si, y sólo si, su pendiente es cero (0) y, en consecuencia, diremos que su inclinación es cero (0); y que una recta es perpendicular al eje* **x** *si, y sólo si, su inclinación es 90 y su pendiente es indeterminada o no existe (pues la tangente de* 90 *no está definida).*

(b) *Es claro que las pendientes de las rectas pueden tomar cualquier valor real: las pendientes son positivas, si su ángulo de inclinación es agudo; y las pendientes son negativas, si su ángulo de inclinación es obtuso.*

(c) *Los valores de las pendientes de las rectas crecen desde 0 (positivamente y sin límite) si, y sólo si, sus inclinaciones crecen desde* 0 *hacia* 90*; y los valores de las pendientes de las rectas decrecen desde 0 (negativamente y sin límite) si, y sólo si, sus inclinaciones decrecen desde* 180 *hacia* 90.

(d) *Cuanto mayor es el valor absoluto de la pendiente de una recta, más empinada es respecto al eje* **x***; y cuanto menor es, más acostada.*

(e) *Los constructores de techos de edificaciones hablan de la inclinación del techo en términos de porcentajes: tal techo tiene, o debe tener, una inclinación del* 25 %*, o del* 10 %*. Esta manera de hablar se refiere, o responde a la pregunta, ¿qué porcentaje del avance representa la elevación? (avance medido horizontalmente desde el extremo del alero del techo hasta la plomada que se apoya en la cumbrera, o cúspide, del techo): en el caso anterior, de 100 unidades de avance, se eleva 25 o 10, respectivamente. Como se verá, el* 100 % *corresponde a una inclinación de* 45.

> Convendremos en que una ***dirección*** está determinada, si tenemos un número real cualquiera m como representante de la pendiente de una recta, o un número real α tal que $0 \leqslant \alpha < 180$, como representante de la inclinación de una recta.

2.2.4 Forma corte-pendiente o explícita

Realizando manipulaciones algebraicas, siempre podemos intercambiar cualquiera de las ecuaciones (2.6), (2.9), o (2.11), por una de la forma

(2.12)
$$y = mx + b$$
(m y b números reales con $m \neq 0$).

En esta forma, el número real b representa la ordenada en el origen de la recta l pues, para $x = 0$ en la ecuación (2.12), tenemos $y = b$.

Así, toda recta que no es perpendicular a ninguno de los ejes, considerada como la recta que corta al eje **y** en el punto $(0, b)$ y tiene pendiente m, se puede representar por una ecuación de la forma (2.12), llamada forma ***corte-pendiente*** (***reducida*** o ***explícita***) de la ecuación de la recta l.

La forma corte-pendiente que tiene la ecuación de una recta nos permite ofrecer una simplificación del procedimiento expuesto en la observación 2.4, y que recogemos en la siguiente observación.

OBSERVACIÓN 2.12 (CÁLCULO DE PUNTOS DE UNA RECTA A PARTIR DE LA FORMA CORTE-PENDIENTE)
Si $y = mx + b$ es la forma corte-pendiente de la ecuación de una recta, y tenemos que encontrar un punto de ella, podemos proceder de la siguiente manera.

Si nos dan el valor de la abscisa, lo sustituimos por x en la ecuación y calculamos el valor de la ordenada directamente.

Si nos dan el valor de la ordenada, lo sustituimos por y en la ecuación y calculamos el valor de la abscisa despejando x en la ecuación.

En la siguiente observación presentamos un procedimiento para encontrar la forma explícita de la ecuación de una recta, a partir de su ecuación general, y viceversa.

OBSERVACIÓN 2.13

(a) *Si la ecuación general de la recta l es*

$$\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$$
$$(\mathsf{A},\ \mathsf{B}\ \textit{y}\ \mathsf{C}\ \textit{números reales con}\ \mathsf{A} \neq 0\ \textit{y}\ \mathsf{B} \neq 0),$$

y queremos encontrar la forma explícita de su ecuación, despejamos y para obtener la ecuación

$$y = -\tfrac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}x - \tfrac{\mathsf{C}}{\mathsf{B}}$$

donde

$$m = -\tfrac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}$$

es su pendiente y

$$b = -\tfrac{\mathsf{C}}{\mathsf{B}}$$

es su ordenada en el origen.

(b) *Si la forma explícita de la ecuación de la recta l es*

$$y = mx + b,$$

y queremos encontrar su ecuación general, agrupamos para obtener la ecuación

$$mx - y + b = 0.$$

Así, al definir $\mathsf{A} = m$, $\mathsf{B} = -1$ y $\mathsf{C} = b$, tendremos que las coordenadas cartesianas (x, y) de todos los puntos de la recta l satisfacen la ecuación $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$, para la que $\mathsf{A} \neq 0$ o $\mathsf{B} \neq 0$.

➤ **EJEMPLO 2.5**

Para encontrar la forma explícita de la ecuación de la recta cuya inclinación es 60 y pasa por el punto $(-2, 2)$*, despejamos y en la ecuación del ejemplo 2.4, obteniendo*

$$y = \sqrt{3}x + 2(\sqrt{3} + 1).$$

QEE ◄

La forma corte-pendiente que tiene la ecuación de una recta permite también definir un tipo distinguido de funciones, tal como mostramos en la siguiente observación.

OBSERVACIÓN 2.14

Estableciendo $f(x) = mx + b$ *(con m y b números reales cualesquiera), se tiene que la relación que asocia, a cada número real x, el número real* $y = f(x)$ *es una función real de una variable real, cuyo dominio es el conjunto de los números reales, llamada función* ***afín****; en el caso en que* $b = 0$*, es decir, cuando pase por el origen, la función es llamada función* ***lineal****.*

De este modo, toda recta no perpendicular al eje **x** *se puede concebir como el gráfico de una función*[12] *afín.*

2.2.5 Forma corte-corte, simétrica o segmentaria

Además de la condición ya establecida sobre la recta l (que no sea perpendicular a ninguno de los ejes), estableceremos en este parágrafo la condición adicional de que la recta l no pase por el origen (es decir, $b \neq 0$ en la ecuación (2.12)).

En este caso, realizando manipulaciones algebraicas, siempre podemos intercambiar cualquiera de las ecuaciones (2.6), (2.9), (2.11), o (2.12), por una de la forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{2.13}$$

$$(a \text{ y } b \text{ números reales con } a \neq 0 \text{ y } b \neq 0).$$

En esta forma, el número real b representa la ordenada en el origen de l, y el número real a representa la abscisa en el origen de l pues: para $x = 0$ en la ecuación (2.13), tenemos $y = b$; y para $y = 0$ en la ecuación (2.13), tenemos $x = a$.

Así, toda recta que no es perpendicular a ninguno de los ejes y no pasa por el origen, considerada como la recta que corta los ejes **x** y **y** en los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$, respectivamente, se puede representar por una ecuación de la forma (2.13), llamada forma ***corte-corte*** (***simétrica*** o ***segmentaria***) de la ecuación de la recta l.

En la siguiente observación presentamos un procedimiento para encontrar la forma simétrica de la ecuación de una recta, a partir de su ecuación general, y viceversa.

OBSERVACIÓN 2.15

(a) *Si la ecuación general de la recta l que no pasa por el origen es*

$$\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$$

$$(\mathsf{A}, \mathsf{B} \text{ y } \mathsf{C} \text{ números reales con } \mathsf{A} \neq 0, \mathsf{B} \neq 0 \text{ y } \mathsf{C} \neq 0),$$

y queremos encontrar la forma simétrica de su ecuación, despejamos $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y$*, dividimos por* $-\mathsf{C}$ *y manipulamos algebraicamente, para obtener la ecuación*

$$\frac{x}{-\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{A}}} + \frac{y}{-\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{B}}} = 1;$$

de donde, su abscisa en el origen es $-\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{A}}$*, y su ordenada en el origen es* $-\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{B}}$ *(como ya sabíamos desde la observación 2.3).*

(b) *Si la forma simétrica de la ecuación de la recta l es*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

y queremos encontrar su ecuación general, agrupamos para obtener la ecuación

$$\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y - 1 = 0.$$

Así, al definir $\mathsf{A} = \frac{1}{a}$, $\mathsf{B} = \frac{1}{b}$ *y* $\mathsf{C} = -1$*, tendremos que las coordenadas cartesianas* (x, y) *de todos los puntos de la recta l satisfacen la ecuación* $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$*, para la que* $\mathsf{A} \neq 0$ *o* $\mathsf{B} \neq 0$.

➤ Ejemplo 2.6

Para encontrar la forma simétrica de la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1, 3)$ *y* $(5, 7)$*, manipulamos algebraicamente la ecuación del ejemplo 2.2*

$$x - y + 2 = 0,$$

obteniendo

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{2} = 1.$$

QEE ◄

Observación 2.16

La forma simétrica de la ecuación de una recta tiene la ventaja de que facilita la representación gráfica de las rectas que no pasan por el origen pues, a partir de los términos de la ecuación, ya tenemos determinados dos de sus puntos: trazamos la recta que pasa por los puntos $(a, 0)$ *y* $(0, b)$ *(es decir, la recta que contiene la hipotenusa del triángulo rectángulo con vértices en* $(a, 0)$*,* $(0, 0)$ *y* $(0, b)$*).*

§ 2.3 Posiciones relativas entre rectas

En los parágrafos sucesivos haremos un estudio sobre las relaciones que existen entre las posiciones relativas que pueden presentar las rectas, y los coeficientes de sus ecuaciones generales; antes de adentrarnos en ese estudio, verificaremos lo afirmado en la siguiente proposición que nos resultará de gran utilidad.

Lema 2.3

Dados seis números reales a, b, c, d, e y f, se tiene que:

(a) *si existe un número real r tal que* $a = rb$ *y* $c = rd$*, entonces* $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 0.$

(b) *si* $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 0$*, y además* a *y* c*, así como* b *y* d*, no son simultáneamente nulos, entonces existe un número real* $r \neq 0$ *tal que* $a = rb$ *y* $c = rd$*.*

(c) *si* $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e \\ b & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & e \\ d & f \end{vmatrix} = 0$*, y además* a *y* c*, así como* b *y* d*, no son simultáneamente nulos, entonces existe un número real* $r \neq 0$ *tal que* $a = rb$*,* $c = rd$ *y* $e = rf$*.*

■ **PRUEBA**

(a) Es claro, pues $\begin{vmatrix} rb & rd \\ b & d \end{vmatrix} = rbd - rbd = 0$.

(b) Si $b = 0$ (en cuyo caso $d \neq 0$), tendremos, de $ad = 0$, que $a = 0$ (en cuyo caso $c \neq 0$) y, así, al tomar $r = \frac{c}{d}$, tenemos que $r \neq 0$, $a = rb$ y $c = rd$.
Si $d = 0$ (en cuyo caso $b \neq 0$), tendremos, de $bc = 0$, que $c = 0$ (en cuyo caso $a \neq 0$) y, así, al tomar $r = \frac{a}{b}$, tenemos que $r \neq 0$, $a = rb$ y $c = rd$.
Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$, (en cuyo caso $a \neq 0$ y $c \neq 0$ pues, de lo contrario, $a = c = 0$), tendremos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y así, con $r = \frac{a}{b}$, se tiene que $r \neq 0$, $a = rb$ y $c = rd$.

(c) Por la parte anterior, existe un número real $r \neq 0$ tal que $a = rb$ y $c = rd$; así:
si $f = 0$ tendremos, de $be = 0$ o de $de = 0$, que $e = 0$, en cuyo caso $e = rf$; y
si $f \neq 0$ tendremos, de $af - be = 0$ o de $cf - de = 0$, que $\frac{e}{f} = \frac{a}{b}$ o $\frac{e}{f} = \frac{c}{d}$, en cuyo caso $e = rf$.

QEP ■

2.3.1 Igualdad o coincidencia: forma normal

Consideremos dos rectas

$$l_1 : \ \mathsf{A}_1 x + \mathsf{B}_1 y + \mathsf{C}_1 = 0$$
(A_1, B_1 y C_1 números reales con $\mathsf{A}_1 \neq 0$ o $\mathsf{B}_1 \neq 0$); y

$$l_2 : \ \mathsf{A}_2 x + \mathsf{B}_2 y + \mathsf{C}_2 = 0$$
(A_2, B_2 y C_2 números reales con $\mathsf{A}_2 \neq 0$ o $\mathsf{B}_2 \neq 0$).

El objetivo central de esta parte del capítulo es verificar lo afirmado en el siguiente Teorema.

TEOREMA 6 (CRITERIOS DE IGUALDAD ENTRE DOS RECTAS)
Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(IG1) *las rectas* l_1 *y* l_2 ***coinciden*** *(o las rectas* l_1 *y* l_2 ***son iguales*** *o, simplemente,* $l_1 = l_2$*).*

(IG2) $\begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 \\ \mathsf{A}_2 & \mathsf{B}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{C}_1 \\ \mathsf{A}_2 & \mathsf{C}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathsf{B}_1 & \mathsf{C}_1 \\ \mathsf{B}_2 & \mathsf{C}_2 \end{vmatrix} = 0.$

(IG3) $\mathsf{A}_1 = r\mathsf{A}_2$*,* $\mathsf{B}_1 = r\mathsf{B}_2$ *y* $\mathsf{C}_1 = r\mathsf{C}_2$ *para algún número real* $r \neq 0$ *(es decir,* $\frac{\mathsf{A}_1}{\mathsf{A}_2} = \frac{\mathsf{B}_1}{\mathsf{B}_2} = \frac{\mathsf{C}_1}{\mathsf{C}_2}$*).*

(IG4) $\mathsf{A}_1 x + \mathsf{B}_1 y + \mathsf{C}_1 = r(\mathsf{A}_2 x + \mathsf{B}_2 y + \mathsf{C}_2)$ *para algún número real* $r \neq 0$*.*

(IG5) *las ecuaciones* $\mathsf{A}_1 x + \mathsf{B}_1 y + \mathsf{C}_1 = 0$ *y* $\mathsf{A}_2 x + \mathsf{B}_2 y + \mathsf{C}_2 = 0$ *son equivalentes.*

■ **PRUEBA**

(IG1) ⇒ (IG2) Supongamos que $l_1 = l_2$. Bajo este supuesto tenemos que, una de ellas es perpendicular a uno de los ejes si, y sólo si, la otra también lo es al mismo eje; y que una de ellas pasa por el origen si, y sólo si, la otra también. Así, por las partes (a), (b) y (d) de la observación 2.3: $\mathsf{A}_1 = 0$ si, y sólo si, $\mathsf{A}_2 = 0$; $\mathsf{B}_1 = 0$ si, y sólo si, $\mathsf{B}_2 = 0$; y $\mathsf{C}_1 = 0$ si, y sólo si, $\mathsf{C}_2 = 0$.

Si $\mathsf{A}_1 = 0$, tendremos que $\mathsf{A}_2 = 0$ y, en consecuencia, $\mathsf{A}_1\mathsf{B}_2 - \mathsf{A}_2\mathsf{B}_1 = 0$ y $\mathsf{A}_1\mathsf{C}_2 - \mathsf{A}_2\mathsf{C}_1 = 0$. Por la observación 2.2, $\mathsf{B}_1 \neq 0$ y $\mathsf{B}_2 \neq 0$. Por la observación 2.3.(a), l_1 y l_2 cortan al eje **y** en los puntos $(0, -\frac{\mathsf{C}_1}{\mathsf{B}_1})$ y $(0, -\frac{\mathsf{C}_2}{\mathsf{B}_2})$, respectivamente. Como $-\frac{\mathsf{C}_1}{\mathsf{B}_1} = -\frac{\mathsf{C}_2}{\mathsf{B}_2}$ (pues $l_1 = l_2$), tendremos que $\mathsf{B}_1\mathsf{C}_2 - \mathsf{B}_2\mathsf{C}_1 = 0$.

Si $\mathsf{B}_1 = 0$, tendremos que $\mathsf{B}_2 = 0$ y, en consecuencia, $\mathsf{A}_1\mathsf{B}_2 - \mathsf{A}_2\mathsf{B}_1 = 0$ y $\mathsf{B}_1\mathsf{C}_2 - \mathsf{B}_2\mathsf{C}_1 = 0$. Por la observación 2.2, $\mathsf{A}_1 \neq 0$ y $\mathsf{A}_2 \neq 0$. Por la observación 2.3.(b), l_1 y l_2 cortan al eje **x** en los puntos $(-\frac{\mathsf{C}_1}{\mathsf{A}_1}, 0)$ y $(-\frac{\mathsf{C}_2}{\mathsf{A}_2}, 0)$, respectivamente. Como $-\frac{\mathsf{C}_1}{\mathsf{A}_1} = -\frac{\mathsf{C}_2}{\mathsf{A}_2}$ (pues $l_1 = l_2$), tendremos que $\mathsf{A}_1\mathsf{C}_2 - \mathsf{A}_2\mathsf{C}_1 = 0$.

Si $\mathsf{A}_1 \neq 0$ y $\mathsf{B}_1 \neq 0$ (en cuyo caso $\mathsf{A}_2 \neq 0$ y $\mathsf{B}_2 \neq 0$), tendremos que l_1 y l_2 deben tener la misma pendiente, la misma abscisa y la misma ordenada en el origen. Por la observación 2.8.(a) y las partes (a) y (b) de la observación 2.3, $-\frac{\mathsf{A}_1}{\mathsf{B}_1} = -\frac{\mathsf{A}_2}{\mathsf{B}_2}$, $-\frac{\mathsf{C}_1}{\mathsf{B}_1} = -\frac{\mathsf{C}_2}{\mathsf{B}_2}$ y $-\frac{\mathsf{C}_1}{\mathsf{A}_1} = -\frac{\mathsf{C}_2}{\mathsf{A}_2}$. Así, $\mathsf{A}_1\mathsf{B}_2 - \mathsf{A}_2\mathsf{B}_1 = \mathsf{A}_1\mathsf{C}_2 - \mathsf{A}_2\mathsf{C}_1 = \mathsf{B}_1\mathsf{C}_2 - \mathsf{B}_2\mathsf{C}_1 = 0$.

Por tanto, en cualquiera de los casos se tiene lo afirmado en (IG2).

(IG2) ⇒ (IG3) Es consecuencia del lema 2.3.(c).

(IG3) ⇒ (IG4) Se obtiene al tomar factor común r.

(IG4) ⇒ (IG5) Es consecuencia del hecho de que $r \neq 0$.

(IG5) ⇒ (IG1) Es consecuencia de la definición de ecuaciones equivalentes.

QEP ■

➤ **EJEMPLO 2.7**

Las rectas $2x + 3y - 5 = 0$ *y* $\frac{-6}{7}x + \frac{-9}{7}y + \frac{15}{7} = 0$ *son iguales porque*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ \frac{-6}{7} & \frac{-9}{7} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ \frac{-6}{7} & \frac{15}{7} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ \frac{-9}{7} & \frac{15}{7} \end{vmatrix} = 0.$$

QEE ➤

OBSERVACIÓN 2.17

Note que una recta l coincide con una recta de ecuación $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$ si, y sólo si, l puede ser representada por esa misma ecuación.

Tal como presentamos en la siguiente observación, el Teorema 6 permite extender los criterios de coincidencia a otras formas de la ecuación de una recta, muy útiles en algunos contextos.

OBSERVACIÓN 2.18 (COINCIDENCIA USANDO OTRAS FORMAS DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA)

(a) *Haciendo uso de la forma canónica, o la punto-inclinación, de la ecuación de una recta (ecuaciones* (2.9) *y* (2.11)*), tenemos que:*

dos rectas son iguales si, y sólo si, tienen la misma dirección y un punto en común.

(b) *En particular, haciendo uso de la forma explícita de la ecuación de una recta (ecuación* (2.12)*), tenemos que:*

dos rectas son iguales si, y sólo si, tienen las mismas pendiente y ordenada en el origen.

(c) *En particular, haciendo uso de la forma simétrica de la ecuación de una recta (ecuación* (2.13)*) tenemos, para rectas no perpendiculares al eje* $\mathbf{x}$ *y que no pasan por el origen, que:*

dos rectas son iguales si, y sólo si, tienen las mismas abscisa y ordenada en el origen.

Tal como presentamos en la siguiente observación, el Teorema 6 permite introducir, de manera simple y poco común, otra forma de la ecuación de una recta, muy útil en algunos contextos.

OBSERVACIÓN 2.19 (FORMA NORMAL DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA)
Note que toda recta se puede representar por una ecuación lineal en dos variables de la forma

$$\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0 \quad (\textit{con } \mathsf{A}^2 + \mathsf{B}^2 = 1), \tag{2.14}$$

llamada ***forma normal*** *de la ecuación de una recta.*

Esto es claro, pues, si la ecuación general de la recta en cuestión es $\mathsf{D}x+\mathsf{E}y+\mathsf{F} = 0$ *tendremos, al tomar* $r = \frac{1}{\sqrt{\mathsf{D}^2+\mathsf{E}^2}}$, $\mathsf{A} = r\mathsf{D}$, $\mathsf{B} = r\mathsf{E}$ *y* $\mathsf{C} = r\mathsf{F}$, *que ella coincide con la recta de ecuación* $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$, *para la cual* $\mathsf{A}^2 + \mathsf{B}^2 = 1$.

➤ **EJEMPLO 2.8**
Para encontrar la forma normal de la ecuación de la recta $3x + 4y - 5 = 0$, *procedemos de la siguiente manera.*

Calculamos, primero, el número $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Dividimos, luego, ambos términos de su ecuación por dicho número, obteniendo finalmente la ecuación normal de dicha recta

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1 = 0.$$

QEE ➤

2.3.2 Paralelismo

Consideremos dos rectas

$$l_1 : \ \mathsf{A}_1x + \mathsf{B}_1y + \mathsf{C}_1 = 0$$
(A_1, B_1 y C_1 números reales con $\mathsf{A}_1 \neq 0$ o $\mathsf{B}_1 \neq 0$); y

$$l_2 : \ \mathsf{A}_2x + \mathsf{B}_2y + \mathsf{C}_2 = 0$$
(A_2, B_2 y C_2 números reales con $\mathsf{A}_2 \neq 0$ o $\mathsf{B}_2 \neq 0$).

El objetivo central de esta parte del capítulo es verificar lo afirmado en el siguiente Teorema.

TEOREMA 7 (CRITERIOS DE PARALELISMO ENTRE DOS RECTAS)
Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(PA1) *las rectas l_1 y l_2* ***son paralelas***.

(PA2) $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, *pero* $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$ *o* $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

(PA3) $A_1 = rA_2$, $B_1 = rB_2$ *y* $C_1 \neq rC_2$ *para algún número real* $r \neq 0$ *(es decir,* $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$*).*

■ **PRUEBA**

(PA1) ⇒ (PA2) Supongamos que l_1 es paralela a l_2. Bajo este supuesto tenemos que, una de ellas es perpendicular a uno de los ejes si, y sólo si, la otra también lo es al mismo eje; y que una de ellas pasa por el origen si, y sólo si, la otra no pasa. Así, por las partes (a), (b) y (d) de la observación 2.3: $A_1 = 0$ si, y sólo si, $A_2 = 0$; $B_1 = 0$ si, y sólo si, $B_2 = 0$; y $C_1 = 0$ si, y sólo si, $C_2 \neq 0$.

Si $A_1 = 0$, tendremos que $A_2 = 0$ y, en consecuencia, $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ y $A_1C_2 - A_2C_1 = 0$. Por la observación 2.2, $B_1 \neq 0$ y $B_2 \neq 0$. Por la observación 2.3.(a), l_1 y l_2 cortan al eje **y** en los puntos $(0, -\frac{C_1}{B_1})$ y $(0, -\frac{C_2}{B_2})$, respectivamente. Como $-\frac{C_1}{B_1} \neq -\frac{C_2}{B_2}$ (pues l_1 es paralela a l_2), tendremos que $B_1C_2 - B_2C_1 \neq 0$.

Si $B_1 = 0$, tendremos que $B_2 = 0$ y, en consecuencia, $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ y $B_1C_2 - B_2C_1 = 0$. Por la observación 2.2, $A_1 \neq 0$ y $A_2 \neq 0$. Por la observación 2.3.(b), l_1 y l_2 cortan al eje **x** en los puntos $(-\frac{C_1}{A_1}, 0)$ y $(-\frac{C_2}{A_2}, 0)$, respectivamente. Como $-\frac{C_1}{A_1} \neq -\frac{C_2}{A_2}$ (pues l_1 es paralela a l_2), tendremos que $A_1C_2 - A_2C_1 \neq 0$.

Si $A_1 \neq 0$ y $B_1 \neq 0$ (en cuyo caso $A_2 \neq 0$ y $B_2 \neq 0$), tendremos que l_1 y l_2 deben tener distinta ordenada y distinta abscisa en el origen (pues, de lo contrario, se cortarían en un punto sobre uno de los ejes). Por las partes (a) y (b) de la observación 2.3, $-\frac{C_1}{B_1} \neq -\frac{C_2}{B_2}$ y $-\frac{C_1}{A_1} \neq -\frac{C_2}{A_2}$. Siendo esto así, necesariamente $-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$ (pues, de lo contrario, la ecuación $-\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2}$ tendría como solución a

$$x_0 = \frac{\frac{C_1}{B_1} - \frac{C_2}{B_2}}{\frac{A_2}{B_2} - \frac{A_1}{B_1}};$$

y así, las rectas tendrían en común el punto (x_0, y_0), para el que $y_0 = -\frac{A_1}{B_1}x_0 - \frac{C_1}{B_1}$). De este modo, $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, $A_1C_2 - A_2C_1 \neq 0$ y $B_1C_2 - B_2C_1 \neq 0$.

Por tanto, en cualquiera de los casos se tiene lo afirmado en (PA2).

(PA2) ⇒ (PA3) Es consecuencia de las partes (a) y (b) del lema 2.3.

(PA3) ⇒ (PA1) Supongamos que $A_1 = rA_2$, $B_1 = rB_2$ y $C_1 \neq rC_2$ para algún número real $r \neq 0$. Es claro que: la ecuación $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ es equivalente a la ecuación $A_2x + B_2y + \frac{C_1}{r} = 0$; y que no hay ningún par de números reales (x, y) que satisfaga $A_2x + B_2y + \frac{C_1}{r} = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ al mismo tiempo. Por tanto, no hay ningún punto en común a l_1 y l_2, es decir, l_1 es paralela a l_2.

QEP ■

➤ **EJEMPLO 2.9**

Las rectas $2x + 3y - 5 = 0$ *y* $\frac{-6}{7}x + \frac{-9}{7}y + 1 = 0$ *son paralelas porque*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ \frac{-6}{7} & \frac{-9}{7} \end{vmatrix} = 0 \quad y \quad \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ \frac{-6}{7} & 1 \end{vmatrix} = \frac{-16}{7} \neq 0.$$

QEE ➤

La siguiente proposición es consecuencia inmediata del Teorema anterior.

COROLARIO 2.1
Una recta l es paralela a la recta de ecuación $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$ si, y sólo si, l puede ser representada por una ecuación de la forma

$$\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{D} = 0 \quad \textit{(con } \mathsf{C} \neq \mathsf{D} \textit{ y los mismos coeficientes } \mathsf{A} \textit{ y } \mathsf{B}\textit{).}$$

■ **PRUEBA**
Supongamos que una recta l, de ecuación $\mathsf{E}x+\mathsf{F}y+\mathsf{G} = 0$, es paralela a la recta l' de ecuación $\mathsf{A}x+\mathsf{B}y+\mathsf{C} = 0$.
Por el Teorema 7, existe un número real $r \neq 0$ tal que $\mathsf{E} = r\mathsf{A}$, $\mathsf{F} = r\mathsf{B}$ y $\mathsf{G} \neq r\mathsf{C}$.
Así, multiplicando ambos términos de la ecuación de l por $\frac{1}{r}$ tenemos, por el Teorema 6, que la ecuación $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{D} = 0$, donde $\mathsf{D} = \frac{\mathsf{G}}{r}$, representa también a la recta l y $\mathsf{C} \neq \mathsf{D}$.
Por otro lado, es claro que si la recta l es representada por la ecuación $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{D} = 0$ (con $\mathsf{C} \neq \mathsf{D}$ y los mismos coeficientes A y B) tendremos, por el Teorema 7 con $r = 1$, que l es paralela a la recta de ecuación $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$.

QEP ■

OBSERVACIÓN 2.20
(a) *Note que la recta $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$ es paralela a la recta $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{D} = 0$ si, y sólo si, $\mathsf{C} \neq \mathsf{D}$.*

(b) *En particular, la recta $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$ es paralela a la recta $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y = 0$ (que pasa por el origen) si, y sólo si, $\mathsf{C} \neq 0$.*

(c) *Por la parte anterior, es claro que la recta $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$ coincide con, o es paralela a, la recta $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y = 0$.*

La siguiente observación recoge la solución analítica a un problema bastante común.

OBSERVACIÓN 2.21 (RECTA PARALELA A UNA RECTA DADA POR UN PUNTO FUERA DE ELLA)
La ecuación de la recta que es paralela a la recta $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$, y que pasa por el punto $P = (x_0, y_0)$ fuera de ella, es

$$\mathsf{A}(x - x_0) + \mathsf{B}(y - y_0) = 0$$

(de la observación 2.20.(a) y el hecho de que $\mathsf{C} \neq -\mathsf{A}x_0 - \mathsf{B}y_0$, tenemos que esta recta es paralela a la recta dada; por el hecho de que las coordenadas de P satisfacen esta ecuación, tenemos que P está en esta recta).

➤ **EJEMPLO 2.10**
La ecuación de la recta paralela a la recta $2x - 3y + 5 = 0$ y que pasa por el punto $(2, -3)$ es

$$2(x - 2) - 3(y + 3) = 0,$$

que es equivalente a

$$2x - 3y - 13 = 0.$$

QEE ➤

Tal como presentamos en la siguiente observación, el Teorema 7 permite extender los criterios de paralelismo a otras formas de la ecuación de una recta, muy útiles en algunos contextos.

OBSERVACIÓN 2.22 (PARALELISMO USANDO LA FORMA EXPLÍCITA DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA)
Haciendo uso de la forma explícita de la ecuación de una recta (ecuación (2.12)*) tenemos, para rectas no perpendiculares al eje* **x**, *que:*

dos rectas son paralelas si, y sólo si, tienen la misma pendiente y distinta ordenada en el origen.

2.3.3 Concurrencia

Consideremos dos rectas

$$l_1 : \ \mathsf{A}_1 x + \mathsf{B}_1 y + \mathsf{C}_1 = 0$$
$$(\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1 \text{ y } \mathsf{C}_1 \text{ números reales con } \mathsf{A}_1 \neq 0 \text{ o } \mathsf{B}_1 \neq 0); \text{ y}$$

$$l_2 : \ \mathsf{A}_2 x + \mathsf{B}_2 y + \mathsf{C}_2 = 0$$
$$(\mathsf{A}_2, \mathsf{B}_2 \text{ y } \mathsf{C}_2 \text{ números reales con } \mathsf{A}_2 \neq 0 \text{ o } \mathsf{B}_2 \neq 0).$$

Diremos que dos rectas son ***concurrentes***, si se cortan en un único punto.

Por el Principio E.5 y lo hecho en las dos secciones anteriores, tenemos ya verificado lo afirmado en el siguiente Teorema.

TEOREMA 8 (CRITERIOS DE CONCURRENCIA ENTRE DOS RECTAS)
Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(CO1) *las rectas l_1 y l_2* ***son concurrentes****.*

(CO2) $\begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 \\ \mathsf{A}_2 & \mathsf{B}_2 \end{vmatrix} \neq 0.$

(CO3) *no existe ningún número real $r \neq 0$ tal que $\mathsf{A}_1 = r\mathsf{A}_2$ y $\mathsf{B}_1 = r\mathsf{B}_2$ (es decir, $\frac{\mathsf{A}_1}{\mathsf{A}_2} \neq \frac{\mathsf{B}_1}{\mathsf{B}_2}$).*

➤ **EJEMPLO 2.11**
Las rectas $2x + 3y - 5 = 0$ y $3x + 2y + 1 = 0$ son concurrentes porque

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

QEE ◄

Incidencia y sistemas de ecuaciones lineales

Describiendo las rectas por sus ecuaciones generales, el estudio de la ***incidencia*** entre las rectas l_1 y l_2 (entendiendo por incidencia la consideración de los siguientes dos asuntos: si se intersectan o no dos figuras geométricas; y, en caso de que lo hagan, cuál es su intersección) equivale a la consideración de la existencia de pares ordenados (x, y) de números reales que satisfagan, simultáneamente, las siguientes dos condiciones

$$\mathsf{A}_1 x + \mathsf{B}_1 y + \mathsf{C}_1 = 0 \quad \text{y} \quad \mathsf{A}_2 x + \mathsf{B}_2 y + \mathsf{C}_2 = 0$$

o, lo que es lo mismo, a la consideración de la ***existencia de soluciones*** del sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathsf{A}_1 x + \mathsf{B}_1 y = -\mathsf{C}_1 & (\mathsf{A}_1 \neq 0 \text{ o } \mathsf{B}_1 \neq 0) \\ \mathsf{A}_2 x + \mathsf{B}_2 y = -\mathsf{C}_2 & (\mathsf{A}_2 \neq 0 \text{ o } \mathsf{B}_2 \neq 0) \end{array} \right. \tag{2.15}$$

(entendiendo por solución de (2.15), un par (x, y) para el que las igualdades que lo conforman son satisfechas).

Desde el punto de vista geométrico (ver la figura 2.4), el sistema (2.15)

(CD) *tendrá una solución única (es **compatible determinado**) si, y sólo si, las rectas son concurrentes.*

(IC) *no tendrá solución (es **incompatible**) si, y sólo si, las rectas son paralelas.*

(CI) *tendrá infinitas soluciones (es **compatible indeterminado**) si, y sólo si, las rectas coinciden (por los Principios E.4 y E.5).*

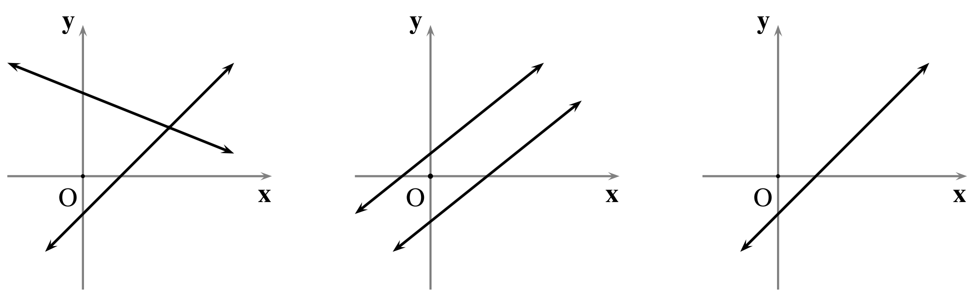


FIGURA 2.4 Incidencia entre dos rectas

Desde el punto de vista algebraico, el sistema (2.15)

(CD) *será compatible determinado si, y sólo si,* $\begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 \\ \mathsf{A}_2 & \mathsf{B}_2 \end{vmatrix} \neq 0$ *(es decir,* $\mathsf{A}_1\mathsf{B}_2 - \mathsf{A}_2\mathsf{B}_1 \neq 0$*), y su solución, que se puede encontrar por cualquiera de los métodos conocidos por el lector (eliminación por igualación*⟨13⟩*, sustitución*⟨14⟩ *o reducción*⟨15⟩*; usando la Regla de Cramer*⟨16⟩*; etc.) es el par* (x, y) *tal que*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -\mathsf{C}_1 & \mathsf{B}_1 \\ -\mathsf{C}_2 & \mathsf{B}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 \\ \mathsf{A}_2 & \mathsf{B}_2 \end{vmatrix}} = \frac{\mathsf{B}_1\mathsf{C}_2 - \mathsf{B}_2\mathsf{C}_1}{\mathsf{A}_1\mathsf{B}_2 - \mathsf{A}_2\mathsf{B}_1} \qquad y \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & -\mathsf{C}_1 \\ \mathsf{A}_2 & -\mathsf{C}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 \\ \mathsf{A}_2 & \mathsf{B}_2 \end{vmatrix}} = \frac{\mathsf{C}_1\mathsf{A}_2 - \mathsf{C}_2\mathsf{A}_1}{\mathsf{A}_1\mathsf{B}_2 - \mathsf{A}_2\mathsf{B}_1}.$$

(IC) *será incompatible si, y sólo si,* $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, *pero* $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$ *o* $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$ *(es decir,* $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, *pero* $A_1C_2 - A_2C_1 \neq 0$ *o* $B_1C_2 - B_2C_1 \neq 0$*), lo cual equivale a tener, multiplicando la primera ecuación por un número real k conveniente, un sistema de la forma*

$$\begin{cases} A_2x + B_2y = -kC_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases},$$

en el que los primeros miembros de ambas ecuaciones son iguales, pero $C_2 \neq kC_1$, *es decir, los segundos miembros son diferentes (de donde, evidentemente, no hay valores de x y y que cumplan esas dos condiciones a la vez).*

(CI) *será compatible indeterminado si, y sólo si,* $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$ *(es decir,* $A_1B_2 - A_2B_1 = A_1C_2 - A_2C_1 = B_1C_2 - B_2C_1 = 0$*), lo cual equivale a tener, multiplicando la primera ecuación por un número real* $k \neq 0$ *conveniente, una sola ecuación (ya que la segunda se obtuvo de la primera multiplicándola por k) y, en consecuencia, su solución estaría conformada por todos los puntos de la recta representada por ella.*

➤ EJEMPLO 2.12

Para estudiar la incidencia entre las rectas

$$2x + 3y - 5 = 0 \quad y \quad 3x + 2y + 1 = 0$$

resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}.$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, *tendremos que el sistema es compatible determinado y, en consecuencia, las rectas concurren en un punto. Para encontrar el punto de corte, calculamos*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{13}{5} \qquad y \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{17}{5};$$

de donde el punto de concurrencia entre ambas rectas es $(-\frac{13}{5}, \frac{17}{5})$. QEE ◄

➤ EJEMPLO 2.13

Para estudiar la incidencia entre las rectas

$$2x + 3y - 5 = 0 \quad y \quad -2x - 3y + 1 = 0$$

resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -2x - 3y = -1 \end{cases}.$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$ *y* $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, *tendremos que el sistema es incompatible y, en consecuencia, las rectas no se cortan (son paralelas).* QEE ◄

➤ **EJEMPLO 2.14**

Para estudiar la incidencia entre las rectas

$$2x + 3y - 5 = 0 \quad y \quad -2x - 3y + 5 = 0$$

resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -2x - 3y = -5 \end{cases}.$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = 0$, *tendremos que el sistema es compatible indeterminado y, en consecuencia, las rectas se cortan en infinitos puntos (son iguales). Los puntos de corte entre ambas rectas son todos los puntos* (u, v) *tales que* $2u + 3v - 5 = 0$. QEE ➤

OBSERVACIÓN 2.23 (MÉTODO DE ELIMINACIÓN POR REDUCCIÓN)

(a) *Note que, si* $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *y* $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ *representan sendas rectas concurrentes en el punto* (x_0, y_0) *entonces, para cada par de números reales m y n no simultáneamente nulos, la ecuación lineal en dos variables*

$$m(A_1x + B_1y + C_1) + n(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

representa una recta que pasa por el punto (x_0, y_0).

(b) *Por la parte anterior es claro que, para cada par de números reales m y* $n \neq 0$, *el sistema*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases}$$

es ***equivalente*** *al sistema*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ (mA_1 + nA_2)x + (mB_1 + nB_2)y = -(mC_1 + nC_2) \end{cases}$$

(entendiendo por equivalentes que (x_0, y_0) *es solución de uno de ellos si, y sólo si, también es solución del otro), pues*

$$A_2x + B_2y + C_2 = \frac{1}{n}((mA_1 + nA_2)x + (mB_1 + nB_2)y + (mC_1 + nC_2)) - \frac{m}{n}(A_1x + B_1y + C_1).$$

(c) *La parte anterior justifica y aclara el método de eliminación por* ***reducción*** *usado para resolver sistemas de ecuaciones lineales, pues el propósito de éste es tomar m y n de tal manera que* $mA_1 + nA_2 = 0$, *o* $mB_1 + nB_2 = 0$, *en el segundo sistema, con la seguridad de que tiene la misma solución que el primero.*

(d) *Desde el punto de vista geométrico, lo que se hace al usar el método de eliminación por* ***reducción*** *es sustituir, una de las rectas dadas, digamos* l_2, *por una que sea perpendicular a uno de los ejes y que pase por el punto de intersección de ellas, digamos* l_2' *en caso de que anulemos el coeficiente de* y, *o por* l_2'' *en caso de que eliminemos el coeficiente de* x *(ver la figura 2.5).*

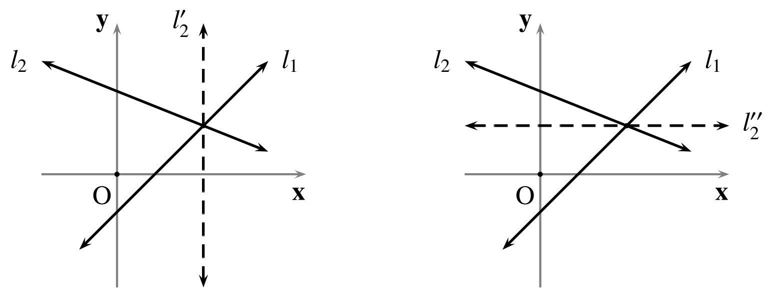


FIGURA 2.5 Método de reducción

Finalizaremos esta sección con algunas palabras sobre los sistemas de más de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; hablaremos sólo del de tres ecuaciones, pues el discurso que desarrollaremos es análogo para el caso general.

Desde el punto de vista geométrico, una solución del sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathsf{A}_1x + \mathsf{B}_1y = -\mathsf{C}_1 & (\mathsf{A}_1 \neq 0 \text{ o } \mathsf{B}_1 \neq 0) \\ \mathsf{A}_2x + \mathsf{B}_2y = -\mathsf{C}_2 & (\mathsf{A}_2 \neq 0 \text{ o } \mathsf{B}_2 \neq 0) \\ \mathsf{A}_3x + \mathsf{B}_3y = -\mathsf{C}_3 & (\mathsf{A}_3 \neq 0 \text{ o } \mathsf{B}_3 \neq 0) \end{array}\right. \tag{2.16}$$

es un punto que se encuentra, simultáneamente, en las tres rectas representadas por esas ecuaciones. Es claro que: si dos cualesquiera de las tres rectas son paralelas entre sí, el sistema será ***incompatible***; si sólo dos de las tres rectas coinciden, el sistema se reduce a un sistema como el (2.15); y, si las tres rectas coinciden, el sistema será ***indeterminado***. Pero, ¿qué pasará si las rectas no son paralelas ni coincidentes dos a dos?

Hay sólo dos posibilidades: o las rectas concurren dos a dos en puntos distintos; o concurren las tres en un mismo punto (ver la figura 2.6).

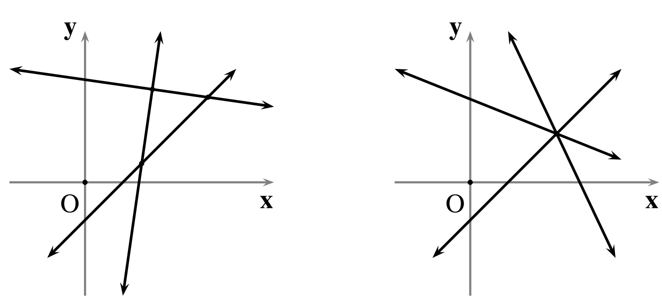


FIGURA 2.6 Incidencia entre tres rectas

Supongamos que las dos primeras rectas del sistema (2.16) son concurrentes. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales auxiliar

$$\left\{\begin{array}{l} \mathsf{A}_1x + \mathsf{A}_2y = \mathsf{A}_3 \\ \mathsf{B}_1x + \mathsf{B}_2y = \mathsf{B}_3 \end{array}\right. , \tag{2.17}$$

que nos ayudará a alcanzar la conclusión del estudio de los sistemas de ecuaciones lineales de tres ecuaciones y dos incógnitas.

Como, por lo supuesto, $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, tendremos que $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ y, en consecuencia, el sistema (2.17) tiene una solución única, digamos (m, n). Así hemos verificado que

> *Si las dos primeras rectas del sistema* (2.16) *son concurrentes, siempre existen números reales m y n únicos tales que* $A_3 = mA_1 + nA_2$ *y* $B_3 = mB_1 + nB_2$.

Verificaremos ahora que

> *El sistema* (2.16) *tiene una solución única si, y sólo si,* $C_3 = mC_1 + nC_2$ *(m y n los mismos de la afirmación anterior).*

Supongamos que el sistema (2.16) tiene una solución única (x_0, y_0). Así,

$$\begin{aligned} C_3 = -A_3x_0 - B_3y_0 &= -(mA_1 + nA_2)x_0 - (mB_1 + nB_2)y_0 \\ &= m(-A_1x_0 - B_1y_0) + n(-A_2x_0 - B_2y_0) = mC_1 + nC_2 \end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que $C_3 = mC_1 + nC_2$. Considerando la solución de las dos primeras, digamos (x_0, y_0), se tiene que ésta es también solución de la tercera, pues

$$\begin{aligned} A_3x_0 + B_3x_0 &= (mA_1 + nA_2)x_0 + (mB_1 + nB_2)y_0 \\ &= m(A_1x_0 + B_1y_0) + n(A_2x_0 + B_2y_0) = -mC_1 - nC_2 = -C_3 \end{aligned}$$

Todo lo hecho hasta ahora prueba el siguiente Teorema.

TEOREMA 9 (CRITERIO DE CONCURRENCIA ENTRE TRES RECTAS)
El sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 & (A_1 \neq 0 \text{ } o \text{ } B_1 \neq 0) \\ A_2x + B_2y = -C_2 & (A_2 \neq 0 \text{ } o \text{ } B_2 \neq 0) \\ A_3x + B_3y = -C_3 & (A_3 \neq 0 \text{ } o \text{ } B_3 \neq 0) \end{cases}$$

que representan sendas rectas, tiene una solución única si, y sólo si, las dos primeras son concurrentes y la tercera ecuación es ***combinación lineal*** *de las ecuaciones de esas dos (es decir, que la tercera se puede representar por una ecuación de la forma* $(mA_1 + nA_2)x + (mB_1 + nB_2)y = -(mC_1 + nC_2)$, *para algún par de números reales m y n conveniente); y, si éste es el caso, la solución del sistema es el punto de corte de las dos primeras rectas.*

OBSERVACIÓN 2.24

(a) *Como cambiar el orden de las ecuaciones del sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas produce un sistema equivalente, se tiene que, al aplicar el Teorema 9, cualesquiera dos de ellas pueden ser tomadas como las dos primeras ecuaciones.*

(b) *En el Teorema 9, para encontrar los números reales m y n que permiten expresar la tercera ecuación como combinación lineal de las dos primeras, se puede usar la solución del sistema auxiliar*

$$\begin{cases} \mathsf{A}_1 m + \mathsf{A}_2 n = \mathsf{A}_3 \\ \mathsf{B}_1 m + \mathsf{B}_2 n = \mathsf{B}_3 \end{cases}.$$

➤ Ejemplo 2.15

Para estudiar la incidencia entre las rectas

$$x - y - 1 = 0, \quad 2x + 2y - 6 = 0 \quad y \quad 3x - y - 5 = 0$$

resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 2y = 6 \\ 3x - y = 5 \end{cases}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, *tendremos que las dos primeras rectas son concurrentes. Resolvemos, entonces, el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} m + 2n = 3 \\ -m + 2n = -1 \end{cases};$$

de donde

$$m = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = 2 \qquad y \qquad n = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{1}{2}.$$

Como $2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 6 = 5$, *tendremos que las tres rectas son concurrentes. Para encontrar el punto en que concurren las tres rectas, resolvemos el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases},$$

calculando

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}}{4} = 2 \qquad y \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{4} = 1;$$

de donde el punto de concurrencia de las tres rectas es $(2, 1)$. **QEE ➤**

➤ Ejemplo 2.16

Para estudiar la incidencia entre las rectas

$$3x - 4y + 6 = 0, \quad 3x - y - 3 = 0 \quad y \quad 2x + y - 4 = 0$$

resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 3x - y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}.$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, *tendremos que las dos primeras rectas son concurrentes. Resolvemos, entonces, el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} 3m + 3n = 2 \\ -4m - n = 1 \end{cases};$$

de donde

$$m = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{9} = -\frac{5}{9} \qquad y \qquad n = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{11}{9}.$$

Como $-\frac{5}{9} \cdot (-6) + \frac{11}{9} \cdot 3 = \frac{21}{3} \neq 4$, *tendremos que las tres rectas no son concurrentes.* QEE ◀

Familias de rectas

Como vimos en la observación 2.23.(a), si $\mathsf{A}_1x + \mathsf{B}_1y + \mathsf{C}_1 = 0$ y $\mathsf{A}_2x + \mathsf{B}_2y + \mathsf{C}_2 = 0$ representan sendas rectas concurrentes en el punto (x_0, y_0) entonces, para cada par de números reales m y n no simultáneamente nulos, la ecuación lineal en dos variables

$$m(\mathsf{A}_1x + \mathsf{B}_1y + \mathsf{C}_1) + n(\mathsf{A}_2x + \mathsf{B}_2y + \mathsf{C}_2) = 0 \tag{2.18}$$

representa una recta que pasa por el punto (x_0, y_0). La pregunta que surge naturalmente es: ¿toda recta que pase por el punto (x_0, y_0) se podrá representar por una ecuación como la (2.18)?

La respuesta es positiva y su justificación hace uso de lo último que hemos expuesto.

Supongamos que $\mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0$ es la ecuación de una recta l que pasa por el punto (x_0, y_0). Buscamos una ecuación de la forma (2.18) o, lo que es lo mismo, de la forma

$$(m\mathsf{A}_1 + n\mathsf{A}_2)x + (m\mathsf{B}_1 + n\mathsf{B}_2)y + (m\mathsf{C}_1 + n\mathsf{C}_2) = 0$$

que represente a la recta l. El problema se reduce, entonces, a encontrar m y n tales que

$$\begin{cases} \mathsf{A}_1m + \mathsf{A}_2n = \mathsf{D} \\ \mathsf{B}_1m + \mathsf{B}_2n = \mathsf{E} \\ \mathsf{C}_1m + \mathsf{C}_2n = \mathsf{F} \end{cases}. \tag{2.19}$$

Como $\begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 \\ \mathsf{A}_2 & \mathsf{B}_2 \end{vmatrix} \neq 0$ (pues las rectas $\mathsf{A}_1x + \mathsf{B}_1y + \mathsf{C}_1 = 0$ y $\mathsf{A}_2x + \mathsf{B}_2y + \mathsf{C}_2 = 0$ concurren en el punto (x_0, y_0)), tendremos que existen m_0 y n_0 tales que

$$\mathsf{D} = m_0\mathsf{A}_1 + n_0\mathsf{A}_2 \qquad \text{y} \qquad \mathsf{E} = m_0\mathsf{B}_1 + n_0\mathsf{B}_2.$$

Ahora, y esto es lo crucial, como $\mathsf{F} = -\mathsf{D}x_0 - \mathsf{E}y_0$, $\mathsf{C}_1 = -\mathsf{A}_1x_0 - \mathsf{B}_1y_0$ y $\mathsf{C}_2 = -\mathsf{A}_2x_0 - \mathsf{B}_2y_0$ tenemos, después de sacar las cuentas, que

$$\mathsf{F} = m_0\mathsf{C}_1 + n_0\mathsf{C}_2.$$

Así podemos asegurar que el sistema (2.19) siempre tiene solución única, y que ésta es igual a (m_0, n_0) (la solución del sistema formado por las dos primeras ecuaciones).

Por tanto, la recta l se puede representar por la ecuación

$$m_0(\mathsf{A}_1x + \mathsf{B}_1y + \mathsf{C}_1) + n_0(\mathsf{A}_2x + \mathsf{B}_2y + \mathsf{C}_2) = 0,$$

que es de la forma (2.18).

La ecuación (2.18) es llamada ***la ecuación del haz de rectas que pasan por el punto*** (x_0, y_0)[⟨17⟩].

Note que el problema de encontrar la ecuación general de una recta se reduce, en principio, a calcular tres números reales: los coeficientes de una ecuación lineal en dos variables

$$\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$$

para la que $\mathsf{A} \neq 0$ o $\mathsf{B} \neq 0$.

Pero, los tres coeficientes no son independientes entre sí, ya que: si $\mathsf{A} \neq 0$, la ecuación anterior resulta equivalente a la ecuación

$$x + \tfrac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}}y + \tfrac{\mathsf{C}}{\mathsf{A}} = 0;$$

y si $\mathsf{B} \neq 0$, la ecuación anterior resulta equivalente a la ecuación

$$\tfrac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}x + y + \tfrac{\mathsf{C}}{\mathsf{B}} = 0.$$

De aquí obtenemos que sólo dos de los coeficientes son independientes, es decir, sólo tenemos que calcular, en verdad, dos números reales (note que en la forma corte-pendiente de la ecuación de una recta, sólo debemos calcular m y b; y en la forma simétrica, sólo a y b).

De este modo, el Álgebra de las ecuaciones lineales nos lleva a asegurar que, para encontrar la ecuación general de una recta, son suficientes dos ***ecuaciones lineales independientes*** (entendiendo por esto que ninguna de ellas es un múltiplo real de la otra) cuyas variables sean los coeficientes buscados; en este contexto presupondremos que cada una de esas ecuaciones corresponde a una condición geométrica.

Por esta razón diremos que *toda recta queda determinada por dos condiciones* (algebraicas o geométricas) *independientes*; hasta ahora hemos procedido a encontrar la ecuación general de una recta, de las maneras regulares: a partir de ***dos de sus puntos distintos***, o de ***uno de sus puntos y su dirección*** (sea ésta la pendiente o la inclinación). En verdad, en la mayoría de los problemas que enfrentaremos en este estudio, los datos sobre las rectas de las que tengamos que encontrar su ecuación, siempre podrán reducirse a una de estas dos maneras regulares.

Así, al establecer una única condición de ese tipo, no determinamos una única recta, sino una infinidad de rectas que comparten la propiedad común establecida por esa única condición; llamaremos a todas esas rectas la ***familia de rectas*** que satisfacen la condición dada.

En este estudio, la condición única (geométrica o algebraica) que determina una familia de rectas siempre se podrá expresar en términos algebraicos; en otras palabras, dicha condición se hará patente en la forma de un nuevo tipo de variables (distintas de aquellas que representan las coordenadas de un punto genérico del plano) a las que, asignándoles un valor específico, determinan cada uno de los miembros de la familia: esas nuevas variables son llamadas los ***parámetros***[⟨18⟩] de la familia.

El caso del haz de rectas que pasan por un punto prefijado, y que hemos estudiado más arriba, es un ejemplo de familia de rectas para la que m y n serían los parámetros que la definen.

Como ejemplos importantes de familias de rectas podemos ofrecer los siguientes.

➤ **EJEMPLO 2.17** (FAMILIA DE LAS RECTAS PERPENDICULARES AL EJE $\mathbf{x}$)
Una familia de rectas destacada por el hecho de que representan casos excepcionales en el estudio de las rectas en general, y que hemos introducido en el capítulo anterior (Teorema 1.(a)), es el de la familia de las rectas perpendiculares al eje $\mathbf{x}$*, cuya ecuación podemos ofrecer en la forma*

$$x - h = 0.$$

Note que hemos expresado la ecuación de esta familia, parametrizada con h, que representa la abscisa en el origen de cada una de las rectas que conforman la familia. QEE ◄

➤ **EJEMPLO 2.18** (FAMILIA DE LAS RECTAS NO PERPENDICULARES AL EJE $\mathbf{x}$)
Haciendo uso de la forma explícita de la ecuación de una recta, la siguiente ecuación representará la familia de las rectas que no son perpendiculares al eje $\mathbf{x}$

$$y = mx + t.$$

Note que hemos expresado la ecuación de esta familia, parametrizada con m y t, que representan la pendiente y la ordenada en el origen de cada una de las rectas que conforman la familia, respectivamente. QEE ◄

➤ **EJEMPLO 2.19** (FAMILIA DE LAS RECTAS POR UN PUNTO PREFIJADO, NO PERPENDICULARES AL EJE $\mathbf{x}$)
Haciendo uso de la forma canónica de la ecuación de una recta, podemos ofrecer la ecuación de la familia de las rectas que pasan por un punto prefijado y que no son perpendiculares al eje $\mathbf{x}$.

Pongamos por caso que el punto prefijado tiene coordenadas $(1, 2)$*; la familia de rectas que pasan por el punto* $(1, 2)$ *y que no son perpendiculares al eje* $\mathbf{x}$ *se puede representar por la ecuación*

$$y - 2 = m(x - 1).$$

En general, si el punto prefijado tiene coordenadas (u, v)*, la familia de rectas que pasan por el punto* (u, v) *y que no son perpendiculares al eje* $\mathbf{x}$ *se puede representar por la ecuación*

$$y - v = m(x - u).$$

Note que hemos expresado la ecuación de esta familia, parametrizada con m, que representa la pendiente de cada una de las rectas que conforman la familia.

Note además que esta familia se diferencia del haz de rectas que pasan por el punto (u, v)*, en que esta última incluye la que es perpendicular al eje* $\mathbf{x}$ *(es decir, la recta* $x = u$*).* QEE ◄

➤ **EJEMPLO 2.20** (FAMILIA DE LAS RECTAS DE PENDIENTE PREFIJADA)
Haciendo uso de la forma explícita de la ecuación de una recta, podemos ofrecer la ecuación de la familia de las rectas que tienen una pendiente común.

Pongamos por caso que la pendiente prefijada es -3; la familia de rectas que tienen pendiente -3 se puede representar por la ecuación

$$y = -3x + b.$$

En general, si la pendiente prefijada es μ, la familia de rectas que tienen pendiente μ se puede representar por la ecuación

$$y = \mu x + b.$$

Note que hemos expresado la ecuación de esta familia, parametrizada con b, que representa la ordenada en el origen de cada una de las rectas que conforman la familia.

Note además que esta familia se podría confundir con la familia de rectas paralelas a una recta prefijada; y esto es verdad, exceptuando el caso en que la recta prefijada sea perpendicular al eje **x** *(es decir, una recta de la forma $x = h$).* **QEE** ◀

OBSERVACIÓN 2.25

(a) *Si, en la ecuación* (2.18)*, fijamos un valor no nulo para uno de los parámetros, digamos m, la ecuación resultante representará la familia de rectas que pasan por el punto (x_0, y_0), excepto la recta $\mathsf{A}_2x + \mathsf{B}_2y + \mathsf{C}_2 = 0$.*

(b) *El método de determinar rectas a través de parámetros es relativamente simple, y tiene como ventaja adicional que, en general, reduce el trabajo en el momento de sacar las cuentas.*
Por ejemplo, para encontrar la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección de otras dos rectas dadas y que satisfaga, además, otra condición específica, no es necesario encontrar el punto de intersección entre dichas rectas.

2.3.4 Perpendicularidad

Consideremos dos rectas

$$l_1 : \ \mathsf{A}_1x + \mathsf{B}_1y + \mathsf{C}_1 = 0$$
$$(\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1 \text{ y } \mathsf{C}_1 \text{ números reales con } \mathsf{A}_1 \neq 0 \text{ o } \mathsf{B}_1 \neq 0); \text{ y}$$

$$l_2 : \ \mathsf{A}_2x + \mathsf{B}_2y + \mathsf{C}_2 = 0$$
$$(\mathsf{A}_2, \mathsf{B}_2 \text{ y } \mathsf{C}_2 \text{ números reales con } \mathsf{A}_2 \neq 0 \text{ o } \mathsf{B}_2 \neq 0).$$

El objetivo central de esta parte del capítulo es verificar lo afirmado en el siguiente Teorema.

TEOREMA 10 (CRITERIO DE PERPENDICULARIDAD ENTRE DOS RECTAS)
Las rectas l_1 y l_2 ***son perpendiculares*** *si, y sólo si,* $\begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 \\ -\mathsf{B}_2 & \mathsf{A}_2 \end{vmatrix} = 0.$

■ **PRUEBA**
Haciendo uso de la observación 2.20.(c), tendremos que: l_1 es perpendicular a l_2 si, y sólo si, las rectas de ecuaciones $\mathsf{A}_1x + \mathsf{B}_1y = 0$ y $\mathsf{A}_2x + \mathsf{B}_2y = 0$ son perpendiculares.

Por esta razón, basta estudiar el caso en que $\mathsf{C}_1 = \mathsf{C}_2 = 0$, es decir, aquel en que las rectas l_1 y l_2 pasan por el origen.

Supongamos, entonces, que las ecuaciones de l_1 y l_2 son $\mathsf{A}_1x+\mathsf{B}_1y = 0$ y $\mathsf{A}_2x+\mathsf{B}_2y = 0$, respectivamente.

Si $\mathsf{B}_1 = 0$ (en cuyo caso $\mathsf{A}_1 \neq 0$ y l_1 es perpendicular al eje **x**), tendremos que l_2 es perpendicular a l_1 si, y sólo si, l_2 es perpendicular al eje **y**, es decir, si, y sólo si, $\mathsf{A}_2 = 0$; y esto sucede, si y sólo si, $\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2 + \mathsf{B}_1\mathsf{B}_2 = 0$.

De manera análoga tendremos que, si $\mathsf{B}_2 = 0$, se tiene que l_1 es perpendicular a l_2 si, y sólo si, $\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2 + \mathsf{B}_1\mathsf{B}_2 = 0$.

Analicemos, entonces, el caso en que $\mathsf{B}_1 \neq 0$ y $\mathsf{B}_2 \neq 0$.

Consideremos sendos puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ en las rectas l_1 y l_2, respectivamente, distintos del origen O; en cuyo caso

$$\mathsf{A}_1x_1 + \mathsf{B}_1y_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad \mathsf{A}_2x_2 + \mathsf{B}_2y_2 = 0 \tag{2.20}$$

y

$$x_1 \neq 0 \qquad \text{y} \qquad x_2 \neq 0. \tag{2.21}$$

Es claro que las rectas l_1 y l_2 son perpendiculares si, y sólo si, el triángulo $\triangle PO Q$ es rectángulo con ángulo recto en el vértice O (ver la figura 2.7).

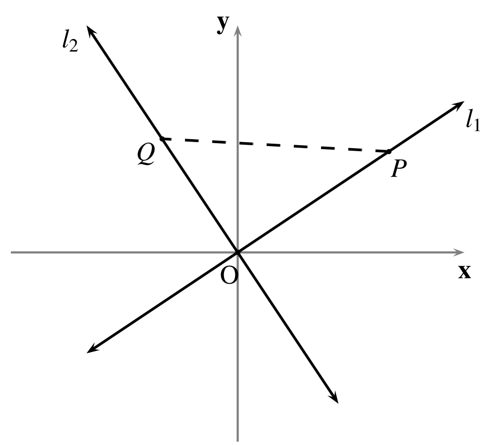


FIGURA 2.7 Rectas perpendiculares en el origen

Por el Teorema de Pitágoras tenemos que el triángulo $\triangle PO Q$ es rectángulo con ángulo recto en el vértice O si, y sólo si, $PQ^2 = \mathrm{O}P^2+\mathrm{O}Q^2$; y, después de sacar las cuentas, esto sucede si, y sólo si, $x_1x_2+y_1y_2 = 0$.

Por otro lado, despejando en (2.20), tenemos que $y_1 = -\frac{\mathsf{A}_1}{\mathsf{B}_1}x_1$ y $y_2 = -\frac{\mathsf{A}_2}{\mathsf{B}_2}x_2$.

Así, por sustitución se tiene que $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ si, y sólo si, $x_1x_2 + \frac{\mathsf{A}_1}{\mathsf{B}_1}\frac{\mathsf{A}_2}{\mathsf{B}_2}x_1x_2 = 0$, es decir si, y sólo si, $\left(1 + \frac{\mathsf{A}_1}{\mathsf{B}_1}\frac{\mathsf{A}_2}{\mathsf{B}_2}\right)x_1x_2 = 0$.

Finalmente, por (2.21), se tiene que l_1 y l_2 son perpendiculares si, y sólo si, $\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2 + \mathsf{B}_1\mathsf{B}_2 = 0$.

QEP ■

➤ EJEMPLO 2.21
Las rectas $3x + 5y - 7 = 0$ *y* $5x - 3y - 2 = 0$ *son perpendiculares porque*

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

QEE ◄

La siguiente proposición es consecuencia inmediata del Teorema anterior.

COROLARIO 2.2
Una recta l *es perpendicular a la recta de ecuación* $\mathsf{A}x+\mathsf{B}y+\mathsf{C} = 0$ *si, y sólo si,* l *puede ser representada por una ecuación de la forma*

$$-\mathsf{B}x + \mathsf{A}y + \mathsf{D} = 0 \quad \textit{(con los mismos coeficientes } \mathsf{A} \textit{ y } \mathsf{B}\textit{).}$$

■ **PRUEBA**
Supongamos que una recta l, de ecuación $\mathsf{E}x + \mathsf{F}y + \mathsf{G} = 0$, es perpendicular a la recta l' de ecuación $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$. Por el Teorema 10,

$$\mathsf{AE} + \mathsf{BF} = 0. \tag{2.22}$$

Por la observación 2.2 tendremos que $\mathsf{B} = 0$ si, y sólo si, $\mathsf{E} = 0$.
Supongamos que $\mathsf{B} = 0$ (en cuyo caso $\mathsf{E} = 0$). Así, multiplicando ambos términos de la ecuación de l por $\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{F}}$ tenemos, por el Teorema 6, que la ecuación $-\mathsf{B}x + \mathsf{A}y + \mathsf{D} = 0$, donde $\mathsf{D} = \frac{\mathsf{AG}}{\mathsf{F}}$ y $\mathsf{B} = 0$, representa también a la recta l.
Supongamos que $\mathsf{B} \neq 0$ (en cuyo caso $\mathsf{E} \neq 0$). Así, multiplicando ambos términos de la ecuación de l por $-\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{E}}$ tenemos, por el Teorema 6, que la ecuación $-\mathsf{B}x + \mathsf{A}y + \mathsf{D} = 0$, donde $\mathsf{D} = -\frac{\mathsf{BG}}{\mathsf{E}}$, representa también a la recta l pues, por (2.22), $\mathsf{A} = -\frac{\mathsf{BF}}{\mathsf{E}}$.
Por otro lado, es claro que si la recta l es representada por la ecuación $-\mathsf{B}x + \mathsf{A}y + \mathsf{D} = 0$ (con los mismos coeficientes A y B) tendremos, por el Teorema 10, que l es perpendicular a la recta de ecuación $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$.

QEP ■

La siguiente observación recoge la solución analítica a un problema bastante común.

OBSERVACIÓN 2.26 (RECTA PERPENDICULAR A UNA RECTA DADA POR UN PUNTO CUALQUIERA)
La ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$*, y que pasa por el punto* $P = (x_0, y_0)$*, es*

$$-\mathsf{B}(x - x_0) + \mathsf{A}(y - y_0) = 0.$$

(por el hecho de que $-\mathsf{AB} + \mathsf{AB} = 0$*, tenemos que esta recta es perpendicular a la recta dada; por el hecho de que las coordenadas de* P *satisfacen esta ecuación, tenemos que* P *está en esta recta).*

➤ **EJEMPLO 2.22**
La ecuación de la recta perpendicular a la recta $2x - 3y + 5 = 0$ *y que pasa por el punto* $(2, -3)$ *es*

$$3(x - 2) + 2(y + 3) = 0,$$

que es equivalente a

$$3x + 2y = 0.$$

QEE ➤

Tal como presentamos en la siguiente observación, el Teorema 10 permite extender los criterios de perpendicularidad a otras formas de la ecuación de una recta, muy útiles en algunos contextos.

OBSERVACIÓN 2.27 (PERPENDICULARIDAD USANDO LA FORMA EXPLÍCITA DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA)
Haciendo uso de la forma explícita de la ecuación de una recta (ecuación (2.12)*) tenemos que:*

dos rectas son perpendiculares si, y sólo si, el producto de sus pendientes es -1*;*

o, en otras palabras,

dos rectas son perpendiculares si, y sólo si, la pendiente de una de ellas es el opuesto del recíproco de la pendiente de la otra*.*

Distancia de un punto a una recta, y entre dos rectas

La distancia de un punto P a una recta l, que denotaremos por $\mathbf{d}(P, l)$, es definida como la más pequeña de las distancias $\mathbf{d}(P, R)$, donde R es un punto de l; de la Geometría elemental sabemos que ese valor se alcanza cuando R es el punto Q, la proyección sobre l del punto P (ver la figura 2.8).

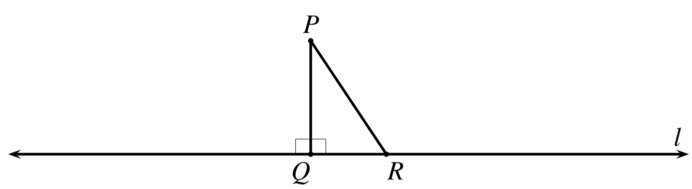


FIGURA 2.8 Distancia de un punto a una recta

Nos proponemos encontrar una expresión algebraica que nos permita calcular dicha distancia, en términos de las coordenadas del punto P y los coeficientes de la ecuación general de la recta l.

Pongamos por caso, entonces, que las coordenadas de P son (x_0, y_0), y que la ecuación general de la recta l es $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$.

Por la observación 2.26 sabemos que la ecuación general de la recta perpendicular a l por P es $-\mathsf{B}(x - x_0) + \mathsf{A}(y - y_0) = 0$. Además, el punto de intersección de las dos rectas⟨19⟩ es

$$Q = \left(\frac{\mathsf{B}^2x_0 - \mathsf{A}\mathsf{B}y_0 - \mathsf{A}\mathsf{C}}{\mathsf{A}^2+\mathsf{B}^2}, \frac{-\mathsf{A}\mathsf{B}x_0 + \mathsf{A}^2y_0 - \mathsf{B}\mathsf{C}}{\mathsf{A}^2+\mathsf{B}^2}\right);$$

de donde, después de sacar las cuentas, se tiene que

$$\mathbf{d}(P, l) = \frac{|\mathsf{A}x_0 + \mathsf{B}y_0 + \mathsf{C}|}{\sqrt{\mathsf{A}^2 + \mathsf{B}^2}}. \tag{2.23}$$

En conclusión:

> Para calcular la distancia entre el punto $P = (x_0, y_0)$ y la recta l de ecuación $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$, en términos de las coordenadas del punto P y los coeficientes de la ecuación de la recta l, tenemos la fórmula
> $$\mathbf{d}(P, l) = \frac{|\mathsf{A}x_0 + \mathsf{B}y_0 + \mathsf{C}|}{\sqrt{\mathsf{A}^2 + \mathsf{B}^2}}.$$

➤ EJEMPLO 2.23

La distancia del punto $P = (2, -3)$ *a la recta* $l: \ 3x + 5y - 7 = 0$ *es*

$$\mathbf{d}(P, l) = \frac{|3 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) - 7|}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = \frac{16}{\sqrt{34}}.$$

QEE ◄

La distancia entre dos rectas, l y l', que denotaremos por $\mathbf{d}(l, l')$, es definida como la más pequeña de las distancias $\mathbf{d}(P, R)$, donde P es un punto de l y R es un punto de l'.

De este modo, es claro que, l y l' se cortan si, y sólo si, $\mathbf{d}(l, l') = 0$.

Ahora, por el Principio E.10, dos rectas son paralelas si, y sólo si, son distintas y todos los puntos de una de ellas equidistan de la otra. Por tanto, el problema de hallar la distancia entre rectas paralelas se reduce a encontrar la distancia, entre un punto cualquiera de una de ellas, y la otra recta; nos proponemos encontrar una expresión algebraica que nos permita calcular dicha distancia, en términos de los coeficientes de las ecuaciones generales de las rectas l y l'.

Pongamos por caso, entonces, que la ecuación de l es $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C}_1 = 0$ y, por el corolario 2.1, que la de l' es $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C}_2 = 0$, con $\mathsf{C}_1 \neq \mathsf{C}_2$.

Considerando la recta $l'': \ -\mathsf{B}x + \mathsf{A}y = 0$, perpendicular a l por el origen, el punto

$$P = \left(\tfrac{-\mathsf{C}_1}{\mathsf{A}^2+\mathsf{B}^2}\mathsf{A}, \tfrac{-\mathsf{C}_1}{\mathsf{A}^2+\mathsf{B}^2}\mathsf{B}\right)$$

es el punto donde l corta a l''; así, haciendo uso de la ecuación (2.23), tenemos que

$$\mathbf{d}(P, l') = \frac{\left|\mathsf{A}\tfrac{-\mathsf{C}_1}{\mathsf{A}^2+\mathsf{B}^2}\mathsf{A} + \mathsf{B}\tfrac{-\mathsf{C}_1}{\mathsf{A}^2+\mathsf{B}^2}\mathsf{B} + \mathsf{C}_2\right|}{\sqrt{\mathsf{A}^2 + \mathsf{B}^2}};$$

de donde, después de sacar las cuentas, se tiene que

$$\mathbf{d}(l, l') = \frac{|\mathsf{C}_2 - \mathsf{C}_1|}{\sqrt{\mathsf{A}^2 + \mathsf{B}^2}}. \tag{2.24}$$

En conclusión:

Para calcular la distancia entre las rectas l y l' de ecuaciones $\mathsf{A}x+\mathsf{B}y+\mathsf{C}_1 = 0$ y $\mathsf{A}x+\mathsf{B}y+\mathsf{C}_2 = 0$, en términos de los coeficientes de las ecuaciones de las rectas l y l', tenemos la fórmula

$$\mathbf{d}(l, l') = \begin{cases} 0, & \text{si } l \text{ y } l' \text{ no son paralelas;} \\ \frac{|\mathsf{C}_2-\mathsf{C}_1|}{\sqrt{\mathsf{A}^2+\mathsf{B}^2}}, & \text{si } l \text{ y } l' \text{ son paralelas.} \end{cases}$$

➤ EJEMPLO 2.24

La distancia entre las rectas paralelas $l:\ 3x + 5y - 7 = 0$ y $l':\ 3x + 5y - 1 = 0$ es

$$\mathbf{d}(l, l') = \frac{|-1+7|}{\sqrt{3^2+5^2}} = \frac{6}{\sqrt{34}}.$$

QEE ⮜

OBSERVACIÓN 2.28

(a) *Si consideramos la forma normal de la ecuación de la recta l, $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$ (ver la observación 2.19), entonces se simplifica el cálculo de la distancia hasta ella desde un punto $P = (x_0, y_0)$ pues, en ese caso,*

$$\mathbf{d}(P, l) = |\mathsf{A}x_0 + \mathsf{B}y_0 + \mathsf{C}|.$$

(b) *Note que, por la parte anterior, si $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$ es la forma normal de la ecuación de una recta l, entonces $\mathbf{d}(\mathrm{O}, l) = |\mathsf{C}|$; es decir,*

***el valor absoluto del término independiente es la distancia del origen a la recta**.*

(c) *Si consideramos las formas normales de las ecuaciones de dos rectas paralelas l y l', $\mathsf{A}x+\mathsf{B}y+\mathsf{C}_1 = 0$ y $\mathsf{A}x+\mathsf{B}y+\mathsf{C}_2 = 0$ con $\mathsf{C}_1 \neq \mathsf{C}_2$, entonces se simplifica el cálculo de la distancia entre ellas pues, en ese caso,*

$$\mathbf{d}(l, l') = |\mathsf{C}_2 - \mathsf{C}_1|.$$

2.3.5 Ángulos entre rectas

Consideremos dos rectas

$$l_1:\ \mathsf{A}_1x + \mathsf{B}_1y + \mathsf{C}_1 = 0$$
$$(\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1 \text{ y } \mathsf{C}_1 \text{ números reales con } \mathsf{A}_1 \neq 0 \text{ o } \mathsf{B}_1 \neq 0); \text{ y}$$

$$l_2:\ \mathsf{A}_2x + \mathsf{B}_2y + \mathsf{C}_2 = 0$$
$$(\mathsf{A}_2, \mathsf{B}_2 \text{ y } \mathsf{C}_2 \text{ números reales con } \mathsf{A}_2 \neq 0 \text{ o } \mathsf{B}_2 \neq 0).$$

Tendrá sentido hablar de un ángulo determinado por las rectas l_1 y l_2, sólo en el caso en que dichas rectas sean concurrentes, pues dos rectas paralelas o coincidentes no determinan entre ellas, desde el punto de vista de la Geometría elemental, ningún ángulo. Por esta razón, y por otras que daremos en su debido momento, el estudio que desarrollaremos en este parágrafo estará sujeto a algunos presupuestos, el primero de los cuales es que

(1) *las rectas l_1 y l_2 son concurrentes*, para lo cual basta verificar que

$$\begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 \\ \mathsf{A}_2 & \mathsf{B}_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{(es decir, } \mathsf{A}_1\mathsf{B}_2 - \mathsf{A}_2\mathsf{B}_1 \neq 0\text{).}$$

Como ya hemos estudiado anteriormente el caso en que las rectas l_1 y l_2 son perpendiculares, asumiremos que

(2) *las rectas l_1 y l_2 no son perpendiculares*, para lo cual basta verificar que

$$\begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 \\ -\mathsf{B}_2 & \mathsf{A}_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{es decir, } \mathsf{A}_1\mathsf{A}_2 + \mathsf{B}_1\mathsf{B}_2 \neq 0\text{).}$$

Si las rectas l_1 y l_2 son concurrentes, digamos en el punto P, entonces ellas determinan exactamente cuatro ángulos con vértice en P; estos ángulos constituyen dos pares de ángulos opuestos por el vértice, y cada uno de ellos es suplemento de otros dos.

Visto así, la expresión “**el** ángulo determinado por dos rectas concurrentes”, así como “**el** ángulo comprendido entre dos rectas concurrentes”, son ambiguas. Pero, como los ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida, y la suma de las medidas de dos ángulos suplementarios es 180, para hallar las medidas de todos esos ángulos, bastará con hallar la medida de uno de ellos.

Nuestro propósito inicial será expresar la tangente de alguno de esos ángulos en términos de las pendientes de las rectas l_1 y l_2; como necesitamos que las pendientes de las rectas estén definidas, asumiremos que

(3) *las rectas l_1 y l_2 no son perpendiculares al eje* **x** (para lo cual basta verificar que $\mathsf{B}_1\mathsf{B}_2 \neq 0$); *y que sus inclinaciones son, respectivamente, α_1 y α_2* (con lo que $\alpha_1 \neq 90$, $\alpha_2 \neq 90$ y $\alpha_1 \neq \alpha_2$).

Para poder precisar exactamente cuál de los cuatro ángulos que determinan dos rectas concurrentes, asumiremos finalmente que

(4) *los ángulos de los que hablaremos son pares ordenados de rayos con el mismo origen, tal como se conciben en Trigonometría, en los cuales:*

- **(I)** *el rayo de la primera componente del par es llamado el **lado inicial**, y el de la segunda es llamado el **lado final**, del ángulo (así, el ángulo $\angle BAC$, de lado inicial $\overrightarrow{AB}$ y lado final $\overrightarrow{AC}$, y el ángulo $\angle CAB$, de lado inicial $\overrightarrow{AC}$ y lado final $\overrightarrow{AB}$, son distintos);*
- **(II)** *la medida de los ángulos está **orientada**, siendo **positiva** cuando el arco con centro en el vértice y radio positivo, descrito desde el lado inicial hasta el lado final, coincide con el sentido antihorario (contrario al de las agujas del reloj), y **negativa** cuando dicho sentido es el horario (así, las medidas de los ángulos $\angle BAC$ y $\angle CAB$ son opuestas);*
- **(III)** *el rango de la medida de los ángulos se puede extender desde* -360 *hasta* 360.

Asumiendo (1), (2), (3) y (4), se puede verificar (ver la sección A.2 del Apéndice A) que:

TEOREMA 11 (ÁNGULOS ENTRE DOS RECTAS)
Cualquiera de los dos ángulos β determinados por las rectas l_1 y l_2 que tienen lado inicial en la recta l_1, lado final en la recta l_2, y medida no negativa entre 0 y 180 (que en las condiciones establecidas $\beta \neq 0$ y $\beta \neq 90$), es tal que

$$\tan\beta = \frac{\begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 \\ \mathsf{A}_2 & \mathsf{B}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 \\ -\mathsf{B}_2 & \mathsf{A}_2 \end{vmatrix}}. \tag{2.25}$$

Si las respectivas inclinaciones de l_1 y l_2 son α_1 y α_2, tendremos que

$$\tan\beta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2 \tan\alpha_1}; \tag{2.26}$$

y, si las respectivas pendientes de l_1 y l_2 son m_1 y m_2, tendremos que

$$\tan\beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}. \tag{2.27}$$

En conclusión:

Dadas dos rectas concurrentes, no perpendiculares entre sí y no perpendiculares al eje **x**, l_1 y l_2 de ecuaciones $\mathsf{A}_1 x + \mathsf{B}_1 y + \mathsf{C}_1 = 0$ y $\mathsf{A}_2 x + \mathsf{B}_2 y + \mathsf{C}_2 = 0$, respectivamente, para calcular la tangente del ángulo β de lado inicial en l_1, lado final en l_2, y medida no negativa entre 0 y 180, tenemos la fórmula

$$\tan\beta = \frac{\begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 \\ \mathsf{A}_2 & \mathsf{B}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 \\ -\mathsf{B}_2 & \mathsf{A}_2 \end{vmatrix}};$$

si las respectivas inclinaciones son α_1 y α_2, tenemos la fórmula

$$\tan\beta = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2 \tan\alpha_1};$$

y, si las respectivas pendientes son m_1 y m_2, tenemos la fórmula

$$\tan\beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}.$$

➤ **EJEMPLO 2.25**
Para calcular los ángulos que determinan las dos rectas concurrentes (ver el ejemplo 2.12)

$$l_1 : \; 2x + 3y - 5 = 0 \quad y \quad l_2 : \; 3x + 2y + 1 = 0$$

procedemos de la siguiente manera.

En primer lugar nos aseguramos de que no son perpendiculares entre sí: como $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$, *tendremos que no son perpendiculares.*

En segundo lugar nos aseguramos de que no son perpendiculares al eje **x**; *lo cual es claro.*

Finalmente calculamos la tangente del ángulo β *según el Teorema 11*

$$\tan\beta = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{2\cdot 2 - 3\cdot 3}{2\cdot 3 + 3\cdot 2} = -\frac{5}{12};$$

de donde $\beta = 157.38$ *aproximadamente. Así, dos de los ángulos determinados por* l_1 *y* l_2 *miden* 157.38, *y los otros dos miden* 22.62. **QEE** ◀

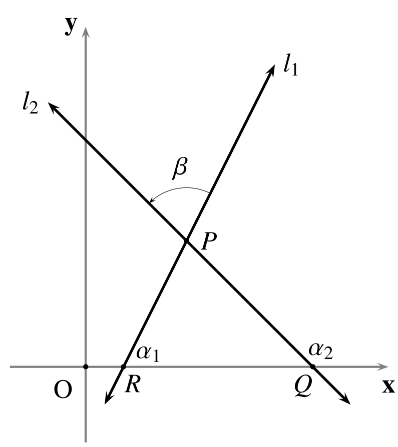


FIGURA 2.9 Ángulo entre dos rectas

Bisectores de los ángulos entre dos rectas

Consideremos dos rectas concurrentes

$$l_1 : \ \mathsf{A}_1 x + \mathsf{B}_1 y + \mathsf{C}_1 = 0$$
$$(\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1 \text{ y } \mathsf{C}_1 \text{ números reales con } \mathsf{A}_1 \neq 0 \text{ o } \mathsf{B}_1 \neq 0); \text{ y}$$

$$l_2 : \ \mathsf{A}_2 x + \mathsf{B}_2 y + \mathsf{C}_2 = 0$$
$$(\mathsf{A}_2, \mathsf{B}_2 \text{ y } \mathsf{C}_2 \text{ números reales con } \mathsf{A}_2 \neq 0 \text{ o } \mathsf{B}_2 \neq 0).$$

De la Geometría elemental sabemos que la unión de los bisectores, de los cuatro ángulos que determinan dos rectas concurrentes, coincide con el conjunto de los puntos que ***equidistan*** de dichas rectas⟨20⟩.

Así, los bisectores estarían representados por la ecuación

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Ahora, un punto (x, y) satisface esa ecuación si, y sólo si, satisface una de las dos ecuaciones siguientes:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = -\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}};$$

que son precisamente las ecuaciones de sendas rectas que determinan dichos bisectores.

Si hubiéramos considerado las ecuaciones normales de las rectas, tendríamos las ecuaciones más simples:

$$(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (C_1 - C_2) = 0,$$

que equivale a restar, miembro a miembro, las ecuaciones de las rectas; y

$$(A_1 + A_2)x + (B_1 + B_2)y + (C_1 + C_2) = 0,$$

que equivale a sumar, miembro a miembro, las ecuaciones de las rectas; como además tendríamos, en este caso, que

$$(A_1 - A_2)(A_1 + A_2) + (B_1 - B_2)(B_1 + B_2) = (A_1)^2 - (A_2)^2 + (B_1)^2 - (B_2)^2 = 1 - 1 = 0,$$

tenemos verificado, algebraicamente, el resultado de la Geometría elemental que asegura que ***los bisectores de dos ángulos que forman un par lineal son perpendiculares***.

➤ EJEMPLO 2.26

Para calcular las ecuaciones de las rectas que contienen los bisectores de los cuatro ángulos que determinan las dos rectas concurrentes (ver el ejemplo 2.12)

$$l_1 : \ 2x + 3y - 5 = 0 \quad y \quad l_2 : \ 3x + 2y + 1 = 0$$

planteamos las ecuaciones

$$\frac{2x + 3y - 5}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{3x + 2y + 1}{\sqrt{3^2 + 2^2}}$$

$$\frac{2x + 3y - 5}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = -\frac{3x + 2y + 1}{\sqrt{3^2 + 2^2}};$$

de donde las ecuaciones de dichas rectas son

$$x - y + 6 = 0 \quad y \quad 5x + y - 6 = 0.$$

QEE ➤

§ 2.4 Inecuaciones lineales y semiplanos determinados por una recta

El objetivo central de esta parte del capítulo es ofrecer la representación analítica de los dos semiplanos determinados por una recta, presentada en el siguiente Teorema y cuya prueba, para no recargar la exposición, exponemos en la sección A.2 del Apéndice A.

TEOREMA 12 (REPRESENTACIÓN ANALÍTICA DE LOS SEMIPLANOS DETERMINADOS POR UNA RECTA)
Si la ecuación general de la recta l es $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$ $(\mathsf{A}^2 + \mathsf{B}^2 \neq 0)$*, entonces los conjuntos*

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} > 0\}$$
$$H' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} < 0\}$$

coinciden con los semiplanos determinados por la recta l.
Además, la orientación $\overrightarrow{ON}$*, donde* $N = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$*, indica geométricamente cuál es el semiplano* H*.*

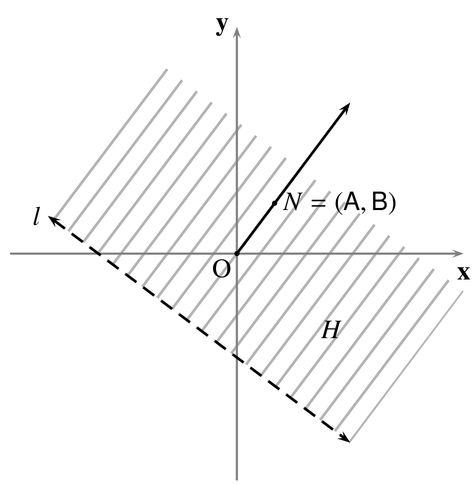


FIGURA 2.10 Semiplano $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} > 0\}$

Sabemos, por la Geometría elemental, que los dos semiplanos determinados por una recta quedan establecidos, si se sabe en cuál de ellos está un punto previamente fijado fuera de la recta. Este criterio nos provee de una estrategia alternativa para determinar, geométricamente, cuál es la inecuación que define cada uno de los semiplanos determinados por la recta $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$: tomamos un punto cualquiera que no esté sobre la recta (en lo posible, y por comodidad, el origen O o el punto N); chequeamos cuál de las desigualdades $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} > 0$ o $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} < 0$ satisface ese punto; el semiplano en el que se encuentra el punto escogido es el determinado por la desigualdad que éste satisface.

➤ **EJEMPLO 2.27**
Representemos gráficamente el semiplano H' *de la recta* $x + y - 3 = 0$ *(ver la figura 2.11).*

Al sustituir las coordenadas del origen en la ecuación de l, tenemos que $0 + 0 - 3 = -3 < 0$*; de donde* H' *es el semiplano que contiene al origen.* QEE ➤

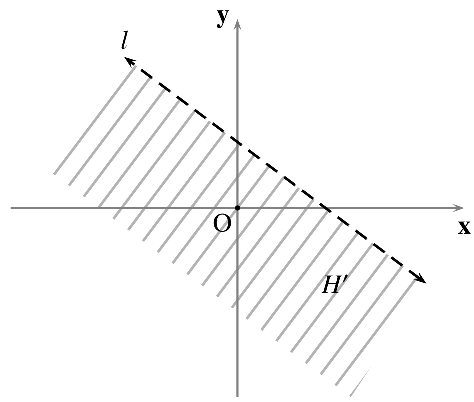


FIGURA 2.11 Representación gráfica correspondiente al ejemplo 2.27

En general, el conjunto solución de una de las desigualdades lineales $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} \lesseqqgtr 0$ *será uno de los semiplanos determinados por la recta* $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$*; incluirá el borde, sólo en el caso en que tuviéramos "⩾" o "⩽".*
En lo que se refiere a la representación gráfica de esos conjuntos, haremos la misma convención que hemos hecho con las rectas perpendiculares a alguno de los ejes (ver la página 16).

Aplicaciones de las inecuaciones lineales

El tener descritos analíticamente los dos semiplanos determinados por una recta permite resolver un problema que, usualmente, presenta ciertas sutilezas: de las dos rectas que contienen los bisectores de los cuatro ángulos determinados por dos rectas concurrentes, *¿cuál de ellas contiene al bisector de uno de esos ángulos previamente establecido?*

Esta situación se presenta, por ejemplo, cuando queremos determinar la recta que contiene la bisectriz de uno de los ángulos de un triángulo (para luego hallar, el incentro o el incírculo, el extremo de la bisectriz que no es un vértice del triángulo, las longitudes de las bisectrices, etc.).

Pongamos por caso, que tenemos un triángulo $\triangle PQR$ y queremos determinar cuál es la recta que contiene la bisectriz del ángulo $\angle QPR$.

Pongamos por caso que

$$\overleftrightarrow{PQ}: \ \mathsf{A}_1 x + \mathsf{B}_1 y + \mathsf{C}_1 = 0$$
$$(\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1 \text{ y } \mathsf{C}_1 \text{ números reales con } \mathsf{A}_1 \neq 0 \text{ o } \mathsf{B}_1 \neq 0); \text{ y}$$

$$\overleftrightarrow{PR}: \ \mathsf{A}_2 x + \mathsf{B}_2 y + \mathsf{C}_2 = 0$$
$$(\mathsf{A}_2, \mathsf{B}_2 \text{ y } \mathsf{C}_2 \text{ números reales con } \mathsf{A}_2 \neq 0 \text{ o } \mathsf{B}_2 \neq 0).$$

Por lo que ya hemos hecho en la sección anterior, contamos con las ecuaciones de dos rectas b_1 y b_2 como candidatas a ser la recta requerida, a saber

$$b_1 : \ \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$
$$b_2 : \ \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = -\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Por Geometría elemental sabemos que sólo una de esas dos rectas ubica a cada uno de los puntos Q y R en semiplanos opuestos, de los dos semiplanos determinados por ella.

Así el algoritmo para resolver el problema planteado consiste en sustituir las coordenadas de los puntos Q y R en la ecuación de una de ellas, digamos b_1, y ver si los resultados tienen o no el mismo signo: si tienen signos distintos, b_1 es la recta buscada; en caso contrario, b_2 es la recta buscada.

➤ Ejemplo 2.28

Calculemos las medidas de los ángulos interiores y el incentro del triángulo cuyos vértices son

$$\mathrm{O} = (0,0), \quad P = (3,0) \quad y \quad Q = \left(\tfrac{3}{1+\sqrt{3}}, \tfrac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right).$$

La medida del ángulo $\angle Q\mathrm{O}P$ *es* $\arctan\left(\frac{\frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}}{\frac{3}{1+\sqrt{3}}}\right) = \arctan(\sqrt{3}) = 60.$

La medida del ángulo $\angle QP\mathrm{O}$ *es* $180 - \arctan\left(\frac{\frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}}{\frac{3}{1+\sqrt{3}}-3}\right) = 180 - \arctan(-1) = 180 - 135 = 45.$

En consecuencia, la medida del ángulo $\angle \mathrm{O}QP$ *es* 75.

Las ecuaciones de las rectas que contienen los lados del triángulo $\triangle \mathrm{O}PQ$ *son*

$$\overleftrightarrow{\mathrm{O}P} : \ y = 0, \quad \overleftrightarrow{\mathrm{O}Q} : \ \sqrt{3}x - y = 0 \quad y \quad \overleftrightarrow{PQ} : \ x + y - 3 = 0.$$

Las ecuaciones de las dos rectas que contienen los bisectores de los cuatro ángulos con vértice en O *son*

$$b_1 : \ \sqrt{3}x - 3y = 0 \quad y \quad b_2 : \ \sqrt{3}x + y = 0.$$

Sustituimos las coordenadas de P, y luego las de Q, en la ecuación de b_1

$$\sqrt{3}\cdot 3 - 3\cdot 0 = 3\sqrt{3} > 0 \quad y \quad \sqrt{3}\frac{3}{1+\sqrt{3}} - 3\frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = -\frac{6\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} < 0;$$

como resultan signos contrarios tenemos que esa recta, la b_1*, es la que contiene el bisector del ángulo* $\angle Q\mathrm{O}P$.

Las ecuaciones de las dos rectas que contienen los bisectores de los cuatro ángulos con vértice en P *son*

$$c_1 : \ x + (1 - \sqrt{2})y - 3 = 0 \quad y \quad c_2 : \ x + (1 + \sqrt{2})y - 3 = 0.$$

Sustituimos las coordenadas de O*, y luego las de Q, en la ecuación de* c_1

$$0 + (1 - \sqrt{2})0 - 3 = -3 < 0 \quad y \quad \frac{3}{1+\sqrt{3}} + (1 - \sqrt{2})\frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} - 3 = -\frac{3\sqrt{2}\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} < 0;$$

como resultan los mismos signos tenemos que la otra recta, la c_2, es la que contiene el bisector del ángulo $\angle QPO$ (ver la figura 2.12).

Para encontrar el incentro, resolvemos el sistema de ecuaciones formado por b_1 y c_2

$$\begin{cases} \sqrt{3}x - 3y = 0 \\ x + (1 + \sqrt{2})y - 3 = 0 \end{cases};$$

de donde el incentro es el punto

$$I = \left(\frac{9}{(1+\sqrt{2})\sqrt{3}+3}, \frac{3\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})\sqrt{3}+3}\right).$$

QEE ◄

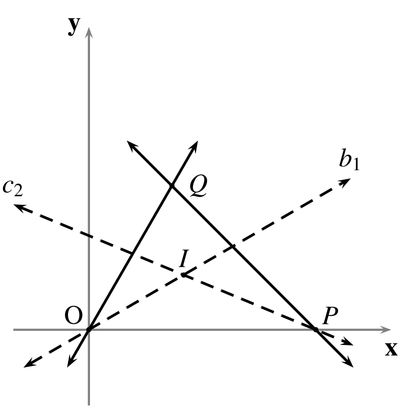


FIGURA 2.12 Representación gráfica correspondiente al ejemplo 2.28

Finalizaremos esta sección, y el capítulo, con algunas palabras sobre los sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas; hablaremos sólo del de dos inecuaciones, pues el discurso que desarrollaremos es análogo para el caso general.

Si tuviéramos un sistema de inecuaciones lineales

$$\begin{cases} \mathsf{A}_1x + \mathsf{B}_1y + \mathsf{C}_1 \lesseqqgtr 0 \\ \\ \mathsf{A}_2x + \mathsf{B}_2y + \mathsf{C}_2 \lesseqqgtr 0 \end{cases},$$

el conjunto de los puntos que son solución de ese sistema coincide con la intersección de los dos semiplanos (con o sin el borde, dependiendo del caso) correspondientes a las dos inecuaciones: el resultado es una región convexa del plano que puede ser o no acotada, dependiendo de la configuración de cada caso.

Hay un tipo de situaciones, muy común y de gran interés, que consiste en seleccionar, entre las soluciones de un sistema de inecuaciones lineales, aquellos puntos que hacen que una cierta función lineal adquiera el mayor de sus valores (lo que usualmente se denomina, ***maximizar*** dicha función lineal). El estudio de los métodos o técnicas eficientes para resolver estos problemas de ***optimización*** son el objeto de la disciplina llamada ***Programación lineal***. Presentaremos a continuación un ejemplo ilustrativo.

Una imprenta debe procesar esta semana dos libros, digamos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, cuya confección requiere, entre otros, tres tipos de materiales: papel para la tripa, cartulina para la carátula y tinta negra para la impresión.

La confección de cada libro $\mathcal{A}$ requiere: 3 pliegos de papel, 1 pliego de cartulina y 1 taza de tinta negra; y la de cada libro $\mathcal{B}$ requiere: 2 pliegos de papel, 2 pliegos de cartulina y nada de tinta negra, pues el editor dispuso que se usará tinta azul, en lugar de negra, para su impresión.

En la semana la imprenta dispone sólo de 1200 pliegos de papel, 800 pliegos de cartulina y 300 tazas de tinta negra (el resto de los materiales necesarios no tiene ninguna limitación).

El importe por la producción de cada libro, sea $\mathcal{A}$ o $\mathcal{B}$, es de 400 Bs.

El jefe del taller está interesado en saber cuántos ejemplares de cada libro debe producir para maximizar el ingreso por la producción de dichos libros.

El administrador de la imprenta le dijo que, para ese fin: debe producir 200 ejemplares del libro $\mathcal{A}$ y 300 del libro $\mathcal{B}$; que lo máximo que podía aspirar era un ingreso de 200.000 Bs; que iba a utilizar todo el papel y la cartulina, y que le iba a sobrar tinta negra. Por supuesto, la pregunta natural es ¿de dónde sacó el administrador todos esos datos?

El problema se puede modelar (es decir, formular matemáticamente) de la siguiente manera.

Denotemos por x la cantidad de ejemplares del libro $\mathcal{A}$ que se pretenden producir, y por y la de los del libro $\mathcal{B}$.

La cantidad de pliegos de papel que consumiría la producción de los ejemplares del libro $\mathcal{A}$ es $3x$; y la de los del libro $\mathcal{B}$ es $2y$. De modo que, para la producción de ambos, se consumirían $3x + 2y$ pliegos de papel; procediendo análogamente, se consumirían $x + 2y$ pliegos de cartulina y sólo x tazas de tinta negra.

Las restricciones en la cantidad de papel disponible obligan a que $3x+2y \leqslant 1200$; del mismo modo, $x + 2y \leqslant 800$ para la cartulina y $x \leqslant 300$ para la tinta negra. Además, la producción de ninguno de los libros es negativa; de manera que $x \geqslant 0$ y $y \geqslant 0$.

De esta manera, todas las condiciones a que está expuesto el jefe del taller se pueden expresar de una sola vez por medio del siguiente sistema de inecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + 2y \leqslant 1200 \\ x + 2y \leqslant 800 \\ x \leqslant 300 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

La solución de ese sistema se puede representar gráficamente por la región convexa sombreada en la figura 2.13: los puntos de dicha región constituyen todas las posibles cuotas de producción que puede producir el jefe del taller bajo las restricciones de material que tiene para la semana. Por ejemplo, el punto $D = (100, 100)$, que indica una cuota de producción de 100 ejemplares del libro $\mathcal{A}$ y 100 del libro $\mathcal{B}$, está en la región; de manera que el jefe del taller podría optar por producir dichas cantidades sin violar las condiciones a las que está sometido.

Ahora, el ingreso obtenido por la producción del libro $\mathcal{A}$ es $400x$, y por la del libro $\mathcal{B}$ es $400y$; de manera que el ingreso total por la producción de ambos libros es $I(x, y) = 400x + 400y$.

El ingreso en la cuota de producción del punto D es 80.000 Bs; en verdad, todos los puntos de la recta $400x + 400y = 80000$ (punteada en la figura 2.13) que pasa por D corresponden a $I(x, y) = 80000$.

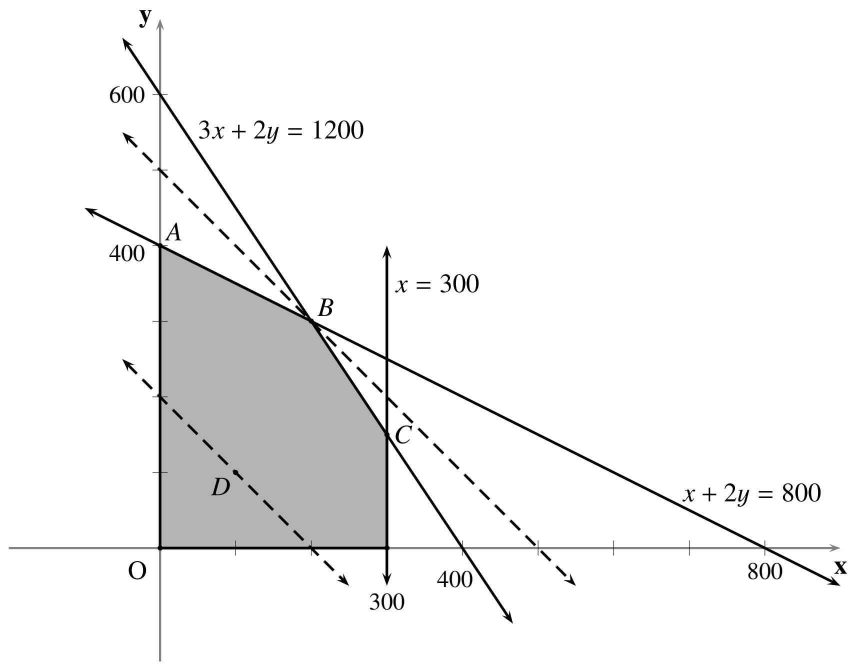


FIGURA 2.13 Programación lineal

Por supuesto, dicha cuota no es la óptima en términos del ingreso, ya que podemos encontrar puntos de la región con los que obtenemos un ingreso mayor.

El propósito es encontrar el valor k máximo posible, de tal manera que la recta $400x + 400y = k$ (todas ellas paralelas entre sí, y de pendiente -1) contenga al menos un punto de la región.

Por una simple inspección tenemos que ese k debe corresponder a la recta de pendiente -1 que pasa por uno de los puntos de $\overline{AB}$ o de $\overline{BC}$. Ahora, como la pendiente de $\overleftrightarrow{AB}$ es $-\frac{1}{2}$, la de $\overleftrightarrow{BC}$ es $-\frac{3}{2}$, y $-\frac{3}{2} < -1 < -\frac{1}{2}$, tendremos que la solución del problema del jefe del taller corresponde a la recta que pasa por el punto B (punteada en la figura). Las coordenadas de B, que se obtienen resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1200 \\ x + 2y = 800 \end{cases},$$

son $x = 200$ y $y = 300$; y la recta buscada es $400(x - 200) + 400(y - 300) = 0$, es decir, $400x + 400y = 200000$.

De aquí obtuvo el administrador los datos que ofreció al jefe del taller pues, al producir 200 ejemplares del libro $\mathcal{A}$ y 300 del libro $\mathcal{B}$, se tiene que: $I(200, 300) = 200000$ es el ingreso; $3 \cdot 200 + 2 \cdot 300 = 1200$ es el papel utilizado; $200 + 2 \cdot 300 = 800$ es la cartulina utilizada; y $200 < 300$ es la tinta utilizada.

Problemas

En cada uno de los problemas en los que sea pertinente, realice una representación gráfica.

2.1 Encuentre la ecuación general de la recta que verifica las respectivas condiciones.

(a) Pasa por el punto P y tiene pendiente m:

(I) $P = (1, 2)$, $m = 5$.

(II) $P = (-1, 0)$, $m = -2$.

(III) $P = (1, 0)$, $m = \frac{1}{3}$.

(IV) $P = (5, 0)$, $m = -4$.

(V) $P = (0, 2)$, $m = -\frac{1}{4}$.

(VI) $P = (0, 0)$, $m = -\sqrt{2}$.

(b) Pasa por los puntos P y Q:

(I) $P = (2, -2)$, $Q = (1 - 2)$.

(II) $P = (7, 0)$, $Q = (0, -1)$.

(III) $P = (-1, 6)$, $Q = (-2, 3)$.

(IV) $P = (-1, -1)$, $Q = (-1, 1)$.

(V) $P = (0, 2)$, $Q = (8, 0)$.

(VI) $P = (13, 1)$, $Q = (1, -2)$.

(c) Pasa por el punto $(1, -2)$ y su ordenada en el origen es el doble de su abscisa en el origen.

(d) Pasa por el punto $(-1, 8)$ y el producto de sus coordenadas en el origen (ordenada y abscisa en el origen) es 1.

(e) Tiene abscisa en el origen -3 y es perpendicular a la recta $x - y + 6 = 0$.

(f) Es perpendicular a la recta $x + 2y - 1 = 0$ en el punto donde corta a la recta $5x - y + 7 = 0$.

(g) Pasa por el punto de intersección de las rectas $4x + y + 2 = 0$ y $x - 2y - 3 = 0$, y su distancia al origen es:

(I) 1.

(II) $\sqrt{2}$.

2.2 ¿Cuál es abscisa en el origen de la recta que pasa por el punto (k, k) y es paralela a la recta $y = mx$, con $m \neq 0$ y $m \neq 1$?

2.3 ¿Cuál es el punto de la recta $y = x$ más próximo al punto (a, b)?

2.4 Una recta corta a los ejes en los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$; y otra recta los corta en los puntos $(b, 0)$ y $(0, -a)$. ¿Cuál es el ángulo entre esas rectas?

2.5 Verifique que la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos (u_1, v_1) y (u_2, v_2), es $(u_2 - u_1)x + (v_2 - v_1)y = c$, donde $2c = (u_2 + u_1)(u_2 - u_1) + (v_2 + v_1)(v_2 - v_1)$.

2.6 Encuentre un punto de la recta $9x - y + 12 = 0$ que equidiste de los puntos $(1, -3)$ y $(4, 1)$⟨21⟩.

2.7 **(Simetría respecto a una recta)**
El ***punto simétrico*** de un punto P ***respecto a una recta*** l es el punto P' tal que l es la mediatriz del segmento $\overline{PP'}$.

Si l es $\mathsf{A}x+\mathsf{B}y+\mathsf{C}=0$ y $P=(u,v)$, verifique que el punto simétrico de P respecto a l es el punto

$$P'=\begin{cases}\left(\frac{\mathsf{B}^2-2\mathsf{B}v-\mathsf{A}u-2\mathsf{C}}{\mathsf{A}},\frac{\mathsf{A}^2-2\mathsf{A}u-\mathsf{B}v-2\mathsf{C}}{\mathsf{B}}\right), & \text{cuando } \mathsf{A}\neq 0 \text{ y } \mathsf{B}\neq 0;\\ \left(u,v-\frac{2\mathsf{C}}{\mathsf{B}}\right), & \text{cuando } \mathsf{A}=0;\\ \left(u-\frac{2\mathsf{C}}{\mathsf{A}},v\right), & \text{cuando } \mathsf{B}=0.\end{cases}$$

2.8 Calcule, en cada caso, el punto simétrico del punto P respecto a la recta l.

(a) $P=(-3,1)$, $l:4x-5y-3=0$.

(b) $P=(2,1)$, $l:3x-2y=0$.

(c) $P=(2,-4)$, $l:7x-1=0$.

(d) $P=(-1,-1)$, $l:2y-11=0$.

2.9 Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2,-2)$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de área igual a 5.

2.10 Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1,-1)$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de perímetro igual a 12.

2.11 Para una recta que corta las direcciones positivas, respecto al origen, de los ejes, verifique que la suma de los recíprocos de las longitudes de los segmentos determinados por los puntos de corte con los ejes, y el origen, es igual a un número real h si, y sólo si, la recta pasa por el punto $\left(\frac{1}{h},\frac{1}{h}\right)$.

2.12 **(a)** Si las tres rectas $\mathsf{A}_1x+\mathsf{B}_1y+\mathsf{C}_1=0$, $\mathsf{A}_2x+\mathsf{B}_2y+\mathsf{C}_2=0$ y $\mathsf{A}_3x+\mathsf{B}_3y+\mathsf{C}_3=0$ son concurrentes, verifique que

$$\begin{vmatrix}\mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 & \mathsf{C}_1\\ \mathsf{A}_2 & \mathsf{B}_2 & \mathsf{C}_2\\ \mathsf{A}_3 & \mathsf{B}_3 & \mathsf{C}_3\end{vmatrix}=0.$$

(b) Determine si el recíproco es cierto y, en caso contrario, ofrezca un contraejemplo.

2.13 Verifique que las tres rectas $3x+4y+4=0$, $2x-y-9=0$ y $7x+3y+1=0$ no son concurrentes.

2.14 Verifique que las tres rectas $3x+4y+4=0$, $6x+8y-9=0$ y $-x-\frac{4}{3}y+1=0$ no son concurrentes.

2.15 Si m_1, m_2 y m_3 son números reales distintos, verifique que las rectas $y=m_1x+b_1$, $y=m_2x+b_2$ y $y=m_3x+b_3$ son concurrentes si, y sólo si,

$$\begin{vmatrix}m_1 & b_1 & 1\\ m_2 & b_2 & 1\\ m_3 & b_3 & 1\end{vmatrix}=m_1b_2-m_2b_1-m_3b_2+m_3b_1-m_1b_3+m_2b_3=0.$$

2.16 Si las rectas $y=mx+b$ y $y=m'x+b'$ tienen pendientes diferentes de 1, ¿qué condiciones deben cumplir sus coeficientes para que ellas se corten sobre la diagonal $y=x$?

2.17 Decida si cada una de las siguientes ternas de rectas son o no concurrentes.

(a) $x-y-1=0$, $x+y-3=0$ y $3x-y-5=0$.

(b) $x - y + 5 = 0$, $x + 2y - 10 = 0$ y $7x - y - 25 = 0$.

(c) $x - y + 1 = 0$, $3x - 2y - 1 = 0$ y $-3x + 3y - 1 = 0$.

(d) $2x - 3y + 5 = 0$, $x + y + 6 = 0$ y $-4x + 6y + 5 = 0$.

2.18 Verifique que el área del triángulo determinado por el eje **y**, y las rectas $y = m_1x+b_1$ y $y = m_2x+b_2$ con $m_1 \neq m_2$ y $b_1 \neq b_2$, está dada por $\frac{1}{2}\frac{(b_2-b_1)^2}{|m_2-m_1|}$.

2.19 El ***ortocentro*** de un triángulo es el punto de concurrencia de las rectas que contienen sus tres alturas.
En el triángulo cuyos vértices son $(-11, 6)$, $(-5, 2)$, $(-1, 3)$, encuentre:

(a) las ecuaciones generales de las rectas que contienen sus alturas y el ortocentro.

(b) las ecuaciones generales de las rectas que contienen sus medianas y el baricentro.

(c) las ecuaciones generales de sus mediatrices y el circuncentro.

2.20 Verifique que el baricentro, el ortocentro y el circuncentro del triángulo del ejercicio anterior son colineales.

2.21 Verifique que, en cualquier triángulo, el baricentro, el ortocentro y el circuncentro son colineales. (La recta determinada por esos tres puntos es llamada ***la recta de Euler***.)

2.22 El ***incentro*** de un triángulo es el punto de concurrencia de sus tres bisectrices.
Este punto es el punto que equidista de sus lados o, lo que es lo mismo, el centro del círculo inscrito en el triángulo.
Encuentre las ecuaciones generales de las rectas que contienen las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo determinado por cada una de las siguientes ternas de rectas, y su incentro.

(a) $x - y + 5 = 0$, $x + 2y - 10 = 0$ y $7x - y - 25 = 0$.

(b) $3x + 2y - 14 = 0$, $2x - 3y + 8 = 0$ y $5x - 3y + 8 = 0$.

2.23 Encuentre el incentro y la medida de los ángulos interiores del triángulo de vértices $(-3, 4)$, $(-1, -5)$ y $(11, -4)$.

2.24 Encuentre las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(3, 4)$ y forman, cada una, un ángulo de 45 con la recta $2x - 3y + 5 = 0$.

2.25 **(a)** Encuentre la ecuación de la familia de rectas perpendiculares a la recta $5x + y + 1 = 0$.

(b) ¿Cuál de ellas pasa por el punto $(7, 1)$?

(c) Encuentre la ecuación de la familia de rectas paralelas a la recta $6x - 3y + 15 = 0$.

(d) ¿Cuál de ellas pasa por el punto $(7, 1)$?

2.26 Para cada una de las siguientes familias de rectas, cuya ecuación está parametrizada con k, encuentre los miembros que satisfacen la condición dada.

(a) $2x + 3y + k = 0$; determina, con los ejes coordenados, un triángulo de área 6.

(b) $y + 1 = k(x - 2)$; la distancia al origen es $\sqrt{5}$.

(c) $(1 + k)x - (4 - k)y + k + 1 = 0$; pasa por el punto $(-1, 11)$.

(d) $kx + (5 + k)y - 44 = 0$; la pendiente es 1.

(e) $x - 2y - 9 + k = 0$; la distancia al punto $(2, -8)$ es 2.

(f) $kx - 9y + 7 = 0$; la abscisa en el origen es 5.

2.27 Encuentre una condición geométrica que determine cada una de las familias cuya ecuación es:

(a) $12x - y - h = 0$. **(b)** $y + 1 = h(x - 7)$. **(c)** $y = kx + 13$.

2.28 Una recta pasa por el punto de intersección de las dos rectas $x + 3y + 2 = 0$ y $5x + y + 4 = 0$, y también por la intersección de las rectas $x - 2y + 7 = 0$ y $x + 6y + 7 = 0$. Halle la ecuación de la recta sin determinar los puntos de intersección y compruebe el resultado hallando los puntos de intersección.

2.29 Dadas dos rectas $l_1 : \mathsf{A}_1x + \mathsf{B}_1y + \mathsf{C}_1 = 0$ y $l_2 : \mathsf{A}_2x + \mathsf{B}_2y + \mathsf{C}_2 = 0$, y la familia de rectas $ml_1 + nl_2 : m(\mathsf{A}_1x + \mathsf{B}_1y + \mathsf{C}_1) + n(\mathsf{A}_2x + \mathsf{B}_2y + \mathsf{C}_2) = 0$ (m y n números reales no nulos), verifique que:

(a) si l_1 y l_2 son paralelas, entonces las rectas $ml_1 + nl_2$ son paralelas a l_1 y l_2.

(b) si l_1 y l_2 son coincidentes, entonces las rectas $ml_1 + nl_2$ coinciden con l_1 y l_2.

2.30 Encuentre los puntos de la recta $x + 2y + 6 = 0$ cuya distancia a la recta $7x - 5y - 11 = 0$ sea 4.

2.31 Verifique que, si las rectas r y s son concurrentes entonces, por grande que sea el número real positivo c, existen puntos (x, y) en r y (x, y') en s, con la misma abscisa x, tales que $|y - y'| > c$.

2.32 Encuentre una ecuación que represente al conjunto de los puntos cuya distancia a la recta $8x - 5y + 2 = 0$ es:

(a) el doble de su distancia al eje **x**.

(b) igual a su distancia al eje **x**.

(c) la mitad de su distancia al eje **y**.

(d) igual a su distancia al eje **y**.

2.33 El ángulo de inclinación de cada una de dos rectas paralelas es α. Si una de ellas pasa por el punto (a, b) y la otra por el (h, k), verifique que la distancia entre ellas es $|(h - a)\operatorname{sen}\alpha - (k - b)\cos\alpha|$.

2.34 Calcule el área del trapecio cuyos lados se encuentran sobre las rectas $x-2y+8 = 0$, $3x-5y+5 = 0$, $x + y - 9 = 0$ y $3x - 5y + 1 = 0$.

2.35 Verifique, por dos métodos diferentes, que los puntos $(1, 3)$ y $(0, -1)$ están en lados opuestos de la recta $2x + 3y - 1 = 0$.

2.36 Considere la banda F formada por los puntos situados entre las rectas paralelas $y = mx + b$ y $y = mx + b'$, con $b < b'$. Verifique que:

(a) el punto (x, y) pertenece a la banda F si, y sólo si, $b \leq y - mx \leq b'$.

(b) la recta $y = cx + d$ está contenida en la banda F si, y sólo si, $c = m$ y $b \leq d \leq b'$.

2.37 Dada una recta $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$ tal que $\mathsf{ABC} \neq 0$, verifique que la recta no contiene puntos del primer cuadrante si, y sólo si, A, B y C tienen el mismo signo.

2.38 Verifique que la bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a sus lados adyacentes.

2.39 Un agricultor tiene 100 hectáreas de tierra para realizar dos cultivos. El costo de plantar el primer cultivo es de 20.000 Bs. por hectárea, y el del segundo cultivo es de 40.000 Bs. por hectárea; y dispone de 3.000.000 Bs. para cubrir el costo de la siembra. La recolección de cada hectárea del primer cultivo demanda 5 horas-hombre, y de cada hectárea del segundo, 20 horas-hombre. El agricultor dispone de 1350 horas-hombre para la recolección de los dos cultivos.

(a) Si la utilidad es de 100.000 Bs. por hectárea en el caso del primer cultivo, y de 300.000 Bs. por hectárea en el caso del segundo, determine la porción del terreno que deberá plantar con cada cultivo a fin de maximizar la utilidad total.

(b) Si la utilidad del segundo cultivo se incrementa a 450.000 Bs. por hectárea, determine la porción del terreno que deberá plantar con cada cultivo.

2.40 La nutricionista de un hospital debe encontrar la combinación más económica de dos productos A y B, que contienen al menos 0,5 mg de tiamina y al menos 600 calorías. Cada onza de A contiene 0,12 mg de tiamina y 100 calorías, mientras que cada onza de B contiene 0,08 mg de tiamina y 150 calorías. Si el costo de cada alimento es de 1.000 Bs. la onza, ¿cuántas onzas de cada uno deberán combinarse?

2.41 Una pequeña fábrica de zapatos masculinos produce zapatos para adultos y para niños. La fábrica posee una máquina, con la cual automatiza parte del proceso de producción. La producción de una docena de pares de zapatos para niños requiere 1 hora de la máquina y una hora adicional de trabajo manual de un zapatero. La producción de una docena de pares de zapatos para adultos requiere solamente 0,5 horas de uso de la máquina, pero son necesarias 2 horas adicionales de trabajo manual. Durante el período de una semana, la fábrica tiene disponible 80 horas de trabajo manual y 50 horas de uso de la máquina. La utilidad en la venta de una docena de pares de zapatos para adultos es 300.000 Bs. y de una de niños es 200.000 Bs. Determine la producción semanal de cada tipo de calzado que maximiza la ganancia.

2.42 **(Parametrización de una recta, un segmento y un rayo)**
Si l es la recta determinada por los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ distintos, verifique que:

(a) el punto $P = (u, v)$ está en l si, y sólo si, existe un número real t tal que

$$u = tx_2 + (1-t)x_1 \qquad \text{y} \qquad v = ty_2 + (1-t)y_1.$$

(b) el punto $P = (u, v)$ está en el segmento $\overline{P_1P_2}$ si, y sólo si, el número real t de la parte anterior es tal que $0 \leqslant t \leqslant 1$.

(c) el punto $P = (u, v)$ está en el rayo $\overrightarrow{P_1P_2}$ si, y sólo si, el número real t de la parte (a) es tal que $t \geqslant 0$.

2.43 Considere la recta $l:\ \mathsf{A}x+\mathsf{B}y+\mathsf{C} = 0$ y el punto $N = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$ (cuyas coordenadas son los coeficientes de los términos lineales de la ecuación de la recta l), y verifique que:

(a) La recta $\overleftrightarrow{\mathrm{O}N}$ puede ser representada por la ecuación $-\mathsf{B}x + \mathsf{A}y = 0$.

(b) La recta $\overleftrightarrow{\mathrm{O}N}$ es perpendicular a la recta l.

(c) El punto de corte entre las rectas l y $\overleftrightarrow{\mathrm{O}N}$ tiene coordenadas $(\frac{-\mathsf{C}}{\mathsf{A}^2+\mathsf{B}^2}\mathsf{A}, \frac{-\mathsf{C}}{\mathsf{A}^2+\mathsf{B}^2}\mathsf{B})$.

(d) Un punto P está en la recta $\overleftrightarrow{\mathrm{O}N}$ si, y sólo si, las coordenadas de P son de la forma $(k\mathsf{A}, k\mathsf{B})$ para algún número real k.

(e) Un punto P está en el rayo $\overrightarrow{\mathrm{O}N}$ si, y sólo si, las coordenadas de P son de la forma $(k\mathsf{A}, k\mathsf{B})$ con $k \geqslant 0$.

(f) Un punto $P = (k\mathsf{A}, k\mathsf{B})$ está delante del punto $Q = (k'\mathsf{A}, k'\mathsf{B})$ en el eje $\mathrm{O}N$ si, y sólo si, $k > k'$.

De esta manera, siempre podemos considerar que los coeficientes A y B de los términos lineales de la ecuación de una recta son indicadores de la dirección $\overleftrightarrow{\mathrm{O}N}$ perpendicular a la recta (y a cualquiera de sus paralelas) por el origen; o, visto de otro modo, indicadores de la dirección misma de la recta (que es la perpendicular a la dirección $\overleftrightarrow{\mathrm{O}N}$).

2.44 **(Parametrización racional de una recta)**
Si l es la recta determinada por los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ distintos, verifique que el punto $P = (u, v)$ distinto de P_2 está en l si, y sólo si, existe un número real t tal que

$$u = \frac{tx_2 - x_1}{t-1} \qquad \text{y} \qquad v = \frac{ty_2 - y_1}{t-1}.$$

Comentarios

⟨1⟩ Entenderemos por ***ecuación algebraica en dos variables***, una ecuación de la forma $f(x, y) = 0$, en la que $f(x, y)$ es un polinomio en dos variables con coeficientes reales.

Aprovechamos la ocasión para recordar lo siguiente. Consideremos una figura geométrica $\mathcal{G}$, y una relación f que asocia, a pares ordenados de números reales, un número real. Decir que

la figura geométrica $\mathcal{G}$ puede ser representada por la ecuación, o inecuación, $f(x, y) \lesseqgtr 0$

equivale a decir que

la figura geométrica $\mathcal{G}$ coincide con el gráfico de la ecuación, o inecuación, $f(x, y) \lesseqgtr 0$

o, en otras palabras, a decir que

las coordenadas cartesianas de los puntos de la figura geométrica $\mathcal{G}$ satisfacen la ecuación, o inecuación, $f(x, y) \lesseqgtr 0$*; y los puntos cuyas coordenadas cartesianas satisfacen la ecuación, o inecuación,* $f(x, y) \lesseqgtr 0$ *están en la figura geométrica $\mathcal{G}$.*

⟨2⟩ Una manera cómoda de decir que dos números reales A y B no son simultáneamente nulos o, lo que es lo mismo, que $A \neq 0$ o $B \neq 0$, es $A^2 + B^2 \neq 0$.

Del mismo modo, una manera cómoda de decir que dos números reales A y B no son nulos (ninguno de los dos) o, lo que es lo mismo, que $A \neq 0$ y $B \neq 0$, es $AB \neq 0$.

Habrá circunstancias en que emplearemos algunas de estas maneras para decir lo que cómodamente dicen.

⟨3⟩ También recibe el nombre de ***ecuación de primer grado***, o ***de grado uno***, ***en dos variables***. Una ecuación de este tipo está constituida por una igualdad en la que uno de los términos es cero y el otro término es un polinomio de primer grado en dos variables no degenerado.

⟨4⟩ Como puede observar fácilmente el lector, hemos abusado del artículo determinado "***la***" en la expresión "***la*** ecuación general de la recta $\mathcal{G}$" o "***la*** ecuación de la recta $\mathcal{G}$".

Pongamos por caso que se dice que "***la*** ecuación de la recta l es $2x + 4y + 6 = 0$".

Es claro que la ecuación $10x + 20y + 30 = 0$ representa la misma recta l, pues es equivalente a la ecuación anterior, y también tiene la forma de una ecuación lineal.

En general, por esas mismas razones, cada una de las ecuaciones de la forma $kx + 2ky + 3k = 0$ (donde k es un número real no nulo) podría ser llamada ***la*** ecuación de la recta l.

De modo que, es inapropiado usar el artículo determinado "***la***" al decir que $2x + 4y + 6 = 0$ es ***la*** ecuación de la recta l.

Este problema surge porque **no** hay una correspondencia biunívoca entre las ecuaciones lineales y las rectas del plano: ciertamente, a cada ecuación lineal le corresponderá una única recta del plano, pero a cada recta del plano le corresponderán infinitas ecuaciones lineales.

Este problema se puede resolver si, en vez de llamar a

$$\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$$
$$(\mathsf{A}, \mathsf{B} \text{ y } \mathsf{C} \text{ números reales con } \mathsf{A} \neq 0 \text{ o } \mathsf{B} \neq 0),$$

la ecuación general de una recta, se le llama a

$$x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$$
$$(\mathsf{B} \text{ y } \mathsf{C} \text{ números reales})$$

para las rectas no perpendiculares al eje **y**, y

$$y + \mathsf{C} = 0$$
$$(\mathsf{C} \text{ un número real})$$

para las rectas perpendiculares al eje **y**.

Si se procede de esta manera, **sí** hay una correspondencia biunívoca entre ecuaciones de ese tipo y las rectas del plano.

Así, en el ejemplo con el que comenzamos este comentario, ***la*** ecuación de la recta l sería $x + 2y + 3 = 0$.

Hemos preferido el abuso del artículo determinado "***la***" por encima de la solución planteada, o de cualquier otra, por el uso extendido de esta manera de hablar entre los diversos autores que hemos tenido ocasión de revisar (ninguno de los cuales, dicho sea de paso, alerta al lector sobre este problema).

⟨5⟩ Sólo para auxiliar a algún lector acucioso, es claro que, siempre que esté definido el cociente $\frac{p}{q}$, tendremos que $-\frac{p}{q} = \frac{-p}{q}$.

⟨6⟩ Podemos considerar tres puntos distintos de G, porque G contiene al menos tres puntos distintos, a saber: $(-\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{A}}, 0)$, $(0, -\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{B}})$ y $(-\frac{\mathsf{C}}{2\mathsf{A}}, -\frac{\mathsf{C}}{2\mathsf{B}})$.

⟨7⟩ Una manera de interpretar esta afirmación es que la recta l está compuesta por dos de sus puntos distintos y todos los demás puntos que son colineales con esos dos.

⟨8⟩ Otra manera elegante de corroborar que este determinante nos brinda la ecuación de la recta l es la siguiente y que, de paso, nos ofrece un procedimiento para encontrar una ecuación que represente otras figuras geométricas que estudiaremos más adelante. Consideremos dos puntos distintos cualesquiera de l, digamos $Q = (x_0, y_0)$ y $T = (x_1, y_1)$. Si $P = (x, y)$ es un punto de l, distinto de Q y T, buscamos tres números reales A, B y C, con $\mathsf{A} \neq 0$ o $\mathsf{B} \neq 0$, que satisfagan el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas (los coeficientes A, B y C)

$$\begin{cases} x\mathsf{A} + \ \ y\mathsf{B} + \mathsf{C} = 0 \\ x_0\mathsf{A} + y_0\mathsf{B} + \mathsf{C} = 0 \\ x_1\mathsf{A} + y_1\mathsf{B} + \mathsf{C} = 0 \end{cases} .$$

Se sabe que este sistema tiene una solución no trivial (es decir, distinta de la solución $\mathsf{A} = 0$, $\mathsf{B} = 0$ y $\mathsf{C} = 0$, que no nos sirve, pues debe cumplirse que $\mathsf{A} \neq 0$ o $\mathsf{B} \neq 0$), exactamente cuando el determinante de la matriz de los coeficientes es nulo: es decir, precisamente cuando

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

⟨9⟩ Por el Principio E.23 en el Apéndice E, la recta l tendrá puntos a ambos lados del eje $\mathbf{x}$; en particular, tendrá puntos en común con $L_{U'}$.

⟨10⟩ Dichos ángulos son ***correspondientes*** en el corte, de las rectas paralelas $\overleftrightarrow{QU}$ y $\overleftrightarrow{RV}$, por la secante l.

⟨11⟩ La existencia de un tal punto está garantizada por el hecho de que siempre podemos tomar un número real mayor que cualquier otro; así, basta tomar el punto $R = (z, 0)$, donde z es mayor que la abscisa de S.

⟨12⟩ Entendiendo por esto el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R} \wedge y = f(x)\}$, donde f es una función real de una variable real.

⟨13⟩ Este método consiste en despejar una, y la misma, variable en cada una de las ecuaciones, e igualar los términos correspondientes para hallar el valor de la otra variable.

⟨14⟩ Este método consiste en despejar una variable en una de las ecuaciones, y sustituir el término correspondiente en el lugar de esa misma variable en la otra ecuación para hallar el valor de la otra variable.

⟨15⟩ Este método es, a nuestro parecer, el más eficiente y consiste en sumar, término a término, múltiplos apropiados de cada ecuación, a fin de obtener otra ecuación en la que el coeficiente de una de las variables sea nulo y, así, hallar el valor de la otra variable.

⟨16⟩ Este método consiste en hallar cada variable como un cociente de dos determinantes: en el denominador, el determinante de la matriz del sistema $\begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 \\ \mathsf{A}_2 & \mathsf{B}_2 \end{vmatrix}$, formado por los coeficientes de las variables; y en el numerador, el determinante de la matriz del sistema, pero reemplazando los coeficientes de la variable a calcular, por la columna $\begin{pmatrix} -\mathsf{C}_1 \\ -\mathsf{C}_2 \end{pmatrix}$. Así, en el caso que estamos considerando,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -\mathsf{C}_1 & \mathsf{B}_1 \\ -\mathsf{C}_2 & \mathsf{B}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 \\ \mathsf{A}_2 & \mathsf{B}_2 \end{vmatrix}} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & -\mathsf{C}_1 \\ \mathsf{A}_2 & -\mathsf{C}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 \\ \mathsf{A}_2 & \mathsf{B}_2 \end{vmatrix}}.$$

⟨17⟩ Desde cierto punto de vista, se puede considerar que se comete un abuso al hablar de "**la ecuación** del haz de rectas" (así como de "**la ecuación** de la familia de rectas" como veremos un poco más abajo). Lo que debemos entender por esto es que, asignándole sendos valores a los términos m y n presentes en la mencionada expresión, se obtiene un elemento de la familia.

⟨18⟩ La palabra ***parámetro*** es de origen griego y significa, literalmente, *medida al margen*, o *al lado*: es un número que, en la medida que se cambia su valor dentro del conjunto al que pertenece, se obtienen los objetos cuya definición lo involucra; en el caso que nos ocupa, cada uno de los miembros de la familia.

⟨19⟩ Que se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0 \\ -\mathsf{B}(x - x_0) + \mathsf{A}(y - y_0) = 0 \end{cases}$.

⟨20⟩ Recordamos que el término ***equidista***, y sus derivados, significa ***está a la misma distancia de***. Así, por ejemplo: el ***punto medio*** de un segmento equidista de sus extremos; el conjunto de los puntos que equidistan de los extremos de un segmento constituye la ***mediatriz*** del segmento; el conjunto de los puntos que equidistan de una recta constituye un par de rectas paralelas; el conjunto de los puntos que equidistan de dos rectas paralelas constituye una recta paralela a las rectas dadas; el conjunto de los puntos que equidistan de los lados de un ángulo constituye el ***bisector*** de ese ángulo; y, como es éste el caso, el conjunto de los puntos que equidistan de dos rectas concurrentes constituye un par de rectas que concurren en el punto de concurrencia de las dos rectas dadas y que, a la sazón, es la unión de los cuatro bisectores de los cuatro ángulos que dichas rectas determinan.

⟨21⟩ Note que este punto corresponde al de corte de esa recta con la mediatriz del segmento determinado por esos puntos.

Orientación para resolver los problemas del Capítulo 2

Creemos que el instructor del curso debería acompañar al estudiante en la resolución de los ejercicios 2.7, 2.12, 2.15, 2.42, 2.43 y 2.44.

A continuación ofrecemos ***ayudas*** para algunos de los problemas.

2.11: Use la ecuación simétrica con abscisa en el origen $(a, 0)$ y ordenada en el origen $(0, h - a)$.

2.12: Use el Teorema 9.

2.15: Para el recíproco, use la observación 2.24.(b).

2.22: Use lo expresado en la primera parte del parágrafo sobre Aplicaciones de las inecuaciones lineales.

2.28: De los cuatro parámetros con que se definen las dos familias de rectas, fije cualquier valor para uno de ellos y encuentre el valor del que le acompaña.

2.31: Use el método con que resolvió el problema 2.30, y considere la recta perpendicular al eje **x** por ese punto.

2.42: **(a)** Para la implicación directa: si l es perpendicular al eje **x**, tome $t = \frac{v-y_1}{y_2-y_1}$; si l es perpendicular al eje **y**, tome $t = \frac{u-x_1}{x_2-x_1}$; si l no es perpendicular a ninguno de los ejes, considere la igualdad $\frac{u-x_1}{x_2-x_1} = \frac{v-y_1}{y_2-y_1}$ que resulta de la colinealidad de los tres puntos según la observación 1.9, y tome $\boxed{t = \frac{u-x_1}{x_2-x_1} = \frac{v-y_1}{y_2-y_1}}$. Para la implicación recíproca, use el tercer criterio de colinealidad.

(b) y **(c)** Use el Principio E.18. en el Apéndice E y el hecho de que el rayo $\overrightarrow{P_1P_2}$ es el conjunto de los puntos formado por: el punto P_1; el punto P_2; todos los puntos que están entre P_1 y P_2; y todos los puntos P tales que P_2 está entre P_1 y P.

2.43: **(d)** y **(e)** Use el ejercicio 2.42 con $P_1 = \mathrm{O}$ y $P_2 = N$.

2.44: Llamando s al parámetro encontrado en el ejercicio 2.42, tome $\boxed{t = \frac{s}{s-1}}$ $(s \neq 1)$.

CAPÍTULO 3

CÍRCULOS

Otra de las tantas consecuencias que tiene la introducción de un sistema de ejes ortogonales en el plano es el hecho de que cualquier círculo del plano puede ser representado por una ecuación algebraica que es satisfecha por las coordenadas cartesianas de sus puntos (respecto a dicho sistema), y sólo por ellas.

Representados los círculos por ecuaciones algebraicas, procederemos como apuntamos en el primer capítulo: trataremos analíticamente (a través de la naturaleza de los coeficientes de sus ecuaciones, y de ciertas relaciones entre ellos) los asuntos geométricos característicos y distintivos de los círculos (igualdad o coincidencia, ser concéntricos, congruencia, rectas tangente, normal y secante, etc.), e interpretaremos geométricamente (utilizando círculos) algunas situaciones analíticas en las que intervienen ecuaciones cuadráticas en dos variables.

§ 3.1 Ecuación general y ecuación canónica de un círculo

Consideremos las relaciones f que asocian, a pares ordenados de números reales, un número real, cuyas reglas de asociación son polinomios de segundo grado en dos variables no degenerados, es decir, las relaciones de la forma

$$f(x,y) := \mathsf{A}x^2 + \mathsf{B}xy + \mathsf{C}x^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F}$$
$$(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}, \mathsf{E} \text{ y } \mathsf{F} \text{ números reales con } \mathsf{A} \neq 0, \text{ o } \mathsf{B} \neq 0, \text{ o } \mathsf{C} \neq 0);$$

llamaremos ***ecuación cuadrática en dos variables*** a una ecuación de la forma $f(x,y) = 0$⟨1⟩.

Tenemos que esperar hasta el Capítulo 8 para realizar el estudio general de la ecuaciones cuadráticas en dos variables; y arribaremos a ese estudio, después de estudiar algunos casos particulares (círculos, parábolas, elipses e hipérbolas).

En este capítulo estamos interesados en estudiar sólo aquellas ecuaciones cuadráticas en dos variables para las que $A = 1$, $B = 0$ y $C = 1$, es decir, las ecuaciones de la forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Antes de iniciar el estudio analítico de los círculos, verificaremos primero lo afirmado en la siguiente proposición que reduce aún más el espectro de las ecuaciones cuadráticas en dos variables que nos interesan; el procedimiento que usaremos en esta verificación se denomina, comúnmente, "***completar cuadrados***", y consiste en sumar a ambos miembros de la ecuación los valores necesarios para, conservando la igualdad, completar en uno de los miembros ***trinomios cuadrados perfectos*** (que son cuadrados de un binomio) convenientes.

LEMA 3.1

(a) *Existirá algún par ordenado de números reales* (x, y) *que satisfaga la ecuación*

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{3.1}$$

*(*A, C, D, E *y* F *números reales con* $A > 0$ *y* $C > 0$*)*

si, y sólo si, $CD^2 + AE^2 - 4ACF \geqslant 0$.

(b) *Existirá solamente un par ordenado de números reales* (x, y) *que satisfaga la ecuación* (3.1) *si, y sólo si,* $CD^2 + AE^2 - 4ACF = 0$.

■ **PRUEBA**

Al tomar factor común A entre los términos en la variable x, y C entre los términos en la variable y, tendremos que la ecuación (3.1) es equivalente a la ecuación

$$A\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right) + C\left(y^2 + \frac{E}{C}y\right) = -F,$$

que es la misma que

$$A\left(x^2 + 2\frac{D}{2A}x\right) + C\left(y^2 + 2\frac{E}{2C}y\right) = -F.$$

Sumando $\left(\frac{D}{2A}\right)^2$ al término que contiene sólo la variable x, y $\left(\frac{E}{2C}\right)^2$ al término que contiene sólo la variable y, para completar los cuadrados; y sumando $A\left(\frac{D}{2A}\right)^2$ y $C\left(\frac{E}{2C}\right)^2$ al término del lado derecho, para conservar la igualdad, tendremos que la ecuación (3.1) es equivalente a la ecuación

$$A\left(x^2 + 2\frac{D}{2A}x + \left(\frac{D}{2A}\right)^2\right) + C\left(y^2 + 2\frac{E}{2C}y + \left(\frac{E}{2C}\right)^2\right) = -F + A\left(\frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(\frac{E}{2C}\right)^2,$$

que es la misma que

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C^2}. \tag{3.2}$$

(a) Como el cuadrado de cualquier número real es no negativo, y la suma de dos números reales no negativos es no negativa, tendremos que existirá algún par ordenado de números reales (x, y) que satisfaga la ecuación (3.1) si, y sólo si, $CD^2 + AE^2 - 4ACF \geqslant 0$.

(b) Además, $\mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF} = 0$ si, y sólo si,

$$\left(x + \frac{\mathsf{D}}{2\mathsf{A}}\right)^2 = \left(y + \frac{\mathsf{E}}{2\mathsf{C}}\right)^2 = 0$$

o, lo que es lo mismo, si, y sólo si, $x = -\frac{\mathsf{D}}{2\mathsf{A}}$ y $y = -\frac{\mathsf{E}}{2\mathsf{C}}$; en cuyo caso, sólo el punto $(-\frac{\mathsf{D}}{2\mathsf{A}}, -\frac{\mathsf{E}}{2\mathsf{C}})$ satisfará la ecuación (3.1).

QEP ■

En consecuencia, consideremos las relaciones f que asocian, a pares ordenados de números reales, un número real, cuyas reglas de asociación son polinomios de segundo grado en dos variables de la forma

$$f(x, y) := x^2 + y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F}$$
$$(\mathsf{D}, \mathsf{E} \text{ y } \mathsf{F} \text{ números reales con } \mathsf{D}^2 + \mathsf{E}^2 - 4\mathsf{F} > 0).$$

El objetivo central de esta parte del capítulo es verificar que, dada una figura geométrica $\mathcal{G}$ cualquiera, se tiene lo afirmado en el siguiente Teorema.

Teorema 13 (Representación analítica de un círculo)
$\mathcal{G}$ es un círculo si, y sólo si, $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación cuadrática en dos variables de la forma

$$x^2 + y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0 \tag{3.3}$$
$$(\mathsf{D}, \mathsf{E} \text{ y } \mathsf{F} \textit{ números reales con } \mathsf{D}^2 + \mathsf{E}^2 - 4\mathsf{F} > 0).$$

Verificado esto, la ecuación (3.3) será llamada ***la ecuación general***, o simplemente ***la ecuación***, del círculo $\mathcal{G}$⟨2⟩.

Recordemos que un ***círculo***⟨3⟩ es el conjunto de puntos que están a una distancia positiva dada, de un punto prefijado; al punto prefijado se le llama ***el centro*** del círculo; al número real positivo que representa la distancia positiva dada se le llama ***el radio*** del círculo; y, al doble del radio, ***el diámetro*** del círculo. Cuando hablemos de ***un radio*** de un círculo, nos referiremos a cualquier segmento que tenga un extremo en el centro de dicho círculo, y el otro extremo sobre ese círculo (punto al que llamaremos ***extremo exterior*** de dicho radio); del mismo modo, cuando hablemos de ***un diámetro***, nos referiremos a cualquier segmento que contenga al centro y que tenga sus extremos sobre dicho círculo. Una ***cuerda*** de un círculo es un segmento que tiene sus extremos sobre el círculo.

Si denotamos al centro de un círculo por K, y a su radio por r, denotaremos al círculo de centro K y radio r mediante $C_{K,r}$⟨4⟩.

Ya tenemos toda la información necesaria para comenzar ahora la verificación del Teorema 13.

Supongamos que $\mathcal{G}$ es un círculo, y consideremos su centro $K = (x_0, y_0)$ y su radio r.

Un punto $P = (x, y)$ genérico está en $\mathcal{G}$ si, y sólo si, $PK = r$, es decir, si, y sólo si,

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r.$$

Ahora, como $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ y r son ambos no negativos, y dos números reales no negativos son iguales si, y sólo si, sus cuadrados son iguales, tendremos que P está en $\mathcal{G}$ si, y sólo si, satisface la ecuación

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2, \tag{3.4}$$

llamada ***ecuación canónica*** del círculo $C_{K,r}$.

Desarrollando los cuadrados de los binomios del término del lado izquierdo de la ecuación (3.4), y reagrupando los términos resultantes, tendremos que la ecuación (3.4) es equivalente a la ecuación

$$x^2+y^2+(-2x_0)x+(-2y_0)y+(x_0^2+y_0^2-r^2)=0.$$

Así, al definir $\mathsf{D}=-2x_0$, $\mathsf{E}=-2y_0$ y $\mathsf{F}=x_0^2+y_0^2-r^2$, tendremos que el punto P está en $\mathcal{G}$ si, y sólo si, sus coordenadas cartesianas satisfacen la ecuación $x^2+y^2+\mathsf{D}x+\mathsf{E}y+\mathsf{F}=0$, para la que $\mathsf{D}^2+\mathsf{E}^2-4\mathsf{F}>0$[⟨5⟩].

Vamos a verificar ahora que los puntos que satisfacen la ecuación (3.3) constituyen un círculo. Ya sabemos que la ecuación $x^2+y^2+\mathsf{D}x+\mathsf{E}y+\mathsf{F}=0$ es equivalente a la ecuación

$$\left(x-\left(-\frac{\mathsf{D}}{2}\right)\right)^2+\left(y-\left(-\frac{\mathsf{E}}{2}\right)\right)^2=\frac{\mathsf{D}^2+\mathsf{E}^2-4\mathsf{F}}{4}.$$

Como $\mathsf{D}^2+\mathsf{E}^2-4\mathsf{F}>0$, tendremos que ambos miembros de esta ecuación son no negativos, y como dos números reales no negativos son iguales si, y sólo si, sus raíces cuadradas positivas son iguales, tendremos que dicha ecuación es equivalente a la ecuación

$$\sqrt{\left(x-\left(-\frac{\mathsf{D}}{2}\right)\right)^2+\left(y-\left(-\frac{\mathsf{E}}{2}\right)\right)^2}=\frac{\sqrt{\mathsf{D}^2+\mathsf{E}^2-4\mathsf{F}}}{2}.$$

Así, con el punto $K=(-\frac{\mathsf{D}}{2},-\frac{\mathsf{E}}{2})$ y el número real positivo $r=\frac{\sqrt{\mathsf{D}^2+\mathsf{E}^2-4\mathsf{F}}}{2}$, tenemos que el punto P satisface la ecuación (3.3) si, y sólo si, $PK=r$; es decir, si, y sólo si, P está en el círculo $C_{K,r}$.

De este modo hemos concluido la verificación del Teorema 13.

Observación 3.1 (Un procedimiento para calcular la ecuación general de un círculo)
El Teorema 13 nos dice cuál es el tipo de ecuaciones con las que se pueden representar los círculos, pero no nos dice cómo encontrarlas. Sin embargo, el procedimiento para obtenerla está descrito en su prueba, a saber: tomando el centro $K=(x_0,y_0)$ y el radio r, la ecuación del círculo $C_{K,r}$ será

$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+(x_0^2+y_0^2-r^2)=0, \tag{3.5}$$

que se obtiene al manipular algebraicamente su ecuación canónica $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

En muchas ocasiones usaremos esta forma de presentar la ecuación de un círculo, porque está expresada en términos de sus elementos fundamentales: las coordenadas cartesianas del centro, y el radio.

➤ Ejemplo 3.1
Para encontrar la ecuación general del círculo de centro $(1,-3)$ y radio 5, planteamos la ecuación

$$(x-1)^2+(y-(-3))^2=5^2,$$

desarrollamos los cuadrados y agrupamos, obteniendo que la ecuación requerida es

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0.$$

QEE ◄

La siguiente observación recoge el primer ejemplo de tratamiento analítico de algunos asuntos geométricos de los círculos: su centro y su radio; cuándo coinciden (son iguales); cuándo son concéntricos y cuándo son congruentes.

OBSERVACIÓN 3.2

(a) *Note que, el centro y el radio del círculo* $x^2 + y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0$ $(\mathsf{D}^2 + \mathsf{E}^2 - 4\mathsf{F} > 0)$ *son, respectivamente,*

$$K = \left(-\frac{\mathsf{D}}{2}, -\frac{\mathsf{E}}{2}\right) \qquad y \qquad r = \frac{\sqrt{\mathsf{D}^2 + \mathsf{E}^2 - 4\mathsf{F}}}{2}$$

(que obtuvimos al completar cuadrados en la prueba anterior).

(b) *Por el Principio E.31 y la parte anterior tendremos que los círculos*

$$C_1 : \ x^2 + y^2 + \mathsf{D}_1 x + \mathsf{E}_1 y + \mathsf{F}_1 = 0 \quad (\mathsf{D}_1^2 + \mathsf{E}_1^2 - 4\mathsf{F}_1 > 0) \qquad C_2 : \ x^2 + y^2 + \mathsf{D}_2 x + \mathsf{E}_2 y + \mathsf{F}_2 = 0 \quad (\mathsf{D}_2^2 + \mathsf{E}_2^2 - 4\mathsf{F}_2 > 0)$$

***coinciden** (o **son iguales**) si, y sólo si,*

$$\mathsf{D}_1 = \mathsf{D}_2, \quad \mathsf{E}_1 = \mathsf{E}_2 \quad y \quad \mathsf{F}_1 = \mathsf{F}_2;$$

o, lo que es lo mismo, si, y sólo si, tienen la misma ecuación general.
*En consecuencia, dos círculos **son distintos** si, y sólo si,*

$$\mathsf{D}_1 \neq \mathsf{D}_2 \quad o \quad \mathsf{E}_1 \neq \mathsf{E}_2 \quad o \quad \mathsf{F}_1 \neq \mathsf{F}_2.$$

(c) *Diremos que dos círculos son **concéntricos** si, y sólo si, tienen el mismo centro. Así, con las mismas notaciones de la parte anterior, los círculos C_1 y C_2 son concéntricos si, y sólo si,*

$$\mathsf{D}_1 = \mathsf{D}_2 \quad y \quad \mathsf{E}_1 = \mathsf{E}_2;$$

o, lo que es lo mismo, si, y sólo si, coinciden los coeficientes de los términos lineales correspondientes en sus ecuaciones generales.
*En consecuencia, dos círculos son **no concéntricos** si, y sólo si,*

$$\mathsf{D}_1 \neq \mathsf{D}_2 \quad o \quad \mathsf{E}_1 \neq \mathsf{E}_2.$$

(d) *Diremos que dos círculos son **congruentes** si, y sólo si, tienen el mismo radio. Así, con las mismas notaciones de la parte (b), los círculos C_1 y C_2 son congruentes si, y sólo si,*

$$\mathsf{D}_1^2 + \mathsf{E}_1^2 - 4\mathsf{F}_1 = \mathsf{D}_2^2 + \mathsf{E}_2^2 - 4\mathsf{F}_2.$$

En caso de que los círculos

$$C_1:\ x^2+y^2+\mathsf{D}_1x+\mathsf{E}_1y+\mathsf{F}_1=0 \qquad\qquad C_2:\ x^2+y^2+\mathsf{D}_2x+\mathsf{E}_2y+\mathsf{F}_2=0$$
$$(\mathsf{D}_1^2+\mathsf{E}_1^2-4\mathsf{F}_1>0) \qquad\qquad (\mathsf{D}_2^2+\mathsf{E}_2^2-4\mathsf{F}_2>0)$$

sean no concéntricos (es decir, $\mathsf{D}_1 \neq \mathsf{D}_2$ o $\mathsf{E}_1 \neq \mathsf{E}_2$), la recta determinada por sus centros, cuya ecuación es

$$2(\mathsf{E}_1-\mathsf{E}_2)x+2(\mathsf{D}_2-\mathsf{D}_1)y+\mathsf{D}_2\mathsf{E}_1-\mathsf{D}_1\mathsf{E}_2=0, \tag{3.6}$$

que es equivalente a la ecuación

$$(\mathsf{D}_2+2x)(\mathsf{E}_1+2y)=(\mathsf{D}_1+2x)(\mathsf{E}_2+2y), \tag{3.7}$$

recibe el nombre de ***la recta de los centros*** de C_1 y C_2.

En la siguiente observación presentamos otra manera de concebir la recta de los centros de los círculos C_1 y C_2.

OBSERVACIÓN 3.3 (CARACTERIZACIÓN DE LA RECTA DE LOS CENTROS)
Haciendo uso de lo afirmado en el problema 2.44, con $t=-k$, $h_1=-\frac{\mathsf{D}_1}{2}$, $k_1=-\frac{\mathsf{E}_1}{2}$, $h_2=-\frac{\mathsf{D}_2}{2}$ *y* $k_2=-\frac{\mathsf{E}_2}{2}$, *es fácil verificar que, si los círculos* C_1 *y* C_2 *son no concéntricos, y* $P=(u,v)$ *no es el centro de* C_1, *tendremos que:*
El punto P *está en la recta de los centros de* C_1 *y* C_2 *si, y sólo si,*

$$u=-\frac{k\mathsf{D}_1+\mathsf{D}_2}{2(k+1)} \qquad y \qquad v=-\frac{k\mathsf{E}_1+\mathsf{E}_2}{2(k+1)}$$

para algún $k \neq -1$.

§ 3.2 Inecuaciones cuadráticas, e interior y exterior de un círculo

Diremos que un punto ***está en el interior de*** un círculo, si su distancia al centro es menor que el radio.

Diremos que un punto ***está en el exterior de*** un círculo, si su distancia al centro es mayor que el radio.

Llamaremos ***interior*** de un círculo al conjunto de sus puntos interiores.

Llamaremos ***exterior*** de un círculo al conjunto de sus puntos exteriores.

El objetivo central de esta parte del capítulo es ofrecer la representación analítica de los puntos del plano que no están sobre un círculo, tomando como referencia su radio.

Consideremos un círculo C de centro K y radio r. Por la tricotomía del orden de los números reales, todos los puntos del plano están en uno, y sólo uno, de los siguientes conjuntos: el círculo C; el interior del círculo C; el exterior del círculo C. Ahora, atendiendo a la definición de estos dos últimos conjuntos, verificaremos lo afirmado en el siguiente Teorema.

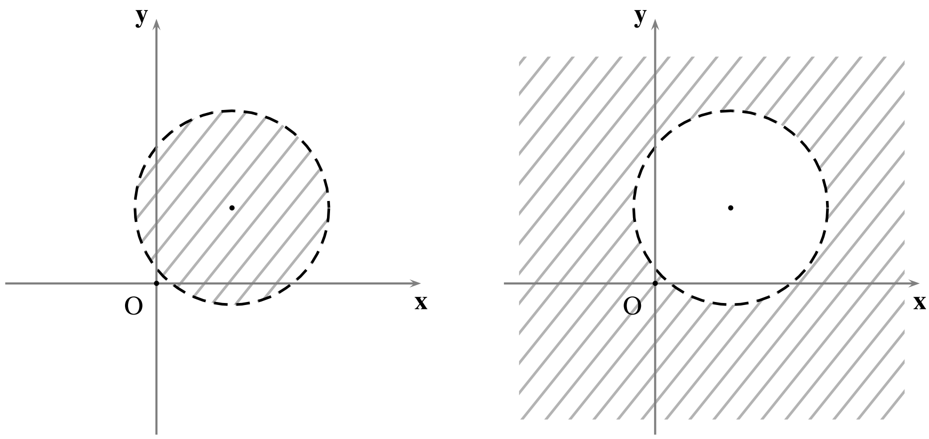


FIGURA 3.1 Interior y exterior de un círculo

TEOREMA 14 (REPRESENTACIÓN ANALÍTICA DEL INTERIOR Y DEL EXTERIOR DE UN CÍRCULO)
Si la ecuación general del círculo C es $x^2 + y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0$ $(\mathsf{D}^2 + \mathsf{E}^2 - 4\mathsf{F} > 0)$*, entonces su interior y su exterior son, respectivamente, los conjuntos*

$$I := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} < 0\}$$
$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} > 0\}.$$

Verificaremos sólo que el interior de C coincide con el conjunto I descrito, pues de manera análoga se verifica que el exterior de C coincide con el conjunto E.

Por definición, el punto $P = (x, y)$ está en el interior de C si, y sólo si, $PK < r$; ahora, por la observación 3.2.(a), esto sucede si, y sólo si,

$$\sqrt{\left(x + \frac{\mathsf{D}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\mathsf{E}}{2}\right)^2} < \frac{\sqrt{\mathsf{D}^2 + \mathsf{E}^2 - 4\mathsf{F}}}{2};$$

o, lo que es lo mismo, si, y sólo si $x^2 + y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} < 0$. Así, el interior del círculo C coincide con el conjunto I, tal como queríamos verificar.

OBSERVACIÓN 3.4
Una ventaja que ofrece el Teorema 14 es que, para saber si un punto (u, v) está en el interior (exterior) de un círculo $x^2 + y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0$*, no tenemos que calcular su distancia al centro, sino averiguar si el número* $u^2 + v^2 + \mathsf{D}u + \mathsf{E}v + \mathsf{F}$ *es positivo o negativo.*

En general, el conjunto solución de una inecuación de la forma $x^2 + y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} \lesseqqgtr 0$ será uno de esos dos conjuntos determinados por el círculo $x^2 + y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0$; e incluirá el borde (es decir, el círculo mismo), sólo en el caso en que tuviéramos "$\geqslant$" o "$\leqslant$".

En lo que se refiere a la representación gráfica de esos conjuntos, haremos la misma convención que hemos hecho con las rectas (ver la página 16).

§ 3.3 Posiciones relativas entre círculos y rectas

En los parágrafos sucesivos haremos un estudio sobre las relaciones que existen entre las posiciones relativas que pueden presentar una recta y un círculo, y los coeficientes de sus ecuaciones generales.

Consideremos un círculo C y una recta l

$$C: \quad x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0 \quad (r > 0) \qquad\qquad l: \quad \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0 \quad (\mathsf{A}^2 + \mathsf{B}^2 \neq 0).$$

El estudio de la ***incidencia*** entre el círculo C y la recta l equivale a la consideración de la existencia de pares ordenados (x, y) de números reales que satisfagan, simultáneamente, las siguientes dos condiciones

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0 \qquad \text{y} \qquad \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0;$$

o, lo que es lo mismo, a la consideración de la ***existencia de soluciones*** del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0 \\ \hfill \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0 \end{cases}. \tag{3.8}$$

Desde el punto de vista geométrico (ver la figura 3.2 y el Principio E.28), el sistema (3.8)⟨6⟩

(N) no tendrá solución si, y sólo si, l y C ***no se cortan***.

(S) tendrá dos soluciones distintas si, y sólo si, l y C son ***secantes*** (es decir, l corta a C en dos puntos distintos).

(T) tendrá dos soluciones iguales si, y sólo si, l y C son ***tangentes*** (es decir, l corta a C en un único punto).

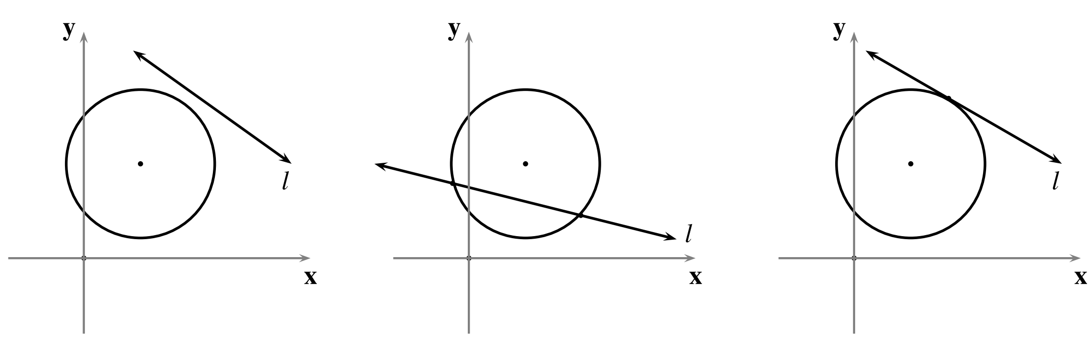


FIGURA 3.2 Incidencia entre una recta y un círculo

Desde el punto de vista algebraico, se puede proceder a resolver el sistema (3.8) despejando una de las variables en la segunda ecuación (una de las que tenga su coeficiente distinto de cero), y "sustituir" esa variable en la primera, tal como detallamos a continuación.

Si $\mathsf{B} \neq 0$, consideramos la forma corte-pendiente de la ecuación de l y el sistema de ecuaciones

$$(3.9) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0 \\ \hfill y = mx + t \end{cases}$$

equivalente al sistema (3.8) (donde $m = -\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}$ y $t = -\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{B}}$).

Al sustituir el término del lado derecho de la segunda igualdad por "y" en la primera ecuación, resulta la ecuación de segundo grado en la variable x

$$(3.10) \qquad (1 + m^2)x^2 + 2(m(t - y_0) - x_0)x + x_0^2 + y_0^2 - r^2 + t^2 - 2y_0t = 0$$

que, dependiendo de su discriminante (ver el Apéndice C)

$$(3.11) \qquad \Delta = 4((r^2 - x_0^2)m^2 - 2x_0(t - y_0)m + (r^2 - y_0^2 - t^2 + 2y_0t))$$

(N) no tendrá solución si, y sólo si, $\Delta < 0$.

(S) tendrá dos soluciones distintas si, y sólo si, $\Delta > 0$.

(T) tendrá dos soluciones iguales si, y sólo si, $\Delta = 0$.

Si $\mathsf{B} = 0$ (de donde $\mathsf{A} \neq 0$), l es perpendicular al eje **x** y, en consecuencia, consideramos el sistema de ecuaciones

$$(3.12) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0 \\ \hfill x = h \end{cases}$$

equivalente al sistema (3.8) (donde $h = -\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{A}}$).

Al sustituir el término del lado derecho de la segunda igualdad por "x" en la primera ecuación, resulta la ecuación de segundo grado en la variable y

$$(3.13) \qquad y^2 - 2y_0y + (x_0 - h)^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

que, dependiendo de su discriminante

$$(3.14) \qquad \Delta = 4(r^2 - (x_0 - h)^2)$$

(N) no tendrá solución si, y sólo si, $\Delta < 0$.

(S) tendrá dos soluciones distintas si, y sólo si, $\Delta > 0$.

(T) tendrá dos soluciones iguales si, y sólo si, $\Delta = 0$.

Una vez que se tengan las soluciones de la ecuación de segundo grado correspondiente, en caso de que existan, apenas se ha encontrado una de las coordenadas de cada uno de los puntos de corte entre C y l: las abscisas, si se procedió como en el caso $\mathsf{B} \neq 0$; las ordenadas, si se procedió como en el caso $\mathsf{B} = 0$. Para encontrar la otra coordenada que acompaña a la ya obtenida, y tener realmente las soluciones del sistema (3.8), sustituimos cada una de las soluciones obtenidas en la segunda ecuación del mismo sistema.

OBSERVACIÓN 3.5

Note que el discriminante (3.11) *permitiría calcular con precisión, de la familia de rectas* $y = mx + t$ *no perpendiculares al eje* **x** *(parametrizada con los parámetros m y t), cuáles de ellas son tangentes, secantes o disjuntas respecto al círculo* $x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0$*, si tenemos como dato m o t.*

Del mismo modo, el discriminante (3.14) *permitiría calcular con precisión, de la familia de rectas* $x = h$ *perpendiculares al eje* **x** *(parametrizada con el parámetro h), cuáles de ellas son tangentes, secantes o disjuntas respecto al círculo* $x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0$.

➤ **EJEMPLO 3.2**

Para estudiar la incidencia entre el círculo y la recta de ecuaciones

$$x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0 \quad y \quad x + y - 9 = 0,$$

respectivamente, procedemos de la siguiente manera.

Como la ecuación explícita de la recta es $y = -x + 9$*, resolvemos el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0 \\ y = -x + 9 \end{cases}.$$

Al sustituir el lado derecho de la segunda ecuación por "y" en la primera, se obtiene la ecuación de segundo grado en la variable x

$$x^2 - 5x + 8 = 0$$

Como el discriminante de esta ecuación es negativo, tenemos que la recta no corta al círculo. QEE ➤

➤ **EJEMPLO 3.3**

Para estudiar la incidencia entre el círculo y la recta de ecuaciones

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 13 = 0 \quad y \quad x - y - 1 = 0,$$

respectivamente, procedemos de la siguiente manera.

Como la ecuación explícita de la recta es $y = x - 1$*, resolvemos el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 2y + 13 = 0 \\ y = x - 1 \end{cases}.$$

Al sustituir el lado derecho de la segunda ecuación por "y" en la primera, se obtiene la ecuación de segundo grado en la variable x

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Como el discriminante de esta ecuación es positivo, tenemos que la recta es secante al círculo; después de sacar las cuentas, los puntos $(4, 3)$ *y* $(2, 1)$ *son los puntos de corte entre ambos.* QEE ➤

➤ **EJEMPLO 3.4**
Para estudiar la incidencia entre el círculo y la recta de ecuaciones

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0 \quad y \quad 4x + 3y - 50 = 0,$$

respectivamente, procedemos de la siguiente manera.
Como la ecuación explícita de la recta es $y = -\frac{4}{3}x + \frac{50}{3}$*, resolvemos el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0 \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{50}{3} \end{cases}.$$

Al sustituir el lado derecho de la segunda ecuación por "y" en la primera, se obtiene la ecuación de segundo grado en la variable x

$$x^2 - 16x + 64 = 0$$

Como el discriminante de esta ecuación es 0*, tenemos que la recta es tangente al círculo; después de sacar las cuentas, el punto* $(8, 6)$ *es el punto de corte entre ambos.* QEE ➤

Recta tangente y recta normal a un círculo

Un problema parecido al que acabamos de resolver es el de encontrar, bajo ciertas condiciones, ***una recta tangente*** a un círculo.

Consideremos un círculo C (con centro (x_0, y_0) y radio r) de ecuación

(3.15)
$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$
$$(r > 0).$$

Recordemos que una recta es tangente al círculo C, si corta a C en un único punto.

Por la naturaleza intrínseca del tratamiento analítico de las rectas, en el análisis que desarrollaremos siempre se considerará aparte el caso de las rectas perpendiculares al eje **x**, pues éstas no se pueden tratar en términos de sus pendientes.

Ahora bien, la condición de que una recta l sea tangente al círculo C, sin más, no determina ninguna recta pues, como veremos más abajo, hay una por cada punto de C; de manera que debemos contar con algún otro dato que determine a l. A continuación enumeramos algunas de las posibilidades sobre los datos que se pueden ofrecer.

(I) Un punto $P = (u, v)$ en l.

(1) l perpendicular al eje **x**.
Nos preguntamos si existe alguna recta l, tangente a C, que sea perpendicular al eje **x** y que pase por P. Por el Principio E.7 tendremos que, si existe alguna recta que satisfaga esas condiciones, es única.
Ahora, al pasar l por P y ser perpendicular al eje **x**, tendremos que l se puede representar por la ecuación $x = u$. Procediendo de la misma forma en que resolvimos el sistema (3.12), l puede ser tangente a C si, y sólo si, el discriminante (3.14) se anula, es decir, si, y sólo si, $r^2 - (x_0 - u)^2 = 0$. Así:

Existirá una recta l tangente a C, perpendicular al eje $\mathbf{x}$, y que pase por $P = (u, v)$ si, y sólo si, $u = x_0 + r$ o $u = x_0 - r$; en cuyo caso, l se puede representar por la ecuación $x = u$.

(2) l no perpendicular al eje $\mathbf{x}$.
Nos preguntamos si existe alguna recta l, tangente a C, que no sea perpendicular al eje $\mathbf{x}$ y que pase por P.
Ahora, al pasar l por P y no ser perpendicular al eje $\mathbf{x}$, tendremos que l se puede representar por una ecuación de la forma

$$y - v = m(x - u).$$

El problema se transforma entonces en saber si existe m tal que l sea tangente a C.
Para resolver este problema, despejamos y en la ecuación anterior,

$$y = mx - mu + v,$$

y sustituimos el lado derecho por "y" en la ecuación (3.15), obteniendo la siguiente ecuación de segundo grado en la variable x

$$(1 + m^2)x^2 - 2(m(mu - v + y_0) + x_0)x + mu(mu - 2v + 2y_0) + (v - y_0)^2 + x_0^2 - r^2 = 0.$$

Ahora, para que l sea tangente a C, esta ecuación debe tener dos soluciones iguales; y sabemos que esto sucede si, y sólo si, su discriminante se anula, es decir,

$$-4(((u - x_0)^2 - r^2)m^2 - 2(u - x_0)(v - y_0)m + ((v - y_0)^2 - r^2)) = 0;$$

y esto sucede si, y sólo si,

$$((u - x_0)^2 - r^2)m^2 - 2(u - x_0)(v - y_0)m + ((v - y_0)^2 - r^2) = 0. \tag{3.16}$$

Así las cosas, el problema planteado tendrá solución si, y sólo si, la ecuación (3.16) tiene solución en la variable m.
En caso de que $(u - x_0)^2 - r^2 = 0$ o, lo que es lo mismo, $r^2 - (x_0 - u)^2 = 0$ (en el que ya sabemos que existe una recta perpendicular al eje $\mathbf{x}$ que pasa por P y es tangente a C), tendremos, al despejar m en la ecuación (3.16), que

$$m = -\frac{1}{2}\frac{u - x_0}{v - y_0}.$$

Como $u - x_0 \neq 0$ (pues en caso contrario tendríamos, de $(u - x_0)^2 - r^2 = 0$, que $r = 0$) tendremos que la única manera en que esta ecuación no tenga solución es que $v = y_0$; en cuyo caso, las coordenadas del punto P del que hemos estado hablando serían $(x_0 + r, y_0)$ o $(x_0 - r, y_0)$, por los cuales sólo existen tangentes a C las correspondientes perpendiculares al eje $\mathbf{x}$ que encontramos en al aparte anterior.
Si P no es ninguno de esos dos puntos, entonces tendremos una segunda recta tangente a C que pasa por P cuya ecuación sería

$$(u - x_0)x + 2(v - y_0)y + u(x_0 - u) + 2v(y_0 - v) = 0.$$

En caso de que $(u-x_0)^2 - r^2 \neq 0$, la ecuación (3.16) es una ecuación de segundo grado en la variable m. Como ya sabemos, la naturaleza de las soluciones de esta ecuación depende de su discriminante

$$\Delta = 4r^2((u-x_0)^2 + (v-y_0)^2 - r^2), \tag{3.17}$$

la cual dependerá, a su vez, de la posición relativa del punto P respecto a C.

(a) *El punto P está en el círculo*: en este caso, dicho discriminante es nulo (puesto que $(u-x_0)^2 + (v-y_0)^2 - r^2 = 0$) y tenemos garantía de que siempre existirá una solución única para la pendiente requerida; la pendiente resulta

$$m = \frac{(u-x_0)(v-y_0)}{(u-x_0)^2 - r^2} = \frac{(u-x_0)(v-y_0)}{-(v-y_0)^2} = -\frac{u-x_0}{v-y_0}$$

y, en consecuencia, la ecuación de la tangente al círculo C en el punto P es

$$(u-x_0)x + (v-y_0)y - x_0u - y_0v + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0.$$

(b) *El punto P está en el exterior del círculo*: en este caso, dicho discriminante es positivo (puesto que, por el Teorema 14, $(u-x_0)^2 + (v-y_0)^2 - r^2 > 0$) y tenemos garantía de que siempre existirán dos soluciones distintas para la pendiente requerida:

$$m = \frac{(u-x_0)(v-y_0) \pm r\sqrt{(u-x_0)^2 + (v-y_0)^2 - r^2}}{(u-x_0)^2 - r^2}.$$

(c) *El punto P está en el interior del círculo*: en este caso, dicho discriminante es negativo (puesto que, por el Teorema 14, $(u-x_0)^2 + (v-y_0)^2 - r^2 < 0$) y, en consecuencia, no habrá ninguna recta tangente al círculo C que pase por el punto P.

En conclusión:

Existirá una recta l tangente a C, no perpendicular al eje $\mathbf{x}$, y que pase por $P = (u, v)$ si, y sólo si, P no es ninguno de los puntos $(x_0 + r, y_0)$ y $(x_0 - r, y_0)$, ni está en el interior de C.
Si $u = x_0 + r$ o $u = x_0 - r$ $(v \neq y_0)$, entonces hay una única recta tangente a C, no perpendicular al eje $\mathbf{x}$, que pasa por P y su ecuación es

$$(u-x_0)x + 2(v-y_0)y + u(x_0-u) + 2v(y_0-v) = 0.$$

Si $u \neq x_0 + r$ y $u \neq x_0 - r$, y P está sobre C, entonces hay una única recta tangente a C, no perpendicular al eje $\mathbf{x}$, que pasa por P y su ecuación es

$$(u-x_0)x + (v-y_0)y - x_0u - y_0v + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0.$$

Si $u \neq x_0 + r$ y $u \neq x_0 - r$, y P está en el exterior de C, entonces hay dos rectas tangentes a C, no perpendiculares al eje $\mathbf{x}$, que pasan por P y sus pendientes son

$$m = \frac{(u-x_0)(v-y_0) \pm r\sqrt{(u-x_0)^2 + (v-y_0)^2 - r^2}}{(u-x_0)^2 - r^2}.$$

(II) La dirección de l.

(1) *l perpendicular al eje* $\mathbf{x}$.
Nos preguntamos si existe alguna recta l, tangente a C, que sea perpendicular al eje $\mathbf{x}$.
Procediendo de la misma forma en que resolvimos el sistema (3.12), concluimos que:

> Existen exactamente dos rectas tangentes a C, perpendiculares al eje $\mathbf{x}$; y éstas son las que se pueden representar por las ecuaciones $x = x_0 + r$ y $x = x_0 - r$.

(2) *l no perpendicular al eje* $\mathbf{x}$.
Nos preguntamos si existe alguna recta l, tangente a C, que no sea perpendicular al eje $\mathbf{x}$.
Este problema es equivalente al de saber si existe alguna recta l, tangente a C, que tenga como pendiente algún número real m previamente fijado.
La familia de todas las rectas de pendiente m se puede representar, parametrizada por t (la ordenada en el origen), mediante la ecuación $y = mx + t$; la recta que estamos buscando es un miembro de esta familia.
Así las cosas, el problema original se transforma en saber si existe algún número real t tal que la recta representada por la ecuación $y = mx + t$ sea tangente a C.
Procediendo de la misma forma en que resolvimos el sistema (3.9), la recta $y = mx + t$ es tangente a C si, y sólo si, el discriminante (3.11) se anula, es decir, si, y sólo si,

$$(r^2 - x_0^2)m^2 - 2x_0(t - y_0)m + (r^2 - y_0^2 - t^2 + 2y_0t) = 0.$$

El problema se transforma entonces en saber si existe t que satisfaga la ecuación anterior; y, después de sacar las cuentas, tenemos que siempre hay dos valores:

$$t = (y_0 - x_0m) \pm r\sqrt{1 + m^2}.$$

Así, existen exactamente dos rectas tangentes a C de pendiente m y éstas se pueden representar por las ecuaciones

$$y = mx + (y_0 - mx_0) \pm r\sqrt{1 + m^2}.$$

> Siempre existen dos rectas tangentes a C, que tengan como pendiente algún número real m previamente fijado, y éstas se pueden representar por las ecuaciones
>
> $$y = mx + (y_0 - mx_0) \pm r\sqrt{1 + m^2}.$$

Fijado un punto P en un círculo C, íntimamente ligado al concepto de recta tangente a un círculo por el punto P tenemos lo que se llama ***la recta normal*** a un círculo en el punto P: esta recta se define como *la perpendicular por P a la recta tangente al círculo C en el punto P.*

OBSERVACIÓN 3.6

(a) *Como podrá observar el lector, el problema de encontrar la recta normal a un círculo en uno de sus puntos se reduce al de encontrar la ecuación de la recta que pasa por ese punto y el centro.*

(b) *Note que la recta normal a un círculo en uno de sus puntos siempre contiene un diámetro del círculo y es secante al círculo.*

(c) *Además, las rectas normales a un círculo son las únicas que son secantes al círculo y que satisfacen además que las tangentes al círculo en sus puntos de corte son paralelas.*

(d) *Por otro lado, dado un círculo y un punto distinto de su centro, se puede hablar de la recta normal al círculo que pasa por dicho punto: simplemente es la recta determinada por ese punto y el centro.*

➤ EJEMPLO 3.5

Consideremos el círculo $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$*, con centro* $(-1, 1)$ *y radio 5.*

Estudiemos la existencia de rectas tangentes al círculo $\mathcal{C}$ *por los puntos que listamos a continuación (ver la figura 3.3) y, en caso de que existan, calculemos sus ecuaciones generales:*

$$P = (-6, 1),\ Q = (4, -2),\ R = (1, 1),\ S = (-4, 5) \text{ y } T = (5, 6).$$

Para ajustarnos a la notación que hemos utilizado en el estudio de las tangentes, precisamos que

$$x_0 = -1,\ y_0 = 1,\ r = 5,\ x_0 + r = 4 \text{ y } x_0 - r = -6.$$

(a) *Para el punto P tenemos que:* $u = -6$ *y* $v = 1$.
Como $u = x_0 - r$ *y* $v = y_0$*, tendremos que sólo habrá una recta* l *tangente al círculo* $\mathcal{C}$ *por el punto P:* l *es perpendicular al eje* $\mathbf{x}$ *y su ecuación es* $x + 6 = 0$.

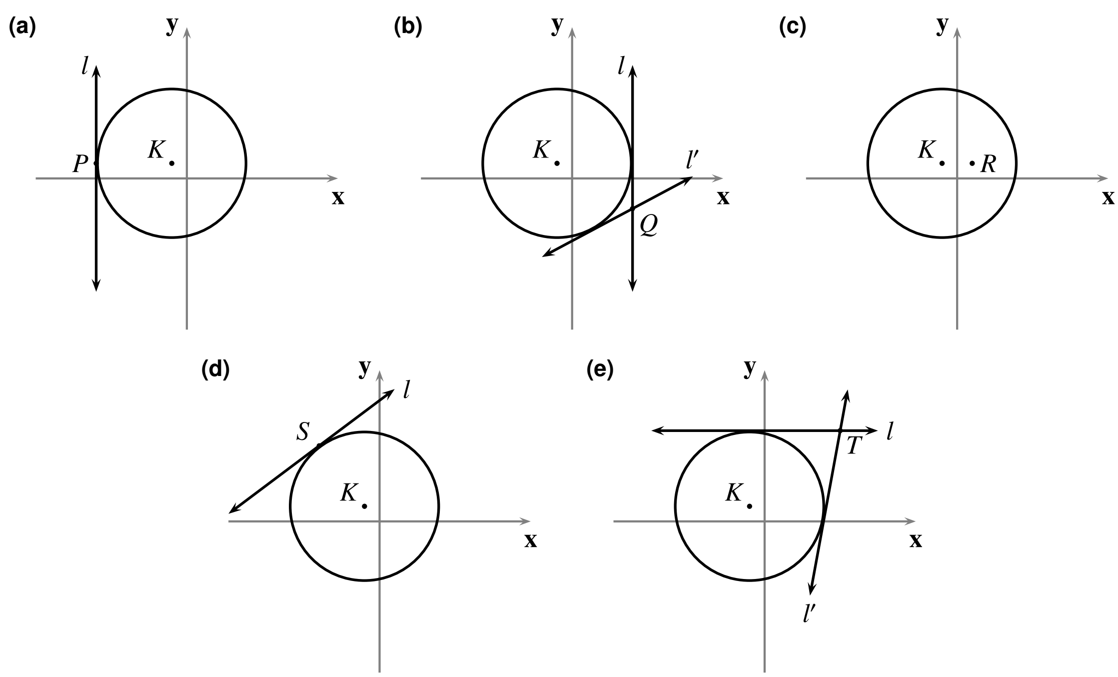


FIGURA 3.3 Representaciones gráficas correspondientes al ejemplo 3.5

(b) *Para el punto Q tenemos que:* $u = 4$ *y* $v = -2$.

Como $u = x_0 + r$ *y* $v \neq y_0$, *tendremos que existen dos rectas* l *y* l' *tangentes al círculo* C *por el punto* Q*: una de ellas perpendicular al eje* **x** *de ecuación* $x - 4 = 0$*; la otra no perpendicular al eje* **x** *de ecuación* $8x - 15y + 76 = 0$.

(c) *Para el punto* R *tenemos que:* $u = 1$ *y* $v = 1$.
Como $u \neq x_0 + r$, $u \neq x_0 - r$ *y* $v \neq y_0$, *averiguamos la posición del punto* R *respecto al círculo* C*; como* $1^2 + 1^2 + 2(1) - 2(1) - 23 = -21 < 0$, *tendremos que el punto* R *está en el interior del círculo* C *y, en consecuencia, no existe ninguna recta tangente a* C *por el punto* R.

(d) *Para el punto* S *tenemos que:* $u = -4$ *y* $v = 5$.
Como $u \neq x_0 + r$, $u \neq x_0 - r$ *y* $v \neq y_0$, *averiguamos la posición del punto* S *respecto al círculo* C*; como* $(-4)^2 + 5^2 + 2(-4) - 2(5) - 23 = 0$, *tendremos que el punto* S *está sobre el círculo* C *y, en consecuencia, existe una única recta* l *tangente a* C *por el punto* S *y su ecuación es* $3x - 4y + 32 = 0$.

(e) *Para el punto* T *tenemos que:* $u = 5$ *y* $v = 6$.
Como $u \neq x_0 + r$, $u \neq x_0 - r$ *y* $v \neq y_0$, *averiguamos la posición del punto* T *respecto al círculo* C*; como* $5^2 + 6^2 + 2(5) - 2(6) - 23 = 36 > 0$, *tendremos que el punto* T *está fuera del círculo* C *y, en consecuencia, existen dos rectas* l *y* l' *tangentes a* C *por el punto* T, *cuyas pendientes son* 0 *y* $\frac{60}{11}$, *y cuyas ecuaciones son* $y - 6 = 0$ *y* $60x - 11y - 234 = 0$.

QEE ◄

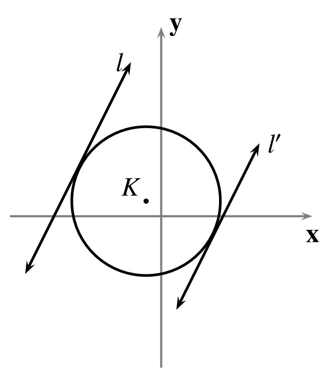


FIGURA 3.4 Representación gráfica correspondiente al ejemplo 3.6

➤ EJEMPLO 3.6

Consideremos el mismo círculo $C : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$, *con centro* $(-1, 1)$ *y radio 5, del ejemplo anterior.*

Estudiemos la existencia de rectas tangentes al círculo C *que tengan como pendiente el número real* 2 *(ver la figura 3.4).*

Para ajustarnos a la notación que hemos utilizado en el estudio de las tangentes, precisamos que

$$x_0 = -1,\ y_0 = 1,\ r = 5 \text{ y } m = 2.$$

Así, existen dos rectas tangentes al círculo C *de pendiente* 2, *cuyas ecuaciones son* $y = 2x + 3 + 5\sqrt{5}$ *y* $y = 2x + 3 - 5\sqrt{5}$.

QEE ◄

§ 3.4 Posiciones relativas entre círculos: eje radical

En los parágrafos sucesivos haremos un estudio sobre las relaciones que existen entre las posiciones relativas que pueden presentar dos círculos, y los coeficientes de sus ecuaciones generales.

Consideremos dos círculos

$$\mathcal{C}_1 : \; x^2 + y^2 + \mathsf{D}_1 x + \mathsf{E}_1 y + \mathsf{F}_1 = 0 \quad (\mathsf{D}_1^2 + \mathsf{E}_1^2 - 4\mathsf{F}_1 > 0) \qquad \mathcal{C}_2 : \; x^2 + y^2 + \mathsf{D}_2 x + \mathsf{E}_2 y + \mathsf{F}_2 = 0 \quad (\mathsf{D}_2^2 + \mathsf{E}_2^2 - 4\mathsf{F}_2 > 0).$$

El estudio de la ***incidencia*** entre los círculos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ equivale a la consideración de la existencia de pares ordenados (x, y) de números reales que satisfagan, simultáneamente, las siguientes dos condiciones

$$x^2 + y^2 + \mathsf{D}_1 x + \mathsf{E}_1 y + \mathsf{F}_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad x^2 + y^2 + \mathsf{D}_2 x + \mathsf{E}_2 y + \mathsf{F}_2 = 0$$

o, lo que es lo mismo, a la consideración de la ***existencia de soluciones*** del sistema de dos ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{ll} x^2 + y^2 + \mathsf{D}_1 x + \mathsf{E}_1 y + \mathsf{F}_1 = 0 & (\mathsf{D}_1^2 + \mathsf{E}_1^2 - 4\mathsf{F}_1 > 0) \\ x^2 + y^2 + \mathsf{D}_2 x + \mathsf{E}_2 y + \mathsf{F}_2 = 0 & (\mathsf{D}_2^2 + \mathsf{E}_2^2 - 4\mathsf{F}_2 > 0) \end{array} \right. . \tag{3.18}$$

Desde el punto de vista geométrico (ver la figura 3.5, así como los Principios E.29 y E.30), el sistema (3.18)

(C) tendrá infinitas soluciones si, y sólo si, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ ***coinciden***.

(T) tendrá una solución única si, y sólo si, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son ***tangentes*** (es decir, $\mathcal{C}_1$ corta a $\mathcal{C}_2$ en único punto).

(N) no tendrá solución si, y sólo si, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ ***no se cortan***.

(S) tendrá dos soluciones distintas si, y sólo si, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son ***secantes*** (es decir, $\mathcal{C}_1$ corta a $\mathcal{C}_2$ en dos puntos distintos).

Desde el punto de vista algebraico, es natural intentar utilizar un método como el de "eliminación por reducción" (que hemos usado para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas), "eliminando" los términos cuadráticos de las ecuaciones que componen el sistema (3.18), al restar ambas ecuaciones:

$$-(x^2 + y^2 + \mathsf{D}_1 x + \mathsf{E}_1 y + \mathsf{F}_1) + (x^2 + y^2 + \mathsf{D}_2 x + \mathsf{E}_2 y + \mathsf{F}_2) = 0$$

o, lo que es lo mismo,

$$(\mathsf{D}_2 - \mathsf{D}_1)x + (\mathsf{E}_2 - \mathsf{E}_1)y + (\mathsf{F}_2 - \mathsf{F}_1) = 0. \tag{3.19}$$

Técnicamente hablando, planteamos un nuevo sistema de ecuaciones sustituyendo una de las dos ecuaciones del sistema (3.18), digamos la segunda, por la ecuación (3.19):

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + \mathsf{D}_1 x + \mathsf{E}_1 y + \mathsf{F}_1 = 0 \\ (\mathsf{D}_2 - \mathsf{D}_1)x + (\mathsf{E}_2 - \mathsf{E}_1)y + (\mathsf{F}_2 - \mathsf{F}_1) = 0 \end{array} \right. . \tag{3.20}$$

Este sistema es equivalente al sistema (3.18); en verdad, la siguiente proposición, de carácter más general, justifica esta afirmación.

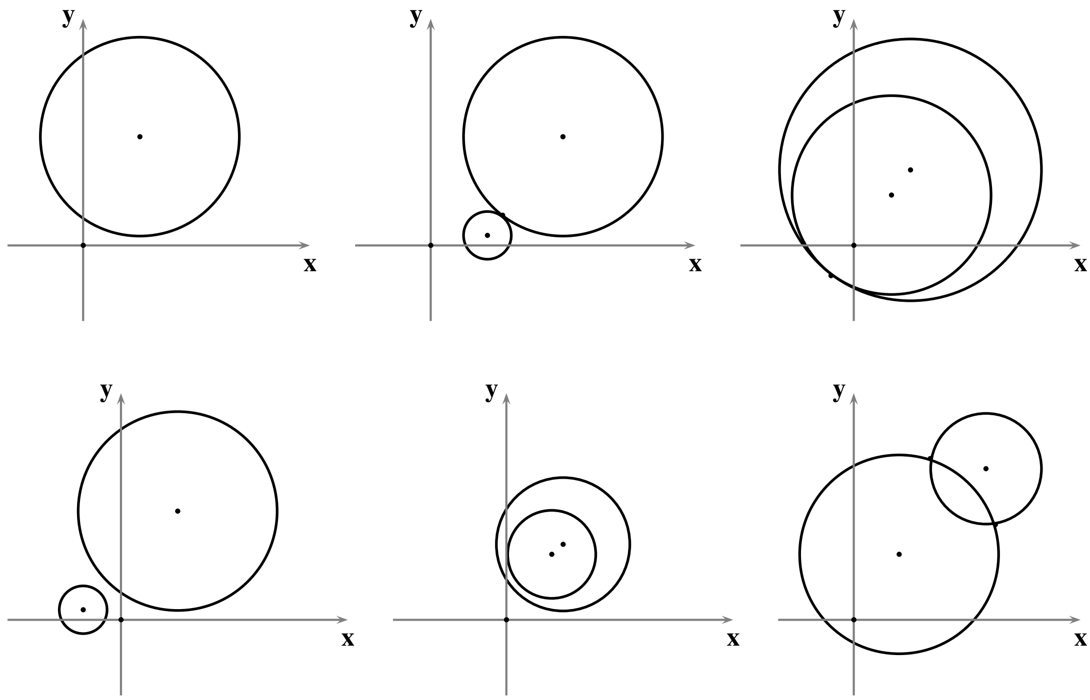


FIGURA 3.5 Incidencia entre dos círculos

LEMA 3.2
Para cualquier número real k, el sistema (3.18) *es equivalente al sistema*

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+\mathsf{D}_1x+\mathsf{E}_1y+\mathsf{F}_1=0 \\ k(x^2+y^2+\mathsf{D}_1x+\mathsf{E}_1y+\mathsf{F}_1)+x^2+y^2+\mathsf{D}_2x+\mathsf{E}_2y+\mathsf{F}_2=0 \end{array}\right. ; \tag{3.21}$$

y si k $\neq 0$*, el sistema* (3.18) *también es equivalente al sistema*

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+\mathsf{D}_2x+\mathsf{E}_2y+\mathsf{F}_2=0 \\ k(x^2+y^2+\mathsf{D}_1x+\mathsf{E}_1y+\mathsf{F}_1)+x^2+y^2+\mathsf{D}_2x+\mathsf{E}_2y+\mathsf{F}_2=0 \end{array}\right. . \tag{3.22}$$

■ PRUEBA

Consideremos un par ordenado de números reales (u, v).
Supongamos que (u, v) es solución del sistema (3.18), es decir, que

$$u^2+v^2+\mathsf{D}_1u+\mathsf{E}_1v+\mathsf{F}_1=0 \quad \text{y} \quad u^2+v^2+\mathsf{D}_2u+\mathsf{E}_2v+\mathsf{F}_2=0.$$

Como

$$k(u^2+v^2+\mathsf{D}_1u+\mathsf{E}_1v+\mathsf{F}_1)+u^2+v^2+\mathsf{D}_2u+\mathsf{E}_2v+\mathsf{F}_2=k0+0=0,$$

tendremos que (u, v) es solución del sistema (3.21) y del sistema (3.22).
Recíprocamente, supongamos que (u, v) es solución del sistema (3.21), es decir, que

$$u^2+v^2+\mathsf{D}_1u+\mathsf{E}_1v+\mathsf{F}_1=0 \text{ y } k(u^2+v^2+\mathsf{D}_1u+\mathsf{E}_1v+\mathsf{F}_1)+u^2+v^2+\mathsf{D}_2u+\mathsf{E}_2v+\mathsf{F}_2=0.$$

Así,

$$u^2 + v^2 + \mathsf{D}_2 u + \mathsf{E}_2 v + \mathsf{F}_2 = 0$$

y, en consecuencia, (u, v) es solución del sistema (3.18).
Supongamos ahora que (u, v) es solución del sistema (3.22), es decir, que

$$u^2 + v^2 + \mathsf{D}_2 u + \mathsf{E}_2 v + \mathsf{F}_2 = 0 \text{ y } k(u^2 + v^2 + \mathsf{D}_1 u + \mathsf{E}_1 v + \mathsf{F}_1) + u^2 + v^2 + \mathsf{D}_2 u + \mathsf{E}_2 v + \mathsf{F}_2 = 0.$$

Así,

$$k(u^2 + v^2 + \mathsf{D}_1 u + \mathsf{E}_1 v + \mathsf{F}_1) = 0.$$

Para $k \neq 0$, tendremos que

$$u^2 + v^2 + \mathsf{D}_1 u + \mathsf{E}_1 v + \mathsf{F}_1 = 0$$

y, en consecuencia, (u, v) es solución del sistema (3.18).

QEP ■

Por lo hecho hasta ahora se puede proceder a resolver el sistema (3.18) tal como detallamos a continuación.

Si $\mathsf{D}_1 = \mathsf{D}_2$ y $\mathsf{E}_1 = \mathsf{E}_2$ (coeficientes de los términos lineales iguales o, lo que es lo mismo, C_1 y C_2 concéntricos), entonces

(C) tendrá infinitas soluciones si, y sólo si, $\mathsf{F}_1 = \mathsf{F}_2$ (términos independientes iguales o, lo que es lo mismo, C_1 y C_2 congruentes; ver la observación 3.2.(b)).

(N) no tendrá solución si, y sólo si, $\mathsf{F}_1 \neq \mathsf{F}_2$ (términos independientes distintos o, lo que es lo mismo, C_1 y C_2 no congruentes; ver la observación 3.2.(c)).

Si $\mathsf{D}_1 \neq \mathsf{D}_2$ o $\mathsf{E}_1 \neq \mathsf{E}_2$ (coeficientes de los términos lineales distintos o, lo que es lo mismo, C_1 y C_2 no concéntricos), entonces la segunda ecuación del sistema (3.20) (es decir, la ecuación (3.19)) representa una recta; en cuyo caso el análisis se reduce al estudiado en la sección anterior, generando las alternativas **(T)**, **(N)** o **(S)**.

➤ **EJEMPLO 3.7**

Para estudiar la incidencia entre los círculos

$$x^2 + y^2 - 3x - 8y + 17 = 0 \quad y \quad x^2 + y^2 - 3x - 8y + 17 = 0$$

procedemos de la siguiente manera.

Como los coeficientes de los términos lineales, así como los términos independientes, son iguales, tendremos que los dos círculos coinciden; en consecuencia, los círculos se cortan en infinitos puntos (todos los puntos de cualquiera de ellos). **QEE** ➤

➤ **EJEMPLO 3.8**

Para estudiar la incidencia entre los círculos

$$x^2 + y^2 - 2x + 5y - 3 = 0 \quad y \quad x^2 + y^2 - 2x + 5y - 7 = 0$$

procedemos de la siguiente manera.

Como los coeficientes de los términos lineales son iguales, pero los términos independientes son distintos, tendremos que los dos círculos son concéntricos y distintos; en consecuencia, los círculos no se cortan. **QEE** ◄

➤ EJEMPLO 3.9

Para estudiar la incidencia entre los círculos

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0 \quad y \quad x^2 + y^2 - 24x - 18y + 200 = 0$$

procedemos de la siguiente manera.

Como los coeficientes de los términos lineales son distintos, estudiamos la incidencia entre el primer círculo y la recta $4x + 3y - 50 = 0$*, es decir, resolvemos el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0 \\ 4x + 3y - 50 = 0 \end{cases}.$$

Por el ejemplo 3.4, este sistema tiene como única solución el punto $(8, 6)$*; en consecuencia, los círculos son tangentes (usando el Principio E.38 se puede verificar que son tangentes exteriormente).* **QEE** ◄

➤ EJEMPLO 3.10

Para estudiar la incidencia entre los círculos

$$x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0 \quad y \quad x^2 + y^2 - 10x - 2y + 25 = 0$$

procedemos de la siguiente manera.

Como los coeficientes de los términos lineales son distintos, estudiamos la incidencia entre el primer círculo y la recta $x + y - 9 = 0$*, es decir, resolvemos el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0 \\ x + y - 9 = 0 \end{cases}.$$

Por el ejemplo 3.2, este sistema no tiene solución; en consecuencia, los círculos no se cortan. **QEE** ◄

➤ EJEMPLO 3.11

Para estudiar la incidencia entre los círculos

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 13 = 0 \quad y \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$$

procedemos de la siguiente manera.

Como los coeficientes de los términos lineales son distintos, estudiamos la incidencia entre el primer círculo y la recta $x - y - 1 = 0$*, es decir, resolvemos el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 2y + 13 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}.$$

Por el ejemplo 3.3, este sistema tiene como solución los puntos $(4, 3)$ *y* $(2, 1)$*; en consecuencia, los círculos son secantes.* **QEE** ◀

Familias de círculos

Consideremos dos círculos

$$C_1 : \ x^2 + y^2 + \mathsf{D}_1 x + \mathsf{E}_1 y + \mathsf{F}_1 = 0 \qquad (\mathsf{D}_1^2 + \mathsf{E}_1^2 - 4\mathsf{F}_1 > 0)$$

$$C_2 : \ x^2 + y^2 + \mathsf{D}_2 x + \mathsf{E}_2 y + \mathsf{F}_2 = 0 \qquad (\mathsf{D}_2^2 + \mathsf{E}_2^2 - 4\mathsf{F}_2 > 0);$$

estamos interesados en saber qué tipo de figura geométrica representa una ecuación de la forma

$$m(x^2 + y^2 + \mathsf{D}_1 x + \mathsf{E}_1 y + \mathsf{F}_1) + n(x^2 + y^2 + \mathsf{D}_2 x + \mathsf{E}_2 y + \mathsf{F}_2) = 0,$$

para dos números reales m y n no simultáneamente nulos (un tipo de combinación lineal de las ecuaciones de C_1 y C_2).

En caso de que $n = 0$, esa ecuación representa el círculo C_1.

En caso de que $n \neq 0$, la ecuación anterior es equivalente (al tomar $k = \frac{m}{n}$) a una ecuación de la forma

$$k(x^2 + y^2 + \mathsf{D}_1 x + \mathsf{E}_1 y + \mathsf{F}_1) + x^2 + y^2 + \mathsf{D}_2 x + \mathsf{E}_2 y + \mathsf{F}_2 = 0 \tag{3.23}$$

o, lo que es lo mismo, de la forma

$$(k + 1)x^2 + (k + 1)y^2 + (k\mathsf{D}_1 + \mathsf{D}_2)x + (k\mathsf{E}_1 + \mathsf{E}_2)y + (k\mathsf{F}_1 + \mathsf{F}_2) = 0, \tag{3.24}$$

donde k es un número real cualquiera.

Denotemos por $G_{1,k,2}$ al gráfico de esta última ecuación; estamos interesados en saber qué tipo de figura geométrica es $G_{1,k,2}$.

La siguiente observación adelanta alguna información sobre la respuesta a la pregunta planteada: precisa la posición relativa entre $G_{1,k,2}$ y los círculos C_1 y C_2.

OBSERVACIÓN 3.7
Para cualquier número real k, el lema 3.2 nos dice, en términos de conjuntos, que: la intersección de los círculos C_1 *y* C_2 *coincide con la intersección del círculo* C_1 *y la figura geométrica* $G_{1,k,2}$*; y, si* $k \neq 0$*, la intersección de los círculos* C_1 *y* C_2 *coincide con la intersección del círculo* C_2 *y la figura geométrica* $G_{1,k,2}$*. En consecuencia:*

(a) $G_{1,k,2}$ *pasa por los puntos de intersección de* C_1 *y* C_2*.*

(b) $G_{1,k,2}$ *no tiene en común con* C_1 *otro punto distinto de los puntos de intersección de* C_1 *y* C_2*.*

(c) *Para* $k \neq 0$*,* $G_{1,k,2}$ *no tiene en común con* C_2 *otro punto distinto de los puntos de intersección de* C_1 *y* C_2*.*

En caso de que $k = 0$, $G_{1,k,2}$ coincide con el círculo C_2.

Analicemos, de aquí en adelante, el caso en que $k \neq 0$.

En caso de que $k = -1$, y C_1 y C_2 sean concéntricos, tendremos que: $G_{1,k,2}$ es todo el plano, si C_1 y C_2 coinciden; $G_{1,k,2}$ es el conjunto vacío, si C_1 y C_2 no coinciden.

En la siguiente proposición mostramos lo especial que resulta la figura geométrica $G_{1,k,2}$ para $k = -1$, en el caso en que C_1 y C_2 son no concéntricos.

LEMA 3.3 (EL EJE RADICAL DE DOS CÍRCULOS NO CONCÉNTRICOS)
Para $k = -1$, y C_1 y C_2 no concéntricos, la figura geométrica $G_{1,k,2}$ es una recta (ver la figura 3.6) que se puede representar por la ecuación

$$(\mathsf{D}_1 - \mathsf{D}_2)x + (\mathsf{E}_1 - \mathsf{E}_2)y + (\mathsf{F}_1 - \mathsf{F}_2) = 0$$

y que tiene las siguientes particularidades:

(a) *es perpendicular a la recta de los centros de C_1 y C_2.*

(b) *es secante a C_1 y a C_2 en sus puntos de corte, en caso de que C_1 y C_2 sean secantes.*

(c) *es tangente a C_1 y a C_2 en su punto de corte, en caso de que C_1 y C_2 sean tangentes.*

(d) *no corta a C_1 ni a C_2, en caso de que C_1 y C_2 sean disjuntos.*

Esta recta $G_{1,k,2}$ es llamada ***el eje radical de*** *C_1* ***y*** *C_2.*

■ **PRUEBA**
En el caso en que C_1 y C_2 son no concéntricos tendremos, por la observación 3.2.(c), que $\mathsf{D}_1 - \mathsf{D}_2 \neq 0$ o $\mathsf{E}_1 - \mathsf{E}_2 \neq 0$. Así, por el Teorema 5, $G_{1,k,2}$ representa una recta.
(a) Como $2(\mathsf{E}_1 - \mathsf{E}_2)(\mathsf{D}_1 - \mathsf{D}_2) + 2(\mathsf{D}_2 - \mathsf{D}_1)(\mathsf{E}_1 - \mathsf{E}_2) = 0$ tendremos, por la observación 3.2.(c) y el Teorema 10, que $G_{1,k,2}$ es perpendicular a la recta de los centros de C_1 y C_2.
(b) Es consecuencia directa de la observación 3.7.(a).
(c) Es consecuencia directa de las partes (a) y (b) de la observación 3.7.
(d) Es consecuencia directa de la observación 3.7.(b).

QEP ■

En caso de que $k \neq -1$, la ecuación (3.24) es equivalente a la ecuación

$$x^2 + y^2 + \frac{k\mathsf{D}_1 + \mathsf{D}_2}{k+1}x + \frac{k\mathsf{E}_1 + \mathsf{E}_2}{k+1}y + \frac{k\mathsf{F}_1 + \mathsf{F}_2}{k+1} = 0. \tag{3.25}$$

En este caso estamos en capacidad de decir qué tipo de figura geométrica es $G_{1,k,2}$, en función de las posiciones relativas de C_1 y C_2.

(I) Si C_1 y C_2 coinciden, entonces la figura geométrica $G_{1,k,2}$ es un círculo y coincide con C_1.

(II) Si C_1 y C_2 son tangentes, entonces la figura geométrica $G_{1,k,2}$ puede ser:

(1) un punto (el punto de tangencia), como es el caso en que

$$G_{1,k,2} : \ x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0$$

para

$$C_1 : \ x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad C_2 : \ x^2 + y^2 + 3x + 2 = 0 \quad \text{y} \quad k = \frac{1}{2}.$$

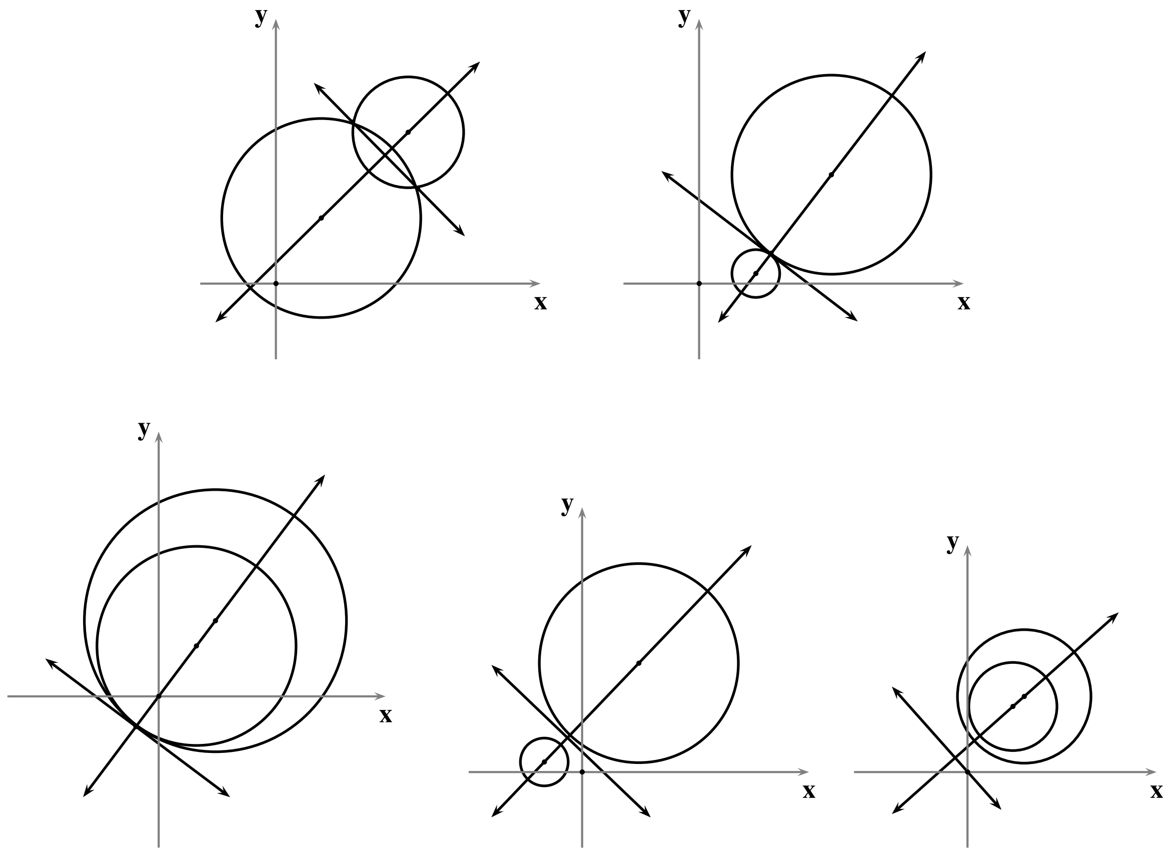


FIGURA 3.6 Eje radical y recta de los centros de dos círculos no concéntricos

(2) un círculo (ya que, por el lema 3.2, lo que podemos decir es que contiene al menos un punto) que tiene las siguientes particularidades:

(a) es tangente a los círculos C_1 y C_2 en su punto de corte (por la observación 3.7);

(b) su centro está sobre la recta de los centros de C_1 y C_2 (por la observación 3.3 y el hecho de que las coordenadas del centro de $G_{1,k,2}$ son $(-\frac{k\mathsf{D}_1+\mathsf{D}_2}{2(k+1)}, -\frac{k\mathsf{E}_1+\mathsf{E}_2}{2(k+1)})$); y

(c) es distinto de C_1 (pues, si $G_{1,k,2} = C_1$, tendríamos que sus centros son iguales; así, $\mathsf{D}_1 = \mathsf{D}_2$ y $\mathsf{E}_1 = \mathsf{E}_2$ y, en consecuencia, C_1 y C_2 serían concéntricos, contrario al hecho de que son tangentes)⟨7⟩.

(III) Si C_1 y C_2 no se cortan, entonces la figura geométrica $G_{1,k,2}$ puede ser

(1) el conjunto vacío, como es el caso en que

$$G_{1,k,2}: \; x^2 + y^2 + 6x + 4y + 14 = 0$$

para

$$C_1: \; x^2 + y^2 + 9x + 6y + \frac{43}{2} = 0, \quad C_2: \; x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{y} \quad k = 2.$$

(2) un punto, como es el caso en que

$$G_{1,k,2}:\ x^2+y^2+6x+4y-13=0$$

para

$$C_1:\ x^2+y^2+9x+6y+\frac{43}{2}=0,\quad C_2:\ x^2+y^2-4=0\quad \text{y}\quad k=2.$$

(3) un círculo.
Además, en este caso, la figura geométrica $G_{1,k,2}$ tiene las siguientes particularidades:

(a) no tiene ningún punto en común con C_1, ni con C_2;

(b) queda completamente determinado por un punto cualquiera que está en él (pues, si $P=(u,v)$ está en $G_{1,k,2}$, es decir,

$$k(u^2+v^2+\mathsf{D}_1u+\mathsf{E}_1v+\mathsf{F}_1)+u^2+v^2+\mathsf{D}_2u+\mathsf{E}_2v+\mathsf{F}_2=0,$$

entonces P no puede estar sobre C_1 ya que, de lo contrario, C_1 y C_2 se cortarían en P; así, $u^2+v^2+\mathsf{D}_1u+\mathsf{E}_1v+\mathsf{F}_1\neq 0$ y, por tanto, k tiene el valor $-\frac{u^2+v^2+\mathsf{D}_2u+\mathsf{E}_2v+\mathsf{F}_2}{u^2+v^2+\mathsf{D}_1u+\mathsf{E}_1v+\mathsf{F}_1}$);

(c) por la parte anterior, no corta a ningún otro $G_{1,k',2}$ con $k'\neq k$.

(IV) Si C_1 y C_2 son secantes, entonces la figura geométrica $G_{1,k,2}$ es un círculo (ya que: por la observación 3.7, $G_{1,k,2}$ contiene al menos dos puntos; y el lema 3.1, junto con el Teorema 13, garantizan que $G_{1,k,2}$ es un círculo), y tiene las siguientes particularidades:

(1) es secante a los círculos C_1 y C_2 en sus puntos de corte (por la observación 3.7);

(2) su centro está sobre la recta de los centros de C_1 y C_2 (por la observación 3.3 y el hecho de que las coordenadas del centro de $G_{1,k,2}$ son $(-\frac{k\mathsf{D}_1+\mathsf{D}_2}{2(k+1)},-\frac{k\mathsf{E}_1+\mathsf{E}_2}{2(k+1)})$); y

(3) es distinto de C_1 (pues, si $G_{1,k,2}=C_1$, tendríamos que sus centros son iguales; así, $\mathsf{D}_1=\mathsf{D}_2$ y $\mathsf{E}_1=\mathsf{E}_2$ y, en consecuencia, C_1 y C_2 serían concéntricos, contrario al hecho de que son secantes).

La parte **(IV)** inmediata anterior nos asegura que, si C_1 y C_2 son círculos secantes en los puntos P_1 y P_2, entonces la ecuación (3.25) representa un círculo que pasa por los puntos P_1 y P_2. La pregunta que surge naturalmente es: ¿todo círculo que pase por los puntos P_1 y P_2 se podrá representar por una ecuación como la (3.25)?

La respuesta es parcialmente positiva y su justificación está en la siguiente proposición.

LEMA 3.4
Para dos círculos C_1 y C_2 secantes en los puntos P_1 y P_2, tendremos que:

C es un círculo distinto de C_1 que pasa por P_1 y P_2 si, y sólo si, $C=G_{1,k,2}$ para algún número real $k\neq -1$.

■ **PRUEBA**
Supongamos que C es un círculo distinto de C_1 que pasa por los P_1 y P_2.
Consideremos el punto (x_0,y_0), centro del círculo C.
El punto (x_0,y_0) está en la recta de los centros de C_1 y C_2, pues: (x_0,y_0) equidista de los puntos P_1 y P_2 y, en consecuencia, está en la mediatriz del segmento de extremos P_1 y P_2; ahora, como esta mediatriz coincide con la recta de los centros, tendremos lo afirmado.

Por la observación 3.3, existe un número real $s \neq -1$ tal que

$$x_0 = -\frac{s\mathsf{D}_1 + \mathsf{D}_2}{2(s+1)} \qquad \text{y} \qquad y_0 = -\frac{s\mathsf{E}_1 + \mathsf{E}_2}{2(s+1)}.$$

Ahora, por **(IV)**, podemos asegurar que $G_{1,s,2}$ es un círculo con centro (x_0, y_0) y pasa por P_1. Como C y $G_{1,s,2}$ son círculos que tienen el mismo centro y pasan por P_1, tendremos que $C = G_{1,k,2}$ para el número real $k = s$ y $s \neq -1$.

El recíproco es lo afirmado en la parte **(IV)** anterior.

QEP ■

OBSERVACIÓN 3.8 (CÍRCULOS QUE PASAN POR DOS PUNTOS)

Note que, fijados dos puntos distintos P_1 y P_2 en el plano, siempre podemos encontrar dos círculos C_1 y C_2 distintos que pasen por P_1 y P_2 (y, en consecuencia, secantes en los puntos P_1 y P_2).

Para ello basta con fijar dos puntos K_1 y K_2 distintos en la mediatriz del segmento determinado por P_1 y P_2; tomar K_1 y K_2 como centros; tomar las distancias $r_1 = K_1P_1$ y $r_2 = K_2P_1$ como radios; y construir las ecuaciones de los círculos $C_1 = C_{K_1,r_1}$ y $C_2 = C_{K_2,r_2}$.

Así, por el lema 3.4, la ecuación (3.25) *(con $k \neq -1$) permitiría construir todos los círculos que pasan por los puntos P_1 y P_2.*

Por otro lado, para poder calcular el valor de k que corresponde a alguno de esos círculos, deben ofrecernos algún otro dato específico de tal círculo (pasar por P_1 y P_2, sin más, no determina ningún círculo, ya que hay uno por cada número real k, distinto de -1). Dependiendo de la naturaleza de ese dato adicional, una posible estrategia puede consistir en utilizar directamente la ecuación (3.25)*, o el hecho de que el centro de un tal círculo es $\left(-\frac{k\mathsf{D}_1+\mathsf{D}_2}{2(k+1)}, -\frac{k\mathsf{E}_1+\mathsf{E}_2}{2(k+1)}\right)$, o una combinación de ambas (ver la figura 3.7).*

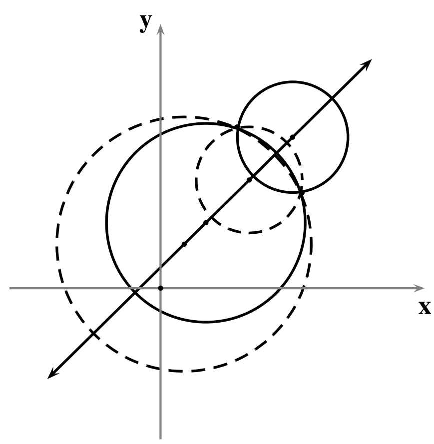


FIGURA 3.7 Círculos que pasan por los puntos de intersección de dos círculos secantes

Note que el problema de encontrar la ecuación general de un círculo se reduce, en principio, a calcular tres números reales: los coeficientes de una ecuación cuadrática en dos variables de la forma

$$x^2 + y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0.$$

para la que $\mathsf{D}^2 + \mathsf{E}^2 - 4\mathsf{F} \geqslant 0$. Además, esos tres números son, en general, independientes entre sí.

De este modo, el Álgebra de las ecuaciones lineales nos lleva a asegurar que, para hallar la ecuación general de un círculo, son suficientes tres ***ecuaciones lineales independientes*** cuyas variables sean los coeficientes buscados (desarrollaremos uno de los casos más ilustrativos de esta idea en la observación 3.10); en este contexto presupondremos que cada una de esas ecuaciones corresponde a una condición geométrica.

Por esta razón diremos que *todo círculo queda determinado por tres condiciones* (algebraicas o geométricas) *independientes*; hasta ahora hemos procedido a encontrar la ecuación general de un círculo, de la manera regular: a partir de ***las coordenadas del centro y del radio***. En verdad, en la mayoría de los problemas que enfrentaremos en este estudio, los datos sobre los círculos de los que tengamos que encontrar su ecuación, siempre podrán reducirse a esta manera regular.

Así, al establecer menos de tres condiciones de ese tipo, no determinamos un único círculo, sino una infinidad de círculos que comparten las propiedades comunes establecidas por esas condiciones; llamaremos a todos esos círculos la ***familia de círculos*** que satisfacen las condiciones dadas.

En este estudio, las condiciones (geométricas o algebraicas) que determinan una familia de círculos siempre se podrá expresar en términos algebraicos; en otras palabras, dichas condiciones se harán patentes en la forma de un nuevo tipo de variables (distintas de aquellas que representan las coordenadas de un punto genérico del plano) a las que, asignándoles un valor específico, determinan cada uno de los miembros de la familia: esas nuevas variables son llamadas los ***parámetros*** de la familia.

El caso de los círculos que pasan por dos puntos distintos, expuesto en la observación 3.8, es un ejemplo de familia de círculos para la que k sería el parámetro que la define.

Otros ejemplos importantes de familias de círculos son los siguientes.

➤ **EJEMPLO 3.12** (FAMILIA DE CÍRCULOS CONCÉNTRICOS)
Haciendo uso de la forma canónica de la ecuación de un círculo, podemos ofrecer la ecuación de la familia de los círculos con centro en un punto prefijado.

Pongamos por caso que el punto prefijado tiene coordenadas $(1, 2)$*; la familia de los círculos con centro en el punto* $(1, 2)$ *se puede representar por la ecuación*

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = r^2$$

o, equivalentemente,

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 - r^2 = 0,$$

siempre que $r > 0$.

En general, si el punto prefijado tiene coordenadas (u, v)*, la familia de los círculos con centro en el punto* (u, v) *se puede representar por la ecuación*

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$$

o, equivalentemente,

$$x^2 + y^2 - 2ux - 2vy + u^2 + v^2 - r^2 = 0,$$

siempre que $r > 0$.

Note que hemos expresado la ecuación de esta familia, parametrizada con r, que representa el radio de cada una de las círculos que conforman la familia, siempre que $r > 0$.

Note además que esta familia se puede representar por cualquiera de las siguientes ecuaciones equivalentes:

(a) $(x-u)^2 + (y-v)^2 = k$ *(parametrizada con k, donde* $k > 0$*).*

(b) $x^2 + y^2 - 2ux - 2vy + s = 0$ *(parametrizada con s, donde* $s < \frac{u^2+v^2}{4}$*).*

QEE ➤

➤ **EJEMPLO 3.13** (FAMILIA DE CÍRCULOS CONGRUENTES)
Haciendo uso de la forma canónica de la ecuación de un círculo, podemos ofrecer la ecuación de la familia de los círculos de radio un número real positivo previamente fijado.

Pongamos por caso que el número real positivo prefijado es 3*; la familia de los círculos de radio* 3 *se puede representar por la ecuación*

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = 9$$

o, equivalentemente,

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - 9 = 0.$$

En general, si el número real positivo prefijado es r, la familia de los círculos de radio r se puede representar por la ecuación

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

o, equivalentemente

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0.$$

Note que hemos expresado la ecuación de esta familia, parametrizada con h y k, que representan las coordenadas del centro de cada uno de los círculos que conforman la familia. QEE ➤

➤ **EJEMPLO 3.14** (FAMILIA DE CÍRCULOS QUE PASAN POR UN PUNTO)
Haciendo uso de la forma canónica de la ecuación de un círculo, podemos ofrecer la ecuación de la familia de los círculos que pasan por un punto previamente fijado.

Pongamos por caso que el punto prefijado es $(1,2)$*; la familia de los círculos que pasan por el punto* $(1,2)$ *se puede representar por la ecuación*

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = (h-1)^2 + (k-2)^2$$

o, equivalentemente,

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + 2h + 4k - 5 = 0,$$

siempre que $(h,k) \neq (1,2)$*.*

En general, si el punto prefijado es (u,v)*, la familia de los círculos que pasan por el punto* (u,v) *se puede representar por la ecuación*

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = (h-u)^2 + (k-v)^2$$

o, equivalentemente,

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + 2uh + 2vk - u^2 - v^2 = 0,$$

siempre que $(h,k) \neq (u,v)$*.*

Note que hemos expresado la ecuación de esta familia, parametrizada con h y k, que representan las coordenadas del centro de cada uno de los círculos que conforman la familia. QEE ◀

➤ **EJEMPLO 3.15** (FAMILIA DE CÍRCULOS TANGENTES A UNA RECTA EN UNO DE SUS PUNTOS)
Fijada una recta y un punto sobre ella, podemos ofrecer la ecuación de la familia de los círculos tangentes a esa recta en ese punto.

Supongamos que tenemos como dato la recta m de ecuación $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$, y las coordenadas cartesianas de un punto $P = (u, v)$ sobre m.

Por el Principio E.33, si un círculo es tangente a m en P, entonces su centro está sobre la recta l perpendicular a m en P, es decir, sobre la recta de ecuación $-\mathsf{B}x + \mathsf{A}y + \mathsf{B}u - \mathsf{A}v = 0$.

La ecuación de la familia de círculos tangentes a m en P es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = (h - u)^2 + (k - v)^2$$

o, equivalentemente,

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + 2uh + 2vk - u^2 - v^2 = 0,$$

siempre que $(h, k) \neq (u, v)$ y además $-\mathsf{B}h + \mathsf{A}k + \mathsf{B}u - \mathsf{A}v = 0$.

Note que hemos expresado la ecuación de esta familia, parametrizada con h y k, que representan las coordenadas del centro de cada uno de los círculos que conforman la familia.

En caso de que se requiera, podemos expresar la ecuación de esta familia parametrizada con sólo una de las coordenadas del centro:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2vy - 2uv = 0$$

parametrizada con h, en caso de que $B = 0$;

$$x^2 + y^2 - 2\left(\tfrac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}(k - v) + u\right)x - 2ky + 2u\left(\tfrac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}(k - v) + u\right) + 2vk - u^2 - v^2 = 0$$

parametrizada con k, en caso de que $B \neq 0$. QEE ◀

OBSERVACIÓN 3.9
Todo el análisis que acabamos de realizar en este parágrafo nos provee de un procedimiento para hallar una recta, o un círculo, que pasa por los puntos de intersección de dos círculos dados, sin necesidad de hallar los puntos de corte entre éstos.

En la siguiente observación presentamos lo que hemos anunciado un poco más arriba.

OBSERVACIÓN 3.10 (CÍRCULO DETERMINADO POR TRES PUNTOS NO COLINEALES)
Una terna de condiciones geométricas para determinar un círculo muy elemental, y particularmente notable, es la de ofrecer tres puntos no colineales; esos datos son suficientes para determinar un único círculo, como veremos a continuación.

Consideremos tres puntos $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ y $P_3 = (x_3, y_3)$ distintos.

(a) *Los puntos P_1, P_2 y P_3 son no colineales si, y sólo si, son concíclicos (es decir, están sobre un mismo círculo).*
La verificación de esta afirmación se puede realizar de la siguiente manera.
Si P_1, P_2 y P_3 son no colineales, el circuncentro del triángulo determinado por P_1, P_2 y P_3 (es decir, el punto de corte de las mediatrices de los lados de ese triángulo) y la distancia desde el circuncentro a cualquiera de los puntos P_1, P_2 o P_3 nos proveen de los datos para construir un círculo que pase por P_1, P_2 y P_3 (el circuncírculo de dicho triángulo). Además, por el Principio E.32, este círculo es el único que contiene a P_1, P_2 y P_3.
Recíprocamente, si P_1, P_2 y P_3 son concíclicos entonces, por el Principio E.28, no pueden ser colineales.

(b) *Note que, por la definición de puntos concíclicos, el Teorema 13 y la igualdad de círculos, P_1, P_2 y P_3 son concíclicos si, y sólo si, existen tres únicos números reales* A, B *y* C *tales que* $\mathsf{A}^2+\mathsf{B}^2-4\mathsf{C}>0$ *y la ecuación*

$$x^2+y^2+\mathsf{A}x+\mathsf{B}y+C=0 \tag{3.26}$$

es satisfecha por las coordenadas de P_1, P_2 y P_3.

(c) *Por el Teorema 4 y la Regla de Kramer, los puntos P_1, P_2 y P_3 son no colineales si, y sólo si, el sistema de ecuaciones*

$$\left\{\begin{array}{l} x_1\mathsf{A}+y_1\mathsf{B}+\mathsf{C}=-(x_1^2+y_1^2)\\ x_2\mathsf{A}+y_2\mathsf{B}+\mathsf{C}=-(x_2^2+y_2^2)\\ x_3\mathsf{A}+y_3\mathsf{B}+\mathsf{C}=-(x_3^2+y_3^2)\end{array}\right. \tag{3.27}$$

tiene una única solución y ésta es

$$\mathsf{A}=\frac{\Delta_{\mathsf{A}}}{\Delta},\quad \mathsf{B}=\frac{\Delta_{\mathsf{B}}}{\Delta}\quad y\quad \mathsf{C}=\frac{\Delta_{\mathsf{C}}}{\Delta},$$

donde

$$\Delta_{\mathsf{A}}=\begin{vmatrix}-(x_1^2+y_1^2) & y_1 & 1\\ -(x_2^2+y_2^2) & y_2 & 1\\ -(x_3^2+y_3^2) & y_3 & 1\end{vmatrix},\quad \Delta_{\mathsf{B}}=\begin{vmatrix}x_1 & -(x_1^2+y_1^2) & 1\\ x_2 & -(x_2^2+y_2^2) & 1\\ x_3 & -(x_3^2+y_3^2) & 1\end{vmatrix},\quad \Delta_{\mathsf{C}}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & -(x_1^2+y_1^2)\\ x_2 & y_2 & -(x_2^2+y_2^2)\\ x_3 & y_3 & -(x_3^2+y_3^2)\end{vmatrix}$$

y

$$\Delta=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}.$$

(d) *Por las partes (a), (b) y (c) anteriores tenemos que los puntos P_1, P_2 y P_3 son concíclicos si, y sólo si, satisfacen la ecuación*

$$x^2+y^2+\frac{\Delta_{\mathsf{A}}}{\Delta}x+\frac{\Delta_{\mathsf{B}}}{\Delta}y+\frac{\Delta_{\mathsf{C}}}{\Delta}=0, \tag{3.28}$$

que es la ecuación general del único círculo que los contiene.

(e) *El único círculo que pasa por los puntos P_1, P_2 y P_3 no colineales se puede describir por una ecuación de la forma*

$$\begin{vmatrix}x^2+y^2 & x & y & 1\\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1\\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1\\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0. \tag{3.29}$$

La justificación de esta afirmación estriba en el hecho de que, al desarrollar este determinante por la primera fila, se tiene que

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \Delta(x^2+y^2+\frac{\Delta_A}{\Delta}x+\frac{\Delta_B}{\Delta}y+\frac{\Delta_C}{\Delta}).$$

Así, como $\Delta \neq 0$ (al ser P_1, P_2 y P_3 no colineales), un punto $P=(x,y)$ satisface la ecuación (3.29) *si, y sólo si, satisface la ecuación* (3.28) *(es decir, ambas ecuaciones son equivalentes). Por tanto, la ecuación* (3.29) *describe también al único círculo que pasa por P_1, P_2 y P_3.*

➤ Ejemplo 3.16

Consideremos los puntos $P_1=(1,2)$, $P_2=(3,1)$ y $P_3=(-3,-1)$. Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0,$$

tendremos que P_1, P_2 y P_3 no son colineales y, en consecuencia, son concíclicos.

La ecuación del círculo que los contiene es

$$-\frac{1}{10}\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 10 & 3 & 1 & 1 \\ 10 & -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir,

$$x^2+y^2-x+3y-10=0.$$

QEE ◄

➤ Ejemplo 3.17

Lo expuesto en la observación 3.10 permite decidir cuándo cuatro puntos son concíclicos.

Consideremos los puntos $P_1=(2,-1)$, $P_2=(-1,-7)$, $P_3=(0,0)$ y $P_4=(-4,-3)$. Como

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 & 1 \\ 50 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 25 & -4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

tendremos que P_1, P_2, P_3 y P_4 son concíclicos.

Consideremos ahora los puntos $Q_1=(8,-2)$, $Q_2=(6,2)$, $Q_3=(3,-7)$ y $Q_4=(1,0)$. Como

$$\begin{vmatrix} 68 & 8 & -2 & 1 \\ 40 & 6 & 2 & 1 \\ 58 & 3 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

tendremos que Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 no son concíclicos. QEE ◄

Problemas

En cada uno de los problemas en los que sea pertinente, realice una representación gráfica.

3.1 Encuentre la ecuación general del círculo que satisface las respectivas condiciones.

(1) centro $(4, 1)$ y radio 3.

(2) centro $(0, 2)$ y diámetro 10.

(3) centro $(-1, 3)$ y contiene al punto $(2, 2)$.

(4) centro el origen y contiene al punto $(-1, -1)$.

(5) centro $(\sqrt{2}, -2)$ y contiene al origen.

(6) radio 9 y contiene los puntos $(1, 0)$ y $(3, -5)$.

(7) centro en el eje **x** y contiene los puntos $(3, 1)$ y $(1, -5)$.

(8) centro en la recta $x + 6y - 1 = 0$ y contiene los puntos $(1, 2)$ y $(-2, 1)$.

(9) diámetro el segmento determinado por los puntos $(-1, 3)$ y $(2, 7)$.

(10) radio 5, contiene al origen, y la abscisa de su centro es -3.

(11) contiene los puntos $(2, 0)$, $(3, -2)$, $(0, 0)$.

(12) contiene los puntos $(-3, 1)$, $(-5, -5)$, $(-1, -3)$.

(13) centro $(13, -1)$ y es tangente al eje **y**.

(14) centro el origen y es tangente a la recta $x + y + 31 = 0$.

(15) centro $(-7, 2)$ y es tangente a la recta $3x + 15y + 1 = 0$.

(16) radio 5, es tangente a los ejes de coordenadas, y su centro está en el primer cuadrante.

(17) radio r, es tangente a los ejes de coordenadas, y su centro está en el primer cuadrante.

(18) radio 5, es tangente a los ejes de coordenadas, y su centro está en el segundo cuadrante.

(19) radio r, es tangente a los ejes de coordenadas, y su centro está en el segundo cuadrante.

(20) contiene los puntos $(5, 1)$ y $(3, 3)$, y es tangente al eje **x**.

(21) contiene los puntos $(-1, 1)$ y $(0, 4)$, y es tangente a la recta $2x - y + 5 = 0$.

(22) contiene al punto $(-3, 1)$, y es tangente a la recta $2x - y + 5 = 0$ en el punto $(1, 7)$.

(23) contiene los puntos $(2, 4)$ y $(0, 5)$, y es tangente a la recta $2x - y + 5 = 0$

(24) radio 4 y es tangente a la recta $5x + y + 2 = 0$ en el punto $(1, -7)$.

(25) tangente a la recta $x + y + 6 = 0$ y es concéntrico al círculo $x^2 + y^2 + 8x + 10y + 15 = 0$.

(26) centro en la recta $4x + 3y - 11 = 0$ y es tangente a las rectas $x - 5y + 1 = 0$ y $5x + y - 8 = 0$.

(27) radio 1 y es tangente a las rectas $x + 3y - 6 = 0$ y $3x + y - 3 = 0$.

(28) contiene al punto $(7, 2)$ y es tangente a las rectas $x - y + 9 = 0$ y $x + y + 3 = 0$.

(29) radio 16 y es tangente al círculo $x^2 + y^2 = 100$ en el punto $(6, 8)$.

(30) centro en la recta $y = x$ y contiene los puntos de intersección de los círculos
$x^2 + y^2 - 13x - 3y + 12 = 0$ y $4x^2 + 4y^2 - 50x - 13y + 49 = 0$.

3.2 Encuentre la ecuación canónica, el centro y el radio de los círculos siguientes.

(a) $x^2 + y^2 - 25x + 4y + 79 = 0$.

(b) $x^2 + y^2 - 13x - 31y + 70 = 0$.

(c) $x^2 + y^2 - 7x - 15y + 38 = 0$.

(d) $x^2 + y^2 + 8x = 0$.

(e) $x^2 + y^2 - 10y + 9 = 0$.

(f) $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 1 = 0$.

3.3 Dado un triángulo, existen exactamente dos círculos que son tangentes a uno de sus lados y a las rectas que contienen a los otros dos lados: el círculo que resulta tangente a los tres lados del triángulo es llamado el ***círculo inscrito*** al triángulo (o su incírculo); y el otro círculo es llamado el ***círculo exinscrito*** al triángulo en ese lado. Note que todo triángulo tiene tres círculos exinscritos: uno en cada lado.

Encuentre las ecuaciones generales del círculo circunscrito, del círculo inscrito, y de los tres círculos exinscritos, a cada uno de los triángulos del ejercicio 2.22.

3.4 Encuentre una ecuación que represente al conjunto de los puntos que satisfacen las siguientes condiciones:

(a) la suma de los cuadrados de sus distancias a las rectas perpendiculares $x + 3y - 6 = 0$ y $3x - y + 8 = 0$ es 4.

(b) la suma de los cuadrados de sus distancias a las rectas perpendiculares $\mathsf{A}_1 x + \mathsf{B}_1 y + \mathsf{C}_1 = 0$ y $\mathsf{B}_1 x - \mathsf{A}_1 y + \mathsf{C}_2 = 0$ es una constante k.

(c) la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $(1, 3)$ y $(5, -1)$ es igual a 34.

(d) la suma de los cuadrados de sus distancias a dos puntos distintos prefijados es una constante k.

(e) la razón de sus distancias a los puntos $(1, 3)$ y $(5, -1)$ es igual a 3.

(f) la razón de sus distancias a los puntos (a, b) y (c, d) distintos es una constante k.

(g) el cuadrado de su distancia al punto $(-1, 0)$ es el triple de su distancia a la recta $3x+4y+5 = 0$.

(h) ser vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el segmento determinado por los puntos $(4, 1)$ y $(3, 2)$.

(i) ser punto medio de un segmento de longitud a cuyos extremos están en los ejes de coordenadas.

(j) ser punto medio de una cuerda de un círculo, con extremo en uno de sus puntos previamente fijado.

(k) la longitud del segmento tangente desde el punto al círculo C_1 de ecuación $x^2 + y^2 - 16 = 0$, es igual al doble de la longitud del segmento tangente desde dicho punto al círculo C_2 de ecuación $x^2 + y^2 - 10y = 0$.

3.5 Si las coordenadas cartesianas de un punto satisfacen la ecuación encontrada en cada una de las partes del ejercicio anterior:

(a) ¿estará sujeto a las condiciones dadas?

(b) ¿qué figura geométrica conforman esos puntos?

3.6 Encuentre la longitud de la cuerda del círculo $x^2 + y^2 = 1$ que está sobre la recta $x - y + 1 = 0$.

3.7 Encuentre la ecuación de la recta que contiene a la cuerda del círculo $x^2 + y^2 = 9$, cuyo punto medio es $(1, 1)$.

3.8 Encuentre el área y la longitud de los siguientes círculos.

(a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 11 = 0$.
(c) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 16 = 0$.
(b) $x^2 + y^2 - 25x + 4y + 79 = 0$.
(d) $x^2 + y^2 - 13x - 31y + 70 = 0$.

3.9 Verifique que las siguientes afirmaciones son equivalentes: dos círculos

(a) son congruentes. **(b)** tienen la misma área. **(c)** tienen la misma longitud.

3.10 Si un punto P está fuera del círculo C, y Q es el punto de contacto de una de las tangentes a C desde P, el segmento $\overline{PQ}$ es llamado ***segmento tangente a*** C ***desde*** P.

Encuentre la longitud de los segmentos tangentes desde el punto P al círculo C.

(a) $P = (5, 3)$ y $C : x^2 + y^2 = 25$.
(b) $P = (8, 5)$ y $C : x^2 + y^2 + 12y + 20 = 0$.

3.11 **(a)** Dado el círculo $C_{K,r}$, donde $K = (x_0, y_0)$, y un punto $Q = (x_1, y_1)$ fuera de $C_{K,r}$, verifique que la longitud t de los dos segmentos tangentes desde Q hasta $C_{K,r}$ es

$$t = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 - r^2}.$$

(b) ***La potencia*** de un punto respecto a un círculo es la diferencia entre el cuadrado de la distancia de ese punto al centro del círculo, menos el cuadrado del radio.
Verifique que la potencia de Q respecto a $C_{K,r}$ es t^2.

(c) Dado un círculo C de ecuación $x^2 + y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0$, y un punto $Q = (x_1, y_1)$ fuera de C, verifique que la potencia de Q respecto a C es

$$p = x_1^2 + y_1^2 + \mathsf{D}x_1 + \mathsf{E}y_1 + \mathsf{F}.$$

(d) Dados dos círculos no concéntricos, verifique que el conjunto de los puntos del plano que tienen la misma potencia respecto a los dos círculos es el eje radical.

3.12 Encuentre el valor de k para que la longitud de los segmentos tangentes desde el punto $(3, -1)$ al círculo dado sea 1.

(a) $x^2 + y^2 = k^2$. **(b)** $x^2 + (y - k)^2 = 36$. **(c)** $x^2 + y^2 + 2ky = 0$.

3.13 Si un punto P está fuera del círculo C, el segmento que une los puntos de contacto de las tangentes a C desde P es llamado la ***cuerda de contacto*** de P en C.

Fijado un punto $P = (x_1, y_1)$ y el círculo C de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$, verifique que:

(a) $x_1 x + y_1 y = r^2$ es la ecuación de la recta que contiene a la cuerda de contacto de P en C, si P está fuera de C.

(b) calcule las ecuaciones de las cuerdas de contacto de los puntos y círculos del ejercicio 3.10.

(c) $x_1x + y_1y = r^2$ es la ecuación de la recta tangente a C en el punto P, si P está en C.

Ofrezca una interpretación geométrica del hecho de que las ecuaciones de esas rectas sean tan parecidas.

3.14 Considere un punto P fuera del círculo C de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. Verifique que las cuerdas de contacto de todos los puntos Q que están fuera de C y sobre la recta $\overleftrightarrow{OP}$ son paralelas entre sí y perpendiculares a $\overleftrightarrow{OP}$.

3.15 Dadas las ecuaciones de tres círculos C_1, C_2 y C_3 no concéntricos dos a dos:

(a) encuentre las ecuaciones de los tres ejes radicales.

(b) verifique que dos de los tres ejes radicales de la parte anterior son paralelos si, y sólo si, sus centros son colineales.

(c) verifique que si sus centros no son colineales, entonces los tres ejes radicales de la parte **(a)** concurren en un único punto (este punto es llamado ***el centro radical*** de los tres círculos).

3.16 Encuentre el centro radical de los círculos $x^2+y^2-20x+20y+150 = 0$, $x^2+y^2-13x-31y+70 = 0$ y $x^2 + y^2 + 17x + 15y + 38 = 0$.

3.17 Denotando, respectivamente, por l y n a las rectas tangente y normal a un círculo C en un punto P, se llama:

- ***longitud de la tangente*** a C en P, a la distancia entre P y el punto T donde l corta al eje **x**.
- ***longitud de la normal*** a C en P, a la distancia entre P y el punto N donde n corta al eje **x**.
- ***subtangente*** a C en P, a la distancia entre T y el punto $Q = (u, 0)$.
- ***subnormal*** a C en P, a la distancia entre N y el punto $Q = (u, 0)$.

Si $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$, con $\mathsf{AB} \neq 0$, es la ecuación de la recta l tangente al círculo C en el punto $P = (u, v)$,

(a) encuentre la ecuación de la recta n normal a C en P.

(b) calcule la longitud de la tangente a C en P.

(c) calcule la longitud de la normal a C en P.

(d) calcule la subtangente a C en P.

(e) calcule la subnormal a C en P.

3.18 Encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal, y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, para cada círculo y punto de contacto dados.

(a) $x^2 + y^2 = 5$; $(1, 2)$.

(b) $x^2 + y^2 - 4x - 16y + 43 = 0$; $(2, 3)$.

(c) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 11 = 0$; $(-1, -2)$.

(d) $x^2 + y^2 - 10y + 9 = 0$; $(0, 1)$.

3.19 **(a)** Verifique que las ecuaciones de cada uno de los siguientes pares corresponden a un círculo y una de sus secantes.

(I) $x^2 + y^2 = 2$ y $x - y = 0$.

(II) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ y $x + 2y - 1 = 0$.

(III) $x^2 + y^2 - 3x - 8y + 17 = 0$ y $2x - y + 1 = 0$.

(b) Encuentre las medidas de los ángulos que forman la recta secante dada y la recta tangente al círculo dado en cada uno de sus puntos de corte, y averigüe si alguno de esos ocho ángulos es recto.⟨8⟩

3.20 **(a)** Verifique que las ecuaciones de cada uno de los siguientes pares corresponden a dos círculos secantes.

(I) $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ y $x^2 + y^2 - 12x - 10y + 45 = 0$.

(II) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ y $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$.

(III) $x^2 + y^2 - 6y = 0$ y $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

(b) Encuentre las medidas de los ángulos que forman las rectas tangentes a los círculos dados en cada uno de sus puntos de corte, y averigüe si alguno de esos ocho ángulos es recto.⟨9⟩

3.21 Encuentre la ecuación de la familia de los círculos concéntricos cuyo centro común es el punto $(3, 5)$. Dibuje tres elementos de la familia, especificando el valor del parámetro en cada caso.

3.22 Encuentre la ecuación de la familia de los círculos cuyos centros están sobre el eje **y**. Si t y s son los dos parámetros: dibuje tres elementos de la familia conservando t constante y asignando a s tres valores diferentes; dibuje otros tres miembros de la familia conservando s constante y asignando a t tres valores diferentes.

3.23 Encuentre la ecuación de la familia de los círculos que contienen al origen. Si t y s son los dos parámetros: dibuje tres elementos de la familia conservando t constante y asignando a s tres valores diferentes; dibuje otros tres miembros de la familia conservando s constante y asignando a t tres valores diferentes.

3.24 Encuentre la ecuación de la familia de los círculos que contienen al origen y el punto $(-1, 7)$. Dibuje tres elementos de la familia, especificando el valor del parámetro en cada caso.

3.25 Verifique que podemos encontrar la ecuación de un círculo que contiene los puntos de corte de dos círculos (secantes o tangentes), si se conoce además:

(a) un punto que está sobre él distinto de los puntos anteriores.

(b) la recta que contiene su centro.

(c) su radio.

(d) una recta que es tangente.

3.26 Dados dos círculos $C_1 :\ x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$ y $C_2 :\ x^2 + y^2 - 16x + 48 = 0$, verifique que:

(a) no se cortan (hacer esta parte por dos métodos).

(b) los gráficos de la forma $G_{1,k,2}$ correspondientes son vacíos, en caso de que $k = 1, 2, 3$ y 4.

(c) los gráficos de la forma $G_{1,,k2}$ correspondientes son círculo, en caso de que $k = -2, -3$, y 5.

(d) el gráfico de $G_{1,-1,2}$ es una recta (el eje radical).

3.27 Dados dos círculos C_1 y C_2 no concéntricos, verifique que cualquier par de círculos de la forma $G_{1,k,2}$ tienen el mismo eje radical que C_1 y C_2.

3.28 Verifique que el punto $(2, 5)$ está en el exterior del círculo $x^2+y^2-6x+8y-11 = 0$, y que el punto $(4, 1)$ está en su interior.

3.29 Represente gráficamente las figuras geométricas que satisfacen las condiciones dadas.

(a) está contenida en el semiplano $L_{U'}$ y en el interior del círculo de centro $(1, 0)$ y radio 1.

(b) $x + y > 1$ y $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 \leqslant 0$.

(c) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 \geq 0$ y $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 < 0$.

(d) $x + y \leqslant 1$ y $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 > 0$.

(e) $x^2 + y^2 - 4 \leq 0$ y $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 > 0$.

3.30 Calcule el área de las regiones definidas en las partes (a), (b) y (c) del ejercicio anterior.

3.31 Verifique que toda recta que contiene al punto $(1, 5)$ no puede ser tangente al círculo $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 6 = 0$.

3.32 Dado el círculo $x^2 + y^2 = 5$, encuentre los valores de k para los cuales la recta $x - 2y + k = 0$:

(a) es secante al círculo.

(b) es tangente al círculo.

(c) no corta al círculo.

3.33 Dado el círculo $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$, encuentre los valores de m para los cuales la recta $y = mx + 3$:

(a) es secante al círculo.

(b) es tangente al círculo.

(c) no corta al círculo.

3.34 **(a)** La ***distancia de un punto P a un círculo*** $C_{K,r}$, que se denota por $\mathbf{d}(P, C_{K,r})$, es definida como la más pequeña de las distancias $\mathbf{d}(P, R)$, donde R es un punto de $C_{K,r}$. La Geometría elemental nos dice que

$$\mathbf{d}(P, C_{K,r}) = |PK - r|.$$

Calcule:

(I) $\mathbf{d}((-3,2), C_{(1,1),1})$.

(II) $\mathbf{d}((3,2), C_{(1,1),1})$.

(III) $\mathbf{d}((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), C_{(1,1),1})$.

(IV) $\mathbf{d}((1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}), C_{(1,1),1})$.

(b) La ***distancia de una recta*** l ***a un círculo*** $C_{K,r}$, que se denota por $\mathbf{d}(l, C_{K,r})$, es definida como la más pequeña de las distancias $\mathbf{d}(R, S)$, donde R es un punto de $C_{K,r}$ y S es un punto de l. La Geometría elemental nos dice que

$$\mathbf{d}(l, C_{K,r}) = \begin{cases} 0, & \text{si } l \text{ corta a } C_{K,r}; \\ \mathbf{d}(K, l) - r, & \text{si } l \text{ no corta a } C_{K,r}. \end{cases}$$

Calcule:

(I) $\mathbf{d}(x + y = 0, C_{(1,1),1})$.

(II) $\mathbf{d}(x - y = 0, C_{(1,1),1})$.

(III) $\mathbf{d}(x + y - 2 - \sqrt{2} = 0, C_{(1,1),1})$.

(IV) $\mathbf{d}(x + y - 6 = 0, C_{(1,1),1})$.

(c) La ***distancia de un círculo*** C_{K_1,r_1} ***a un círculo*** C_{K_2,r_2}, que se denota por $\mathbf{d}(C_{K_1,r_1}, C_{K_2,r_2})$, es definida como la más pequeña de las distancias $\mathbf{d}(R, S)$, donde R es un punto de C_{K_1,r_1} y S es un punto de C_{K_2,r_2}.

Encuentre un procedimiento para encontrar esa distancia y calcule:

(I) $\mathbf{d}(C_{(1,1),2}, C_{(1,1),1})$. **(II)** $\mathbf{d}(C_{(0,0),1}, C_{(1,1),1})$. **(III)** $\mathbf{d}(C_{(4,4),1}, C_{(1,1),1})$.

3.35 Encuentre la máxima distancia, y la mínima distancia, entre los puntos del círculo $x^2 + y^2 - 4x + 20y = 0$ y el punto $(10, 7)$.

3.36 Verifique que cuatro puntos distintos $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$ y $P_4 = (x_4, y_4)$ son concíclicos si, y sólo si, tres cualesquiera de ellos son no colineales y

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3.37 Averigüe si son concíclicos cada uno de los siguientes conjuntos de puntos.

(a) $\{(0,1), (2,0), (1,3), (3,1)\}$.

(b) $\{(1,1), (2,0), (3,1), (2,2)\}$.

(c) $\{(2,0), (1, \sqrt{3}), (0,2), (5,1)\}$.

(d) $\{(7,5), (4,2), (-1,-3), (2,1)\}$.

3.38 Verifique que, si desde cualquier punto P del círculo circunscrito a un triángulo se trazan perpendiculares a las rectas que contienen los lados del triángulo, entonces los pies de estas perpendiculares son colineales.

(La recta que determinan se llama ***la recta de Simpson*** para el punto P).

3.39 Verifique que el punto $P = (3,1)$ está sobre el círculo circunscrito al triángulo cuyos vértices son $(0,1)$, $(2,0)$, $(1,3)$, y halle la ecuación de la recta de Simpson para el punto P.

3.40 Dado el círculo C_K, considere dos rectas l_1 y l_2 tangentes a C_K y paralelas. Considere además una recta l distinta de l_1 y l_2, y tangente a C_K. Si A y B son los puntos de corte de l con l_1 y l_2, respectivamente, verifique que la recta que pasa por A y K es perpendicular a la recta que pasa por B y K.

3.41 Desde un punto P exterior a un círculo dado, se traza una secante al círculo en los puntos A y B. Verifique que la potencia de P respecto al círculo es el producto $PA \cdot PB$.

3.42 Verifique que si, desde un punto cualquiera de un círculo, se traza una perpendicular a un diámetro, entonces la longitud del segmento perpendicular que se determina es media proporcional entre las longitudes de los dos segmentos que la perpendicular determina en el diámetro.

3.43 Verifique que todo diámetro perpendicular a una cuerda la divide en dos partes congruentes.

3.44 Verifique que la mediatriz de una cuerda de un círculo contiene su centro.

3.45 Verifique que el círculo que contiene los puntos medios de los lados de un triángulo contiene, también, los pies de las alturas del triángulo.

3.46 **(Parametrización de un círculo)**
Si C es el círculo de radio r y centro en el origen, verifique que el punto $P = (u, v)$ está en C si, y sólo si, existe un número real t con $0 \leqslant t < 2\pi$ tal que

$$u = r\cos t \qquad \text{y} \qquad v = r\,\mathrm{sen}\, t.$$

3.47 **(Parametrización racional de un círculo)**
Si C es el círculo de radio r y centro en el origen, verifique que el punto $P = (u, v)$ distinto de $A = (-r, 0)$ está en C si, y sólo si, existe un número real t tal que

$$u = r\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{y} \qquad v = r\frac{2t}{1+t^2}.$$

3.48 **(Parametrización racional de un círculo)**
Si C es el círculo de radio r y centro en el origen, y k es cualquier número real no nulo, verifique que el punto $P = (u, v)$ distinto de $A = (-r, 0)$ está en C si, y sólo si, existe un número real t tal que

$$u = r\frac{1-(kt)^2}{1+(kt)^2} \qquad \text{y} \qquad v = r\frac{2(kt)}{1+(kt)^2}.$$

Comentarios

⟨1⟩ También recibe el nombre de ***ecuación de segundo grado***, o ***de grado dos***, ***en dos variables***. Una ecuación de este tipo está constituida por una igualdad en la que uno de los términos es cero y el otro término es un polinomio de segundo grado en dos variables no degenerado.

⟨2⟩ Tal como hemos apuntado en el estudio de las rectas, es un tanto abusivo usar el artículo determinado "***la***" en la expresión "***la*** ecuación general del círculo $\mathcal{G}$" o "***la*** ecuación del círculo $\mathcal{G}$".

Y tal como hemos apuntado allí, preferimos continuar con ese abuso, por el uso extendido de esta manera de hablar entre los diversos autores que hemos tenido ocasión de revisar (ninguno de los cuales, dicho sea de paso, alerta al lector sobre este problema).

⟨3⟩ Algunos autores utilizan la palabra ***círculo*** de manera distinta a como nosotros las empleamos en este texto: para algunos, lo que nosotros definimos aquí es la *circunferencia*, siendo el círculo lo que nosotros definiremos como el *interior del círculo*; para otros, la circunferencia es lo que nosotros definiremos como la *longitud del círculo*.

⟨4⟩ Usaremos indistintamente esta expresión y las expresiones: círculo con centro en K y radio r; y círculo con centro en el punto K y radio r.

⟨5⟩ Note que $(-2x_0)^2 + (-2y_0)^2 - 4(x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 4r^2 > 0$.

⟨6⟩ Por los Principios E.34, E.35 y E.37, una manera de saber en cuál de los casos siguientes cae el sistema (3.8) es calculando la distancia entre el centro de C, (x_0, y_0), y l, es decir, calculando el número

$$\frac{|\mathsf{A}x_0 + \mathsf{B}y_0 + \mathsf{C}|}{\sqrt{\mathsf{A}^2 + \mathsf{B}^2}},$$

y compararlo con el radio del círculo, r. Sin embargo este medio, aunque útil para saber si dicho sistema tiene o no soluciones, no proporciona sus soluciones en caso de que existan; para tal fin es conveniente proceder como detallamos más adelante.

⟨7⟩ Note que: cuando $|k|$ se hace muy grande, $G_{1,k,2}$ se va pareciendo a C_1, sin llegar a ser nunca C_1, por fuera de C_1 para los negativos, y por dentro para los positivos; si $|k|$ se hace muy pequeño, $G_{1,k,2}$ se va pareciendo a C_2, sin llegar a ser nunca C_2, por fuera de C_2 para los negativos, y por dentro para los positivos; si k se acerca a -1 por la izquierda, el radio de $G_{1,k,2}$ se hace cada vez más grande, su centro está del mismo lado del centro de C_1 que el centro de C_2, y cada vez más lejos del centro de C_2; si k se acerca a -1 por la derecha, el radio de $G_{1,k,2}$ se hace cada vez más grande, su centro está del mismo lado del centro de C_2 que el centro de C_1, y cada vez más lejos del centro de C_1; cuando $k = 1$, el centro de $G_{1,k,2}$ es el punto medio del segmento con extremos en los centros de C_1 y C_2.

⟨8⟩ Dada una recta secante a un círculo, un principio de la Geometría elemental nos asegura que los ángulos entre la secante y la recta tangente al círculo en uno de los puntos de corte son congruentes, en algún orden, con los ángulos entre la secante y la recta tangente al círculo en el otro de los puntos de corte.

Si alguno de los ocho ángulos que tienen vértice en los puntos de corte es recto, se dice que la recta y el círculo son ***ortogonales*** o ***perpendiculares***.

Note que las normales a un círculo en uno de sus puntos son las únicas rectas perpendiculares a dicho círculo.

⟨9⟩ Dados dos círculos secantes, un principio de la Geometría elemental nos asegura que los ángulos entre las rectas tangentes en uno de los puntos de corte son congruentes, en algún orden, con los ángulos entre las rectas tangentes en el otro de los puntos de corte.

(Si alguno de los ocho ángulos con vértice en los puntos de corte es recto, se dice que los círculos son ***ortogonales***).

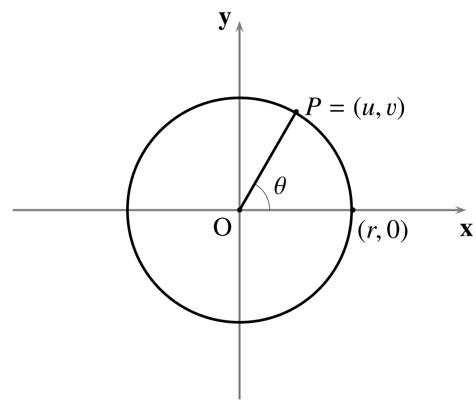
Orientación para resolver los problemas del Capítulo 3

Creemos que el instructor del curso debería acompañar al estudiante en la resolución de los ejercicios 3.10, 3.11, 3.15.

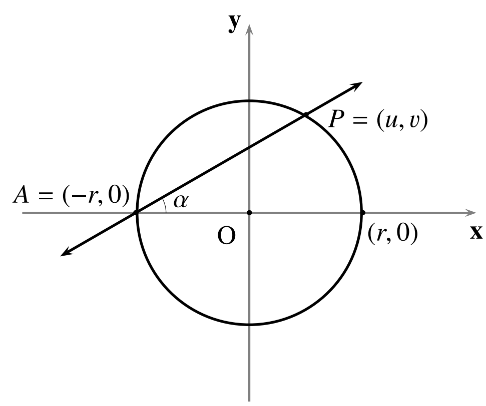
A continuación ofrecemos ***ayudas*** para algunos de los problemas.

3.3: Para hallar el centro del círculo exinscrito, calcule el punto de intersección de los bisectores de dos ángulos externos apropiados.

3.46: Considere la siguiente figura y tome $\boxed{t = \theta}$.



3.47: Considere la siguiente figura y tome $\boxed{t = \tan\alpha}$; considere la recta $y = t(x + r)$ (que pasa por el punto $A = (-r, 0)$ y tiene pendiente t); halle, en términos de t, las coordenadas (u, v) del punto de intersección de esa recta y el círculo.



3.48: Proceda de la misma manera que en el ejercicio anterior, tomando $\boxed{kt = \tan\alpha}$.

CAPÍTULO

4

Transformación de coordenadas

El estudio de las rectas y los círculos, realizado en los capítulos anteriores, ha sido llevado a cabo bajo la condición, establecida en el primer capítulo, de que se tiene fijado de antemano un sistema de ejes ortogonales **xOy** en el plano.

La esencia de dicho estudio ha consistido en considerar la posición relativa de cada una de esas figuras geométricas, recta o círculo, respecto al sistema de ejes ortogonales **xOy**, y verificar que se pueden representar, respectivamente, por una ecuación de la forma

$$\begin{matrix} \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0 \\ (\mathsf{A}^2 + \mathsf{B}^2 \neq 0) \end{matrix} \qquad \text{o} \qquad \begin{matrix} x^2 + y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0 \\ (\mathsf{D}^2 + \mathsf{E}^2 - 4\mathsf{F} > 0), \end{matrix}$$

a las cuales se les ha llamado ecuaciones generales de dichas figuras geométricas; o, lo que es lo mismo, verificar su coincidencia con los gráficos de sus respectivas ecuaciones

$$\begin{matrix} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0\} \\ (\mathsf{A}^2 + \mathsf{B}^2 \neq 0) \end{matrix} \qquad \text{o} \qquad \begin{matrix} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0\} \\ (\mathsf{D}^2 + \mathsf{E}^2 - 4\mathsf{F} > 0). \end{matrix}$$

Es conveniente hacer énfasis en que:

- dichas ecuaciones son las ecuaciones que definen los respectivos gráficos, que son a su vez las representaciones analíticas de cada una de esas figuras geométricas;
- esas ecuaciones establecen una relación entre las abscisas y las ordenadas de cada uno de sus puntos;
- las abscisas y ordenadas de esos puntos han sido expresadas respecto a un sistema de ejes ortogonales **xOy** fijado de antemano;

- la fijación de ese sistema ha provocado una identificación de cada punto del plano con un par ordenado de números reales (la abscisa como primera componente, y la ordenada como segunda componente, de ese par) y, en consecuencia, ha determinado la forma de dichas ecuaciones;
- esa identificación es, precisamente, la que ha provocado la identificación de la figura geométrica con la ecuación que la representa.

La pregunta que pretendemos responder ahora es: ¿qué pasaría si consideramos un sistema de ejes ortogonales $\widehat{\mathbf{x}}\widehat{\mathrm{O}}\widehat{\mathbf{y}}$ distinto del sistema **xOy** fijado hasta ahora?

Ciertamente el plano sigue siendo el mismo, es decir, no se genera un nuevo plano; y cada punto del plano permanece inalterado, es decir, no se cambia por otro punto distinto. Por esa razón, *un cambio de sistema de ejes rectangulares no afecta las figuras geométricas*, en el sentido de que los puntos que las conforman siguen siendo los mismos.

Ciertamente, también, las coordenadas con las que se identifica cada punto cambian, pues éstas, por definición, están esencialmente vinculadas al sistema de ejes ortogonales que se considere. Por esta razón, *un cambio de sistema de ejes rectangulares genera una transformación de las ecuaciones que representan las figuras geométricas*, en el sentido de que, al cambiar las coordenadas, cambian también las relaciones entre las abscisas y las ordenadas de sus puntos.

Por tanto, ***al cambiar de sistema de ejes rectangulares, las figuras geométricas se conservan, pero las ecuaciones que las representan y, en consecuencia, los gráficos determinados por éstas, se transforman***.

Por ejemplo, la recta l de pendiente m que pasa por el punto $K = (x_0, y_0)$ tiene, como ya sabemos, ecuaciones canónica y general, respectivamente, de la forma

$$(y - y_0) = m(x - x_0) \qquad \text{y} \qquad \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0;$$

y el círculo C con centro en el punto $K = (x_0, y_0)$ y radio r,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \qquad \text{y} \qquad x^2 + y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0.$$

Pero, si consideramos un nuevo sistema de ejes rectangulares $\breve{\mathbf{x}}\breve{\mathrm{O}}\breve{\mathbf{y}}$ tal que los ejes $\breve{\mathrm{O}}\breve{\mathbf{x}}$ y $\breve{\mathrm{O}}\breve{\mathbf{y}}$ son respectivamente perpendiculares a los ejes O**y** y O**x** previamente fijados, tienen *la misma orientación* que O**x** y O**y**, y el origen $\breve{\mathrm{O}}$ coincide con el punto K (ver la figura 4.1), entonces las ecuaciones canónica y general de la recta l y del círculo C se transformarían, respectivamente, en

$$\begin{array}{lll} \breve{y} = m\breve{x} & \text{y} & m\breve{x} - \breve{y} = 0; \\ \breve{x}^2 + \breve{y}^2 = r^2 & \text{y} & \breve{x}^2 + \breve{y}^2 - r^2 = 0. \end{array}$$

Ahora bien, estas últimas ecuaciones son, a todas luces, más simples que las anteriores, en el sentido de que ahora sólo hay una condición que atender para su determinación: para la recta l, la pendiente m en la canónica y el coeficiente $\mathsf{A} = m$ en la general (ya no tenemos coordenadas del punto por el que pasa, en la canónica, ni coeficientes B y C en la general); para el círculo C, el radio r en la canónica y el coeficiente $\mathsf{F} = -r^2$, en la general (ya no tenemos coordenadas del centro en la canónica, ni coeficientes D y E en la general).

Por esta razón, es conveniente estar en capacidad de configurar un sistema de ejes rectangulares que satisfaga que:

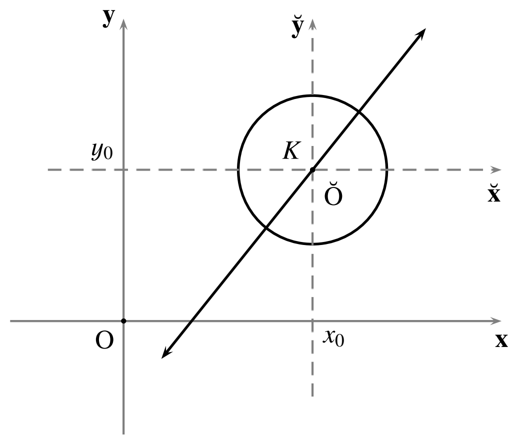


FIGURA 4.1 Transformación de coordenadas

- las ecuaciones, o inecuaciones, que definen los gráficos, y que representan a las figuras geométricas que estudiemos, sean tan simples como es posible (en el sentido de que dependa del menor número de parámetros), pues pretendemos deducir, de dichas ecuaciones, propiedades geométricas de las figuras.
- se pueda contar con fórmulas que permitan obtener las coordenadas de un punto respecto a uno cualquiera de los sistemas, si se tienen sus coordenadas respecto al otro sistema (pues es deseable saber cómo se transforman las ecuaciones que representan a las figuras geométricas que estudiemos).

La clave del estudio que desarrollaremos a continuación está en los siguientes dos conceptos.

Diremos que dos ***gráficos*** son ***equivalentes***, cuando son representaciones, en los respectivos sistemas de ejes rectangulares que los determinan, de la misma figura geométrica, es decir, cuando, en los respectivos sistemas de ejes rectangulares que los determinan, representen los mismos puntos del plano.

Note que no se dice, en el concepto anterior, que los gráficos están compuestos, necesariamente, por los mismos pares ordenados de números reales; en este caso, dichos gráficos son *iguales* (y las ecuaciones que los definen son equivalentes).

Así, por ejemplo, los gráficos

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\} \quad \text{y} \quad \breve{G} := \{(\breve{x}, \breve{y}) \in \mathbb{R}^2 : \ \breve{x}^2 + \breve{y}^2 = r^2\}$$

son equivalentes, pues ambos son representaciones del círculo C antedicho: el primero, en el sistema de ejes rectangulares **xOy** previamente fijado; y el segundo, en el sistema de ejes rectangulares **x̌Ǒy̌** configurado de la manera que hemos dicho antes.

Diremos que dos ***ecuaciones***, o dos ***inecuaciones***, ***representan la misma figura geométrica***, si los gráficos por ellas definidos son equivalentes⟨1⟩.

Así, por ejemplo, las ecuaciones

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \qquad \text{y} \qquad \breve{x}^2 + \breve{y}^2 = r^2$$

representan la misma figura geométrica, pues definen gráficos equivalentes: G y $\breve{G}$.

Sólo consideraremos tres maneras de configurar un nuevo sistema de ejes ortogonales: mediante *traslación* a un punto, mediante *rotación* en torno al origen por un ángulo, o mediante *reflexión* en torno a alguno de los ejes, de un sistema previamente establecido.

§ 4.1 Mediante traslación a un punto

Consideremos un punto T de coordenadas no simultáneamente nulas (h,k), respecto al sistema de ejes ortogonales $\mathbf{x}\mathrm{O}\mathbf{y}$. Entenderemos por ***traslación*** del sistema de ejes ortogonales $\mathbf{x}\mathrm{O}\mathbf{y}$ ***al punto*** T, un nuevo sistema de ejes ortogonales $\check{\mathbf{x}}\check{\mathrm{O}}\check{\mathbf{y}}$ con las siguientes características:

(T1) el origen $\check{\mathrm{O}}$ es el punto T.

(T2) los ejes $\check{\mathrm{O}}\check{\mathbf{x}}$ y $\check{\mathrm{O}}\check{\mathbf{y}}$ son respectivamente perpendiculares a los ejes $\mathrm{O}\mathbf{y}$ y $\mathrm{O}\mathbf{x}$.

(T3) el sentido positivo de los ejes $\check{\mathrm{O}}\check{\mathbf{x}}$ y $\check{\mathrm{O}}\check{\mathbf{y}}$ coincide con el de los ejes $\mathrm{O}\mathbf{x}$ y $\mathrm{O}\mathbf{y}$, respectivamente: un punto A del eje $\check{\mathrm{O}}\check{\mathbf{x}}$ ($\check{\mathrm{O}}\check{\mathbf{y}}$) está delante del punto B del eje $\check{\mathrm{O}}\check{\mathbf{x}}$ ($\check{\mathrm{O}}\check{\mathbf{y}}$) si, y sólo si, la proyección de A en $\mathrm{O}\mathbf{x}$ ($\mathrm{O}\mathbf{y}$), está delante de la proyección de B en $\mathrm{O}\mathbf{x}$ ($\mathrm{O}\mathbf{y}$).

(T4) la escala de los ejes $\check{\mathrm{O}}\check{\mathbf{x}}$ y $\check{\mathrm{O}}\check{\mathbf{y}}$ es la misma que la de los ejes $\mathrm{O}\mathbf{x}$ y $\mathrm{O}\mathbf{y}$.

Nos interesa averiguar cómo cambian las coordenadas de un punto del plano, cuando pasamos de la consideración de éstas respecto a uno de los sistemas, a su consideración respecto al otro sistema; para tal fin nos apoyaremos en la figura 4.2.

Consideremos un punto P cualquiera del plano, y las rectas $\overleftrightarrow{PC}$ y $\overleftrightarrow{PD}$ perpendiculares por P a los ejes $\mathrm{O}\mathbf{x}$ y $\mathrm{O}\mathbf{y}$ en los puntos C y D, respectivamente; por (T2), podemos considerar los puntos E y F donde las rectas anteriores cortan perpendicularmente a los ejes $\check{\mathrm{O}}\check{\mathbf{x}}$ y $\check{\mathrm{O}}\check{\mathbf{y}}$, respectivamente; y también podemos considerar los puntos A y B donde los ejes $\check{\mathrm{O}}\check{\mathbf{y}}$ y $\check{\mathrm{O}}\check{\mathbf{x}}$ cortan perpendicularmente a los ejes $\mathrm{O}\mathbf{x}$ y $\mathrm{O}\mathbf{y}$, respectivamente.

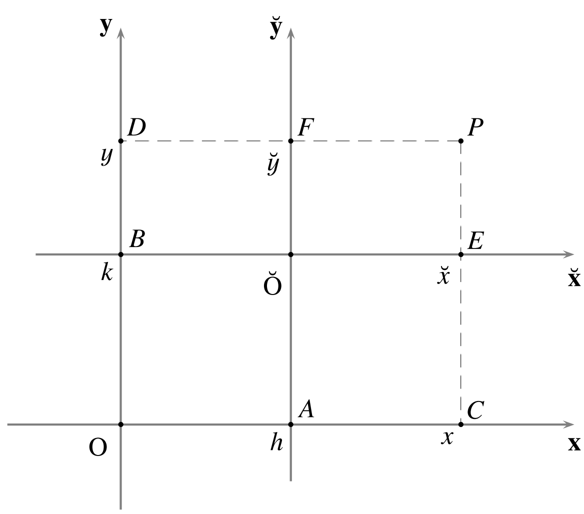


FIGURA 4.2 Traslación del sistema de coordenadas cartesianas rectangulares

Por definición, la abscisa x y la ordenada y de P respecto al sistema **xOy** son, respectivamente, las coordenadas de los puntos C y D en los ejes O**x** y O**y**; y la abscisa $\breve{x}$ y la ordenada $\breve{y}$ de P respecto al sistema **x̆Ŏy̆** son, respectivamente, las coordenadas de los puntos E y F en los ejes Ŏ**x̆** y Ŏ**y̆**.

Es claro, por (T1) y (T3), que cualquiera sea la disposición que se presente entre O, A y C, entre O, B y D, entre Ŏ, E y B, y entre Ŏ, A y F, tendremos que

$$\begin{cases} \breve{x} = x - h \\ \breve{y} = y - k \end{cases} \tag{4.1}$$

y, en consecuencia, que

$$\begin{cases} x = \breve{x} + h \\ y = \breve{y} + k \end{cases} . \tag{4.2}$$

Llamaremos a estas relaciones, las ***fórmulas de traslación de coordenadas al punto*** (h, k): a las establecidas en (4.1), ***de* xOy *a* x̆Ŏy̆**; y a las establecidas en (4.2), ***de* x̆Ŏy̆ *a* xOy**.

Así, si un punto P tiene coordenadas (u, v) respecto al sistema **xOy**, y queremos saber cuáles son sus coordenadas respecto al sistema **x̆Ŏy̆**, aplicamos las fórmulas de traslación de **xOy** a **x̆Ŏy̆**, (4.1), obteniendo que éstas son $(u - h, v - k)$; y, si un punto Q tiene coordenadas (w, z) respecto al sistema **x̆Ŏy̆**, y queremos saber cuáles son sus coordenadas respecto al sistema **xOy**, aplicamos las fórmulas de traslación de **x̆Ŏy̆** a **xOy**, (4.2), obteniendo que éstas son $(w + h, z + k)$.

Pero, note la inversión en la aplicación de las fórmulas de traslación de coordenadas en las siguientes averiguaciones: si un gráfico está definido por una ecuación, o inecuación, de la forma $f(x, y) \lesseqqgtr 0$ respecto al sistema **xOy**, y queremos saber cuál es la ecuación, o inecuación, que define su equivalente respecto al sistema **x̆Ŏy̆**, *aplicamos las fórmulas de traslación de* **x̆Ŏy̆** *a* **xOy**, (4.2), obteniendo que ésta es $f(\breve{x}+h, \breve{y}+k) \lesseqqgtr 0$; y, si un gráfico está definido por una ecuación, o inecuación, de la forma $f(\breve{x}, \breve{y}) \lesseqqgtr 0$ respecto al sistema **x̆Ŏy̆**, y queremos saber cuál es la ecuación, o inecuación, que define su equivalente respecto al sistema **xOy**, *aplicamos las fórmulas de traslación de* **xOy** *a* **x̆Ŏy̆**, (4.1), obteniendo que ésta es $f(x - h, y - k) \lesseqqgtr 0$.

Es claro, entonces, que los gráficos

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; f(x, y) \lesseqqgtr 0\} \quad \text{y} \quad \{(\breve{x}, \breve{y}) \in \mathbb{R}^2 : \; f(\breve{x} + h, \breve{y} + k) \lesseqqgtr 0\},$$

así como

$$\{(\breve{x}, \breve{y}) \in \mathbb{R}^2 : \; f(\breve{x}, \breve{y}) \lesseqqgtr 0\} \quad \text{y} \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; f(x - h, y - k) \lesseqqgtr 0\},$$

son equivalentes.

➤ Ejemplo 4.1

Encontremos ***el*** *punto que tiene la siguiente particularidad: el sistema de ejes rectangulares* **x̆Ŏy̆**, *que se obtiene mediante la traslación del sistema* **xOy** *a dicho punto, es tal que el gráfico de la ecuación*

$$2x^2 - y^2 - 8x - 2y + 5 = 0$$

es equivalente a un gráfico definido por una ecuación como

$$\breve{\mathsf{A}}\breve{x}^2 + \breve{\mathsf{C}}\breve{y}^2 + \breve{\mathsf{F}} = 0,$$

que no tiene términos lineales.

Después de tener un sistema de ejes rectangulares **x̆Ŏy̆***, mediante traslación del sistema* **xOy** *a un punto* (h,k) *cualquiera, y cambiar las coordenadas de los puntos del plano por medio de las fórmulas de traslación de coordenadas* (4.2)*, el gráfico dado será equivalente al definido por la ecuación*

$$2(\breve{x}+h)^2-(\breve{y}+k)^2-8(\breve{x}+h)-2(\breve{y}+k)+5=0$$

que, después de sacar las cuentas, resulta

$$2\breve{x}^2-\breve{y}^2+(4h-8)\breve{x}+(-2k-2)\breve{y}+(2h^2-k^2-h-2k+5)=0.$$

De manera que, una traslación del sistema **xOy** *al punto* (h,k) *hace lo deseado si, y sólo si, los números* h *y* k *anulan los coeficientes de los términos lineales de esta ecuación; es decir, si, y sólo si,* $h=2$ *y* $k=-1$.

En caso de que la necesitemos, la ecuación que define al gráfico equivalente al dado, respecto al sistema **x̆Ŏy̆***, es*

$$2\breve{x}^2-\breve{y}^2-2=0.$$

Una estrategia alternativa para resolver este problema podría ser completar cuadrados: primero tomamos como factor común, entre los términos con la misma variable, el coeficiente del término cuadrático de esa variable

$$2(x^2-4x)-(y^2+2y)+5=0;$$

y luego completamos cuadrados, tal como hemos visto en el capítulo anterior

$$2(x-2)^2-(y+1)^2-2=0.$$

Así, el punto de coordenadas $(2,-1)$ *respecto al sistema* **xOy** *tiene la particularidad exigida pues, al aplicar las fórmulas de traslación de coordenadas* (4.2) *al punto* $(2,-1)$*, se tiene que el gráfico definido por la ecuación dada es equivalente al gráfico definido por la ecuación*

$$2\breve{x}^2-\breve{y}^2-2=0,$$

que no tiene términos lineales.

A nuestro parecer, esta última estrategia tiene la desventaja de que podemos perder de vista que $(2,-1)$ *es el único punto que tiene la particularidad exigida, a pesar de ser cierto.* **QEE ➤**

§ 4.2 Mediante rotación por un ángulo

Consideremos un número real θ tal que $0<\theta<90$. Entenderemos por ***rotación*** (en torno al origen) del sistema de ejes ortogonales **xOy** ***por el ángulo*** $\theta^{\langle 2\rangle}$, un nuevo sistema de ejes ortogonales **ẋOẏ** con las siguientes características:

(R1) el origen es el mismo O.

(R2) los ejes Oẋ y Oẏ coinciden, respectivamente, con la recta de inclinación θ por el origen y la perpendicular a ésta por el origen.

(R3) el sentido positivo de los ejes O$\dot{\mathbf{x}}$ y O$\dot{\mathbf{y}}$ coincide con el de los ejes O**x** y O**y**, respectivamente: un punto A del eje O$\dot{\mathbf{x}}$ (O$\dot{\mathbf{y}}$) está delante del punto B del eje O$\dot{\mathbf{x}}$ (O$\dot{\mathbf{y}}$) si, y sólo si, la proyección de A en O**x** (O**y**), está delante de la proyección de B en O**x** (O**y**).

Nos interesa averiguar cómo cambian las coordenadas de un punto, cuando pasamos de la consideración de éstas respecto a uno de los sistemas, a su consideración respecto al otro sistema; para tal fin nos apoyaremos en la figura 4.3.

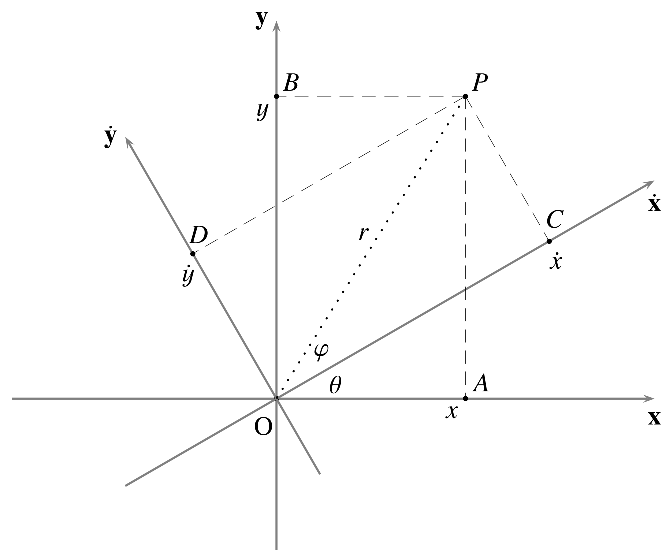


FIGURA 4.3 Rotación del sistema de coordenadas cartesianas rectangulares

Consideremos un punto P cualquiera del plano, y las rectas: $\overleftrightarrow{PA}$ y $\overleftrightarrow{PC}$ perpendiculares por P a los ejes O**x** y O$\dot{\mathbf{x}}$ en los puntos A y C, respectivamente; $\overleftrightarrow{PB}$ y $\overleftrightarrow{PD}$ perpendiculares por P a los ejes O**y** y O$\dot{\mathbf{y}}$ en los puntos B y D, respectivamente.

Note que P está sobre el eje O**x** si, y sólo si, $P = A$; y que P está sobre el eje O$\dot{\mathbf{x}}$ si, y sólo si, $P = C$.

Por definición, la abscisa x y la ordenada y de P respecto al sistema **xOy** son, respectivamente, las coordenadas de los puntos A y B en los ejes O**x** y O**y**; y la abscisa $\dot{x}$ y la ordenada $\dot{y}$ de P respecto al sistema $\dot{\mathbf{x}}$O$\dot{\mathbf{y}}$ son, respectivamente, las coordenadas de los puntos C y D en los ejes O$\dot{\mathbf{x}}$ y O$\dot{\mathbf{y}}$.

Verificaremos que, cualquiera sea la disposición que se presente entre P y A, o entre P y C, tendremos que

$$\begin{cases} \dot{x} = x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta \\ \dot{y} = -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{cases} \tag{4.3}$$

y, en consecuencia, que

$$\begin{cases} x = \dot{x}\cos\theta - \dot{y}\operatorname{sen}\theta \\ y = \dot{x}\operatorname{sen}\theta + \dot{y}\cos\theta \end{cases} \quad . \tag{4.4}$$

Llamaremos a estas relaciones, las ***fórmulas de rotación de coordenadas por el ángulo*** θ: a las establecidas por (4.3), ***de* xOy *a* ẋOẏ**; y a las establecidas por (4.4), ***de* ẋOẏ *a* xOy**.

Analicemos primero el caso en que $P \neq A$ y $P \neq C$, tal como se dispuso en la figura 4.3.

Consideremos, de manera auxiliar, los números reales: $r = \mathrm{O}P$; y φ, la medida, como en Trigonometría, del ángulo $\angle C\mathrm{O}P$.

Usando, si es pertinente, las identidades trigonométricas $\cos(360-\alpha) = \cos\alpha$ y $\operatorname{sen}(360-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$ tendremos, en el triángulo $\triangle \mathrm{O}PC$, que

$$\dot{x} = r\cos\varphi \quad \text{y} \quad \dot{y} = r\operatorname{sen}\varphi;$$

y, en el triángulo $\triangle \mathrm{O}PA$, que

$$x = r\cos(\varphi+\theta) = r\cos\varphi\cos\theta - r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad y = r\operatorname{sen}(\varphi+\theta) = r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta + r\cos\varphi\operatorname{sen}\theta.$$

Sustituyendo los términos del lado derecho de las dos primeras ecuaciones por sus correspondientes en las dos segundas ecuaciones, tendremos (4.4); y, resolviendo el sistema de ecuaciones (4.4) para $\dot{x}$ y $\dot{y}$ (por sustitución, por ejemplo, al despejar $\dot{x}$ en la primera y sustituirla en la segunda), tendremos (4.3).

En el caso en que $P = A$ tendríamos, por el hecho de que $\dot{x} = x\cos(-\theta) = x\cos\theta$, $\dot{y} = x\operatorname{sen}(-\theta) = -x\operatorname{sen}\theta$ y $y = 0$, que siguen siendo ciertas las relaciones establecidas en (4.3) y (4.4); y en el caso en que $P = C$ tendríamos, por el hecho de que $x = \dot{x}\cos\theta$, $y = \dot{x}\operatorname{sen}\theta$ y $\dot{y} = 0$, que siguen siendo ciertas las relaciones establecidas en (4.3) y (4.4).

Así, si un punto P tiene coordenadas (u, v) respecto al sistema **xOy**, y queremos saber cuáles son sus coordenadas respecto al sistema **ẋOẏ**, aplicamos las fórmulas de rotación de **xOy** a **ẋOẏ**, (4.3), obteniendo que éstas son $(u\cos\theta + v\operatorname{sen}\theta, -u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta)$; y, si un punto Q tiene coordenadas (w, z) respecto al sistema **ẋOẏ**, y queremos saber cuáles son sus coordenadas respecto al sistema **xOy**, aplicamos las fórmulas de rotación de **ẋOẏ** a **xOy**, (4.4), obteniendo que éstas son $(w\cos\theta - z\operatorname{sen}\theta, w\operatorname{sen}\theta + z\cos\theta)$.

Pero, note la inversión en la aplicación de las fórmulas de rotación de coordenadas en las siguientes averiguaciones: si un gráfico está definido por una ecuación, o inecuación, de la forma $f(x, y) \lesseqqgtr 0$ respecto al sistema **xOy**, y queremos saber cuál es la ecuación, o inecuación, que define su equivalente respecto al sistema **ẋOẏ**, *aplicamos las fórmulas de rotación de* **ẋOẏ** *a* **xOy**, (4.4), obteniendo que ésta es $f(\dot{x}\cos\theta - \dot{y}\operatorname{sen}\theta, \dot{x}\operatorname{sen}\theta + \dot{y}\cos\theta) \lesseqqgtr 0$; y, si un gráfico está definido por una ecuación, o inecuación, de la forma $f(\dot{x}, \dot{y}) \lesseqqgtr 0$ respecto al sistema **ẋOẏ**, y queremos saber cuál es la ecuación, o inecuación, que define su equivalente respecto al sistema **xOy**, *aplicamos las fórmulas de rotación de* **xOy** *a* **ẋOẏ**, (4.3), obteniendo que ésta es $f(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta, -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta) \lesseqqgtr 0$.

Es claro, entonces, que los gráficos

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x, y) \lesseqqgtr 0\} \quad \text{y} \quad \{(\dot{x}, \dot{y}) \in \mathbb{R}^2 : \ f(\dot{x}\cos\theta - \dot{y}\operatorname{sen}\theta, \dot{x}\operatorname{sen}\theta + \dot{y}\cos\theta) \lesseqqgtr 0\},$$

así como

$$\{(\dot{x}, \dot{y}) \in \mathbb{R}^2 : \ f(\dot{x}, \dot{y}) \lesseqqgtr 0\} \quad \text{y} \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta, -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta) \lesseqqgtr 0\},$$

son equivalentes.

➤ **Ejemplo 4.2**

Encontremos **el** *número real* θ*, con* $0 < \theta < 90$*, que tiene la siguiente particularidad: el sistema de ejes rectangulares* $\dot{\mathbf{x}}\mathrm{O}\dot{\mathbf{y}}$*, que se obtiene mediante rotación del sistema* **xOy** *por dicho número, es tal que el gráfico definido por la ecuación*

$$7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 4 = 0.$$

es equivalente a un gráfico definido por una ecuación como

$$\dot{\mathsf{A}}\dot{x}^2 + \dot{\mathsf{B}}\dot{y}^2 + \dot{\mathsf{C}}\dot{x} + \dot{\mathsf{D}}\dot{y} + \dot{\mathsf{F}} = 0,$$

que no tiene el término cruzado xy (o, más usualmente, que no tiene término cruzado).

Después de tener un sistema de ejes rectangulares $\dot{\mathbf{x}}\mathrm{O}\dot{\mathbf{y}}$*, mediante rotación del sistema* **xOy** *por un ángulo* θ*, con* $0 < \theta < 90$*, cualquiera, y cambiar las coordenadas de los puntos del plano por medio de las fórmulas de rotación de coordenadas* (4.4)*, el gráfico dado será equivalente al definido por la ecuación*

$$7(\dot{x}\cos\theta - \dot{y}\operatorname{sen}\theta)^2 + 2\sqrt{3}(\dot{x}\cos\theta - \dot{y}\operatorname{sen}\theta)(\dot{x}\operatorname{sen}\theta + \dot{y}\cos\theta) + 5(\dot{x}\operatorname{sen}\theta + \dot{y}\cos\theta)^2 - 4 = 0;$$

la cual se reduce a

$$\begin{aligned}(7\cos^2\theta + 2\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 5\operatorname{sen}^2\theta)\dot{x}^2 \\ + (7\operatorname{sen}^2\theta - 2\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 5\cos^2\theta)\dot{y}^2 \\ + (2\sqrt{3}\cos^2\theta - 2\sqrt{3}\operatorname{sen}^2\theta - 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\dot{x}\dot{y} - 4 = 0.\end{aligned}$$

De manera que, una rotación del sistema **xOy** *por el ángulo* θ*, con* $0 < \theta < 90$*, hace lo deseado si, y sólo si,* θ *anula el coeficiente del término cruzado* $\dot{x}\dot{y}$ *de esta ecuación, es decir, si, y sólo si,*

$$2\sqrt{3}\cos^2\theta - 2\sqrt{3}\operatorname{sen}^2\theta - 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0.$$

Ahora, usando el hecho de que

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \quad y \quad \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta,$$

debemos hallar θ *tal que*

$$2\sqrt{3}\cos(2\theta) - 2\operatorname{sen}(2\theta) = 0,$$

o, lo que es lo mismo, tal que

$$\tan(2\theta) = \sqrt{3};$$

de donde $2\theta = 60$*, o* $\theta = 30$.

En caso de que la necesitemos, como $\operatorname{sen} 30 = \frac{1}{2}$ *y* $\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$*, la ecuación que define al gráfico equivalente al dado, respecto al sistema* $\dot{\mathbf{x}}\mathrm{O}\dot{\mathbf{y}}$*, es*

$$8\dot{x}^2 + 4\dot{y}^2 - 4 = 0,$$

o, lo que es lo mismo,

$$2\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 1 = 0.$$

QEE ➤

OBSERVACIÓN 4.1 (ROTACIONES POR 90)
Permitiremos, como es usual, rotaciones (en torno al origen) del sistema de ejes ortogonales por el ángulo 90; como la verificación de las fórmulas de rotación de coordenadas (4.3) *y* (4.4) *discurre sin problemas, aun si $\theta = 90$, ésas son las fórmulas de rotación de coordenadas por el ángulo 90.*

Pero, como $\cos 90 = 0$ *y* $\operatorname{sen} 90 = 1$*, tendremos que una rotación de un sistema de ejes rectangulares* **x**O**y** *por el ángulo 90 equivale a cambiar la abscisa por su ordenada, y la ordenada por el opuesto de su abscisa.*

Así, si un punto P tiene coordenadas (u, v) respecto a un sistema de ejes ortogonales, y queremos saber cuáles son sus coordenadas al rotar ese sistema por el ángulo 90, éstas son $(v, -u)$.

Por esta razón, una rotación (en torno al origen) de un sistema de ejes rectangulares **x**O**y** *por el ángulo 90 debe definirse aparte, pues la orientación positiva de los ejes* O$\dot{\mathbf{x}}$ *y* O$\dot{\mathbf{y}}$ *será, respectivamente, la positiva del eje* O**y***, y la negativa del eje* O**x**.

En la siguiente observación combinamos las dos transformaciones de coordenadas que hemos estudiado hasta ahora.

OBSERVACIÓN 4.2 (ROTACIONES JUNTO CON TRASLACIONES)
Es posible que se presente la ocasión, como efectivamente la tendremos, de que, para lograr obtener una simplificación óptima de la ecuación que define un cierto gráfico respecto a un sistema de ejes ortogonales, se requiera efectuar, tanto una rotación, como una traslación de dicho sistema.

Si éste es el caso, podríamos efectuar una traslación del sistema, y luego una rotación, o al revés. Lo cierto es que el orden en que se efectúen dichas transformaciones no es relevante (ver el ejercicio 4.5), y podría realizarse de una sola vez por medio de las siguientes fórmulas

$$\begin{cases} \dot{\breve{x}} = (x-h)\cos\theta + (y-k)\operatorname{sen}\theta \\ \dot{\breve{y}} = -(x-h)\operatorname{sen}\theta + (y-k)\cos\theta \end{cases} \tag{4.5}$$

y, en consecuencia, de

$$\begin{cases} x = \dot{\breve{x}}\cos\theta - \dot{\breve{y}}\operatorname{sen}\theta + h \\ y = \dot{\breve{x}}\operatorname{sen}\theta + \dot{\breve{y}}\cos\theta + k \end{cases} ; \tag{4.6}$$

donde efectuamos una ***traslación*** *del sistema de ejes ortogonales* **x**O**y** *al punto T de coordenadas (h, k), obteniendo coordenadas respecto a un sistema* $\breve{\mathbf{x}}\breve{\mathrm{O}}\breve{\mathbf{y}}$*; y una* ***rotación*** *del sistema de ejes ortogonales* $\breve{\mathbf{x}}\breve{\mathrm{O}}\breve{\mathbf{y}}$ *por el ángulo θ, con $0 < \theta \leqslant 90$, obteniendo coordenadas respecto a un sistema* $\dot{\breve{\mathbf{x}}}\breve{\mathrm{O}}\dot{\breve{\mathbf{y}}}$.

Pero, en todo caso, es recomendable hacer cada una de estas transformaciones por separado, utilizando las fórmulas de cambio de coordenadas (4.1) *y* (4.2)*, así como* (4.3) *y* (4.4)*, tal como mostramos en los ejemplos 4.3 y 4.4.*

➤ EJEMPLO 4.3
Consideremos la ecuación

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 10y + 9 = 0. \tag{4.7}$$

Busquemos, mediante una rotación del sistema de ejes ortogonales **x**O**y** *por un ángulo conveniente, una ecuación que represente la misma figura geométrica que la ecuación* (4.7)*, pero sin término cruzado (tal como hicimos en el ejemplo 4.2).*

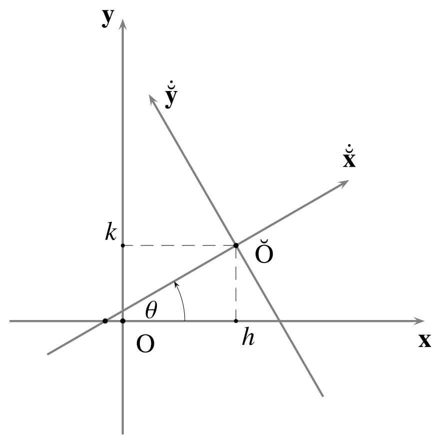


FIGURA 4.4 Rotación y traslación de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares

Usamos entonces las fórmulas de rotación de coordenadas (4.4) *y sustituimos correspondientemente en la ecuación anterior, obteniendo*

$$\begin{aligned}3(\dot{x}\cos\theta - \dot{y}\operatorname{sen}\theta)^2 &- 2(\dot{x}\cos\theta - \dot{y}\operatorname{sen}\theta)(\dot{x}\operatorname{sen}\theta + \dot{y}\cos\theta)\\ &+ 3(\dot{x}\operatorname{sen}\theta + \dot{y}\cos\theta)^2 - 2(\dot{x}\cos\theta - \dot{y}\operatorname{sen}\theta)\\ &- 10(\dot{x}\operatorname{sen}\theta + \dot{y}\cos\theta) + 9 = 0;\end{aligned}$$

la cual se reduce a

$$\begin{aligned}(3 - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\dot{x}^2 &- 2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\dot{x}\dot{y} + (3 + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\dot{y}^2\\ &- 2(\cos\theta + 5\operatorname{sen}\theta)\dot{x} + 2(\operatorname{sen}\theta - 5\cos\theta)\dot{y} + 9 = 0.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Buscamos θ*, con* $0 < \theta \leqslant 90$*, tal que*

$$\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 0,$$

o, lo que es lo mismo, tal que

$$\cos(2\theta) = 0;$$

de donde $2\theta = 90$*, o* $\theta = 45$*. Como* $\operatorname{sen} 45 = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *tendremos, al sustituir en la ecuación* (4.8)*, que*

$$2\dot{x}^2 + 4\dot{y}^2 - 6\sqrt{2}\dot{x} - 4\sqrt{2}\dot{y} + 9 = 0 \tag{4.9}$$

es una ecuación que satisface lo requerido.

Busquemos ahora, mediante una traslación del sistema de ejes ortogonales $\dot{\mathbf{x}}\mathrm{O}\dot{\mathbf{y}}$ *a un punto conveniente, una ecuación que represente la misma figura geométrica que la ecuación* (4.9)*, pero sin términos lineales (tal como hicimos en el ejemplo 4.1).*

Completamos cuadrados y tenemos que

$$2(\dot{x} - \tfrac{3\sqrt{2}}{2})^2 + 4(\dot{y} - \tfrac{\sqrt{2}}{2})^2 - 2 = 0. \tag{4.10}$$

Usamos entonces las fórmulas de traslación de coordenadas (4.2) *al punto* $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ *y sustituimos correspondientemente en la ecuación* (4.10)*, obteniendo que*

$$2\breve{x}^2 + 4\breve{y}^2 - 2 = 0,$$

o, lo que es lo mismo, que

$$\breve{x}^2 + 2\breve{y}^2 - 1 = 0$$

es una ecuación que satisface lo requerido.

Ciertamente, esta ecuación es más sencilla de trabajar que aquella con la que comenzamos este ejemplo. **QEE** ➤

➤ EJEMPLO 4.4

Consideremos la misma ecuación del ejemplo anterior

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 10y + 9 = 0. \tag{4.11}$$

Busquemos, mediante una traslación del sistema de ejes ortogonales **xOy** *a un punto conveniente, una ecuación que represente la misma figura geométrica que la ecuación* (4.11)*, pero sin términos lineales (tal como hicimos en el ejemplo 4.1).*

Usamos entonces las fórmulas de traslación de coordenadas (4.2) *y sustituimos correspondientemente en la ecuación anterior, obteniendo*

$$3(\breve{x} + h)^2 - 2(\breve{x} + h)(\breve{y} + k) + 3(\breve{y} + k)^2 - 2(\breve{x} + h) - 10(\breve{y} + k) + 9 = 0;$$

la cual se reduce a

$$\begin{aligned} 3\breve{x}^2 - 2\breve{x}\breve{y} + 3\breve{y}^2 + (6h - 2k - 2)\breve{x} + (-2h + 6k - 10)\breve{y}& \\ + (3h^2 - 2hk + 3k^2 - 2h - 10k + 9) &= 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Buscamos h y k tales que

$$\begin{cases} 6h - 2k - 2 = 0 \\ -2h + 6k - 10 = 0 \end{cases};$$

de donde $h = 1$ *y* $k = 2$*. Al sustituir en la ecuación* (4.12)*, tendremos que*

$$3\breve{x}^2 - 2\breve{x}\breve{y} + 3\breve{y}^2 - 2 = 0 \tag{4.13}$$

es una ecuación que satisface lo requerido.

Busquemos ahora, mediante una rotación del sistema de ejes ortogonales $\mathbf{\breve{x}\breve{O}\breve{y}}$ *por un ángulo conveniente, una ecuación que represente la misma figura geométrica que la ecuación* (4.13)*, pero sin término cruzado (tal como hicimos en el ejemplo 4.2).*

Usamos entonces las fórmulas de rotación de coordenadas (4.4) *y sustituimos correspondientemente en la ecuación* (4.13)*, obteniendo*

$$3(\dot{\breve{x}}\cos\theta - \dot{\breve{y}}\operatorname{sen}\theta)^2 - 2(\dot{\breve{x}}\cos\theta - \dot{\breve{y}}\operatorname{sen}\theta)(\dot{\breve{x}}\operatorname{sen}\theta + \dot{\breve{y}}\cos\theta) + 3(\dot{\breve{x}}\operatorname{sen}\theta + \dot{\breve{y}}\cos\theta)^2 - 2 = 0;$$

la cual se reduce a

$$(3 - 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)\dot{\breve{x}}^2 - 2(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta)\dot{\breve{x}}\dot{\breve{y}} + (3 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)\dot{\breve{y}}^2 - 2 = 0. \tag{4.14}$$

Buscamos θ*, con* $0 < \theta \leqslant 90$*, tal que*

$$\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta = 0,$$

o, lo que es lo mismo, tal que

$$\cos(2\theta) = 0;$$

de donde $2\theta = 90$*, o* $\theta = 45$*. Como* $\mathrm{sen}\,45 = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *tenemos, al sustituir en la ecuación* (4.14)*, que*

$$\dot{\breve{x}}^2 + 2\dot{\breve{y}}^2 - 1 = 0$$

es una ecuación que satisface lo requerido.

Note que esta ecuación es exactamente la misma ecuación que obtuvimos en el ejemplo anterior.

Ahora bien, una cosa que puede desconcertar un poco es el hecho de que la traslación en el ejemplo anterior se hizo hasta el punto $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$*, mientras que en éste se hace hasta el punto* $(1, 2)$*; pero las coordenadas de este último punto están expresadas respecto al sistema de ejes ortogonales* **xOy***, mientras que las de aquél están expresadas respecto al sistema de ejes ortogonales* $\dot{\mathbf{x}}\mathbf{O}\dot{\mathbf{y}}$*. Si aplicamos las fórmulas de rotación* (4.4) *con* $\theta = 45$*, para calcular las coordenadas del punto* $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ *respecto al sistema de ejes ortogonales* **xOy***, obtenemos que éstas son precisamente* $(1, 2)$ *(ver el ejercicio 4.5).* **QEE** ◄

§ 4.3 Mediante reflexión en torno a uno de los ejes

Entenderemos por ***reflexión*** de un sistema de ejes ortogonales en torno a uno de sus ejes, un nuevo sistema de ejes ortogonales que tiene el mismo origen, el mismo eje respecto al cual se hace la reflexión, y la orientación opuesta en el otro eje.

Así, la reflexión del sistema **xOy** en torno al primer eje es el sistema $\mathbf{xO\tilde{y}}$, en el que sólo se cambia a **xOy** la orientación del eje O**y**; y la relación

$$\tilde{y} = -y, \tag{4.15}$$

que llamaremos ***fórmula de reflexión de coordenadas en torno al primer eje***, nos permite obtener las coordenadas de un punto respecto a uno de esos sistemas, si conocemos sus coordenadas respecto al otro.

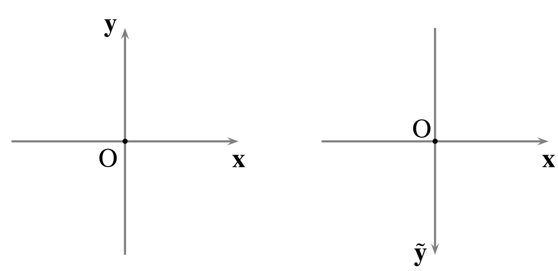


FIGURA 4.5 Reflexión en torno al eje **x**

La reflexión del sistema **xOy** en torno al segundo eje es el sistema **x̃Oy**, en el que sólo se cambia a **xOy** la orientación del eje O**x**; y la relación

$$\tilde{x} = -x, \tag{4.16}$$

que llamaremos ***fórmula de reflexión de coordenadas en torno al segundo eje***, nos permite obtener las coordenadas de un punto respecto a uno de esos sistemas, si conocemos sus coordenadas respecto al otro.

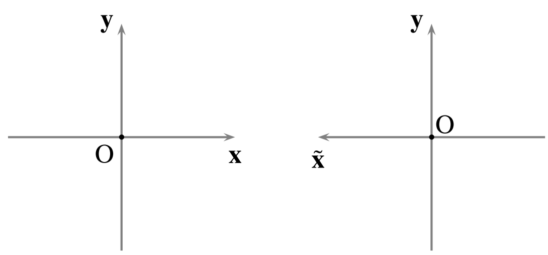


FIGURA 4.6 Reflexión en torno al eje **y**

Así, si un punto P tiene coordenadas (u, v) respecto a un sistema, y queremos saber cuáles son sus coordenadas respecto a la reflexión de ese sistema en torno al primer eje, aplicamos la fórmula de reflexión de coordenadas en torno a ese eje, obteniendo que éstas son $(u, -v)$; y, si queremos saber cuáles son sus coordenadas respecto a la reflexión de ese sistema en torno al segundo eje, aplicamos la fórmula de reflexión de coordenadas en torno a ese eje, obteniendo que éstas son $(-u, v)$.

Del mismo modo, si un gráfico está definido por una ecuación, o inecuación, de la forma $f(x, y) \lesseqqgtr 0$ respecto al sistema **xOy**, y queremos saber cuál es la ecuación, o inecuación, que define su equivalente respecto a la reflexión de ese sistema en torno al primer eje, aplicamos la fórmula de reflexión de coordenadas en torno a ese eje, obteniendo que ésta es $f(x, -\tilde{y}) \lesseqqgtr 0$; y, si queremos saber cuál es la ecuación, o inecuación, que define su equivalente respecto a la reflexión de ese sistema en torno al segundo eje, aplicamos la fórmula de reflexión de coordenadas en torno a ese eje, obteniendo que ésta es $f(-\tilde{x}, y) \lesseqqgtr 0$.

Es claro, entonces, que los gráficos

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; f(x, y) \lesseqqgtr 0\} \quad \text{y} \quad \{(x, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2 : \; f(x, -\tilde{y}) \lesseqqgtr 0\},$$

así como

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; f(x, y) \lesseqqgtr 0\} \quad \text{y} \quad \{(\tilde{x}, y) \in \mathbb{R}^2 : \; f(-\tilde{x}, y) \lesseqqgtr 0\},$$

son equivalentes.

OBSERVACIÓN 4.3

(a) *Note que, de acuerdo con lo dicho en la observación 4.1.(a), efectuar una rotación del sistema de ejes rectangulares* **xOy** *por el ángulo 90, y luego una reflexión del sistema resultante en torno al primer eje, equivale a cambiar la abscisa por su ordenada, y la ordenada por su abscisa.*
Así, si un punto P tiene coordenadas (u, v) respecto a un sistema de ejes ortogonales, y queremos saber cuáles son sus coordenadas al rotar ese sistema por el ángulo 90, y luego reflejar el sistema resultante en torno al primer eje, éstas son (v, u).

(b) *Note que el orden en el que se realicen los cambios de coordenadas de la parte anterior es relevante pues, efectuar una reflexión de un sistema de ejes rectangulares* **xOy** *en torno al primer eje, y luego*

una rotación del sistema resultante por el ángulo 90, equivale a cambiar la abscisa por el opuesto de su ordenada, y la ordenada por el opuesto de su abscisa.
Así, si un punto P tiene coordenadas (u, v) respecto a un sistema de ejes ortogonales, y queremos saber cuáles son sus coordenadas al reflejar ese sistema en torno al primer eje, y luego rotar el sistema resultante por el ángulo 90, éstas son $(-v, -u)$.

(c) *Note que, efectuar una reflexión de un sistema de ejes rectangulares* **xOy** *en torno al primer eje, y luego una reflexión del sistema resultante en torno al segundo eje, equivale a cambiar la abscisa por su opuesto, y la ordenada por su opuesto.*
Así, si un punto P tiene coordenadas (u, v) respecto a un sistema de ejes ortogonales, y queremos saber cuáles son sus coordenadas al reflejar ese sistema en torno al primer eje, y luego reflejar el sistema resultante en torno al segundo eje, éstas son $(-u, -v)$.

(d) *Note que el orden en la ejecución de los cambios de coordenadas de la parte anterior es irrelevante.*

(e) *La siguiente tabla recoge los cambios de coordenadas que basta efectuar para todos los posibles cambios de posición y de signo que pueden sufrir las coordenadas (u, v) de un punto respecto a un sistema de ejes ortogonales*

$(-u, v)$	*reflexión en torno al segundo eje*
$(u, -v)$	*reflexión en torno al primer eje*
$(-u, -v)$	*reflexión en torno a ambos ejes*
(v, u)	*rotación por 90 seguida de reflexión en torno al primer eje*
$(-v, u)$	*rotación por 90 seguida de reflexión en torno a ambos ejes*
$(v, -u)$	*rotación por 90*
$(-v, -u)$	*reflexión en torno al primer eje seguida de rotación por 90*

§ 4.4 Ecuación cuadrática en dos variables

Recordemos que una ecuación cuadrática en dos variables es una ecuación de la forma

$$\mathsf{A}x^2 + \mathsf{B}xy + \mathsf{C}y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0 \qquad (4.17)$$
$$(\mathsf{A} \neq 0, \mathsf{B} \neq 0 \text{ o } \mathsf{C} \neq 0).$$

La definición de este tipo de ecuaciones requiere de la determinación de **seis** parámetros distintos: sus coeficientes A, B, C, D, E y F; aunque, por el hecho de que $\mathsf{A} \neq 0$, $\mathsf{B} \neq 0$ o $\mathsf{C} \neq 0$, podemos reducirlos a **cinco**, al dividir ambos términos de la ecuación anterior por uno de ellos.

Note que la ecuación (4.17) puede ser expresada matricialmente mediante

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{D} \\ \mathsf{B} & 2\mathsf{C} & \mathsf{E} \\ \mathsf{D} & \mathsf{E} & 2\mathsf{F} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

en la que la matriz

$$\mathcal{M} := \begin{pmatrix} 2\mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{D} \\ \mathsf{B} & 2\mathsf{C} & \mathsf{E} \\ \mathsf{D} & \mathsf{E} & 2\mathsf{F} \end{pmatrix}$$

será llamada ***la matriz de los coeficientes de la ecuación*** (4.17).

Por razones que daremos más adelante nos interesa destacar, en esta forma matricial de la ecuación cuadrática en dos variables, los siguientes números, que acompañamos de sus respectivos nombres:

$\Delta_1 := \mathsf{A} + \mathsf{C}$	el ***discriminante lineal*** de la ecuación (4.17) (la mitad de la traza de la matriz menor $\mathcal{M}_{33}$);
$\Delta_2 := \mathsf{B}^2 - 4\mathsf{AC}$	el ***discriminante cuadrático*** de la ecuación (4.17) (el opuesto del determinante de $\mathcal{M}_{33}$);
$\Delta_3 := 8\mathsf{ACF} + 2\mathsf{BDE} - 2\mathsf{CD}^2 - 2\mathsf{AE}^2 - 2\mathsf{FB}^2$	el ***discriminante cúbico*** de la ecuación (4.17) (el determinante de la matriz $\mathcal{M}$).

Consideremos el gráfico G de la ecuación (4.17), es decir,

$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathsf{A}x^2 + \mathsf{B}xy + \mathsf{C}y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0\}$$
$$(\mathsf{A} \neq 0,\ \mathsf{B} \neq 0 \text{ o } \mathsf{C} \neq 0).$$

Si acaso G es representación de alguna figura geométrica, estaríamos muy interesados en encontrar un gráfico equivalente a G, pero definido por una ecuación más simple; de acuerdo con lo que dijimos antes, la determinación de G requiere de cinco condiciones (algebraicas o geométricas) independientes, que nos permitan calcular los cinco coeficientes independientes que posee. Con ese propósito, verificaremos primero lo afirmado en el siguiente teorema.

TEOREMA 15 (ELIMINACIÓN DE LOS TÉRMINOS LINEALES EN UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA EN DOS VARIABLES)

(a) *Existe un único punto $C = (h,k)$ tal que, al trasladar el sistema de coordenadas* **xOy** *al punto C, el gráfico G de la ecuación* (4.17) *es equivalente al gráfico de una ecuación de la forma*

$$\breve{\mathsf{A}}\breve{x}^2 + \breve{\mathsf{B}}\breve{x}\breve{y} + \breve{\mathsf{C}}\breve{y}^2 + \breve{\mathsf{F}} = 0 \qquad (4.18)$$
$$(\breve{\mathsf{A}} \neq 0,\ \breve{\mathsf{B}} \neq 0 \text{ o } \breve{\mathsf{C}} \neq 0)$$

en la que no aparecen los términos lineales (más simple que (4.17)*, en el sentido de que ahora hay dos coeficientes menos por determinar) si, y sólo si, $\Delta_2 \neq 0$.*
Además, C es centro de simetría de G (en el sentido de que, si un punto P está en la figura geométrica representada por G, entonces su simétrico P' respecto a C también está en dicha figura geométrica) y sus coordenadas son

$$h = \frac{2\mathsf{CD} - \mathsf{BE}}{\Delta_2} \quad y \quad k = \frac{2\mathsf{AE} - \mathsf{BD}}{\Delta_2}. \qquad (4.19)$$

(b) *Existen infinitos puntos $C = (h,k)$ tales que, al trasladar el sistema de coordenadas* **xOy** *a uno de esos puntos C, el gráfico G de la ecuación* (4.17) *es equivalente al gráfico de una ecuación como la* (4.18) *si, y sólo si, $\Delta_2 = 0$, $2\mathsf{CD} - \mathsf{BE} = 0$ y $2\mathsf{AE} - \mathsf{BD} = 0$.*
Además, tales puntos C son centros de simetría de G y sus coordenadas satisfacen la ecuación

$$2\mathsf{A}h + \mathsf{B}k + \mathsf{D} = 0. \qquad (4.20)$$

(c) *No existe ningún punto $C = (h,k)$ tal que, al trasladar el sistema de coordenadas* **xOy** *al punto C, el gráfico G de la ecuación* (4.17) *es equivalente al gráfico de una ecuación como la* (4.18) *(es decir, no se pueden eliminar ambos términos lineales en la ecuación* (4.17)*) si, y sólo si, $\Delta_2 = 0$, y $2\mathsf{CD} - \mathsf{BE} \neq 0$ o $2\mathsf{AE} - \mathsf{BD} \neq 0$.*

■ **PRUEBA**

Después de tener un sistema de ejes rectangulares **x̆Ŏy̆**, por traslación del sistema **xOy** hasta un punto (h, k) cualquiera, y cambiar las coordenadas de los puntos del plano por medio de las fórmulas de traslación de coordenadas (4.2), las coordenadas de los elementos de G satisfarán la ecuación

$$\breve{A}\breve{x}^2 + \breve{B}\breve{x}\breve{y} + \breve{C}\breve{y}^2 + \breve{D}\breve{x} + \breve{E}\breve{y} + \breve{F} = 0, \tag{4.21}$$

en la que, después de sacar las cuentas, se tiene que

$$\begin{cases} \breve{A} = A, \\ \breve{B} = B, \\ \breve{C} = C, \\ \breve{D} = 2Ah + Bk + D, \\ \breve{E} = Bh + 2Ck + E, \\ \breve{F} = Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F. \end{cases} \tag{4.22}$$

Note que los coeficientes $\breve{D}$ y $\breve{E}$ de los términos de primer grado son combinaciones lineales de las coordenadas del punto hacia el que se trasladan los ejes. Todo el trabajo se reduce, entonces, a encontrar dos números h y k tales que $\breve{D} = \breve{E} = 0$, es decir, dos números h y k que sean solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2Ah + Bk + D = 0 \\ Bh + 2Ck + E = 0. \end{cases} \tag{4.23}$$

Sabemos que:

(a) este sistema es compatible determinado (tiene una única solución) si, y sólo si, $\Delta_2 \neq 0$, y que su solución viene dada por (4.19);

(b) este sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones) si, y sólo si, $\Delta_2 = 0$, $2CD - BE = 0$ y $2AE - BD = 0$, y que sus soluciones satisfacen (4.20);

(c) es incompatible (no tiene solución) si, y sólo si, $\Delta_2 = 0$, y $2CD - BE \neq 0$ o $2AE - BD \neq 0$.

Como $\breve{A} = A$, $\breve{B} = B$, $\breve{C} = C$, tendremos que $\breve{A} \neq 0$, $\breve{B} \neq 0$ o $\breve{C} \neq 0$.
Finalmente, es claro que si un punto $(\breve{u}, \breve{v})$ satisface la ecuación (4.18), entonces el punto $(-\breve{u}, -\breve{v})$ (simétrico respecto al punto (h, k)) también la satisface.

QEP ■

➤ **EJEMPLO 4.5**

Volvamos a considerar las ecuaciones de los ejemplos 4.1 y 4.3,

$$2x^2 - y^2 - 8x - 2y + 5 = 0 \quad y \quad 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 10y + 9 = 0,$$

y apliquemos los resultados anteriores, para encontrar sendas ecuaciones de la forma

$$\breve{A}\breve{x}^2 + \breve{B}\breve{x}\breve{y} + \breve{C}\breve{y}^2 + \breve{F} = 0,$$

que representen las mismas figuras geométricas que las originales, pero sin términos lineales.

Con la primera ecuación, $\Delta_2 = B^2 - 4AC = 0 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 8 \neq 0$. *Así,*

$$h = \frac{2 \cdot (-1) \cdot (-8) - 0 \cdot 5}{8} = 2; \quad y \quad k = \frac{2 \cdot 2 \cdot (-2) - 0(-8)}{8} = -1;$$

de donde, sustituyendo en la ecuación original, tendremos que

$$2(\breve{x}-2)^2-(\breve{y}+1)^2-8(\breve{x}-2)-2(\breve{y}+1)+5=0;$$

por tanto, al trasladar el sistema **xOy** *hasta el punto* $(2,-1)$*, el gráfico de la ecuación*

$$2x^2-y^2-8x-2y+5=0$$

es equivalente al de la ecuación

$$2\breve{x}^2-\breve{y}^2-2=0.$$

Con la segunda ecuación, $\Delta_2=\mathsf{B}^2-4\mathsf{AC}=4-4\cdot3\cdot3=-32\neq0$*. Así,*

$$h=\frac{2\cdot3\cdot(-2)-(-2)\cdot(-10)}{-32}=1;\quad y\quad k=\frac{2\cdot3\cdot(-10)-(-2)\cdot(-2)}{-32}=2;$$

de donde, sustituyendo en la ecuación original, tendremos que

$$3(\breve{x}+1)^2-2(\breve{x}+1)(\breve{y}+2)+3(\breve{y}+2)^2-2(\breve{x}+1)-10(\breve{y}+2)+9=0;$$

por tanto, al trasladar el sistema **xOy** *hasta el punto* $(1,2)$*, el gráfico de la ecuación*

$$3x^2-2xy+3y^2-2x-10y+9=0$$

es equivalente al de la ecuación

$$3\breve{x}^2-2\breve{x}\breve{y}+3\breve{y}^2-2=0.$$

QEE ➤

OBSERVACIÓN 4.4

(a) *Como, de acuerdo con* (4.22), $\breve{\mathsf{B}}=\mathsf{B}$*, la ecuación* (4.17) *carece de término cruzado (*$\mathsf{B}=0$*) si, y sólo si, la ecuación* (4.21) *carece también de término cruzado (*$\breve{\mathsf{B}}=0$*).*
Así, al eliminar los términos lineales de una ecuación cuadrática en dos variables, mediante traslación del sistema de ejes ortogonales original, la nueva ecuación no tendrá término cruzado, si la original no lo tenía.

(b) *Note que el sistema* (4.23) *se puede construir a partir de la matriz* $\mathcal{M}$ *de los coeficientes de la ecuación* (4.17)*, sin necesidad de aplicar las fórmulas de traslación, ya que dicho sistema se puede expresar matricialmente mediante*

$$\begin{pmatrix}2\mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{D}\\ \mathsf{B} & 2\mathsf{C} & \mathsf{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\\1\end{pmatrix}=0,$$

donde la matriz del sistema se construye a partir de las dos primeras filas de $\mathcal{M}$*.*

(c) *Note que, al considerar la relación*

$$f(x,y)=\mathsf{A}x^2+\mathsf{B}xy+\mathsf{C}y^2+\mathsf{D}x+\mathsf{E}y+\mathsf{F}$$

(el término del lado izquierdo de la ecuación (4.17)*), el valor de* $\breve{\mathsf{F}}$ *coincide con* $f(h,k)$*.*
De este modo se simplifica el cálculo de la ecuación cuadrática sin términos lineales que se obtiene, cuando es posible, después de trasladar el sistema de coordenadas en el que está expresada la ecuación (4.17)*, pues ésta es*

$$\mathsf{A}x^2+\mathsf{B}xy+\mathsf{C}y^2+f(h,k)=0.$$

(d) *Note que los coeficientes de los términos de segundo grado* A, B *y* C *de la ecuación* (4.17) *son* ***invariantes por traslación****, es decir, que, en la lista* (4.22)*:*

$$\breve{A} = A, \ \breve{B} = B \ \ y \ \ \breve{C} = C.$$

(e) *Note que, por la parte (b), los números* Δ_1 *y* Δ_2 *(los discriminantes lineal y cuadrático, respectivamente, de la ecuación* (4.17)*), son* ***invariantes por traslación****, es decir, si*

$$\breve{\Delta}_1 = \breve{A} + \breve{C} \quad y \quad \breve{\Delta}_2 = \breve{B}^{\,2} - 4\breve{A}\breve{C}$$

son los discriminantes lineal y cuadrático, respectivamente, de la ecuación (4.21)*, entonces*

$$\breve{\Delta}_1 = \Delta_1 \quad y \quad \breve{\Delta}_2 = \Delta_2.$$

(f) *Se puede verificar (ver la sección A.3 del Apéndice A) que el número* Δ_3 *(el discriminante cúbico de la ecuación* (4.17)*), es también* ***invariante por traslación****, es decir, si*

$$\breve{\Delta}_3 = \begin{vmatrix} 2\breve{A} & \breve{B} & \breve{D} \\ \breve{B} & 2\breve{C} & \breve{E} \\ \breve{D} & \breve{E} & 2\breve{F} \end{vmatrix} = 8\breve{A}\breve{C}\breve{F} + 2\breve{B}\breve{D}\breve{E} - 2\breve{C}\breve{D}^2 - 2\breve{A}\breve{E}^2 - 2\breve{F}\breve{B}^{\,2}$$

es el discriminante cúbico de la ecuación (4.21)*, entonces*

$$\breve{\Delta}_3 = \Delta_3.$$

(g) *Note que* $\Delta_2 = 0$ *si, y sólo si, el trinomio*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

es un trinomio cuadrado perfecto
(pues: si $B^2 - 4AC = 0$*, entonces* $B = \pm 2\sqrt{A}\sqrt{C}$ *y, así,* $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = (\sqrt{A}x \pm \sqrt{C}y)^2$*; por el otro lado, si* $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = (\mathsf{A}x + \mathsf{B}y)^2$*, entonces* $A = \mathsf{A}^2$, $B = 2\mathsf{A}\mathsf{B}$ *y* $C = \mathsf{B}^2$ *y, así,* $B^2 - 4AC = (2\mathsf{A}\mathsf{B})^2 - 4\mathsf{A}^2\mathsf{B}^2 = 0$*).*
Por tanto, decir que $\Delta_2 \neq 0$ *es equivalente a decir que el trinomio* $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ *no es un trinomio cuadrado perfecto.*

Verificaremos ahora el siguiente teorema.

TEOREMA 16 (ELIMINACIÓN DEL TÉRMINO CRUZADO EN UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA EN DOS VARIABLES)
Siempre existe un número real θ*, con* $0 < \theta \leqslant 90$*, tal que al rotar el sistema de coordenadas* **xOy** *por un ángulo de medida* θ*, el gráfico G de la ecuación* (4.17) *es equivalente al gráfico de una ecuación de la forma*

$$\dot{A}\dot{x}^2 + \dot{C}\dot{y}^2 + \dot{D}\dot{x} + \dot{E}\dot{y} + \dot{F} = 0 \qquad (4.24)$$
$$(\dot{A} \neq 0 \ o \ \dot{C} \neq 0),$$

en la que no aparece el término "cruzado" xy (más simple que (4.17)*, en el sentido de que ahora hay un coeficiente menos por determinar).*
Además, ese número θ *satisface*⟨3⟩

$$\theta = \begin{cases} 45, & \text{en caso de que } A = C; \\ \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{B}{A-C}\right), & \text{en caso de que } A \neq C. \end{cases} \qquad (4.25)$$

■ **PRUEBA**
Si $\mathsf{B} = 0$, lo propuesto es obvio (basta tomar $\dot{\mathsf{A}} = \mathsf{A}$, $\dot{\mathsf{C}} = \mathsf{C}$, $\dot{\mathsf{D}} = \mathsf{D}$, $\dot{\mathsf{E}} = \mathsf{E}$ y $\dot{\mathsf{F}} = \mathsf{F}$).
Supongamos entonces que $\mathsf{B} \neq 0$.
Después de tener un sistema de ejes rectangulares $\dot{\mathbf{x}}\mathrm{O}\dot{\mathbf{y}}$, por rotación del sistema $\mathbf{x}\mathrm{O}\mathbf{y}$ por un ángulo θ, con $0 < \theta \leqslant 90$, cualquiera, y cambiar las coordenadas de los puntos del plano por medio de las fórmulas de rotación de coordenadas (4.4), las coordenadas de los elementos de G satisfarán la ecuación

$$\dot{\mathsf{A}}\dot{x}^2 + \dot{\mathsf{B}}\dot{x}\dot{y} + \dot{\mathsf{C}}\dot{y}^2 + \dot{\mathsf{D}}\dot{x} + \dot{\mathsf{E}}\dot{y} + \dot{\mathsf{F}} = 0, \tag{4.26}$$

en la que, después de sacar las cuentas, se tiene que

$$\begin{cases} \dot{\mathsf{A}} = \mathsf{A}\cos^2\theta + \mathsf{B}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \mathsf{C}\operatorname{sen}^2\theta, \\ \dot{\mathsf{B}} = 2(\mathsf{C} - \mathsf{A})\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \mathsf{B}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta), \\ \dot{\mathsf{C}} = \mathsf{A}\operatorname{sen}^2\theta - \mathsf{B}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \mathsf{C}\cos^2\theta, \\ \dot{\mathsf{D}} = \mathsf{D}\cos\theta + \mathsf{E}\operatorname{sen}\theta, \\ \dot{\mathsf{E}} = \mathsf{E}\cos\theta - \mathsf{D}\operatorname{sen}\theta, \\ \dot{\mathsf{F}} = \mathsf{F}. \end{cases} \tag{4.27}$$

Todo el trabajo se reduce, entonces, a encontrar un ángulo θ, con $0 < \theta \leqslant 90$, tal que $\dot{\mathsf{B}} = 0$. Pero, como $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ y $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$ en general, tendremos en particular que, *una rotación del sistema* $\mathbf{x}\mathrm{O}\mathbf{y}$ *por un ángulo* θ*, con* $0 < \theta \leqslant 90$*, es tal que* $\dot{\mathsf{B}} = 0$ *si, y sólo si,*

$$(\mathsf{A} - \mathsf{C})\operatorname{sen}(2\theta) = \mathsf{B}\cos(2\theta). \tag{4.28}$$

Así, partiendo de esta ecuación y del hecho de que $\mathsf{B} \neq 0$ y $0 < \theta \leqslant 90$, tendremos que: $\mathsf{A} = \mathsf{C}$ si, y sólo si, $\cos(2\theta) = 0$ y esto sucede si, y sólo si, $2\theta = 90$ o, lo que es lo mismo, $\theta = 45$; y $\mathsf{A} \neq \mathsf{C}$ si, y sólo si, $\cos(2\theta) \neq 0$ y esto sucede si, y sólo si, $\tan(2\theta) = \frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}-\mathsf{C}}$.
La verificación de que, en cualquiera de los casos, $\dot{\mathsf{A}} \neq 0$ o $\dot{\mathsf{C}} \neq 0$, se puede encontrar en la sección A.3 del Apéndice A.

QEP ■

Pero, imagínese un momento lo impreciso y engorroso que puede resultar encontrar el número $\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}-\mathsf{C}}\right)$ (en particular cuando el ángulo resultante no es uno de los ángulos notables), y luego calcular el coseno y el seno de ese número, para finalmente hallar los coeficientes $\dot{\mathsf{A}}$, $\dot{\mathsf{C}}$, $\dot{\mathsf{D}}$ y $\dot{\mathsf{E}}$ de la lista (4.27); ofrecemos a continuación una manera de ahorrarnos esos problemas.

OBSERVACIÓN 4.5 (SIMPLIFICACIÓN DEL CÁLCULO PARA ELIMINAR TÉRMINOS CRUZADOS)
Se puede verificar (ver la sección A.3 del Apéndice A) que una rotación del sistema $\mathbf{x}\mathrm{O}\mathbf{y}$ *por un ángulo* θ*, con* $0 < \theta \leqslant 90$*, es tal que* $\dot{\mathsf{B}} = 0$ *si, y sólo si,*

$$\cos(2\theta) = \pm\frac{|\mathsf{A} - \mathsf{C}|}{\sqrt{(\mathsf{A} - \mathsf{C})^2 + \mathsf{B}^2}} \tag{4.29}$$

(+, en caso de que $\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}-\mathsf{C}} > 0$*; −, en cualquier otro caso).*

Así, al definir

$$f := \cos(2\theta)\ \textit{(calculado según (4.29))}, \quad d := \sqrt{\frac{1+f}{2}} \quad y \quad e := \sqrt{\frac{1-f}{2}}$$

tendremos que

$$\begin{cases} x = d\dot{x} - e\dot{y} \\ y = e\dot{x} + d\dot{y} \end{cases} \tag{4.30}$$

son las fórmulas de rotación de coordenadas (4.4) *correspondientes a dicho ángulo.*

Por tanto, para encontrar un gráfico equivalente a G tal que la ecuación que lo define no tenga el término "cruzado" xy, como en (4.24)*, no necesariamente tenemos que calcular el ángulo por el que hay que rotar el sistema* **xOy** *para tal fin, sino aplicar directamente las fórmulas de transformación de coordenadas* (4.30) *a la ecuación* (4.17)*; tendríamos que calcular el ángulo correspondiente a esa rotación (usando* (4.25)*), sólo si queremos hacer una representación gráfica de la figura geométrica correspondiente.*

➤ Ejemplo 4.6

Volvamos a considerar las ecuaciones de los ejemplos 4.2 y 4.3,

$$7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 4 = 0 \quad y \quad 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 10y + 9 = 0,$$

y apliquemos los resultados anteriores, para encontrar sendas ecuaciones de la forma

$$\dot{\mathsf{A}}\dot{x}^2 + \dot{\mathsf{B}}\dot{y}^2 + \dot{\mathsf{C}}\dot{x} + \dot{\mathsf{D}}\dot{y} + \dot{\mathsf{F}} = 0,$$

que representen las mismas figuras geométricas originales, pero sin el término "cruzado" xy.

Con la primera ecuación, $\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}-\mathsf{C}} = \frac{2\sqrt{3}}{7-5} = \sqrt{3} > 0$. *Así,*

$$f = \frac{|7-5|}{\sqrt{(7-5)^2+(2\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2}; \quad d = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad y \quad e = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = \frac{1}{2};$$

de donde

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{x} - \frac{1}{2}\dot{y} \\ y = \frac{1}{2}\dot{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{y}. \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación original, tendremos que

$$7(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\dot{x} - \tfrac{1}{2}\dot{y})^2 + 2\sqrt{3}(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\dot{x} - \tfrac{1}{2}\dot{y})(\tfrac{1}{2}\dot{x} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\dot{y}) + 5(\tfrac{1}{2}\dot{x} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\dot{y})^2 - 4 = 0;$$

de donde

$$2\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 1 = 0.$$

En caso de que lo necesitemos, $\theta = \frac{1}{2}\arctan(\sqrt{3}) = 30$.

Con la segunda ecuación, $\mathsf{A} = \mathsf{C} = 3$. *Así,*

$$f = 0; \quad d = \sqrt{\frac{1+0}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad y \quad e = \sqrt{\frac{1-0}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

de donde

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}\dot{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\dot{y} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\dot{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\dot{y}. \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación original, tendremos que

$$3(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\dot{x} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\dot{y})^2 - 2(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\dot{x} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\dot{y})(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\dot{x} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\dot{y}) + 3(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\dot{x} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\dot{y})^2$$
$$-2(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\dot{x} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\dot{y}) - 10(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\dot{x} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\dot{y}) + 9 = 0;$$

de donde

$$2\dot{x}^2 + 4\dot{y}^2 - 6\sqrt{2}\dot{x} - 4\sqrt{2}\dot{y} + 9 = 0.$$

En caso de que lo necesitemos, $\theta = 45$. **QEE ◄**

Observación 4.6

(a) *Como, de acuerdo con* (4.27), $\dot{\mathsf{D}} = \mathsf{D}\cos\theta + \mathsf{E}\operatorname{sen}\theta$ *y* $\dot{\mathsf{E}} = \mathsf{E}\cos\theta - \mathsf{D}\operatorname{sen}\theta$, *tendremos, por el hecho de que* $0 < \theta \leqslant 90$, *que la ecuación* (4.17) *carece de términos lineales si, y sólo si, la ecuación* (4.26) *carece también de términos lineales.*
Así, al eliminar el término cruzado de una ecuación cuadrática en dos variables, mediante rotación del sistema de ejes ortogonales original, la nueva ecuación no tendrá términos lineales, si la original no los tenía.

(b) *Note que el coeficiente* F *de la ecuación* (4.17) *es* ***invariante por rotación****, es decir, que, en la lista* (4.27), $\dot{\mathsf{F}} = \mathsf{F}$ *(esto se puede interpretar geométricamente diciendo que, el gráfico de la ecuación* (4.17) *contiene al origen si, y sólo si, el gráfico de la ecuación* (4.26) *también lo contiene).*

(c) *Note que el número* Δ_1 *(el discriminante lineal de la ecuación* (4.17)*), es* ***invariante por rotación****, es decir, si*

$$\dot{\Delta}_1 = \dot{\mathsf{A}} + \dot{\mathsf{C}}$$

es el discriminante lineal de la ecuación (4.26)*, entonces*

$$\dot{\Delta}_1 = \Delta_1$$

$$\begin{aligned}(\textit{pues } \dot{\Delta}_1 &= \mathsf{A}\cos^2\theta + \mathsf{B}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \mathsf{C}\operatorname{sen}^2\theta + \mathsf{A}\operatorname{sen}^2\theta - \mathsf{B}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \mathsf{C}\cos^2\theta\\ &= \mathsf{A}(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + \mathsf{C}(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\\ &= \mathsf{A} + \mathsf{C} = \Delta_1).\end{aligned}$$

(d) *Se puede verificar (ver la sección A.3 del Apéndice A) que el número* Δ_2 *(el discriminante cuadrático de la ecuación* (4.17)*), es* ***invariante por rotación****, es decir, si*

$$\dot{\Delta}_2 = \dot{\mathsf{B}}^2 - 4\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{C}}$$

es el discriminante cuadrático de la ecuación (4.26)*, entonces*

$$\dot{\Delta}_2 = \Delta_2.$$

(e) *Se puede verificar (ver la sección A.3 del Apéndice A) que el número* Δ_3 *(el discriminante cúbico de la ecuación* (4.17)*), es también* ***invariante por rotación****, es decir, si*

$$\dot{\Delta}_3 = \begin{vmatrix} 2\dot{\mathsf{A}} & \dot{\mathsf{B}} & \dot{\mathsf{D}} \\ \dot{\mathsf{B}} & 2\dot{\mathsf{C}} & E' \\ \dot{\mathsf{D}} & \check{\mathsf{E}} & 2\dot{\mathsf{F}} \end{vmatrix} = 8\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{C}}\dot{\mathsf{F}} + 2\dot{\mathsf{B}}\dot{\mathsf{D}}E' - 2\dot{\mathsf{C}}\dot{\mathsf{D}}^2 - 2\dot{\mathsf{A}}E'^2 - 2\dot{\mathsf{F}}\dot{\mathsf{B}}^2$$

es el discriminante cúbico de la ecuación (4.26)*, entonces*

$$\dot{\Delta}_3 = \Delta_3.$$

OBSERVACIÓN 4.7

(a) *Después de tener un sistema de ejes rectangulares* $\mathbf{xO\tilde{y}}$*, por reflexión del sistema* $\mathbf{xOy}$ *en torno al primer eje, y cambiar las coordenadas de los puntos del plano por medio de la fórmula de reflexión de coordenadas* (4.15)*, las coordenadas de los elementos de G satisfarán la ecuación*

$$\mathsf{A}x^2 - \mathsf{B}xy + \mathsf{C}y^2 + \mathsf{D}x - \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0.$$

(b) *Después de tener un sistema de ejes rectangulares* $\mathbf{\tilde{x}Oy}$*, por reflexión del sistema* $\mathbf{xOy}$ *en torno al segundo eje, y cambiar las coordenadas de los puntos del plano por medio de la fórmula de reflexión de coordenadas* (4.16)*, las coordenadas de los elementos de G satisfarán la ecuación*

$$\mathsf{A}x^2 - \mathsf{B}xy + \mathsf{C}y^2 - \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0.$$

(c) *Es evidente, por las dos partes anteriores, que los números* Δ_1, Δ_2 *y* Δ_3 *(los discriminantes lineal, cuadrático y cúbico, respectivamente, de la ecuación* (4.17)*) son **invariantes por reflexión**.*

(d) *Después de tener un sistema de ejes rectangulares* $\mathbf{\dot{x}O\dot{y}}$*, por rotación del sistema* $\mathbf{xOy}$ *por el ángulo 90, y cambiar las coordenadas de los puntos del plano por medio de la fórmula de rotación de coordenadas* (4.4)*, las coordenadas de los elementos de G satisfarán la ecuación*

$$\mathsf{A}\dot{y}^2 - \mathsf{B}\dot{x}\dot{y} + \mathsf{C}\dot{x}^2 - \mathsf{D}\dot{y} + \mathsf{E}\dot{x} + \mathsf{F} = 0$$

o, equivalentemente,

$$\mathsf{C}\dot{x}^2 - \mathsf{B}\dot{x}\dot{y} + \mathsf{A}\dot{y}^2 + \mathsf{E}\dot{x} - \mathsf{D}\dot{y} + \mathsf{F} = 0.$$

(e) *Después de tener un sistema de ejes rectangulares* $\mathbf{\dot{x}O\tilde{\dot{y}}}$*, por reflexión del sistema* $\mathbf{\dot{x}O\dot{y}}$ *de la parte anterior en torno al primer eje, y cambiar las coordenadas de los puntos del plano por medio de la fórmula de reflexión de coordenadas* (4.15)*, las coordenadas de los elementos de G satisfarán la ecuación*

$$\mathsf{A}\dot{y}^2 + \mathsf{B}\dot{y}\dot{x} + \mathsf{C}\dot{x}^2 + \mathsf{D}\dot{y} + \mathsf{E}\dot{x} + \mathsf{F} = 0$$

o, equivalentemente,

$$\mathsf{C}\dot{x}^2 + \mathsf{B}\dot{x}\dot{y} + \mathsf{A}\dot{y}^2 + \mathsf{E}\dot{x} + \mathsf{D}\dot{y} + \mathsf{F} = 0,$$

en la que se han permutado los lugares de las abscisas y las ordenadas de la ecuación (4.17).

COROLARIO 4.1

(a) *Si* $\Delta_2 \neq 0$*, entonces G es equivalente al gráfico de una ecuación de la forma*

$$\breve{\dot{\mathsf{A}}}\breve{\dot{x}}^2 + \breve{\dot{\mathsf{C}}}\breve{\dot{y}}^2 + \breve{\dot{\mathsf{F}}} = 0 \tag{4.31}$$

$$(\breve{\dot{\mathsf{A}}} \neq 0 \text{ y } \breve{\dot{\mathsf{C}}} \neq 0).$$

(b) *Si* $\Delta_2 = 0$*, entonces G es equivalente al gráfico de una ecuación de la forma*

$$\dot{\breve{\dot{\mathsf{A}}}}\dot{\breve{\dot{x}}}^2 + \dot{\breve{\dot{\mathsf{E}}}}\dot{\breve{\dot{y}}} + \dot{\breve{\dot{\mathsf{F}}}} = 0 \tag{4.32}$$

$$(\dot{\breve{\dot{\mathsf{A}}}} \neq 0).$$

■ **PRUEBA**

Efectuando una rotación del sistema de ejes ortogonales $\mathbf{xOy}$, obtenemos una ecuación como (4.24); y sabemos, por la observación 4.6.(d), que

$$\Delta_2 = \dot{\Delta}_2 = -4\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{C}}.$$

Así: $\Delta_2 \neq 0$ si, y sólo si, $\dot{\mathsf{A}} \neq 0$ y $\dot{\mathsf{C}} \neq 0$; y $\Delta_2 = 0$ si, y sólo si, $\dot{\mathsf{A}} = 0$ o $\dot{\mathsf{C}} = 0$.
Supongamos que $\Delta_2 \neq 0$. Efectuando una traslación del sistema de ejes ortogonales $\dot{\mathbf{x}}\mathbf{O}\dot{\mathbf{y}}$, obtenemos una ecuación como (4.18). Como $\breve{\dot{\mathsf{A}}} = \dot{\mathsf{A}}$ y $\breve{\dot{\mathsf{C}}} = \dot{\mathsf{C}}$, tenemos que $\breve{\dot{\mathsf{A}}} \neq 0$ y $\breve{\dot{\mathsf{C}}} \neq 0$.
Supongamos ahora que $\Delta_2 = 0$. Sabemos que $\dot{\mathsf{A}} = 0$ o $\dot{\mathsf{C}} = 0$, y que $\dot{\mathsf{A}} \neq 0$ o $\dot{\mathsf{C}} \neq 0$. Por tanto, uno, y sólo uno, de ellos es nulo.
En caso de que $\dot{\mathsf{C}} = 0$ (de donde $\dot{\mathsf{A}} \neq 0$), tendremos que la ecuación (4.24) tiene la forma

$$\dot{\mathsf{A}}\dot{x}^2 + \dot{\mathsf{D}}\dot{x} + \dot{\mathsf{E}}\dot{y} + \dot{\mathsf{F}} = 0$$
$$(\dot{\mathsf{A}} \neq 0).$$

Después de completar cuadrados y efectuar una traslación del sistema de ejes ortogonales $\dot{\mathbf{x}}\mathbf{O}\dot{\mathbf{y}}$ al punto $(-\frac{\dot{\mathsf{D}}}{2\dot{\mathsf{A}}}, 0)$, obtenemos una ecuación de la forma

$$\breve{\dot{\mathsf{A}}}\breve{\dot{x}}^2 + \breve{\dot{\mathsf{E}}}\breve{\dot{y}} + \breve{\dot{\mathsf{F}}} = 0.$$

Como $\breve{\dot{\mathsf{A}}} = \dot{\mathsf{A}}$, tendremos que $\breve{\dot{\mathsf{A}}} \neq 0$.
En caso de que $\dot{\mathsf{A}} = 0$ (de donde $\dot{\mathsf{C}} \neq 0$), tendremos que la ecuación (4.24) tiene la forma

$$\dot{\mathsf{C}}\dot{y}^2 + \dot{\mathsf{D}}\dot{x} + \dot{\mathsf{E}}\dot{y} + \dot{\mathsf{F}} = 0$$
$$(\dot{\mathsf{C}} \neq 0).$$

Después de completar cuadrados y efectuar una traslación del sistema de ejes ortogonales $\dot{\mathbf{x}}\mathbf{O}\dot{\mathbf{y}}$ al punto $(0, -\frac{\dot{\mathsf{E}}}{2\dot{\mathsf{C}}})$, obtenemos una ecuación de la forma

$$\breve{\dot{\mathsf{C}}}\breve{\dot{y}}^2 + \breve{\dot{\mathsf{D}}}\breve{\dot{x}} + \breve{\dot{\mathsf{F}}} = 0.$$

Como $\breve{\dot{\mathsf{C}}} = \dot{\mathsf{C}}$, tendremos que $\breve{\dot{\mathsf{C}}} \neq 0$. Este caso queda resuelto efectuando una rotación del sistema de ejes ortogonales $\breve{\dot{\mathbf{x}}}\breve{\mathbf{O}}\breve{\dot{\mathbf{y}}}$ por 90 ya que, por la observación 4.1.(a), la ecuación anterior representa la misma figura geométrica que la ecuación

$$\dot{\breve{\dot{\mathsf{A}}}}\dot{\breve{\dot{x}}}^2 + \dot{\breve{\dot{\mathsf{E}}}}\dot{\breve{\dot{y}}} + \dot{\breve{\dot{\mathsf{F}}}} = 0.$$

Como $\dot{\breve{\dot{\mathsf{A}}}} = \breve{\dot{\mathsf{C}}}$, tendremos que $\dot{\breve{\dot{\mathsf{A}}}} \neq 0$.

QEP ■

Problemas

En cada uno de los problemas realice una representación gráfica de los sistemas de coordenadas involucrados.

4.1 Encuentre las coordenadas del punto P respecto a la rotación por el ángulo θ del sistema en el cual están expresadas sus coordenadas.

(a) $P = (2, -3)$, $\theta = 30$. **(c)** $P = (1, -3)$, $\theta = 45$. **(e)** $P = (10, 0)$, $\theta = 45$.

(b) $P = (-2, 3)$, $\theta = 30$. **(d)** $P = (-2, -3)$, $\theta = 60$. **(f)** $P = (0, 5)$, $\theta = 60$.

4.2 Encuentre las coordenadas del punto P respecto al sistema de ejes ortogonales original, si sus coordenadas están expresadas en la rotación por el ángulo θ de dicho sistema.

(a) $P = (2, -3)$, $\theta = 30$. **(c)** $P = (1, -3)$, $\theta = 45$. **(e)** $P = (0, -5)$, $\theta = 30$.

(b) $P = (-2, 3)$, $\theta = 30$. **(d)** $P = (-2, -3)$, $\theta = 60$. **(f)** $P = (5, 0)$, $\theta = 60$.

4.3 Encuentre las coordenadas del punto P respecto al sistema de ejes ortogonales que se obtiene mediante la traslación al punto $T = (1, 1)$ del sistema en el que están expresadas sus coordenadas y, luego, la rotación por el ángulo θ de este último sistema.

(a) $P = (2, -3)$, $\theta = 30$. **(c)** $P = (1, -3)$, $\theta = 45$. **(e)** $P = (0, -5)$, $\theta = 30$.

(b) $P = (-2, 3)$, $\theta = 30$. **(d)** $P = (-2, -3)$, $\theta = 60$. **(f)** $P = (5, 0)$, $\theta = 60$.

4.4 Resuelva el problema anterior cambiando el orden en las transformaciones de los ejes (es decir, efectuar primero la rotación y luego la traslación); luego, resuelva el problema anterior usando las fórmulas expuestas en (4.5) (página 142); y compare los tres resultados.

4.5 Verifique que el orden en que se efectúen una traslación y una rotación de un sistema de ejes ortogonales no es relevante, en el sentido de que las coordenadas de cada punto del plano que se obtienen al aplicar dichas transformaciones en un orden coinciden con las obtenidas al aplicarlas en el otro orden.

4.6 Encuentre una traslación del sistema **xOy** respecto a la cual la ecuación se transforme en otra que carezca de términos lineales.

(a) $x^2 + y^2 - 13x - 31y + 70 = 0$.

(b) $7x^2 + 3y^2 - 14x - 6y - 11 = 0$.

(c) $3x^2 - 2y^2 + 6x + 8y - 11 = 0$.

(d) $2y^2 - 3x^2 - 16x + 36y - 16 = 0$.

(e) $2x + xy + 14y - 1 = 0$.

(f) $2x^2 - 3y^2 - 4x + 72y + 72 = 0$.

(g) $32xy - 3x + 2y - 3 = 0$.

(h) $6x^2 - y^2 + 6x - 2y + 9 = 0$.

(i) $9x^2 + 4y^2 - 54x - 8y + 49 = 0$.

(j) $4x^2 + 3y^2 - 72x - 48y + 504 = 0$.

(k) $8x^2 + 6y^2 + 176x - 24y + 944 = 0$.

(l) $12x^2 - 18y^2 - 4x - 12y - 5 = 0$.

(m) $9x^2 + 9y^2 + 72x - 12y + 103 = 0$.

(n) $3x^2 + 2y^2 + 6x - 8y + 5 = 0$.

(ñ) $y^2 - 6x^2 - 24x - 2y - 32 = 0$.

(o) $-5xy + 3x - y - 14 = 0$.

4.7 Encuentre una rotación del sistema **xOy** respecto a la cual la ecuación se transforme en otra que carezca de término cruzado.

(a) $4x^2 - 3xy - 18 = 0$.
(b) $4xy - 3y^2 - 64 = 0$.
(c) $x^2 + 3xy + 9y^2 = 5$.
(d) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2 = 0$.
(e) $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 8\sqrt{3}x - 8y = 0$.
(f) $17x^2 + 12xy + 8y^2 + 17 = 0$.
(g) $5x^2 - 3xy + y^2 + 65x - 25y + 203 = 0$.
(h) $2x^2 + 3xy + 2y^2 - 1 = 0$.
(i) $9x^2 + 3xy + 9y^2 = 5$.
(j) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2 = 0$.
(k) $x + 2xy + 2y^2 = 2$.
(l) $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 30x + 40y = 0$.

4.8 Encuentre un sistema de ejes ortogonales $\widehat{\mathbf{xOy}}$ respecto al cual la ecuación se transforme en otra que carezca de términos lineales y de término cruzado.

(a) $4x^2 - 3xy - 18 = 0$.
(b) $4xy - 3y^2 - 64 = 0$.
(c) $x^2 + 3xy + 9y^2 = 5$.
(d) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2 = 0$.
(e) $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 2y^2 + 8\sqrt{3}x - 8y = 0$.
(f) $17x^2 + 12xy + 8y^2 + 17 = 0$.
(g) $x^2 - 10xy + y^2 - 10x + 2y + 13 = 0$.
(h) $52x^2 - 72xy + 73y^2 - 104x + 72y - 48 = 0$.
(i) $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 60x = 0$.
(j) $x + 4xy + 2y^2 = 2$.
(k) $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 25x = 0$.
(l) $x^2 + 4xy + y^2 + 5x = 1$.

4.9 Encuentre un sistema de ejes ortogonales $\widehat{\mathbf{xOy}}$ respecto al cual la ecuación general de una recta, $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$, se transforme en:

(a) $\widehat{y} = 0$.
(b) $\widehat{x} = 0$.
(c) $\widehat{y} = k$ (k un número real cualquiera).
(d) $\widehat{x} = k$ (k un número real cualquiera).
(e) $\widehat{y} = \widehat{x}$.
(f) $\widehat{y} = -\widehat{x}$.

4.10 Encuentre la ecuación respecto al sistema de ejes ortogonales original, si ella está expresada respecto a un sistema de ejes ortogonales que se obtuvo mediante traslación al punto T y, luego, rotación por el ángulo θ de dicho sistema.

(a) $\dot{\check{x}}^2 - 2\dot{\check{y}}^2 - 2 = 0$, $T = (1, 1)$, $\theta = 45$.
(b) $4\dot{\check{x}}^2 + 9\dot{\check{y}}^2 - 1 = 0$, $T = (2, 0)$, $\theta = 60$.
(c) $\dot{\check{x}}^2 - 2\dot{\check{y}} - 6 = 0$, $T = (2, 5)$, $\theta = 60$.
(d) $\dot{\check{x}}^2 + \dot{\check{y}}^2 - 16 = 0$, $T = (-1, 3)$, $\theta = 70$.

4.11 Verifique que no existe ninguna traslación del sistema de ejes ortogonales **xOy** respecto a la cual la ecuación se transforme en otra que carezca de términos lineales.

(a) $9x + 12y - 13 = 0$.
(b) $x - y + 1 = 0$.
(c) $x^2 + x - 7y + 8 = 0$.
(d) $y^2 - 5x - y + 1 = 0$.
(e) $x^2 + 2xy + y^2 + x + 2y + 1 = 0$.
(f) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 5x + y = 0$.

4.12 Verifique que son invariantes por transformación de coordenadas:

(a) la distancia entre dos puntos del plano.

(b) el grado de una ecuación en dos variables de grado uno o dos.

(c) la colinealidad de tres puntos distintos del plano.

4.13 Verifique que la pendiente de una recta es invariante por traslación.

4.14 Verifique que la ecuación de un círculo con centro en el origen es invariante por rotación y por reflexión.

4.15 Dada una figura geométrica $\mathcal{G}$ cualquiera, verifique que $\mathcal{G}$ es un círculo si, y sólo si, existe un sistema de ejes ortogonales **xOy** y un número real positivo r tal que $\mathcal{G}$ se puede representar por la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$.

Comentarios

⟨1⟩ Note que este concepto amplía el concepto de ecuaciones equivalentes en el sentido de que, si dos ecuaciones son equivalentes, ellas representan la misma figura geométrica; pero, puede darse el caso de que dos ecuaciones representen la misma figura geométrica y no sean equivalentes, como en el ejemplo que sigue inmediatamente.

⟨2⟩ Nos sentimos obligados a hacer la observación de que ésta es una manera simplificada de decir "*por un ángulo cuya medida* es θ"; y esta obligación proviene del hecho de que, a pesar de que es usual, y hasta conveniente, referirse a un ángulo como un número, hemos constatado que esta manera de hablar ha hecho perder la noción de ángulo hasta confundirlo con un número.

⟨3⟩ Debemos calcular el ángulo θ en el intervalo $[0, 180)\setminus\{90\}$. Las calculadoras arrojan el resultado del arcotangente en el intervalo $(-90, 90)$, que es lo que suele llamarse ***la rama principal*** del arcotangente; de manera que si se obtiene en la calculadora un valor en el intervalo $(-90, 0)$, debemos sumarle 180 a ese resultado.

Orientación para resolver los problemas del Capítulo 4

Creemos que el instructor del curso debería acompañar al estudiante en la resolución de algunas partes de los ejercicios 4.1, 4.2, 4.3 y 4.10; y del ejercicio 4.12.

A continuación ofrecemos ***ayudas*** para algunos de los problemas.

4.12.(b): Para la rotación, observe que las líneas relevantes del sistema (4.27) se pueden ver como

$$\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \operatorname{sen}\theta\cos\theta & \operatorname{sen}^2\theta \\ -2\operatorname{sen}\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta & 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen}^2\theta & -\operatorname{sen}\theta\cos\theta & \cos^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathsf{A}\\ \mathsf{B}\\ \mathsf{C}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{\mathsf{A}}\\ \dot{\mathsf{B}}\\ \dot{\mathsf{C}}\end{pmatrix}.$$

y

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathsf{D}\\ \mathsf{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{\mathsf{D}}\\ \dot{\mathsf{E}}\end{pmatrix}.$$

Verifique, entonces, que los determinantes de las matrices de los coeficientes en ambos sistemas valen 1; para calcular el primero, use las fórmulas del coseno y del seno del doble de un ángulo.

4.12.(c): Utilice la bilinealidad del determinante, que se expresa en la siguiente forma

$$\begin{vmatrix} \alpha a_1+\beta b_1 & \gamma c_1+\delta d_1 & 1 \\ \alpha a_2+\beta b_2 & \gamma c_2+\delta d_2 & 1 \\ \alpha a_3+\beta b_3 & \gamma c_3+\delta d_3 & 1 \end{vmatrix} = \alpha\gamma\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix}+\alpha\delta\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & 1 \\ a_2 & d_2 & 1 \\ a_3 & d_3 & 1 \end{vmatrix}+\beta\gamma\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & 1 \\ b_2 & c_2 & 1 \\ b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix}+\beta\delta\begin{vmatrix} b_1 & d_1 & 1 \\ b_2 & d_2 & 1 \\ b_3 & d_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

CAPÍTULO

5

PARÁBOLAS

Cubierto ya el estudio analítico de las dos figuras geométricas planas que conforman la base de la Geometría elemental, nos abocaremos ahora a estudiar una familia de curvas planas no incluidas, usualmente, en aquella: las *cónicas*. Sin mayores preámbulos presentaremos la definición de cónica con la que nosotros desarrollaremos nuestro estudio.

DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE UNA CÓNICA

Fijada una recta d (que llamaremos ***directriz****), un punto F que no se encuentra sobre la recta d (que llamaremos* ***foco****) y un número real positivo e (que llamaremos* ***excentricidad****), una* ***cónica*** *es el conjunto de los puntos P del plano para los que*⟨1⟩

(5.1) $$PF = e \cdot \mathbf{d}(P, d).$$

- *La cónica es una* ***parábola****, si $e = 1$.*
- *La cónica es una* ***elipse****, si $0 < e < 1$.*
- *La cónica es una* ***hipérbola****, si $e > 1$.*

En verdad se puede decir que una cónica es una terna formada por: una recta, un punto externo a esa recta y un número real positivo.

Antes de adentrarnos en el tema que nos ocupará en este capítulo, estableceremos la siguiente afirmación sobre las cónicas en general, que necesitaremos para estudiar cualquiera de ellas.

LEMA 5.1

Ninguna cónica corta su directriz ni contiene su foco.

■ **PRUEBA**

Consideremos una cónica $\mathcal{G}$, de directriz d, foco F y excentricidad e.

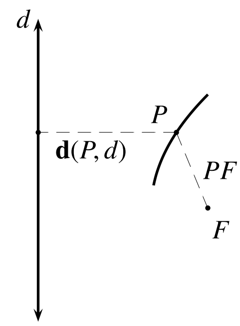


FIGURA 5.1 Una cónica

Si P es un punto que está en d, sabemos que $\mathbf{d}(P, d) = 0$. Así, si P estuviera también en $\mathcal{G}$ tendríamos, por (5.1), que $PF = 0$, es decir, que $P = F$. Pero entonces F estaría en d, contrario a la definición de cónica.
Si F estuviera en $\mathcal{G}$ tendríamos, por (5.1), que $FF = e \cdot \mathbf{d}(F, d)$. Así, por el hecho de que $FF = 0$ y $e > 0$, tendríamos que $\mathbf{d}(F, d) = 0$. Pero entonces F estaría en d, contrario a la definición de cónica.

QEP ■

Consideremos la recta $\mathbf{f}$ perpendicular a la directriz d y que pasa por el foco F; denotaremos por D al punto de corte entre $\mathbf{f}$ y d (la proyección de F sobre d y que, por definición, $D \neq F$).

Llamaremos ***eje focal*** de una cónica, a la recta $\mathbf{f}$ orientada positivamente desde D hacia F.

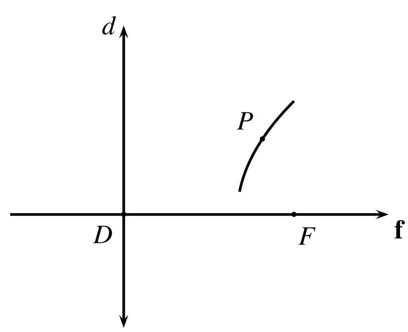


FIGURA 5.2 Eje focal de una cónica

§ 5.1 Ecuación general y ecuación canónica de una parábola

Antes de iniciar el estudio analítico de las parábolas, verificaremos primero lo afirmado en la siguiente proposición.

LEMA 5.2
Las parábolas tienen exactamente un punto de corte con su eje focal, y éste es el punto medio entre F y D.

■ **PRUEBA**
Consideremos una parábola $\mathcal{P}$, de directriz d y foco F.
Llamemos M al punto medio entre F y D. Como M es tal que $MF = MD = 1 \cdot \mathbf{d}(M, d)$, tendremos que M está en $\mathcal{P}$.
Supongamos que V es un punto que está en el eje focal de $\mathcal{P}$ y en $\mathcal{P}$; así, V, F y D son colineales.
Por el lema 5.1, V, F y D son distintos. Así, $VF > 0$, $VD > 0$ y $FD > 0$, y además, por las propiedades de la Interposición de puntos en una recta, se cumple una, y sólo una, de las siguientes afirmaciones:

(I) F está entre V y D. **(II)** D está entre F y V. **(III)** V está entre F y D.

Por ser el eje focal perpendicular a la directriz, y estar V sobre el eje focal, tendremos que $\mathbf{d}(V, d) = VD$. Así, por (5.1) y la definición de parábola tendremos que,

$$VF = VD. \tag{5.2}$$

Si acaso se cumpliera (I), tendríamos que $VD = VF + FD$, de donde $VD > VF$; contrario a (5.2).
Si acaso se cumpliera (II), tendríamos que $VF = VD + FD$, de donde $VF > VD$; contrario a (5.2).
Por tanto, debe cumplirse (III), en cuyo caso V es M.
En conclusión: $\mathcal{P}$ corta su eje focal exactamente en el punto $V = M$, el punto medio entre F y D.

QEP ■

Llamaremos ***vértice*** de la parábola, al punto V en que corta a su eje focal (que, por el lema 5.2, V es el punto medio entre D y F; además resulta ser el punto para el que las distancias PF y $\mathbf{d}(P, d)$ son mínimas).

Llamaremos ***parámetro*** de la parábola al número positivo p que representa la distancia entre el foco y la directriz, es decir, al número $\mathbf{d}(F, d)$ (que a la sazón coincide con el número FD).

OBSERVACIÓN 5.1
(a) *Note que el foco F y el vértice V de una parábola están en el mismo semiplano, de los dos que determina su directriz d.*

(b) *Note que podemos obtener el vértice V a partir del foco F: es el punto medio entre F y D. Pero además, y esto es lo crucial, también podemos obtener el foco F a partir del vértice V: es el punto simétrico de D respecto a V.*
Por esta razón, para tener determinada una parábola, basta tener su directriz y su vértice.

(c) *Note que una parábola queda determinada también, si hemos fijado su eje focal, su vértice y su parámetro*
(para obtener la directriz basta con tomar la recta perpendicular al eje focal por el punto que se encuentra a una distancia del vértice igual a la mitad del parámetro, y antes que el vértice).

(d) *Note que no puede haber dos puntos de la parábola en una paralela al eje focal*
(si l es una recta paralela a $\mathbf{f}$, y P y Q son dos puntos de $\mathcal{P}$ que están en l, la Desigualdad triangular obligaría a que el foco F esté en l, contrario al hecho de que l y $\mathbf{f}$ son paralelas).

(e) *Es más, toda paralela al eje focal corta a la parábola en exactamente un punto*
(dada l', una recta paralela a **f***, consideramos el punto A de corte entre l' y d; como el foco F no está en d, la mediatriz del segmento $\overline{AF}$ corta a l' en un punto P. Es claro que $PF = PA = \mathbf{d}(P, d)$ y, en consecuencia, P es un punto que está en l' y en $\mathcal{P}$).*

(f) *Todos los puntos de una parábola se encuentran en el mismo semiplano en que se encuentra su foco, de los dos semiplanos determinados por su directriz*
(llamemos H al semiplano determinado por d que contiene a F; y llamemos H' al semiplano opuesto. Si P es un punto que está en H', llamemos B a la proyección de P sobre d, y llamemos A al punto de corte entre d y el segmento $\overline{PF}$. Como $PF > PA \geqslant PB = \mathbf{d}(P, d)$, tendremos que P no puede estar en $\mathcal{P}$).

(g) *Por un argumento similar al anterior, todos los puntos de una parábola, excepto su vértice, se encuentran en el mismo semiplano en que se encuentra su foco, de los dos semiplanos determinados por la perpendicular a su eje focal que pasa por su vértice.*

Consideremos las relaciones g que asocian, a pares ordenados de números reales, un número real, cuyas reglas de asociación son polinomios de segundo grado en dos variables de la forma

$$g(x, y) := \mathsf{A}x^2 - y$$
$$(\mathsf{A} \text{ número real con } \mathsf{A} > 0).$$

El objetivo central de esta parte del capítulo es verificar que, dada una figura geométrica $\mathcal{G}$ cualquiera, se tiene lo afirmado en el siguiente Teorema.

TEOREMA 17 (REPRESENTACIÓN ANALÍTICA DE UNA PARÁBOLA)
$\mathcal{G}$ es un parábola si, y sólo si, existe un sistema de ejes ortogonales **xOy** *tal que $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación cuadrática en dos variables de la forma*

$$\mathsf{A}x^2 - y = 0 \tag{5.3}$$
$$(\mathsf{A} \textit{ número real con } \mathsf{A} > 0).$$

Verificado esto, la ecuación (5.3) será llamada ***la ecuación general***, o simplemente ***la ecuación***, de la parábola $\mathcal{G}$.

Supongamos que $\mathcal{G}$ es una parábola, y llamemos: d a su directriz, F a su foco, V a su único vértice, y p a su parámetro.

Consideremos el sistema de ejes ortogonales **xOy** que tiene: como eje **y**, el eje focal de la parábola, ubicando el 0 en el vértice V; y como eje **x**, la recta perpendicular al eje focal de la parábola por el vértice, ubicando el 0 en el vértice V (ver la figura 5.3).

Así, las coordenadas de V son $(0, 0)$ (coincide con el origen O del sistema) y, como V es el punto medio entre F y D, las de F son $(0, \frac{p}{2})$ y la ecuación de la directriz d será $y = -\frac{p}{2}$ (por ser perpendicular al eje **y**).

Consideremos un punto P cualquiera, y sus coordenadas (x, y) respecto al sistema de ejes ortogonales **xy** que hemos configurado.

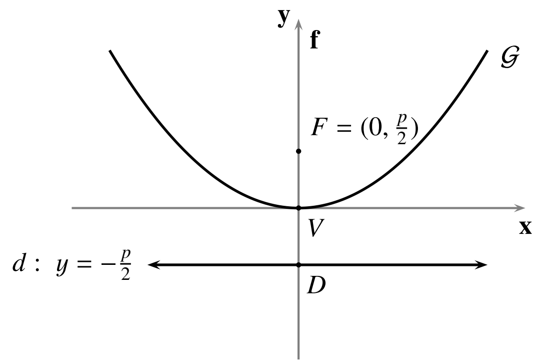


FIGURA 5.3 Ejes canónicos de la parábola

Por definición, P está en $\mathcal{G}$ si, y sólo si, $PF = \mathbf{d}(P, d)$. Como

$$PF = \sqrt{x^2 + (y - \tfrac{p}{2})^2} \quad \text{y} \quad \mathbf{d}(P, d) = |y + \tfrac{p}{2}|,$$

tendremos que P está en $\mathcal{G}$ si, y sólo si, las coordenadas de P satisfacen la ecuación

$$\sqrt{x^2 + (y - \tfrac{p}{2})^2} = |y + \tfrac{p}{2}|.$$

Como ambos términos de la igualdad son positivos tendremos, después de elevar al cuadrado, que esta ecuación es equivalente a

$$x^2 + (y - \tfrac{p}{2})^2 = (y + \tfrac{p}{2})^2,$$

que es la misma que

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}.$$

Al realizar las simplificaciones de rigor, tendremos que P está en $\mathcal{G}$ si, y sólo si, las coordenadas de P satisfacen la ecuación

$$y = \frac{1}{2p}x^2$$

llamada ***ecuación canónica*** de la parábola que tiene eje focal sobre el eje **y**, vértice en el origen y parámetro p.

Así, al definir $\mathsf{A} = \frac{1}{2p}$, tendremos que el punto P está en $\mathcal{G}$ si, y sólo si, sus coordenadas cartesianas satisfacen la ecuación (5.3), para la que $\mathsf{A} > 0$.

Supongamos ahora que existe un sistema de ejes ortogonales **xOy**, tal que $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación como (5.3).

Así, tomando el número positivo $p = \frac{1}{2\mathsf{A}}$, el punto $F = (0, \frac{p}{2})$, y la recta d de ecuación $y = -\frac{p}{2}$ tendremos, para cualquier punto $P = (x, y)$ de $\mathcal{G}$, que

$$PF = \sqrt{x^2 + (y - \tfrac{p}{2})^2} \quad \text{y} \quad \mathbf{d}(P, d) = |y + \tfrac{p}{2}|.$$

Es fácil ver que $PF^2 - \mathbf{d}^2(P, d) = 0$; de donde, por el hecho de que $PF > 0$ y $\mathbf{d}(P, d) > 0$, tendremos que $PF = \mathbf{d}(P, d)$. Así, al tomar la recta d y el punto fuera de ella F, tendremos que $\mathcal{G}$ es la parábola de directriz d y foco F.

De este modo hemos concluido la verificación del Teorema 17.

El sistema de ejes rectangulares que hemos configurado es llamado ***el sistema de ejes canónico*** de la parábola $\mathcal{G}$.

➤ EJEMPLO 5.1

Para encontrar la ecuación general de la parábola de parámetro 5*, respecto a sus ejes canónicos, planteamos la ecuación*

$$y = \frac{1}{2 \cdot 5}x^2,$$

obteniendo que la ecuación requerida es

$$\frac{1}{10}x^2 - y = 0.$$

QEE ◄

OBSERVACIÓN 5.2

(a) *Note que las parábolas cortan a los ejes (de su sistema de ejes canónico) sólo en el origen.*

(b) *La presencia del término cuadrático "x^2" en la ecuación de una parábola da garantía de que las parábolas son simétricas respecto al eje* **y** *de su sistema de ejes canónico, es decir, su eje focal: si un punto $P = (a, b)$ está sobre una parábola, entonces su simétrico $P' = (-a, b)$ respecto al eje* **y** *también está sobre esa parábola.*
Es por esta razón que no es necesario especificar una orientación para el eje **x***, el segundo de los ejes establecidos, pues cualquiera de ellas nos ofrecería la misma ecuación.*

(c) *La presencia del término lineal "y" en la ecuación canónica da garantía de que las parábolas no son simétricas respecto al eje* **x** *de su sistema de ejes canónico, es decir, la perpendicular al eje focal por el vértice, ni respecto al origen (el vértice).*

(d) *Como "y" sólo puede tomar valores no negativos, y se anula sólo en el origen, tendremos que las parábolas, excepto su vértice, están contenidas en $L_{U'}$ (respecto al eje* **x** *de su sistema de ejes canónico).*

(e) *Como "x" puede tomar cualquier valor real, y todo número real no negativo se puede expresar como el cuadrado de otro número real (en realidad, de exactamente dos), tendremos que, fijado cualquier número real no negativo k, las parábolas tienen un punto (en realidad, exactamente dos) sobre la recta perpendicular al eje* **y** *de ecuación $y = k$.*

(f) *Por la observación 5.1.(e), las parábolas son la representación geométrica de una función $y = h(x)$, al expresar las coordenadas de sus puntos respecto a su sistema de ejes canónico.*

En el trabajo que hemos realizado sobre una parábola, hemos tenido la posibilidad de escoger el sistema de ejes ortogonales respecto al cual se expresan las coordenadas de sus puntos, y la ecuación que ellas satisfacen; nos interesa ahora averiguar cómo es la forma de la ecuación de una parábola, si los datos geométricos que la determinan (directriz y foco; o eje focal, vértice y parámetro) están expresados respecto a un sistema de ejes ortogonales fijado previamente.

En este capítulo atenderemos sólo un caso particular de este problema: aquel en el que el eje focal es perpendicular a alguno de los ejes del sistema de ejes ortogonales prefijado; en el Capítulo 8 atenderemos el caso general.

En todo lo que sigue supondremos que se ha fijado un sistema de coordenadas **xOy** en el plano.

5.1.1 Eje focal perpendicular al eje x, vértice en (x_0, y_0) y parámetro p

Consideremos las relaciones g que asocian, a pares ordenados de números reales, un número real, cuyas reglas de asociación son polinomios de segundo grado en dos variables de la forma

$$g(x, y) := \mathsf{A}x^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F}$$
$$(\mathsf{A}, \mathsf{D}, \mathsf{E} \text{ y } \mathsf{F} \text{ números reales con } \mathsf{AE} \neq 0).$$

El objetivo central de esta parte del capítulo es verificar que, dada una figura geométrica $\mathcal{G}$ cualquiera, se tiene lo afirmado en la siguiente proposición.

COROLARIO 5.1
$\mathcal{G}$ es una parábola con eje focal perpendicular al eje **x** *si, y sólo si, $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación cuadrática en dos variables de la forma*

$$\mathsf{A}x^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0 \tag{5.4}$$
$$(\mathsf{A}, \mathsf{D}, \mathsf{E} \text{ y } \mathsf{F} \text{ números reales con } \mathsf{AE} \neq 0).$$

Además, si $\mathsf{AE} < 0$, el eje focal tiene la misma orientación del eje **y***; y si $\mathsf{AE} > 0$, el eje focal tiene la orientación opuesta a la del eje* **y**.

Verificado esto, la ecuación (5.4) será llamada ***la ecuación general***, o simplemente ***la ecuación***, de la parábola $\mathcal{G}$ con eje focal perpendicular al eje **x**.

Supongamos que $\mathcal{G}$ es una parábola con eje focal perpendicular al eje **x**. Así, la ecuación de su directriz d es de la forma

$$d: \; y - k = 0.$$

Por la observación 5.1.(c) podemos suponer, al tener la parábola $\mathcal{G}$, que tenemos como dato las coordenadas del vértice V, digamos (x_0, y_0), y su parámetro, digamos p.

Por el Teorema 17 sabemos que la parábola $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación de la forma

$$\hat{y} = \frac{1}{2p}\hat{x}^2 \tag{5.5}$$

respecto al sistema de ejes canónico $\widehat{\mathbf{xOy}}$ de $\mathcal{G}$; para tener una ecuación en términos de x y y, que represente a $\mathcal{G}$, bastaría con aplicar las fórmulas adecuadas para transformar las coordenadas del sistema **xOy** al sistema $\widehat{\mathbf{xOy}}$.

Esa averiguación conlleva la consideración de los siguientes dos casos.

Eje focal con la misma orientación del eje y

En este caso, por la observación 5.2.(b), el sistema $\widehat{\mathbf{x}}\widehat{\mathrm{O}}\widehat{\mathbf{y}}$ puede ser considerado como el sistema $\breve{\mathbf{x}}\breve{\mathrm{O}}\breve{\mathbf{y}}$, traslación del sistema $\mathbf{xOy}$ al punto $V = (x_0, y_0)$ (ver la figura 5.4); por tanto, debemos aplicar las fórmulas de traslación de coordenadas de $\mathbf{xOy}$ a $\breve{\mathbf{x}}\breve{\mathrm{O}}\breve{\mathbf{y}}$

$$\begin{cases} \breve{x} = x - x_0 \\ \breve{y} = y - y_0 \end{cases}$$

obteniendo que la ecuación (5.5) se transforma en

$$y - y_0 = \frac{1}{2p}(x - x_0)^2 \tag{5.6}$$

llamada ***ecuación canónica de una parábola con eje focal perpendicular al eje* x*, y con la misma orientación del eje* y*, vértice en* (x_0, y_0) *y parámetro* p**.

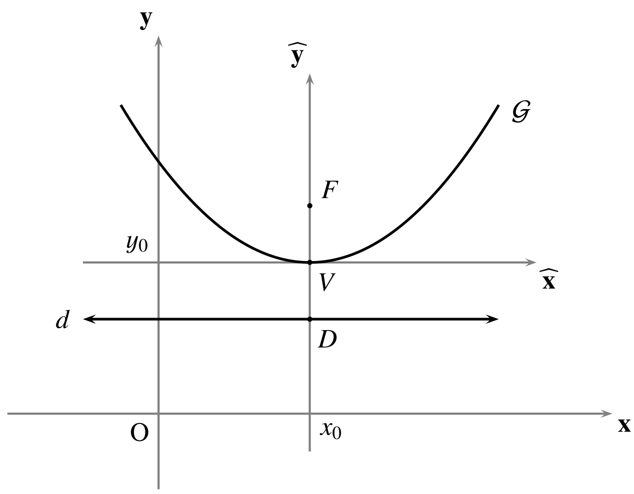


FIGURA 5.4 Eje focal con la misma orientación del eje **y**

Además, el foco de $\mathcal{G}$ se transforma en

$$F = (x_0, y_0 + \tfrac{p}{2})$$

y su directriz en

$$d: \ y = y_0 - \tfrac{p}{2}.$$

Después de sacar las cuentas en la ecuación (5.6), tenemos que ésta es equivalente a la ecuación

$$\frac{1}{2p}x^2 - \frac{x_0}{p}x - y + \frac{x_0^2}{2p} + y_0 = 0. \tag{5.7}$$

Tomando $\mathsf{A} = \frac{1}{2p}$, $\mathsf{D} = -\frac{x_0}{p}$, $\mathsf{E} = -1$ y $\mathsf{F} = \frac{x_0^2}{2p} + y_0$, las coordenadas cartesianas de los puntos de $\mathcal{G}$ satisfacen la ecuación (5.4), para la que $\mathsf{AE} \neq 0$ (en verdad, $\mathsf{AE} < 0$).

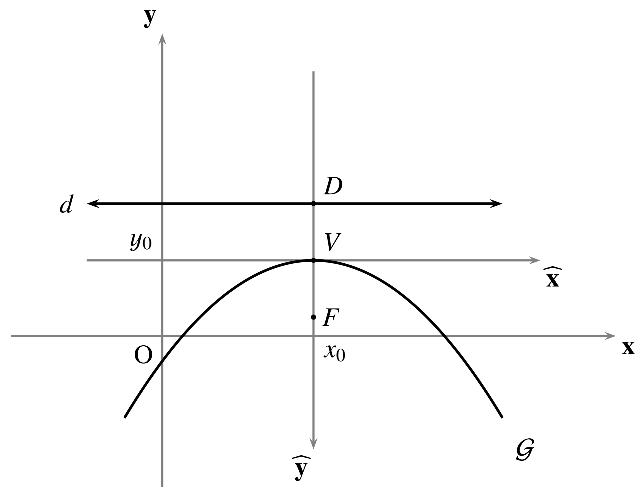


FIGURA 5.5 Eje focal con la orientación opuesta a la del eje **y**

Eje focal con la orientación opuesta a la del eje y

En este caso, por la observación 5.2.(b), el sistema $\widehat{\mathbf{x}}\widehat{\mathrm{O}}\widehat{\mathbf{y}}$ puede ser considerado como el sistema $\breve{\mathbf{x}}\breve{\mathrm{O}}\tilde{\breve{\mathbf{y}}}$, la reflexión en torno al primer eje de la traslación del sistema **xOy** al punto $V = (x_0, y_0)$ (ver la figura 5.5); por tanto, debemos aplicar las fórmulas de traslación de coordenadas de **xOy** a $\breve{\mathbf{x}}\breve{\mathrm{O}}\breve{\mathbf{y}}$

$$\begin{cases} \breve{x} = x - x_0 \\ \breve{y} = y - y_0 \end{cases}$$

y luego la de reflexión en torno al primer eje de esta traslación

$$\tilde{\breve{y}} = -\breve{y}$$

obteniendo que la ecuación (5.5) se transforma en

$$y - y_0 = -\frac{1}{2p}(x - x_0)^2 \tag{5.8}$$

llamada ***ecuación canónica de una parábola con eje focal perpendicular al eje* x*, y con la orientación opuesta a la del eje* y*, vértice en* (x_0, y_0) *y parámetro* p**.

Además, el foco de $\mathcal{G}$ se transforma en

$$F = (x_0, y_0 - \tfrac{p}{2})$$

y su directriz en

$$d: \; y = y_0 + \tfrac{p}{2}.$$

Después de sacar las cuentas en la ecuación (5.8), tenemos que ésta es equivalente a la ecuación

$$-\frac{1}{2p}x^2 + \frac{x_0}{p}x - y - \frac{x_0^2}{2p} + y_0 = 0. \tag{5.9}$$

Tomando $\mathsf{A} = -\frac{1}{2p}$, $\mathsf{D} = \frac{x_0}{p}$, $\mathsf{E} = -1$ y $\mathsf{F} = -\frac{x_0^2}{2p} + y_0$, las coordenadas cartesianas de los puntos de $\mathcal{G}$ satisfacen la ecuación (5.4), para la que $\mathsf{AE} \neq 0$ (en verdad, $\mathsf{AE} > 0$).

Hasta este punto hemos logrado verificar que, si $\mathcal{G}$ es una parábola con eje focal perpendicular al eje **x**, entonces $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación como (5.4); verificaremos ahora el recíproco de esta afirmación.

Después de completar cuadrados y realizar las simplificaciones de rigor, la ecuación (5.4) resulta equivalente a la ecuación

(5.10)
$$y - \frac{\mathsf{D}^2 - 4\mathsf{AF}}{4\mathsf{AE}} = -\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{E}}\left(x - \left(-\frac{\mathsf{D}}{2\mathsf{A}}\right)\right)^2$$
(A, D, E y F números reales con $\mathsf{AE} \neq 0$).

Después de tener un sistema de ejes rectangulares $\breve{\mathbf{x}}\breve{\mathrm{O}}\breve{\mathbf{y}}$, por traslación del sistema **xOy** al punto

$$\left(-\frac{\mathsf{D}}{2\mathsf{A}}, \frac{\mathsf{D}^2 - 4\mathsf{AF}}{4\mathsf{AE}}\right),$$

y cambiar las coordenadas de los puntos del plano por medio de las fórmulas de traslación de coordenadas, tendremos que dicha ecuación es equivalente a la ecuación

$$\breve{y} = -\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{E}}\breve{x}^2$$
(A y E números reales con $\mathsf{AE} \neq 0$),

que resulta equivalente a la ecuación

(5.11)
$$-\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{E}}\breve{x}^2 - \breve{y} = 0$$
(A y E números reales con $\mathsf{AE} \neq 0$).

Si $\mathsf{AE} < 0$ tendremos, al poner $\breve{\mathsf{A}} = -\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{E}}$, que la ecuación (5.11) es equivalente a la ecuación

$$\breve{\mathsf{A}}\breve{x}^2 - \breve{y} = 0,$$

para la que $\breve{\mathsf{A}} > 0$. Por el Teorema 17, esta última ecuación representa una parábola, de la que su sistema de ejes canónico es una traslación del sistema **xOy**; con lo que esta última ecuación representa una parábola cuyo eje focal es perpendicular al eje **x**.

Si $\mathsf{AE} > 0$ tendremos, al poner $\breve{\mathsf{A}} = \frac{\mathsf{A}}{\mathsf{E}}$, que la ecuación (5.11) es equivalente a la ecuación

$$\breve{\mathsf{A}}\breve{x}^2 + \breve{y} = 0,$$

para la que $\breve{\mathsf{A}} > 0$. Después de tener un sistema de ejes rectangulares $\breve{\mathbf{x}}\breve{\mathrm{O}}\tilde{\breve{\mathbf{y}}}$, por reflexión del sistema $\breve{\mathbf{x}}\breve{\mathrm{O}}\breve{\mathbf{y}}$ en torno al primer eje, tendremos que dicha ecuación es equivalente a la ecuación

$$\breve{\mathsf{A}}\breve{x}^2 - \tilde{\breve{y}} = 0.$$

Por el Teorema 17, esta última ecuación representa una parábola, de la que su sistema de ejes canónico es una reflexión en torno al primer eje de la traslación $\breve{\mathbf{x}}\breve{\mathrm{O}}\breve{\mathbf{y}}$ del sistema **xOy**; con lo que esta última ecuación representa una parábola cuyo eje focal es perpendicular al eje **x**.

➤ **EJEMPLO 5.2**

Para encontrar la ecuación general de la parábola con eje focal perpendicular al eje **x**, *y con la misma orientación del eje* **y**, *vértice en* $(3, -5)$ *y parámetro* $\frac{7}{2}$, *planteamos la ecuación*

$$y - (-5) = \frac{1}{2 \cdot \frac{7}{2}}(x-3)^2,$$

obteniendo que la ecuación requerida es

$$x^2 - 6x - 7y - 26 = 0.$$

Si la orientación del eje focal es la opuesta a la del eje **y**, *planteamos la ecuación*

$$y - (-5) = -\frac{1}{2 \cdot \frac{7}{2}}(x-3)^2,$$

obteniendo que la ecuación requerida es

$$x^2 - 6x + 7y + 44 = 0.$$

QEE ➤

5.1.2 Eje focal perpendicular al eje y, vértice en (x_0, y_0) y parámetro p

Consideremos las relaciones g que asocian, a pares ordenados de números reales, un número real, cuyas reglas de asociación son polinomios de segundo grado en dos variables de la forma

$$g(x, y) := \mathsf{C}y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F}$$
$$(\mathsf{C}, \mathsf{D}, \mathsf{E} \text{ y } \mathsf{F} \text{ números reales con } \mathsf{CD} \neq 0).$$

El objetivo central de esta parte del capítulo es verificar que, dada una figura geométrica $\mathcal{G}$ cualquiera, se tiene lo afirmado en la siguiente proposición.

COROLARIO 5.2

$\mathcal{G}$ es una parábola con eje focal perpendicular al eje **y** *si, y sólo si, $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación cuadrática en dos variables de la forma*

$$\mathsf{C}y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0 \tag{5.12}$$
$$(\mathsf{C}, \mathsf{D}, \mathsf{E} \text{ y } \mathsf{F} \text{ números reales con } \mathsf{CD} \neq 0).$$

Además, si $\mathsf{CD} < 0$, *el eje focal tiene la misma orientación del eje* **x**; *y si* $\mathsf{CD} > 0$, *el eje focal tiene la orientación opuesta a la del eje* **x**.

Verificado esto, la ecuación (5.12) será llamada ***la ecuación general***, o simplemente ***la ecuación***, de la parábola $\mathcal{G}$ con eje focal perpendicular al eje **y**.

Supongamos que $\mathcal{G}$ es una parábola con eje focal perpendicular al eje **y**. Así, la ecuación de su directriz d es de la forma

$$d: \; x - k = 0.$$

Por la observación 5.1.(c) podemos suponer, al tener la parábola $\mathcal{G}$, que tenemos como dato las coordenadas del vértice V, digamos (x_0, y_0), y su parámetro, digamos p.

Por el Teorema 17 sabemos que la parábola $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación de la forma

$$\hat{y} = \frac{1}{2p}\hat{x}^2 \tag{5.13}$$

respecto al sistema de ejes canónico $\widehat{\mathbf{x}\mathrm{O}\mathbf{y}}$ de $\mathcal{G}$; para tener una ecuación en términos de x y y, que represente a $\mathcal{G}$, bastaría con aplicar las fórmulas adecuadas para transformar las coordenadas del sistema $\mathbf{x}\mathrm{O}\mathbf{y}$ al sistema $\widehat{\mathbf{x}\mathrm{O}\mathbf{y}}$.

Esa averiguación conlleva la consideración de los siguientes dos casos.

Eje focal con la misma orientación del eje $\mathbf{x}$

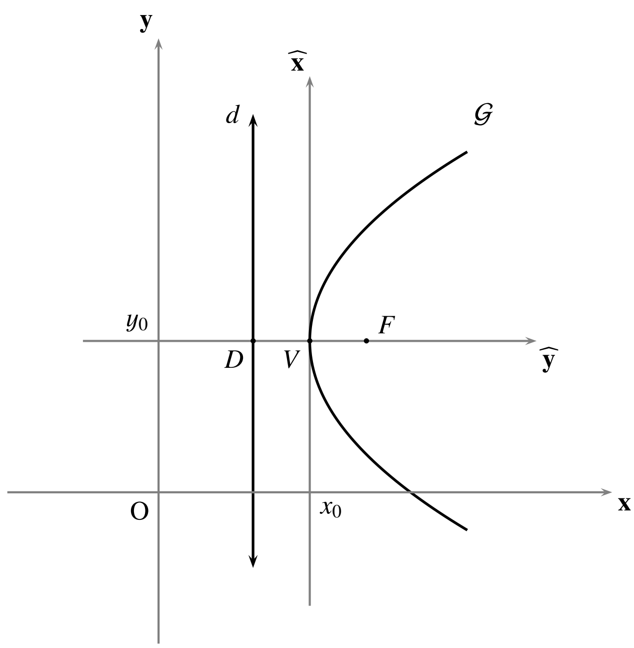


FIGURA 5.6 Eje focal con la misma orientación del eje **x**

Apoyados en la observación 5.2.(b), escogeremos el primer eje del sistema de ejes canónico con la misma orientación del eje $\mathbf{y}$. En este caso, el sistema $\widehat{\mathbf{x}\mathrm{O}\mathbf{y}}$ puede ser considerado como el sistema $\dot{\check{\mathbf{x}}}\breve{\mathrm{O}}\tilde{\check{\mathbf{y}}}$, la reflexión en torno al primer eje de la rotación por 90, de la traslación del sistema $\mathbf{x}\mathrm{O}\mathbf{y}$ al punto $V = (x_0, y_0)$ (ver la figura 5.6) (lo cual, de acuerdo con la observación 4.3.(e), equivale a conmutar los ejes del sistema trasladado); por tanto, debemos aplicar las fórmulas de traslación de coordenadas de $\mathbf{x}\mathrm{O}\mathbf{y}$ a $\check{\mathbf{x}}\breve{\mathrm{O}}\check{\mathbf{y}}$

$$\begin{cases} \check{x} = x - x_0 \\ \check{y} = y - y_0 \end{cases}$$

y conmutamos los ejes de este sistema trasladado

$$\begin{cases} \dot{\breve{x}} = y - y_0 \\ \tilde{\dot{\breve{y}}} = x - x_0 \end{cases}$$

obteniendo que la ecuación (5.13) se transforma en

$$x - x_0 = \frac{1}{2p}(y - y_0)^2 \tag{5.14}$$

llamada ***ecuación canónica de una parábola con eje focal perpendicular al eje* y*, y con la misma orientación del eje* x*, vértice en* (x_0, y_0) *y parámetro* p.

Además, el foco de $\mathcal{G}$ se transforma en

$$F = (x_0 + \tfrac{p}{2}, y_0)$$

y su directriz en

$$d: \; x = x_0 - \tfrac{p}{2}.$$

Después de sacar las cuentas en la ecuación (5.14), tenemos que ésta es equivalente a la ecuación

$$\frac{1}{2p}y^2 - x - \frac{y_0}{p}y + \frac{y_0^2}{2p} + x_0 = 0. \tag{5.15}$$

Tomando $\mathsf{C} = \frac{1}{2p}$, $\mathsf{D} = -1$, $\mathsf{E} = -\frac{y_0}{p}$ y $\mathsf{F} = \frac{y_0^2}{2p} + x_0$, las coordenadas cartesianas de los puntos de $\mathcal{G}$ satisfacen la ecuación (5.12), para la que $\mathsf{CD} \neq 0$ (en verdad, $\mathsf{CD} < 0$).

Eje focal con la orientación opuesta a la del eje x

Apoyados en la observación 5.2.(b), escogeremos el primer eje del sistema de ejes canónico con la misma orientación del eje **y**. En este caso, el sistema $\widehat{\mathbf{x}}\widehat{\mathrm{O}}\widehat{\mathbf{y}}$ puede ser considerado como el sistema $\dot{\breve{\mathbf{x}}}\breve{\mathrm{O}}\dot{\breve{\mathbf{y}}}$, la rotación por 90 de la traslación del sistema **xOy** al punto $V = (x_0, y_0)$ (ver la figura 5.7) (lo cual, de acuerdo con la observación 4.3.(e), equivale a conmutar los ejes del sistema trasladado cambiándole la orientación al segundo); por tanto, debemos aplicar las fórmulas de traslación de coordenadas de **xOy** a $\breve{\mathbf{x}}\breve{\mathrm{O}}\breve{\mathbf{y}}$

$$\begin{cases} \breve{x} = x - x_0 \\ \breve{y} = y - y_0 \end{cases}$$

y conmutamos los ejes de este sistema trasladado cambiándole la orientación al segundo

$$\begin{cases} \dot{\breve{x}} = \breve{y} \\ \dot{\breve{y}} = -\breve{x} \end{cases}$$

obteniendo que la ecuación (5.13) se transforma en

$$x - x_0 = -\frac{1}{2p}(y - y_0)^2 \tag{5.16}$$

llamada ***ecuación canónica de una parábola con eje focal perpendicular al eje* y*, y con la orientación opuesta a la del eje* x*, vértice en* (x_0, y_0) *y parámetro* p.

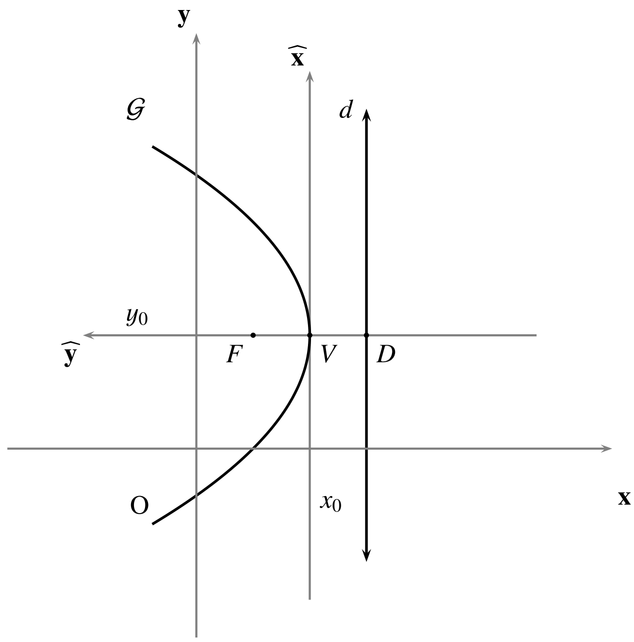


FIGURA 5.7 Eje focal con la orientación opuesta a la del eje **x**

Además, el foco de $\mathcal{G}$ se transforma en

$$F = (x_0 - \tfrac{p}{2}, y_0)$$

y su directriz en

$$d: \ x = x_0 + \tfrac{p}{2}.$$

Después de sacar las cuentas en la ecuación (5.16), tenemos que ésta es equivalente a la ecuación

$$-\frac{1}{2p}y^2 - x + \frac{y_0}{p}y - \frac{y_0^2}{2p} + x_0 = 0. \tag{5.17}$$

Tomando $\mathsf{C} = -\frac{1}{2p}$, $\mathsf{D} = -1$, $\mathsf{E} = \frac{y_0}{p}$ y $\mathsf{F} = -\frac{y_0^2}{2p} + x_0$, las coordenadas cartesianas de los puntos de $\mathcal{G}$ satisfacen la ecuación (5.12), para la que $\mathsf{CD} \neq 0$ (en verdad, $\mathsf{CD} > 0$).

Hasta este punto hemos logrado verificar que, si $\mathcal{G}$ es una parábola con eje focal perpendicular al eje **y**, entonces $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación como (5.12); verificaremos ahora el recíproco de esta afirmación.

Después de completar cuadrados y realizar las simplificaciones de rigor, la ecuación (5.12) resulta equivalente a la ecuación

$$x - \frac{\mathsf{E}^2 - 4\mathsf{CF}}{4\mathsf{CD}} = -\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{D}}\left(y - \left(-\frac{\mathsf{E}}{2\mathsf{C}}\right)\right)^2 \tag{5.18}$$

(C, D, E y F números reales con $\mathsf{CD} \neq 0$).

Después de tener un sistema de ejes rectangulares $\breve{\mathbf{x}}\breve{\mathrm{O}}\breve{\mathbf{y}}$, por traslación del sistema **xOy** hasta el punto

$$\left(\frac{\mathsf{E}^2-4\mathsf{CF}}{4\mathsf{CD}},-\frac{\mathsf{E}}{2\mathsf{C}}\right),$$

y cambiar las coordenadas de los puntos del plano por medio de las fórmulas de traslación de coordenadas, tendremos que dicha ecuación es equivalente a la ecuación

$$\breve{x}=-\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{D}}\breve{y}^2$$

(C y D números reales con CD $\neq 0$),

que resulta equivalente a la ecuación

$$-\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{D}}\breve{y}^2-\breve{x}=0$$

(C y D números reales con CD $\neq 0$).

Después de rotar por 90, y reflejar en torno al primer eje, el sistema $\breve{\mathbf{x}}\breve{\mathrm{O}}\breve{\mathbf{y}}$ (lo cual, de acuerdo con la observación 4.3.(e), equivale a conmutar los ejes de este último sistema), tendremos que dicha ecuación es equivalente a la ecuación

$$-\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{D}}\dot{\breve{x}}^2-\tilde{\dot{\breve{y}}}=0 \tag{5.19}$$

(C y D números reales con CD $\neq 0$).

Si CD <0 tendremos, al poner $\dot{\breve{A}}=-\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{D}}$, que la ecuación (5.19) es equivalente a la ecuación

$$\dot{\breve{\mathsf{A}}}\dot{\breve{x}}^2-\tilde{\dot{\breve{y}}}=0,$$

para la que $\dot{\breve{\mathsf{A}}}>0$. Por el Teorema 17, esta última ecuación representa una parábola, de la que su sistema de ejes canónico es la reflexión en torno al primer eje de la rotación por 90 de la traslación del sistema **xOy**; con lo que esta última ecuación representa una parábola cuyo eje focal es perpendicular al eje **y**.

Si CD >0 tendremos, al poner $\dot{\breve{A}}=\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{D}}$, que la ecuación (5.19) es equivalente a la ecuación

$$\dot{\breve{\mathsf{A}}}\dot{\breve{x}}^2+\tilde{\dot{\breve{y}}}=0,$$

para la que $\dot{\breve{\mathsf{A}}}>0$. Después de tener un sistema de ejes rectangulares $\dot{\breve{\mathbf{x}}}\breve{\mathrm{O}}\tilde{\tilde{\dot{\breve{\mathbf{y}}}}}$, por reflexión del sistema $\dot{\breve{\mathbf{x}}}\breve{\mathrm{O}}\tilde{\dot{\breve{\mathbf{y}}}}$ en torno al primer eje, tendremos que dicha ecuación es equivalente a la ecuación

$$\dot{\breve{\mathsf{A}}}\dot{\breve{x}}^2-\tilde{\tilde{\dot{\breve{y}}}}=0.$$

Por el Teorema 17, esta última ecuación representa una parábola, de la que su sistema de ejes canónico es la reflexión en torno al primer eje de la reflexión en torno al primer eje de la rotación por 90 de la traslación del sistema **xOy**; con lo que esta última ecuación representa una parábola cuyo eje focal es perpendicular al eje **y**.

➤ **EJEMPLO 5.3**
Para encontrar la ecuación general de la parábola con eje focal perpendicular al eje **y***, y con la misma orientación del eje* **x***, vértice en* $(-1,-1)$ *y parámetro* 3*, planteamos la ecuación*

$$x-(-1)=\frac{1}{2\cdot 3}(y-(-1))^2,$$

obteniendo que la ecuación requerida es

$$y^2-6x+2y-5=0.$$

Si la orientación del eje focal es la opuesta a la del eje **x***, planteamos la ecuación*

$$x-(-1)=-\frac{1}{2\cdot 3}(y-(-1))^2,$$

obteniendo que la ecuación requerida es

$$y^2+6x+2y+7=0.$$

QEE ◀

Note que, en la verificación de los corolarios 5.1 y 5.2 que hemos hecho, se obtienen por añadidura los siguientes dos resultados.

COROLARIO 5.3
La parábola con eje focal perpendicular al eje **x** *representada por la ecuación* (5.4) *satisface:*

(a) *El eje focal tiene la misma orientación del eje* **y** *si, y sólo si,* $\mathsf{AE}<0$.

(b) *El eje focal tiene la orientación opuesta a la del eje* **y** *si, y sólo si,* $\mathsf{AE}>0$.

(c) *El vértice es el punto* $V=(-\frac{\mathsf{D}}{2\mathsf{A}},\frac{\mathsf{D}^2-4\mathsf{AF}}{4\mathsf{AE}})$.

(d) *El parámetro es* $p=|\frac{\mathsf{E}}{2\mathsf{A}}|$.

(e) *El foco es el punto* $F=(-\frac{\mathsf{D}}{2\mathsf{A}},\frac{\mathsf{D}^2-\mathsf{E}^2-4\mathsf{AF}}{4\mathsf{AE}})$.

(f) *La directriz es la recta* $d:\ y=\frac{\mathsf{D}^2+\mathsf{E}^2-4\mathsf{AF}}{4\mathsf{AE}}$.

➤ **EJEMPLO 5.4**
Para encontrar el eje focal, el vértice, el parámetro, el foco y la directriz de la parábola

$$4x^2+8x+7y+18=0,$$

procedemos de la siguiente manera.

En primer lugar observamos que el eje focal de esta parábola es perpendicular al eje **x***, pues el término cuadrático contiene la variable “x”.*

En segundo lugar, la orientación del eje focal de esta parábola es la opuesta a la del eje **y***, pues* $4\cdot 7=28>0$.

Así, de acuerdo con el corolario 5.3, el vértice es el punto $V = (-1, -2)$*, el parámetro es* $\frac{7}{8}$*, el foco es el punto* $F = \left(-1, -\frac{39}{16}\right)$*, y la directriz es la recta* $d: \; y = -\frac{25}{16}$. **QEE ◀**

COROLARIO 5.4

La parábola con eje focal perpendicular al eje **y** *representada por la ecuación* (5.12) *satisface:*

(a) *El eje focal tiene la misma orientación del eje* **x** *si, y sólo si,* $\mathsf{CD} < 0$.

(b) *El eje focal tiene la orientación opuesta a la del eje* **x** *si, y sólo si,* $\mathsf{CD} > 0$.

(c) *El vértice es el punto* $V = (\frac{\mathsf{E}^2 - 4\mathsf{CF}}{4\mathsf{CD}}, -\frac{\mathsf{E}}{2\mathsf{C}})$.

(d) *El parámetro es* $p = |\frac{\mathsf{D}}{2\mathsf{C}}|$.

(e) *El foco es el punto* $F = (\frac{\mathsf{E}^2 - D^2 - 4\mathsf{CF}}{4\mathsf{CD}}, -\frac{\mathsf{E}}{2\mathsf{C}})$.

(f) *La directriz es la recta* $d: \; x = \frac{\mathsf{E}^2 + D^2 - 4\mathsf{CF}}{4\mathsf{CD}}$.

➤ EJEMPLO 5.5

Para encontrar el eje focal, el vértice, el parámetro, el foco y la directriz de la parábola

$$y^2 + 2x - 2y + 1 = 0,$$

procedemos de la siguiente manera.

En primer lugar observamos que el eje focal de esta parábola es perpendicular al eje **y***, pues el término cuadrático contiene la variable "y".*

En segundo lugar, la orientación del eje focal de esta parábola es la opuesta a la del eje **x***, pues* $1 \cdot 2 = 2 > 0$.

Así, de acuerdo con el corolario 5.4, el vértice es el punto $V = (0, 1)$*, el parámetro es* 1*, el foco es el punto* $F = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$*, y la directriz es la recta* $d: \; x = \frac{1}{2}$. **QEE ◀**

OBSERVACIÓN 5.3

(a) *Veamos que existe una esencial interconexión entre la ubicación del vértice de una parábola respecto al eje (del sistema de coordenadas respecto al cual está expresada su ecuación) que es perpendicular a su eje focal, sus puntos de corte con ese eje y las raíces de una ecuación cuadrática en una variable.*

Por la parte (c) del corolario 5.3, la ordenada del vértice de la parábola con eje focal perpendicular al eje **x** *es*

$$\frac{\mathsf{D}^2 - 4\mathsf{AF}}{4\mathsf{AE}};$$

número del que su numerador, $\mathsf{D}^2 - 4\mathsf{AF}$*, coincide con el discriminante de la ecuación cuadrática en una variable*

$$\mathsf{A}x^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{F} = 0 \tag{5.20}$$

que resulta de sustituir $y = 0$ *en la ecuación* (5.4).

Sabemos (ver el Apéndice C) que ese discriminante nos da información sobre la naturaleza de las raíces de dicha ecuación cuadrática; nos proponemos justificar, usando parábolas, la siguiente interpretación geométrica de dicha discriminación:

***Las raíces de la ecuación cuadrática** (5.20) **nos permiten obtener información sobre los puntos de corte de la parábola con el eje (del sistema** xOy**) que es perpendicular a su eje focal**.*

Pongamos por caso que $\mathsf{AE} < 0$*, lo cual equivale a decir, de acuerdo con la parte (a) de ese mismo corolario, que la parábola en cuestión tiene su eje focal con la misma orientación del eje* **y**.

- *Si el discriminante es positivo,* $\mathsf{D}^2 - 4\mathsf{AF} > 0$*, tendremos que: el vértice de la parábola está en el semiplano* $L'_{U'}$*; y la parábola corta el eje* **x** *en dos puntos distintos, pues la ecuación* (5.20) *tiene dos raíces reales distintas.*
- *Si el discriminante es negativo,* $\mathsf{D}^2 - 4\mathsf{AF} < 0$*, tendremos que: el vértice de la parábola está en el semiplano* $L_{U'}$*; y la parábola no corta el eje* **x***, pues la ecuación* (5.20) *no tiene raíces reales.*
- *Si el discriminante es nulo,* $\mathsf{D}^2 - 4\mathsf{AF} = 0$*, tendremos que: el vértice de la parábola está en el eje* **x***; y la parábola corta el eje* **x** *en un solo punto, pues la ecuación* (5.20) *tiene dos raíces reales iguales.*

Interpretaciones análogas se pueden hacer en el caso en que $\mathsf{AE} > 0$*, y en los dos casos correspondientes de la ecuación cuadrática que resulta de sustituir* $x = 0$ *en la ecuación* (5.12)*, en los que la parábola tiene su eje focal perpendicular al eje* **y**.

(b) *Por lo usual y arraigado de las denominaciones que expondremos a continuación, haremos las siguientes convenciones en la manera de referirnos a las parábolas.*

(1) *Decir que una parábola **se abre hacia arriba** equivale a decir que su eje focal es perpendicular al eje* **x***, y tiene la misma orientación del eje* **y**.

(2) *Decir que una parábola **se abre hacia abajo** equivale a decir que su eje focal es perpendicular al eje* **x***, y tiene la orientación opuesta a la del eje* **y**.

(3) *Decir que una parábola **se abre hacia la derecha** equivale a decir que su eje focal es perpendicular al eje* **y***, y tiene la misma orientación del eje* **x**.

(4) *Decir que una parábola **se abre hacia la izquierda** equivale a decir que su eje focal es perpendicular al eje* **y***, y tiene la orientación opuesta a la del eje* **x**.

En la siguiente observación presentamos un resultado análogo al presentado en la observación 3.10, pero con unas condiciones más restrictivas.

Observación 5.4 (Parábola determinada por tres puntos no colineales)
Dados tres puntos $P_1 = (x_1, y_1)$*,* $P_2 = (x_2, y_2)$ *y* $P_3 = (x_3, y_3)$*, para buscar una parábola con eje perpendicular al eje* **x** *que pase por ellos, buscamos números reales* A*,* D*,* E *y* F *con* $\mathsf{AE} \neq 0$ *tales que una ecuación como*

$$\mathsf{A}x^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0$$

sea satisfecha por esos tres puntos, es decir, tal que

$$\begin{aligned}\mathsf{A}x_1^2 + \mathsf{D}x_1 + \mathsf{E}y_1 + \mathsf{F} &= 0\\ \mathsf{A}x_2^2 + \mathsf{D}x_2 + \mathsf{E}y_2 + \mathsf{F} &= 0\\ \mathsf{A}x_3^2 + \mathsf{D}x_3 + \mathsf{E}y_3 + \mathsf{F} &= 0.\end{aligned}$$

La solución del problema planteado equivale a buscar una solución no trivial del sistema de ecuaciones *lineales homogéneo*

$$\begin{cases} \mathsf{A}x^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0 \\ \mathsf{A}x_1^2 + \mathsf{D}x_1 + \mathsf{E}y_1 + \mathsf{F} = 0 \\ \mathsf{A}x_2^2 + \mathsf{D}x_2 + \mathsf{E}y_2 + \mathsf{F} = 0 \\ \mathsf{A}x_3^2 + \mathsf{D}x_3 + \mathsf{E}y_3 + \mathsf{F} = 0 \end{cases}$$

que, en forma matricial, se puede expresar mediante

$$\begin{pmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathsf{A} \\ \mathsf{D} \\ \mathsf{E} \\ \mathsf{F} \end{pmatrix} = 0,$$

y que satisfaga además la condición de que $\mathsf{AE} \neq 0$.

Del Álgebra elemental sabemos que ese sistema tiene una solución no trivial si, y sólo si,

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

que, desarrollando por la primera fila, equivale a

$$(5.21) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} x^2 - \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Como

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 - x_3 & 1 \\ x_2^2 & x_2 - x_3 & 1 \\ x_3^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^2 - x_3^2 & x_1 - x_3 & 1 \\ x_2^2 - x_3^2 & x_2 - x_3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x_1 + x_3)(x_1 - x_3) & x_1 - x_3 & 1 \\ (x_2 + x_3)(x_2 - x_3) & x_2 - x_3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (x_1 - x_3)(x_2 - x_3)\begin{vmatrix} (x_1 + x_3) & 1 & 1 \\ (x_2 + x_3) & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x_1 - x_3)(x_2 - x_3)\begin{vmatrix} (x_1 + x_3) & 1 \\ (x_2 + x_3) & 1 \end{vmatrix} \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3), \end{aligned}$$

tendremos que la ecuación (5.21) *es equivalente a la ecuación*

$$(5.22) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} x^2 - \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} x + (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)y - \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Así, al definir

$$\mathsf{A} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathsf{D} = \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathsf{E} = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \quad y \quad \mathsf{F} = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

tendremos que la ecuación (5.22) *sería la ecuación de la parábola buscada, siempre y cuando*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad y \qquad (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \neq 0,$$

lo cual equivale a exigir que ***los puntos no sean colineales, y que dos de ellos no tengan la misma abscisa****.*

De manera análoga podemos proceder para encontrar una parábola con eje perpendicular al eje **y** *que pase por los tres puntos dados.*

§ 5.2 Inecuaciones cuadráticas, e interior y exterior de una parábola

El estudio que haremos en esta sección tendrá como sistema de ejes ortogonales, el sistema de ejes canónico de la parábola, pues con otro sistema de ejes ortogonales el estudio es análogo.

Diremos que un punto ***está en el interior de*** una parábola, si su distancia al foco es menor que su distancia a la directriz.

Diremos que un punto ***está en el exterior de*** una parábola, si su distancia al foco es mayor que su distancia a la directriz.

Llamaremos ***interior*** de una parábola al conjunto de sus puntos interiores.

Llamaremos ***exterior*** de una parábola al conjunto de sus puntos exteriores.

El objetivo central de esta parte del capítulo es ofrecer la representación analítica de los puntos del plano que no están sobre una parábola, tomando como referencia la distancia al foco y la distancia a la directriz.

Consideremos una parábola $\mathcal{P}$ de foco F y directriz d. Por la tricotomía del orden de los números reales, todos los puntos del plano están en uno, y sólo uno, de los siguientes conjuntos: la parábola $\mathcal{P}$; el interior de la parábola $\mathcal{P}$; el exterior de la parábola $\mathcal{P}$. Ahora, atendiendo a la definición de estos dos últimos, verificaremos lo afirmado en el siguiente Teorema.

TEOREMA 18 (REPRESENTACIÓN ANALÍTICA DEL INTERIOR Y DEL EXTERIOR DE UNA PARÁBOLA)
Si la ecuación general de la parábola $\mathcal{P}$ es $\mathsf{A}x^2 - y = 0$ ($\mathsf{A} > 0$), entonces su interior y su exterior son, respectivamente, los conjuntos

$$I := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathsf{A}x^2 - y < 0\}$$
$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathsf{A}x^2 - y > 0\}.$$

Verificaremos sólo que el interior de $\mathcal{P}$ coincide con el conjunto I descrito, pues de manera análoga se verifica que el exterior de $\mathcal{P}$ coincide con el conjunto E.

Por definición, el punto $P = (x, y)$ está en el interior de $\mathcal{P}$ si, y sólo si, $PF < \mathbf{d}(P, d)$; ahora, por el corolario 5.3 para $\mathsf{D} = \mathsf{F} = 0$, esto sucede si, y sólo si,

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4\mathsf{A}}\right)^2} < \left|y + \frac{1}{4\mathsf{A}}\right|;$$

o, lo que es lo mismo, si, y sólo si $Ax^2 - y < 0$. Así, el interior de la parábola $\mathcal{P}$ coincide con el conjunto I, tal como queríamos verificar.

Observación 5.5

Una ventaja que ofrece el Teorema 18 es que, para saber si un punto (u, v) está en el interior (exterior) de una parábola $Ax^2 - y = 0$, no tenemos que calcular sus distancias al foco y a la directriz, sino averiguar si el número $Au^2 - v$ es positivo o negativo.

En general, el conjunto solución de una inecuación de la forma $Ax^2 - y \lesseqqgtr 0$ será uno de esos conjuntos determinados por la parábola $Ax^2 - y = 0$; e incluirá el borde (es decir, la parábola misma), sólo en el caso en que tuviéramos "$\geqslant$" o "$\leqslant$".

En lo que se refiere a la representación gráfica de esos conjuntos, haremos la misma convención que hemos hecho con las rectas (ver la página 16).

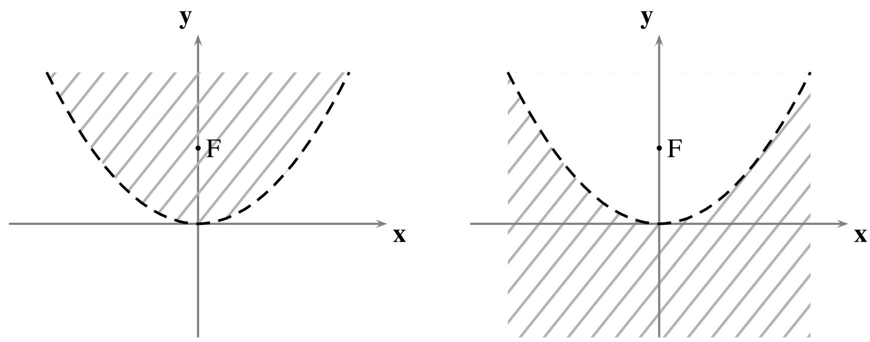


Figura 5.8 Interior y exterior de una parábola

§ 5.3 Posiciones relativas entre parábolas y rectas

En los parágrafos sucesivos haremos un estudio sobre las relaciones que existen entre las posiciones relativas que pueden presentar una recta y una parábola, y los coeficientes de sus ecuaciones generales; en dicho estudio tomaremos como sistema de ejes ortogonales el sistema de ejes canónico de la parábola, pues con otro sistema de ejes ortogonales el estudio es análogo.

Consideremos una parábola $\mathcal{P}$ y una recta l, de ecuaciones

$$\mathcal{P}: \quad \frac{1}{2p}x^2 - y = 0 \quad (p > 0) \qquad\qquad l: \quad Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0).$$

El estudio de la ***incidencia*** entre la parábola $\mathcal{P}$ y la recta l equivale a la consideración de la existencia de pares ordenados (x, y) de números reales que satisfagan, simultáneamente, las siguientes dos condiciones

$$\frac{1}{2p}x^2 - y = 0 \qquad \text{y} \qquad Ax + By + C = 0;$$

o, lo que es lo mismo, a la consideración de la ***existencia de soluciones*** del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2p}x^2 - y = 0 \\ \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0 \end{cases} . \tag{5.23}$$

Desde el punto de vista geométrico (ver la figura 5.9 y el ejercicio 5.2), el sistema (5.23)

(N) no tendrá solución si, y sólo si, l y $\mathcal{P}$ ***no se cortan***.

(S) tendrá dos soluciones distintas si, y sólo si, l y $\mathcal{P}$ son ***secantes*** (es decir, l corta a $\mathcal{P}$ en dos puntos distintos).

(T) tendrá dos soluciones iguales si, y sólo si, l y $\mathcal{P}$ son ***tangentes*** (es decir, l corta a $\mathcal{P}$ en un único punto y no es paralela a, ni coincide con, su eje focal)⟨2⟩.

(R) tendrá una solución única si, y sólo si, l y $\mathcal{P}$ son ***transversales*** (es decir, l corta a $\mathcal{P}$ en un único punto y es paralela a, o coincide con, su eje focal).

Desde el punto de vista algebraico, se puede proceder a resolver el sistema (5.23) despejando una de las variables en la segunda ecuación (una de las que tenga su coeficiente distinto de cero), y "sustituir" esa variable en la primera, tal como detallamos a continuación.

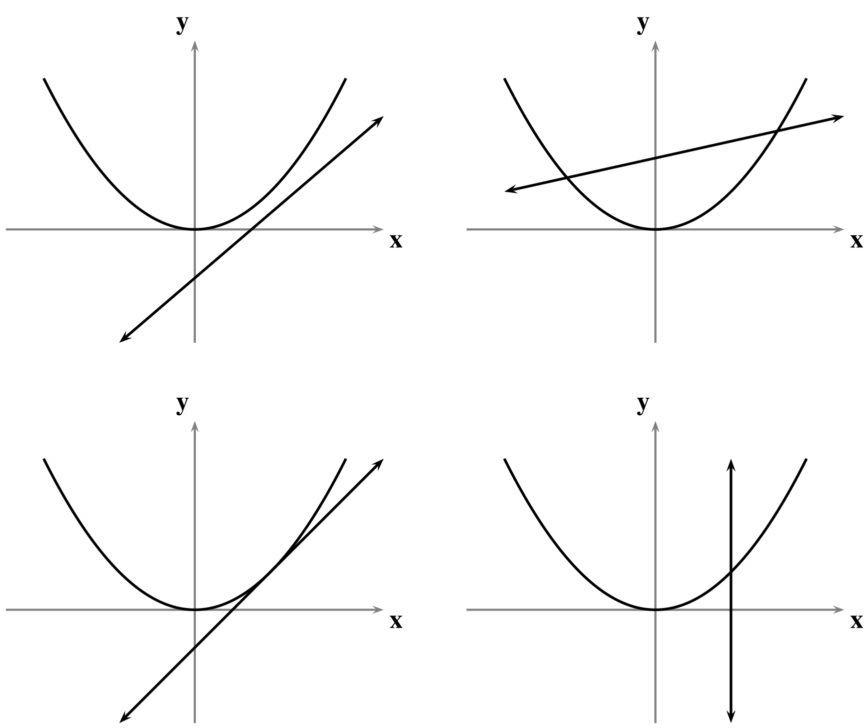


FIGURA 5.9 Incidencia entre una parábola y una recta

Si $\mathsf{B} \neq 0$, consideramos la forma corte-pendiente de la ecuación de l y el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2p}x^2 - y = 0 \\ y = mx + t \end{cases} \tag{5.24}$$

equivalente al sistema (5.23) (donde $m = -\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}$ y $t = -\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{B}}$).

Al sustituir el término del lado derecho de la segunda igualdad por "y" en la primera ecuación, resulta la ecuación de segundo grado en la variable x

$$\frac{1}{2p}x^2 - mx - t = 0 \tag{5.25}$$

que, dependiendo de su discriminante (ver el Apéndice C)

$$\Delta = m^2 + \frac{2t}{p} \tag{5.26}$$

(N) no tendrá solución si, y sólo si, $\Delta < 0$.

(S) tendrá dos soluciones distintas si, y sólo si, $\Delta > 0$.

(T) tendrá dos soluciones iguales si, y sólo si, $\Delta = 0$.

Si $\mathsf{B} = 0$ (de donde $\mathsf{A} \neq 0$), l es perpendicular al eje **x** y, en consecuencia, consideramos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2p}x^2 - y = 0 \\ x = h \end{cases} \tag{5.27}$$

equivalente al sistema (5.23) (donde $h = -\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{A}}$).

Al sustituir el término del lado derecho de la segunda igualdad por "x" en la primera ecuación, resulta la ecuación

$$y = \frac{h^2}{2p} \tag{5.28}$$

que

(R) tendrá una única solución (el punto $(h, \frac{h^2}{2p})$).

Una vez que se tengan las soluciones de la ecuación de segundo grado (5.25), en caso de que existan, apenas se han encontrado las abscisas de los puntos de corte entre $\mathcal{P}$ y l. Para encontrar sus ordenadas, y tener realmente las soluciones del sistema (5.23), sustituimos cada una de las soluciones obtenidas en la segunda ecuación del mismo sistema.

Observación 5.6

Note que el discriminante (5.26) *permitiría calcular con precisión, de la familia de rectas* $y = mx + t$ *no perpendiculares al eje* **x** *(parametrizada con los parámetros m y t), cuáles de ellas son tangentes, secantes o disjuntas respecto a la parábola* $\frac{1}{2p}x^2 - y = 0$, *si tenemos como dato m o t.*

Note que todas las rectas perpendiculares al eje **x** *son transversales a la parábola* $\frac{1}{2p}x^2 - y = 0$.

➤ Ejemplo 5.6

Para estudiar la incidencia entre la parábola y la recta de ecuaciones

$$10x^2 - 40x - y + 43 = 0 \quad y \quad x + y - 4 = 0,$$

respectivamente, procedemos de manera análoga a como realizamos el estudio previo.

Como la ecuación explícita de la recta es $y = -x + 4$, *resolvemos el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} 10x^2 - 40x - y + 43 = 0 \\ y = -x + 4 \end{cases}.$$

Al sustituir el lado derecho de la segunda ecuación por "y" en la primera, se obtiene la ecuación de segundo grado en la variable x

$$10x^2 - 39x + 39 = 0.$$

Como el discriminante de esta ecuación es negativo, tenemos que la recta no corta a la parábola.

QEE ➤

➤ Ejemplo 5.7

Para estudiar la incidencia entre la parábola y la recta de ecuaciones

$$4y^2 - 3x - 35y + 78 = 0 \quad y \quad x - 3y + 14 = 0,$$

respectivamente, procedemos de manera análoga a como realizamos el estudio previo.

Como la ecuación explícita de la recta es $y = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$, *resolvemos el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} 4y^2 - 3x - 35y + 78 = 0 \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3} \end{cases}.$$

Al sustituir el lado derecho de la segunda ecuación por "y" en la primera, se obtiene la ecuación de segundo grado en la variable x

$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Como el discriminante de esta ecuación es positivo, tenemos que la recta es secante a la parábola; después de sacar las cuentas, los puntos $(1, 5)$ *y* $(4, 6)$ *son los puntos de corte entre ambas.* QEE ➤

➤ Ejemplo 5.8

Para estudiar la incidencia entre la parábola y la recta de ecuaciones

$$4y^2 - 3x - 35y + 78 = 0 \quad y \quad 3x + 11y - 42 = 0,$$

respectivamente, procedemos de manera análoga a como realizamos el estudio previo.

Como la ecuación explícita de la recta es $y = -\frac{3}{11}x + \frac{42}{11}$, *resolvemos el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} 4y^2 - 3x - 35y + 78 = 0 \\ y = -\frac{3}{11}x + \frac{42}{11} \end{cases}.$$

Al sustituir el lado derecho de la segunda ecuación por "y" en la primera, se obtiene la ecuación de segundo grado en la variable x

$$x^2 - 6x + 9 = 0.$$

Como el discriminante de esta ecuación es 0*, tenemos que la recta es tangente a la parábola; después de sacar las cuentas, el punto* $(3, 3)$ *es el punto de corte entre ambas.* **QEE ◄**

➤ EJEMPLO 5.9
Para estudiar la incidencia entre la parábola y la recta de ecuaciones

$$x^2 - 8x - 6y = 0 \quad y \quad x - 10 = 0,$$

respectivamente, procedemos de manera análoga a como realizamos el estudio previo.

Resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 - 8x - 6y = 0 \\ x = 10 \end{cases}.$$

Al sustituir el lado derecho de la segunda ecuación por "x" en la primera, se obtiene

$$y = \frac{10}{3}.$$

Así, la recta es transversal a la parábola en el punto $(10, \frac{10}{3})$. **QEE ◄**

Recta tangente y recta normal a una parábola

Un problema parecido al que acabamos de resolver es el de encontrar, bajo ciertas condiciones, ***una recta tangente*** a una parábola.

Hasta ahora, en este estudio, así como en los cursos previos de Geometría elemental, sólo se han considerado rectas tangentes a un tipo particular de figuras geométricas: los círculos. Además, dichos estudios han partido de la siguiente definición: una recta es tangente a un círculo, si lo corta en un único punto⟨3⟩.

Pero esta definición es del todo inadecuada, cuando la figura geométrica no es un círculo, *v. g.*, una parábola: hay rectas que cortan a una parábola en un único punto y no son tangentes a la parábola (las que hemos llamado *transversales*). Incluso se puede dar ejemplos de figuras geométricas para las que la recta tangente en un punto corta a la figura geométrica en más de un punto, *v. g.*, una recta: la recta tangente a una recta en uno de sus puntos es ella misma (de manera que la recta tangente corta la figura geométrica en todos sus puntos).

La descripción precisa de la noción de recta tangente a una figura geométrica en un punto⟨4⟩, y sus propiedades, escapa a los alcances de este curso: es, a la sazón, la piedra angular del estudio del *Cálculo diferencial*, y está esencialmente ligada a la noción de ***límite***.

Sin embargo, todavía podemos hacer uso de la noción intuitiva de recta tangente, sin el rigor del concepto de límite, para el caso de las parábolas, tal como hicimos más arriba, y caracterizarlas analíticamente, por el hecho de que las parábolas se pueden representar por ecuaciones cuadráticas en dos variables.

Consideremos una parábola $\mathcal{P}$ de ecuación

(5.29)
$$\frac{1}{2p}x^2 - y = 0$$
$$(p > 0).$$

Por la naturaleza intrínseca del tratamiento analítico de las rectas, en el análisis que desarrollaremos siempre se considerará aparte el caso de las rectas perpendiculares al eje **x**, pues éstas no se pueden tratar en términos de sus pendientes.

Ahora bien, la condición de que una recta l sea tangente a la parábola $\mathcal{P}$, sin más, no determina ninguna recta pues, como veremos más abajo, hay una por cada punto de $\mathcal{P}$; de manera que debemos contar con algún otro dato que determine a l. A continuación enumeramos algunas de las posibilidades sobre los datos que se pueden ofrecer.

(I) Un punto $P = (u, v)$ sobre l.

(1) l perpendicular al eje **x**.
Nos preguntamos si existe alguna recta l, tangente a $\mathcal{P}$, que sea perpendicular al eje **x** y que pase por P. Pero, por lo expresado en la observación 5.6, no existe ninguna.

(2) l no perpendicular al eje **x**.
Nos preguntamos si existe alguna recta l, tangente a $\mathcal{P}$, que no sea perpendicular al eje **x** y que pase por P.
Ahora, al pasar l por P y no ser perpendicular al eje **x**, tendremos que l se puede representar por una ecuación de la forma

$$y - v = m(x - u).$$

El problema se transforma entonces en saber si existe m tal que l sea tangente a $\mathcal{P}$.
Para resolver este problema, despejamos y en la ecuación anterior,

$$y = mx - mu + v,$$

y sustituimos el lado derecho por y en la ecuación (5.29), obteniendo la siguiente ecuación de segundo grado en la variable x

$$\frac{1}{2p}x^2 - mx + (mu - v) = 0.$$

Ahora, para que l sea tangente a $\mathcal{P}$, esta ecuación debe tener dos soluciones iguales; y sabemos que esto sucede si, y sólo si, su discriminante se anula, es decir,

(5.30)
$$m^2 - \frac{2u}{p}m + \frac{2v}{p} = 0.$$

Así las cosas, el problema planteado tendrá solución si, y sólo si, la ecuación (5.30) tiene solución en la variable m.

Como ya sabemos, la naturaleza de las soluciones de esta ecuación depende de su discriminante

$$\frac{8}{p}\left(\frac{1}{2p}u^2 - v\right), \tag{5.31}$$

la cual dependerá, a su vez, de la posición relativa del punto P respecto a $\mathcal{P}$.

(a) *El punto P está en la parábola*: en este caso, dicho discriminante es nulo (puesto que $\frac{1}{2p}u^2 - v = 0$) y tenemos garantía de que siempre existirá una solución única para la pendiente requerida; la pendiente resulta

$$m = \frac{u}{p}$$

y, en consecuencia, la ecuación de la tangente a la parábola $\mathcal{P}$ en el punto P es

$$ux - p(y + v) = 0.$$

(b) *El punto P está en el exterior de la parábola*: en este caso, dicho discriminante es positivo (puesto que, por el Teorema 18, $\frac{1}{2p}u^2 - v > 0$) y tenemos garantía de que siempre existirán dos soluciones distintas para la pendiente requerida:

$$m = \frac{u}{p} \pm \sqrt{\frac{2}{p}}\sqrt{\frac{1}{2p}u^2 - v}.$$

(c) *El punto P está en el interior de la parábola*: en este caso, dicho discriminante es negativo (puesto que, por el Teorema 18, $\frac{1}{2p}u^2 - v < 0$) y, en consecuencia, no habrá ninguna recta tangente a la parábola $\mathcal{P}$ que pase por el punto P.

En conclusión:

> Existirá una recta l tangente a $\mathcal{P}$, no perpendicular al eje $\mathbf{x}$, y que pase por $P = (u, v)$ si, y sólo si, P no está en el interior de $\mathcal{P}$.
> Si P está sobre $\mathcal{P}$, entonces hay una única recta tangente a $\mathcal{P}$, no perpendicular al eje $\mathbf{x}$, que pasa por P y su ecuación es
>
> $$ux - p(y + v) = 0.$$
>
> Si P está en el exterior de C, entonces hay dos rectas tangentes a $\mathcal{P}$, no perpendiculares al eje $\mathbf{x}$, que pasan por P y sus pendientes son
>
> $$m = \frac{u}{p} \pm \sqrt{\frac{2}{p}}\sqrt{\frac{1}{2p}u^2 - v}.$$

(II) La dirección de l.

(1) *l perpendicular al eje* $\mathbf{x}$.
Nos preguntamos si existe alguna recta l, tangente a $\mathcal{P}$, que sea perpendicular al eje $\mathbf{x}$. Pero, por lo expresado en la observación 5.6, no existe ninguna.

(2) *l no perpendicular al eje* **x**.
Nos preguntamos si existe alguna recta l, tangente a $\mathcal{P}$, que no sea perpendicular al eje **x**.
Este problema es equivalente al de saber si existe alguna recta l, tangente a $\mathcal{P}$, que tenga como pendiente algún número real m previamente fijado.
La familia de todas las rectas de pendiente m se puede representar, parametrizada por t (la ordenada en el origen), mediante la ecuación $y = mx + t$; la recta que estamos buscando es un miembro de esta familia.
Así las cosas, el problema original se transforma en saber si existe algún número real t tal que la recta representada por la ecuación $y = mx + t$ sea tangente a $\mathcal{P}$.
Procediendo de la misma forma en que resolvimos el sistema (5.24), la recta $y = mx + t$ es tangente a $\mathcal{P}$ si, y sólo si, el discriminante (5.26) se anula, es decir, si, y sólo si,

$$m^2 + \frac{2t}{p} = 0.$$

El problema se transforma entonces en saber si existe t que satisfaga la ecuación anterior; y, después de sacar las cuentas, tenemos que siempre hay un valor:

$$t = -\frac{p}{2}m^2.$$

Así, existe exactamente una recta tangente a $\mathcal{P}$ de pendiente m y ésta se puede representar por la ecuación

$$y = mx - \frac{p}{2}m^2.$$

En conclusión:

> Siempre existe una recta tangente a $\mathcal{P}$, que tenga como pendiente algún número real m previamente fijado, y ésta se puede representar por la ecuación
>
> $$y = mx - \frac{p}{2}m^2.$$

Fijado un punto P en una parábola $\mathcal{P}$, íntimamente ligado al concepto de recta tangente a una parábola por el punto P tenemos lo que se llama ***la recta normal*** a una parábola en el punto P: esta recta se define como *la perpendicular por P a la recta tangente a la parábola $\mathcal{P}$ en el punto P.*

➤ Ejemplo 5.10
Consideremos la parábola $\mathcal{P} : 4x^2 + 4x - 8y - 3 = 0$.

Estudiemos la existencia de rectas tangentes a la parábola $\mathcal{P}$ por los puntos que listamos a continuación (ver la figura 5.10) y, en caso de que existan, calculemos sus ecuaciones generales:

$$P = (1, \tfrac{5}{8}),\ Q = (0, -1)\ y\ R = (1, 2).$$

(a) *El punto P está en $\mathcal{P}$, pues $4 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 8 \cdot \frac{5}{8} - 3 = 0$.*
Así habrá una única recta tangente a $\mathcal{P}$ en el punto P. Para hallar su ecuación procedemos de manera análoga a como realizamos el estudio previo.

Consideramos la ecuación de una recta l genérica que pasa por P, no perpendicular al eje **x**, *digamos* $y - \frac{5}{8} = m(x-1)$ *o, equivalentemente,*

$$y = mx - m + \frac{5}{8}.$$

Sustituimos el lado derecho de esta ecuación por "y" en la ecuación de la parábola y obtenemos la ecuación de segundo grado

$$x^2 + (1-2m)x + 2m - 2 = 0.$$

Para que l sea tangente a $\mathcal{P}$ *en el punto P, esta ecuación debe tener dos soluciones iguales o, lo que es lo mismo, su discriminante debe anularse, es decir,*

$$4m^2 - 12m + 9 = 0.$$

Como el discriminante de esta última ecuación cuadrática en la variable m es nulo, sólo habrá un valor de m para el que la recta l es tangente a $\mathcal{P}$ *por P, a saber,* $m = \frac{3}{2}$.
Así, la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{P}$ *en el punto P es* $12x - 8y - 7 = 0$.

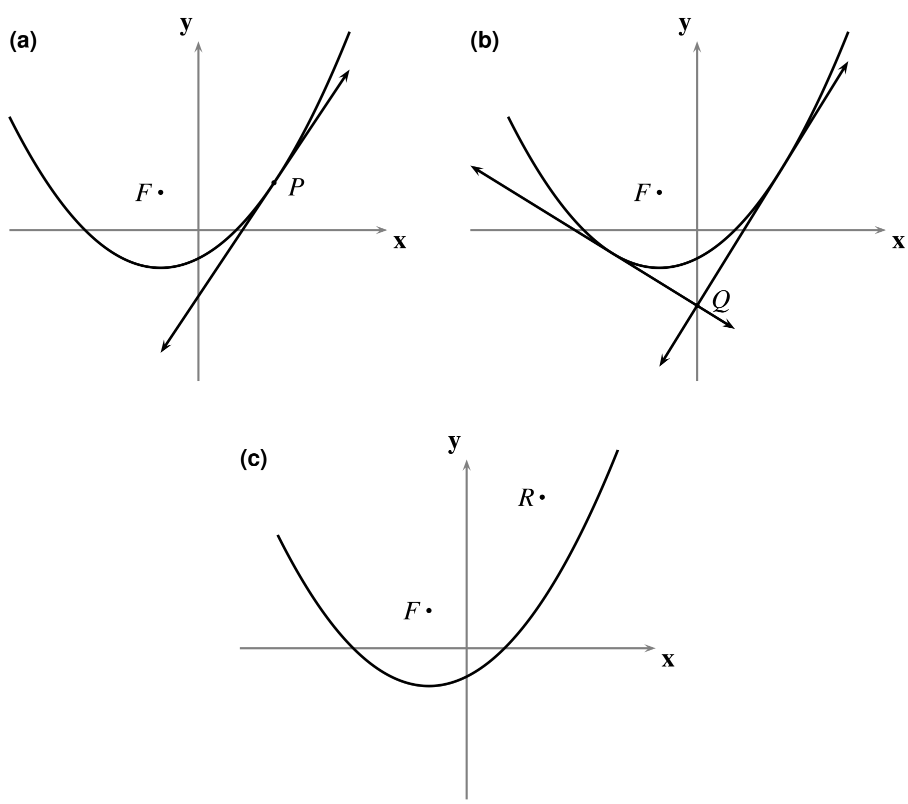


FIGURA 5.10 Representaciones gráficas correspondientes al ejemplo 5.10

(b) *El punto Q está en el exterior de* $\mathcal{P}$, *pues* $4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 - 8 \cdot (-1) - 3 = 5 > 0$.
Así habrá dos rectas tangentes a $\mathcal{P}$ *por el punto Q. Para hallar sus ecuaciones procedemos de manera análoga a como realizamos el estudio previo.*

Consideramos la ecuación de una recta l genérica que pasa por Q, no perpendicular al eje **x**, *digamos $y + 1 = mx$ o, equivalentemente,*

$$y = mx - 1.$$

Sustituimos el lado derecho de esta ecuación por "y" en la ecuación de la parábola y obtenemos la ecuación de segundo grado

$$4x^2 + (4 - 8m)x + 5 = 0.$$

Para que l sea tangente a $\mathcal{P}$ por el punto Q, esta ecuación debe tener dos soluciones iguales o, lo que es lo mismo, su discriminante debe anularse, es decir,

$$m^2 - m - 1 = 0.$$

Como el discriminante de esta última ecuación cuadrática en la variable m es positivo, habrá dos valores distintos de m para los que la recta l es tangente a $\mathcal{P}$ por Q, a saber: $m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $m = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Así, las ecuaciones de las rectas tangentes a $\mathcal{P}$ por el punto Q son

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}x - y - 1 = 0 \quad y \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}x - y - 1 = 0.$$

(c) *El punto R está en el interior de $\mathcal{P}$, pues $4 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 8 \cdot 2 - 3 = -11 < 0$. Así no habrá ninguna recta tangente a $\mathcal{P}$ por el punto R.*

QEE ◄

➤ EJEMPLO 5.11

Consideremos la misma parábola $\mathcal{P} : 4x^2 + 4x - 8y - 3 = 0$.

Estudiemos la existencia de rectas tangentes a la parábola $\mathcal{P}$ que tengan como pendiente el número real 2 (ver la figura 5.11).

Sabemos que existe una única recta tangente a la parábola $\mathcal{P}$ de pendiente 2; para hallar su ecuación procedemos de manera análoga a como realizamos el estudio previo.

Consideramos la ecuación de una recta l genérica de pendiente 2, digamos $y = 2x + t$.

Sustituimos el lado derecho de esta ecuación por "y" en la ecuación de la parábola y obtenemos la ecuación de segundo grado

$$4x^2 - 12x - 8t - 3 = 0.$$

Para que l sea tangente a $\mathcal{P}$, esta ecuación debe tener dos soluciones iguales o, lo que es lo mismo, su discriminante debe anularse, es decir,

$$2t + 3 = 0.$$

Así habrá un solo valor de t para el que la recta l es tangente a $\mathcal{P}$, a saber, $t = -\frac{3}{2}$; y, en consecuencia, la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{P}$ de pendiente 2 es

$$4x - 2y - 3 = 0.$$

QEE ◄

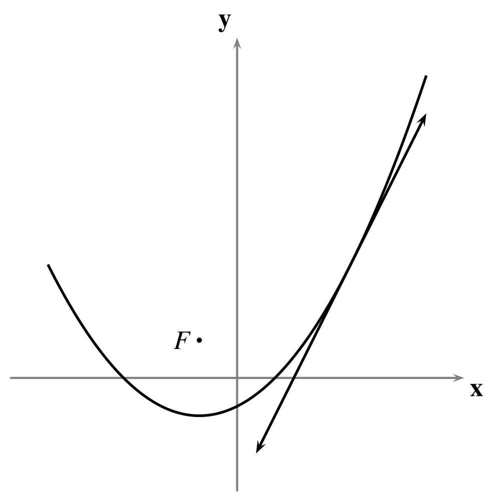


FIGURA 5.11 Representación gráfica correspondiente al ejemplo 5.11

§ 5.4 Aplicaciones de la parábola

En esta sección presentaremos algunas propiedades esenciales de las parábolas que han permitido usarlas en múltiples aplicaciones en la Física y, en consecuencia, en la tecnología.

Una de las aplicaciones más relevantes de las parábolas depende de la siguiente propiedad.

Consideremos una parábola $\mathcal{P}$ de foco F, y un punto P de $\mathcal{P}$, distinto de su vértice.

Consideremos la recta l tangente a $\mathcal{P}$ por P; sabemos, por lo hecho en el parágrafo anterior, que l no es paralela al eje focal de $\mathcal{P}$; llamemos T al punto donde l corta al eje focal de $\mathcal{P}$.

Consideremos la recta l' normal a $\mathcal{P}$ por P; sabemos, por lo hecho en el parágrafo anterior y por el hecho de que P no es el vértice, que l' no es paralela al eje focal de $\mathcal{P}$; llamemos N al punto donde l' corta al eje focal de $\mathcal{P}$.

TEOREMA 19 (PROPIEDAD FOCAL DE LAS PARÁBOLAS)
El foco F de la parábola $\mathcal{P}$ equidista de los puntos P, T y N.

■ **PRUEBA**
Consideremos la parábola $\mathcal{P}:\ \frac{1}{2p}x^2 - y = 0$, cuyo foco es $F = (0, \frac{p}{2})$.
Consideremos un punto $P = (u, v)$ sobre la parábola $\mathcal{P}$ distinto de su vértice, es decir, tal que

$$u \neq 0, \quad v \neq 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2p}u^2 - v = 0.$$

Por lo hecho en el parágrafo anterior, la recta l tangente a la parábola $\mathcal{P}$ por el punto P se puede representar por la ecuación

$$ux - p(y + v) = 0;$$

de donde el punto T en el que l corta al eje focal de $\mathcal{P}$ es $T = (0, -v)$.

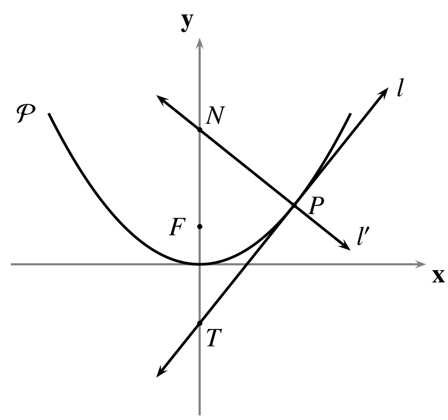


FIGURA 5.12 Propiedad focal de las parábolas

Además, la recta l' normal a la parábola $\mathcal{P}$ por el punto P se puede representar por la ecuación

$$px + uy - u(p + v) = 0;$$

de donde, el punto N donde l' corta al eje focal de $\mathcal{P}$ es $N = (0, v + p)$.
Como $FP = v + \frac{p}{2} = FT = FN$, tendremos que F equidista de los puntos P, T y N.

QEP ■

Note que este resultado facilita el trazado de la tangente y la normal a una parábola por uno de sus puntos, digamos P: tomamos los dos puntos de corte de un círculo con centro en el foco y radio la distancia desde el foco hasta el punto; llamamos T al que está en el exterior de la parábola, y N al que está en el interior; la recta $\overleftrightarrow{PT}$ es la tangente a la parábola en P, y la recta $\overleftrightarrow{PN}$ es la normal a la parábola en P.

La propiedad focal de las parábolas trae como consecuencia la distribución de los ángulos identificados en la figura 5.13, donde G es un punto del interior de la parábola tal que $\overrightarrow{PG}$ es paralelo al eje focal.

Por otro lado, un principio de la Física dice que: *el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión de un rayo (lumínico o sonoro) que choca contra una superficie reflectora son congruentes*.

De manera que los paraboloides son ideales para construir fanales buscadores, faros de automóviles, telescopios, micrófonos, radares, radiotelescopios.

Además, la trayectoria de un proyectil (al despreciar la resistencia del aire), el agua en las fuentes, los cables que suspenden puentes uniformemente cargados, muchos arcos arquitectónicos y la trayectoria de algunos cometas tienen forma parabólica.

Lo grande de la distancia del Sol a la Tierra permite considerar que los rayos lumínicos del Sol inciden, en la superficie de la Tierra, paralelamente. Si una superficie reflectora de corte longitudinal parabólico se orienta de tal manera que su eje es paralelo a los rayos del Sol, entonces todos los rayos

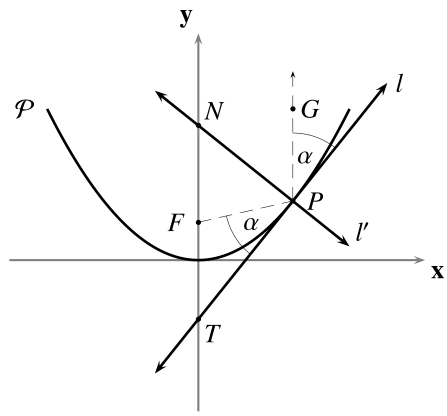


FIGURA 5.13 Reflexión en la parábola

reflejados se concentran en el foco común de esas parábolas. Esta propiedad permitiría hacer fácilmente fuego con un lente parabólico; lo cual nos da cuenta del uso de la palabra **foco**, cuyo origen es el sustantivo latino ***focus***, cuyo significado primero es **fuego**, y del cual deriva también la palabra **hogar**.

Problemas

En cada uno de los problemas en los que sea pertinente, realice una representación gráfica.

5.1 Dados una recta d y un punto F fuera de ella, muestre un procedimiento para graficar puntos de la parábola de foco F y directriz d, por medio de:

(a) un canto recto (una regla sin marcas de medida), un ángulo recto (una escuadra sin marcas de medida), un cordón y dos tachuelas.

(b) un canto recto y un compás.

5.2 Verifique que ninguna parábola tiene tres puntos distintos colineales.

5.3 Verifique que todo círculo cuyo centro está en una parábola, y pasa por su foco, es tangente a su directriz.

5.4 Encuentre la ecuación general de la parábola que satisface las siguientes condiciones:

(a) vértice el origen y foco el punto $(0,5)$.

(b) vértice el origen y directriz la recta $y-3=0$.

(c) vértice el origen y directriz la recta $2x+5=0$.

(d) vértice el punto $(1,3)$ y foco el punto $(1,5)$.

(e) foco el punto $(-1,-2)$ y directriz la recta $y-7=0$.

(f) vértice el origen, contiene al punto $(2,4)$ y eje focal coincidente con el eje $\mathbf{x}$.

(g) vértice el punto $(1,-2)$, contiene al punto $(2,3)$ y eje focal coincidente con la recta $y+2=0$.

5.5 Encuentre la ecuación general de la parábola que satisface las siguientes condiciones:

(a) eje focal perpendicular al eje $\mathbf{x}$ y contiene los puntos

(1) $(0,0), (-6,6), (6,6)$. **(2)** $(0,0), (-6,6), (1,2)$. **(3)** $(-1,3), (1,1), (4,-2)$.

(b) eje focal perpendicular al eje $\mathbf{y}$ y contiene los puntos

(1) $(0,0), (-6,-6), (-6,6)$. **(2)** $(0,0), (1,1), (2,7)$. **(3)** $(5,0), (-1,1), (2,3)$.

5.6 Encuentre la ecuación de la parábola que tiene un arco cuya luz es 12m y cuya altura es 6m.⟨5⟩

5.7 Encuentre la ecuación de la parábola que tiene un arco formado por los cables que soportan un puente colgante cuando la luz es 150m y la altura es 20m.

5.8 Encuentre el eje focal, el vértice, el foco, la directriz y el parámetro de las parábolas siguientes.

(a) $x^2+4x-4y+8=0$. **(c)** $2y^2-4x-20y-5=0$. **(e)** $3x^2+6x+3y-12=0$.

(b) $x^2-4x+2y=0$. **(d)** $y^2-10x-8y-14=0$. **(f)** $y^2+x+3y-5=0$.

5.9 Encuentre la familia de parábolas de parámetro p, directriz sobre el eje **y**, y eje focal sobre el eje **x**, con la misma orientación de éste.

5.10 Encuentre la familia de parábolas de parámetro p, foco $F = (h, k)$, y eje focal perpendicular al eje **x** y con la misma orientación del eje **y**.

5.11 Describa los cambios en la representación gráfica de la parábola $y = \mathsf{A}x^2 + \mathsf{B}x + \mathsf{C}$, al cambiar el valor de:

(a) A. **(b)** B. **(c)** C.

5.12 Dada la parábola $x^2 + 2x - 4y + 1 = 0$, encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes por el punto

(a) $(-1, -1)$. **(b)** $(0, 0)$. **(c)** $(2, 2)$.

5.13 Dada la parábola $y^2 - x + 2y - 1 = 0$, encuentre la ecuación de la recta tangente que es perpendicular a la recta $x + y + 1 = 0$.

5.14 Adecuando las definiciones dadas en el ejercicio 3.17, encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal, y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, para cada parábola y punto de contacto dados.

(a) $x^2 + y - 5 = 0$; $(2, 1)$.

(b) $x^2 - 3x - y + 20 = 0$; $(3, 20)$.

(c) $y^2 + x - 2y + 7 = 0$; $(-15, -2)$.

(d) $y^2 - 2x - 6y + 3 = 0$; $(-1, 1)$.

5.15 Dada la parábola $x^2 - 4x + 5y + 29 = 0$, encuentre los valores de t para los que la recta $y = 2x + t$

(a) no corta a la parábola.

(b) es secante a la parábola.

(c) es tangente a la parábola.

(d) es transversal a la parábola.

5.16 Dada la parábola $y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$, encuentre los valores de m para los que la recta $y = mx + 3$

(a) no corta a la parábola.

(b) es secante a la parábola.

(c) es tangente a la parábola.

(d) es transversal a la parábola.

5.17 Dada la parábola $x^2 - 4x + 5y + 29 = 0$, encuentre los valores de h para los que la recta $x = h$

(a) no corta a la parábola.

(b) es secante a la parábola.

(c) es tangente a la parábola.

(d) es transversal a la parábola.

5.18 Calcule los ángulos entre la recta $x + y - 6 = 0$ y la parábola $x^2 - y = 0$ en cada uno de sus puntos de intersección.⟨6⟩

5.19 Calcule los ángulos entre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ y la parábola $y^2 - x = 0$ en cada uno de sus puntos de intersección.

5.20 Verifique que las parábolas $x^2 - 4x + 8y - 20 = 0$ y $x^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ son ortogonales en sus puntos de intersección.

5.21 Verifique que la tangente a una parábola en uno de sus puntos distinto del vértice, digamos P:

(a) corta a la recta v perpendicular al eje focal por su vértice en el punto medio, B, del segmento de extremos en el vértice y en la proyección de P sobre esta recta.
(Este resultado facilita el trazado de la tangente a una parábola por uno de sus puntos).

(b) corta al eje focal en el punto T simétrico, respecto al vértice, de la proyección de P sobre el eje focal.
(Este resultado facilita el trazado de la tangente a una parábola por uno de sus puntos).

5.22 Con la nomenclatura del ejercicio anterior, verifique que B es el punto medio de $\overline{PT}$.

5.23 Dada una parábola, considere la recta r paralela a su directriz por su foco, la recta v perpendicular al eje focal por su vértice, su directriz d, y cualquier recta t tangente a la parábola en un punto distinto del vértice; considere además los puntos A, B y C de corte de t con r, v y d, respectivamente. Verifique que:

(a) B es el punto medio de $\overline{AC}$.

(b) A y C equidistan del foco.

(c) B es el pie de la perpendicular a t por el foco o, lo que es lo mismo, la mediatriz de $\overline{AC}$ pasa por el foco.

5.24 En una parábola, se llama:

- ***cuerda*** a cualquier segmento que une dos puntos distintos de la parábola.
- ***cuerda focal*** a cualquier cuerda que contiene al foco de la parábola.
- ***lado recto*** (del latín, *latus rectum*) a la cuerda focal perpendicular al eje focal de la parábola.
- ***radio focal*** a cualquier segmento cuyos extremos son el foco de la parábola y un punto de ella.
- ***diámetro*** al rayo que está sobre una transversal de la parábola, y cuyos puntos son el de intersección con la parábola y los que están en su interior.
- ***cuerda de contacto del punto*** P exterior a la parábola a la cuerda cuyos extremos son los puntos de contacto de las tangentes a la parábola desde P.

En cualquier parábola de parámetro p, verifique que la longitud del lado recto es $2p$.

5.25 Dada la parábola $y^2 - x + 2y - 1 = 0$, calcule los ángulos entre las rectas tangentes desde el punto $(1, 3)$, los puntos de contacto y la recta que contiene a la cuerda de contacto del punto P.

5.26 **(Propiedad intrínseca de la parábola)**
Considerando el sistema de ejes canónicos, verifique que el valor absoluto de la abscisa de un punto de una parábola es la media proporcional entre la longitud de su lado recto y la ordenada de dicho punto.
(Esta propiedad, llamada a veces, ***propiedad intrínseca*** de las parábolas, es la que posiblemente usó Menaijmos para resolver el problema de las medias proporcionales, equivalente al de la duplicación

del cubo; dicha propiedad caracteriza las parábolas y, por tanto, se puede tomar como su definición. Es fácil deducir la ecuación canónica de una parábola a partir de esta propiedad, fijando una recta y el número $2p$ como la longitud del lado recto).

5.27 Considerando el sistema de ejes canónicos, verifique que una cuerda de una parábola de parámetro p es una cuerda focal si, y sólo si, el producto de las abscisas de sus extremos es $-p^2$.

5.28 Considerando el sistema de ejes canónicos, verifique que la longitud de una cuerda focal de una parábola de parámetro p es $\frac{1}{2p}$ por el cuadrado de la diferencia de las abscisas de sus extremos.

5.29 Considerando el sistema de ejes canónicos, verifique que la pendiente de la recta que contiene una cuerda de una parábola de parámetro p es la suma de las abscisas de sus extremos entre $2p$.

5.30 Considerando el sistema de ejes canónicos, verifique que la longitud del radio focal del punto $P = (u, v)$ de una parábola de parámetro p es $|v + \frac{p}{2}|$.

5.31 Calcule la longitud del radio focal de los puntos de la parábola:

(a) $y - x^2 = 0$ que tienen ordenada 13.

(b) $y^2 + 2x + y - 1 = 0$ que tienen abscisa -4.

5.32 Dada la parábola $x^2 - 4x + y = 0$, calcule la longitud de:

(a) la cuerda que está sobre la recta $x + y - 4 = 0$.

(b) la cuerda focal que es paralela a la recta $3x + y - 7 = 0$.

5.33 Verifique que los puntos de cualquier cuerda de una parábola, excepto sus extremos, están en el interior de la parábola.

5.34 Dada una parábola y una recta que no le es transversal, verifique que la recta es secante a la parábola si, y sólo si, contiene un punto de su interior.

5.35 Verifique que los puntos medios de dos cuerdas paralelas de una parábola determinan una transversal a la parábola.

5.36 Fijada una cuerda de una parábola, considere la familia de todas las cuerdas paralelas a la cuerda dada. Verifique que el conjunto de los puntos medios de los miembros de esa familia es el diámetro de la parábola, excepto su origen, que está contenido en la transversal que pasa por el punto medio de la cuerda fijada.

5.37 Encuentre la ecuación de la recta que contiene el diámetro de la parábola $y^2 = 16x$ determinado por la familia de cuerdas paralelas de pendiente 2.

5.38 Dado el dibujo (el trazado) de una arco de parábola, dibuje su eje focal, su foco y su directriz.

5.39 Verifique que el triángulo determinado por los extremos del lado recto de una parábola, y el punto D (intersección del eje focal con la directriz), es rectángulo.

5.40 Verifique que las tangentes a una parábola en los extremos de una cuerda focal son perpendiculares.

5.41 Considerando el sistema de ejes canónico, verifique que la ecuación de la recta que contiene la cuerda de contacto de un punto exterior a la parábola, digamos $P = (u, v)$, es $ux = p(y + v)$.

5.42 Verifique que la cuerda de contacto de cualquier punto de la directriz de una parábola es cuerda focal.

5.43 Verifique que todo círculo, que tiene una cuerda focal de una parábola como diámetro, es tangente a su directriz.

5.44 Dados dos círculos, que tienen por diámetro sendas cuerdas focales distintas de una parábola, verifique que:

(a) dichos círculos son secantes.

(b) la cuerda común de los círculos pasa por el vértice de la parábola.

5.45 Represente gráficamente las figuras geométricas que satisfacen las condiciones dadas.

(a) $x + y - 2 > 0$ y $x^2 + 4x - 4y + 8 < 0$.

(b) $2y^2 - 2x - 20y + 40 \leq 0$ y $y^2 + 10x - 8y - 14 \geq 0$.

(c) $x^2 + y^2 - 4 \leq 0$ y $x^2 + 4x - 4y + 8 < 0$.

(d) $y^2 - x \leq 0$ y $x^2 - y < 0$.

5.46 Para cada uno de los siguientes casos, encuentre la relación que satisfacen las coordenadas cartesianas del punto $P = (x, y)$ sujeto a la condición correspondiente.

(a) su distancia a la recta $x - 6 = 0$ es 2 unidades mayor que su distancia al punto $(2, 2)$.

(b) es centro de un círculo tangente al círculo $C: \; x^2 + y^2 = 9$, y a la recta $l: \; y - 1 = 0$.

(c) equidista de un círculo y una recta exterior a éste.

5.47 **(Parametrización de una parábola)**
Si $\mathcal{P}$ es la parábola con vértice en el origen, parámetro p y eje focal sobre el eje **y**, verifique que el punto $P = (u, v)$ está en $\mathcal{P}$ si, y sólo si, existe un número real t tal que

$$u = t \qquad \text{y} \qquad v = \frac{1}{2p}t^2.$$

Comentarios

⟨1⟩ Sólo a manera de ilustración, y cometiendo el abuso de adelantarnos a lo estudiado en este capítulo y los tres siguientes, presentamos la figura 5.14 que muestra las diferencias cualitativas entre los arcos de las diferentes cónicas que comparten el mismo foco y la misma directriz, y que hemos llamado ***órbitas*** porque pudieran representar las trayectorias de cuerpos que interactúan con nuestro sistema solar.

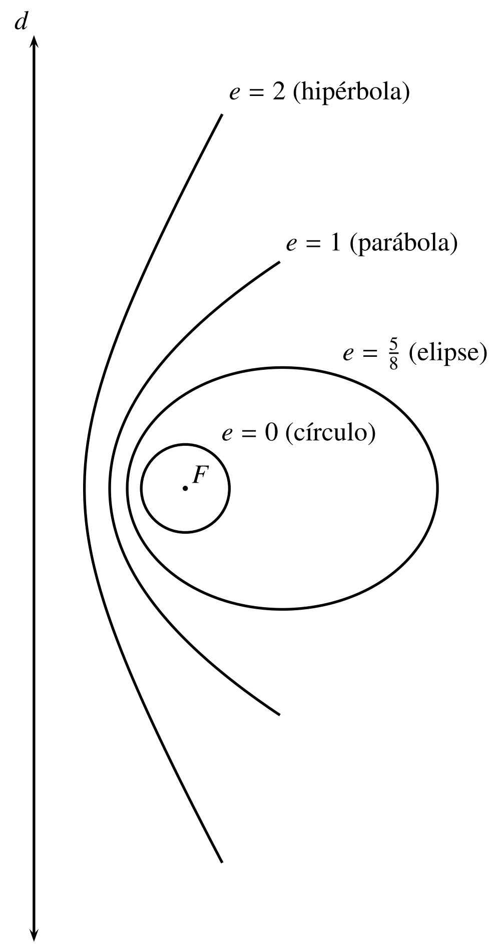


FIGURA 5.14 Órbitas

⟨2⟩ Para introducir esta categoría de posición relativa entre una recta y una parábola, y la categoría siguiente, se podría comentar que, para definir tangencia entre una recta y una parábola, no basta con decir que se cortan en un único punto (como en los círculos), pues hay dos tipos de rectas que cortan a una parábola en un único punto: las que definimos en este aparte, que son las tangentes, y las que se definirán en el siguiente, que son las transversales.

Algunos lectores podrían juzgar como antinatural presentar primero aquella de la que tenemos que establecer una condición en forma negativa ("no paralela a"); pero, presentándolo del otro modo, se rompería la naturalidad del estudio del signo del discriminante de la ecuación cuadrática resultante. Preferimos conservar este último orden de presentación.

⟨3⟩ De hecho ésta es la única noción de recta tangente que se encuentra en la obra *Elementos* de Euclides.

⟨4⟩ Introducida por el también griego Arquímedes (287-212 a.C.), como la recta que, en “las cercanías de” el punto en el que es tangente a la figura geométrica, “más se parece a” la figura geométrica; ésta se alcanza como posición límite, en caso de existir, de secantes a la figura geométrica, todas las cuales tienen en común el punto de tangencia.

⟨5⟩ Cuando se habla de ***la luz de un arco de parábola***, se supone que dicho arco tiene sus extremos sobre una recta perpendicular a su eje focal, y se quiere decir la distancia entre esos extremos.
Cuando se habla de ***la altura de un arco de parábola***, se supone que dicho arco tiene sus extremos sobre una recta perpendicular a su eje focal, y se quiere decir la distancia entre el vértice y la recta que contiene los extremos.

⟨6⟩ Esos ángulos se refieren a los que determinan la recta dada con la recta tangente a la parábola en esos puntos.

Orientación para resolver los problemas del Capítulo 5

A continuación ofrecemos ***ayudas*** para algunos de los problemas.

5.1: Para la parte **(a)**, haga coincidir el canto recto con la directriz; apoye un lado del ángulo recto contra el canto recto; tome el cordón del tamaño del lado del ángulo recto que no está apoyado en el canto recto; fije una tachuela en el extremo de este lado del ángulo recto y la otra en el foco; ate las puntas del cordón en las tachuelas; apoye un lápiz en dicho lado del ángulo recto manteniendo tenso el cordón; por último, deslice el ángulo recto adosado al canto recto, manteniendo el lápiz en la posición indicada anteriormente.
Para la parte **(b)**, trace el eje focal y el punto D donde corta a la directriz; tome puntos M_1, M_2, $\ldots$, M_k sobre el rayo $\overrightarrow{DF}$ y trace las rectas l_1, l_2, $\ldots$, l_k paralelas a la directriz por dichos puntos, respectivamente; con el compás centrado en el foco y abierto las longitudes $DM_1, DM_2, \ldots, DM_k$, trace los puntos P_1 y Q_1, P_2 y Q_2, $\ldots$, P_k y Q_k donde cada círculo corta a las rectas anteriores, respectivamente.

5.33: Use el Principio E13 para establecer que la abscisa de un punto de una cuerda, distinto de sus extremos, debe estar entre las abscisas de sus extremos; establezca la colinealidad igualando pendientes y use el ejercicio 5.29.

5.34: Considere la ecuación, en la forma punto-pendiente, de una recta que pasa por un punto interior de la parábola; verifique que el discriminante de la ecuación cuadrática que surge del sistema de ecuaciones entre la recta y la parábola es positivo.

5.38: Para el eje focal: considere tres puntos distintos en el arco y use el ejercicio 5.35 para hallar una transversal; trace una cuerda $\overline{PQ}$ perpendicular a esa transversal y ubique su punto medio. Para el foco: trace la recta v perpendicular al eje focal por el vértice; ubique el punto medio entre el vértice y la proyección de P sobre v; use los ejercicios 5.21.(a) y 5.23.(c) para hallar el foco.

5.39: Use el ejercicio 5.24.

5.40: Use el ejercicio 5.27.

5.41: Use el ejercicio 5.29.

5.42: Compruebe que el foco satisface la ecuación de la recta del ejercicio 5.41.

5.43: Use el ejercicio 5.27.

5.44: Use los ejercicios 5.27 y 5.28: iguale las ecuaciones de los círculos y verifique que la recta que resulta debe tener término independiente nulo.

5.46: Para la parte **(a)**, divida en dos casos: el círculo es tangente exteriormente a C, o interiormente; recuerde que el radio de los círculos cuyos centros son P debe ser igual a la distancia de P a la recta l.

Para la parte **(b)**, escoja un sistema de coordenadas adecuado para simplificar las cuentas.

CAPÍTULO

6

ELIPSES

Recordemos que una ***elipse*** es el conjunto de los puntos P del plano para los que

$$PF = e \cdot \mathbf{d}(P, d), \tag{6.1}$$

donde d es su ***directriz***, F es su ***foco*** y e, tal que $0 < e < 1$, es su ***excentricidad***; tal como establecimos en el capítulo anterior para las cónicas en general, denotemos por $\mathbf{f}$ su ***eje focal*** y por D al punto de corte entre $\mathbf{f}$ y d.

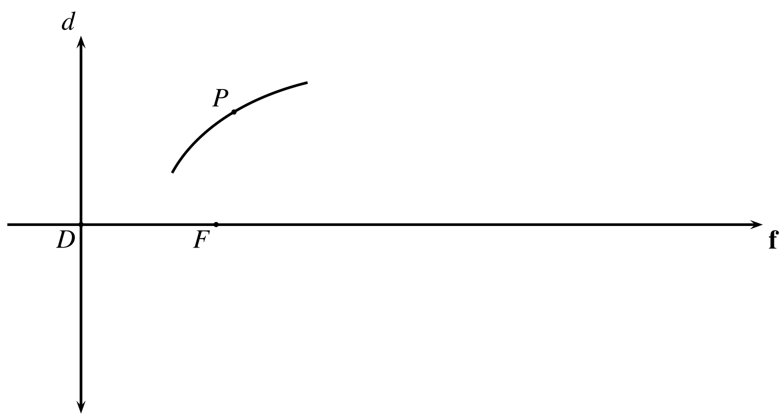


FIGURA 6.1 Eje focal de una elipse

§ 6.1 Ecuación general y ecuación canónica de una elipse

Antes de iniciar el estudio analítico de las elipses, verificaremos primero lo afirmado en las siguientes dos proposiciones.

LEMA 6.1
Las elipses tienen exactamente dos puntos de corte con su eje focal: uno que está entre F y D, que denotaremos por A; y otro separado de D por F, que denotaremos por A'.

■ **PRUEBA**
Consideremos una elipse $\mathcal{E}$, de directriz d, foco F y excentricidad e.
Supongamos que V es un punto que está en el eje focal de $\mathcal{E}$ y en $\mathcal{E}$; así, V, F y D son colineales.
Por el lema 5.1, V, F y D son distintos. Así, $VF > 0$, $VD > 0$ y $FD > 0$, y además, por las propiedades de la Interposición de puntos en una recta, se cumple una, y sólo una, de las siguientes afirmaciones:

(I) D está entre F y V. **(II)** V está entre F y D. **(III)** F está entre V y D.

Por ser el eje focal perpendicular a la directriz, y estar V sobre el eje focal, tendremos que

$$\mathbf{d}(V, d) = VD.$$

Así, por (6.1) y la definición de elipse tendremos que,

$$VF = e \cdot VD. \tag{6.2}$$

Si acaso se cumpliera (I), tendríamos que $FD = VF - VD = e \cdot VD - VD = (e-1)VD$; de donde, por el hecho de que $e < 1$, tenemos que $FD < 0$; contrario al hecho de que $FD > 0$.
Así hemos verificado que $\mathcal{E}$ no puede tener más de dos puntos de corte con su eje focal: uno entre F y D, y el otro separado de D por F.
Por otro lado, en virtud del resultado expuesto en el problema 1.21, llamemos A al único punto del eje focal que satisface

$$D\text{-}A\text{-}F \qquad \text{y} \qquad \frac{AF}{AD} = e,$$

y A' al único punto del eje focal que satisface

$$D\text{-}F\text{-}A' \qquad \text{y} \qquad \frac{A'F}{A'D} = e.$$

Así tendremos que

$$\frac{DF}{DA} = 1 + e \qquad \text{y} \qquad \frac{DF}{DA'} = 1 - e.$$

Como $AF = DF - AD = (1+e) \cdot AD - AD = e \cdot AD$, tendremos que A está en $\mathcal{E}$; de manera análoga se verifica que A' está en $\mathcal{E}$. Como A y A' son dos puntos distintos de $\mathcal{E}$ que están sobre el eje focal, tendremos que $\mathcal{E}$ corta su eje focal exactamente en los puntos A y A' definidos anteriormente.

QEP ■

Llamaremos ***vértices*** de una elipse, a los puntos A y A' en que corta a su eje focal.

Llamaremos ***centro*** de una elipse, al punto C que es el punto medio entre sus vértices A y A'.

Es claro, por la proposición anterior, que la elipse no contiene su centro (pues, en caso contrario, la elipse cortaría su eje focal en tres puntos distintos).

Llamaremos ***eje normal*** de una elipse, a la recta $\mathbf{n}$ perpendicular al eje focal y que pasa por el centro C, escogiendo una cualquiera de sus dos orientaciones (que, como consecuencia de su definición, es paralelo a la directriz).

LEMA 6.2

El foco F de la elipse está entre su vértice A y su centro C.

■ **PRUEBA**

Consideremos una elipse $\mathcal{E}$ de foco F, excentricidad e, vértices A y A', y centro C.
Sabemos que

$$D\text{-}A\text{-}F \qquad \text{y} \qquad D\text{-}F\text{-}A' \tag{6.3}$$

y que

$$DA = \frac{DF}{1+e} \qquad \text{y} \qquad DA' = \frac{DF}{1-e}. \tag{6.4}$$

Por (6.3) tendremos que

$$A\text{-}F\text{-}A'. \tag{6.5}$$

Por definición de punto medio, tendremos que

$$A\text{-}C\text{-}A'. \tag{6.6}$$

Como $DA + AF = DF$ y $DF + FA' = DA'$ tendremos, por (6.4), que $AF = \frac{e}{1+e}FD$ y $FA' = \frac{e}{1-e}DF$.
Como $AA' = AF + FA' = \frac{2e}{1-e^2}DF$, tendremos que $AC = \frac{1}{2}AA' = \frac{e}{1-e^2}FD > AF$, es decir, que $AC > AF$.
Así, por (6.5) y (6.6), tendremos que A-F-C.

QEP ■

OBSERVACIÓN 6.1

(a) *Note que el foco F, los vértices A y A′, y el centro C de una elipse están en el mismo semiplano, de los dos que determina su directriz d.*

(b) *Note que dada una elipse (es decir, su directriz d, su foco F y su excentricidad e), podemos obtener el eje focal* **f**, *los vértices A y A′, y el centro C*
(el eje focal **f** *es la recta perpendicular a d por F, orientada de D hacia F, donde D es el punto de corte entre d y* **f**; *los vértices A y A′ son los únicos puntos que satisfacen* (6.3) *y* (6.4), *respectivamente; el centro C es el punto medio del segmento de extremos A y A′).*

(c) *Todos los puntos de una elipse se encuentran en el mismo semiplano en que se encuentra su foco, de los dos semiplanos determinados por su directriz*
(llamemos H al semiplano determinado por d que contiene a F; y llamemos H′ al semiplano opuesto. Si P es un punto que está en H′, llamemos Q a la proyección de P sobre d, y llamemos R al punto de corte entre d y el segmento $\overline{PF}$. *Como* $PF > PR \geqslant PQ = \mathbf{d}(P,d)$, *tendremos que P no puede estar en* $\mathcal{E}$*).*

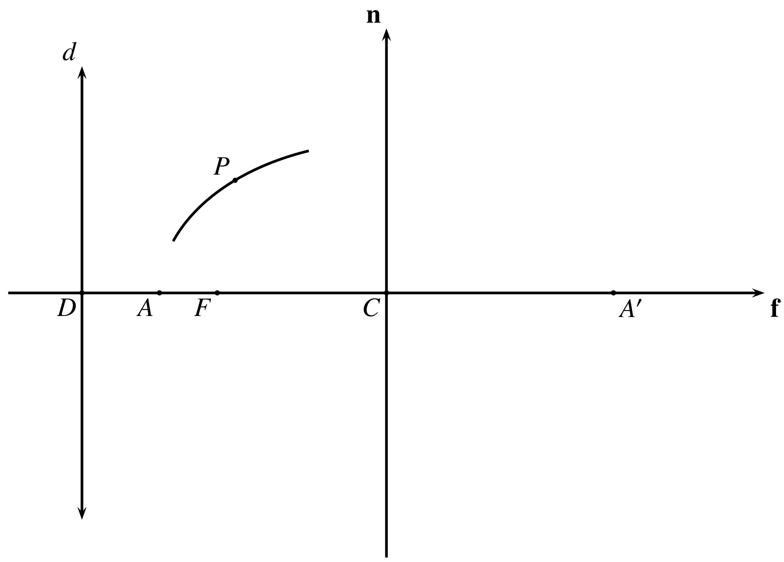


FIGURA 6.2 Vértices, centro y eje normal de una elipse

(d) *Por un argumento similar al anterior, todos los puntos de una elipse, excepto su vértice A, se encuentran en el mismo semiplano en que se encuentra su foco, de los dos semiplanos determinados por la perpendicular a su eje focal que pasa por su vértice A.*

Consideremos las relaciones g que asocian, a pares ordenados de números reales, un número real, cuyas reglas de asociación son polinomios de segundo grado en dos variables de la forma

$$g(x, y) := \mathsf{A}x^2 + \mathsf{C}y^2 + \mathsf{F}$$
$$(\mathsf{A}, \mathsf{C} \text{ y } \mathsf{F} \text{ números reales tales que } \mathsf{C} > \mathsf{A} > 0 \text{ y } \mathsf{F} < 0).$$

El objetivo central de esta parte del capítulo es verificar que, dada una figura geométrica $\mathcal{G}$ cualquiera, se tiene lo afirmado en el siguiente Teorema.

TEOREMA 20 (REPRESENTACIÓN ANALÍTICA DE UNA ELIPSE)
$\mathcal{G}$ es una elipse si, y sólo si, existe un sistema de ejes ortogonales **xOy** *tal que $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación cuadrática en dos variables de la forma*

$$\mathsf{A}x^2 + \mathsf{C}y^2 + \mathsf{F} = 0 \tag{6.7}$$
$$(\mathsf{A}, \mathsf{C} \textit{ y } \mathsf{F} \textit{ números reales tales que } \mathsf{C} > \mathsf{A} > 0 \textit{ y } \mathsf{F} < 0).$$

Verificado esto, la ecuación (6.7) será llamada ***la ecuación general***, o simplemente ***la ecuación***, de la elipse $\mathcal{G}$.

Supongamos que $\mathcal{G}$ es una elipse, y llamemos: d a su directriz, F a su foco y e, con $0 < e < 1$, a su excentricidad. Por la observación 6.1.(b), podemos suponer que tenemos como datos adicionales: sus vértices A y A', y su centro C.

Consideremos el sistema de ejes ortogonales $\mathbf{xOy}$ que tiene: como eje $\mathbf{x}$, el eje focal de la elipse, ubicando el 0 en el centro C; y como eje $\mathbf{y}$, el eje normal de la elipse, ubicando el 0 en el centro C (ver la figura 6.3).

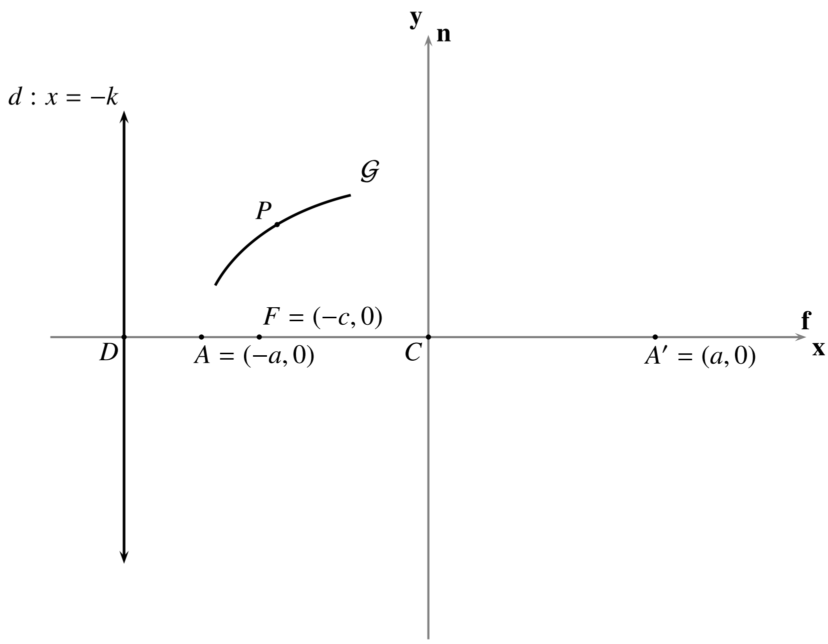


FIGURA 6.3 Ejes canónicos de la elipse

Consideremos los números reales positivos $a = CA$, $c = CF$ y $k = CD$; así, las coordenadas de C son $(0,0)$, las de F son $(-c,0)$, las de A son $(-a,0)$, las de A' son $(a,0)$, las de D son $(-k,0)$ y la ecuación de la directriz d es $x = -k$ (por ser perpendicular al eje $\mathbf{x}$).

Por los lemas 6.1 y 6.2, tenemos que $c < a < k$.

Por comodidad en el desarrollo algebraico subsiguiente, y apoyados en la parte (b) de la observación 6.1, calculamos c y k en términos de a y e, de la siguiente manera. Como A y A' están sobre la elipse tendremos, por definición, que $AF = e \cdot \mathbf{d}(A,d) = e \cdot AD$ y $A'F = e \cdot \mathbf{d}(A',d) = e \cdot A'D$. Como $|c-a| = |a-c| = a-c$, $|a-k| = |k-a| = k-a$, $|-a-c| = |c+a| = a+c$ y $|-a-k| = |k+a| = k+a$ tendremos, de

$$\begin{cases} a - c = e \cdot (k - a) \\ a + c = e \cdot (k + a) \end{cases},$$

que

$$k = \frac{a}{e} \quad \text{y} \quad c = ae; \tag{6.8}$$

de donde, sustituyendo correspondientemente, las coordenadas de F son $(-ae,0)$, y la ecuación de la directriz d es $x = -\frac{a}{e}$ (ver la figura 6.4).

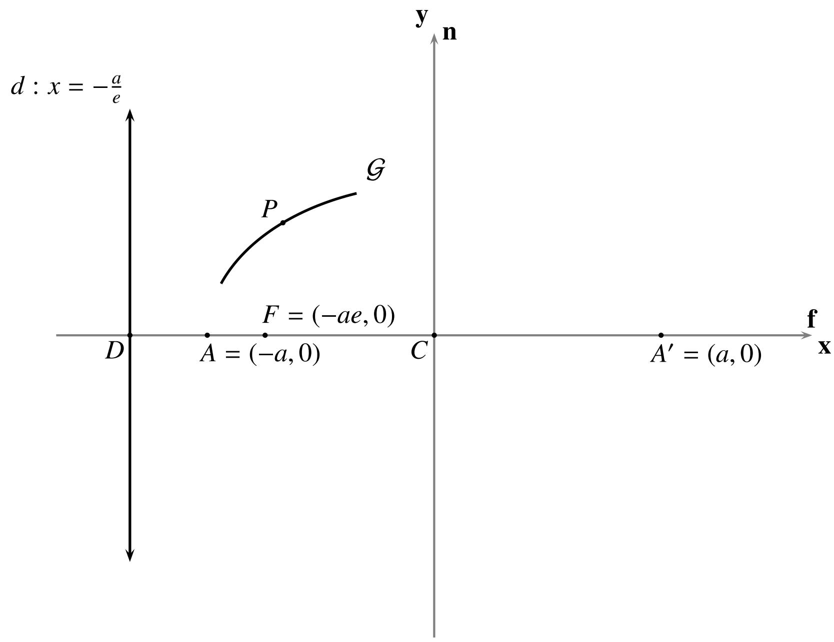


FIGURA 6.4 Datos parciales de la elipse

Consideremos un punto P cualquiera, y sus coordenadas (x, y) respecto al sistema de ejes ortogonales **xOy** que hemos configurado.

Por definición, P está en $\mathcal{G}$ si, y sólo si, $PF = e \cdot \mathbf{d}(P, d)$. Como

$$PF = \sqrt{(x + ae)^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \mathbf{d}(P, d) = |x + \frac{a}{e}|,$$

tendremos que P está en $\mathcal{G}$ si, y sólo si, las coordenadas de P satisfacen la ecuación

$$\sqrt{(x + ae)^2 + y^2} = e \cdot |x + \tfrac{a}{e}|.$$

Como ambos términos de la igualdad son positivos tendremos, después de elevar al cuadrado, que esta ecuación es equivalente a

$$x^2 + 2aex + a^2e^2 + y^2 = e^2(x^2 + 2\frac{a}{e}x + \frac{a^2}{e^2}),$$

que es la misma que

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2(1 - e^2). \tag{6.9}$$

Como $a^2(1 - e^2) > 0$ tendremos, tomando $x = 0$ en la ecuación (6.9), que la elipse corta en exactamente dos puntos a su eje normal: los puntos $B = (0, a\sqrt{1 - e^2})$ y $B' = (0, -a\sqrt{1 - e^2})$ (el primero con ordenada positiva, y el segundo con ordenada negativa).

Tomando $b = CB = CB' = a\sqrt{1 - e^2}$, la distancia del centro C a cualquiera de los dos puntos B y B', tendremos, por el hecho de que $b^2 = a^2(1 - e^2) = a^2 - (ae)^2 = a^2 - c^2$, que $a > b > 0$.

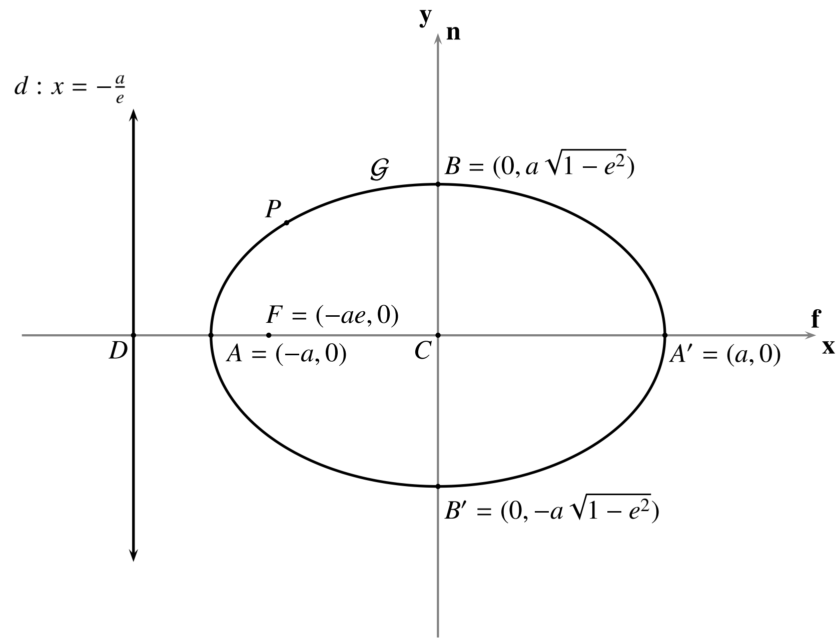


FIGURA 6.5 Datos adicionales de la elipse

Dividiendo ambos términos de la ecuación (6.9) por $a^2(1 - e^2)$ y realizando las simplificaciones de rigor, tendremos que P está en $\mathcal{G}$ si, y sólo si, las coordenadas de P satisfacen la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

llamada ***ecuación canónica*** de la elipse que tiene eje focal sobre el eje **x**, centro en el origen, distancia del centro, a cualquiera de sus vértices, a y distancia del centro, a cualquiera de los puntos B y B', b.

Es claro, al sumar las fracciones del lado izquierdo y multiplicar ambos términos por a^2b^2, que esta última ecuación es equivalente a la ecuación

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Así, al definir $\mathsf{A} = b^2$, $\mathsf{C} = a^2$ y $\mathsf{F} = -a^2b^2$, tendremos que el punto P está en $\mathcal{G}$ si, y sólo si, sus coordenadas cartesianas satisfacen la ecuación (6.7), para la que $\mathsf{C} > \mathsf{A} > 0$ y $\mathsf{F} < 0$.

Supongamos ahora que existe un sistema de ejes ortogonales **x**O**y**, tal que $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación como (6.7).

Tomando el número real $e = \sqrt{\frac{\mathsf{C}-\mathsf{A}}{\mathsf{C}}}$ (con lo que $0 < e < 1$), el punto $F = (-\sqrt{\frac{\mathsf{F}(\mathsf{A}-\mathsf{C})}{\mathsf{AC}}}, 0)$, y la recta d de ecuación $x = -\sqrt{\frac{\mathsf{FC}}{\mathsf{A}(\mathsf{A}-\mathsf{C})}}$ tendremos, para cualquier punto $P = (x, y)$ de $\mathcal{G}$, que

$$PF = \sqrt{\left(x + \sqrt{\frac{\mathsf{F}(\mathsf{A} - \mathsf{C})}{\mathsf{AC}}}\right)^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + 2\sqrt{\frac{\mathsf{F}(\mathsf{A}-\mathsf{C})}{\mathsf{AC}}}\,x + \frac{\mathsf{F}(\mathsf{A}-\mathsf{C})}{\mathsf{AC}} - \frac{\mathsf{F}}{\mathsf{C}} - \frac{\mathsf{A}}{\mathsf{C}}x^2} \qquad \text{(despejando } y^2 \text{ en la ecuación (6.7))}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\mathsf{C}-\mathsf{A}}{\mathsf{C}}\right)x^2 + 2\sqrt{\frac{\mathsf{F}(\mathsf{A}-\mathsf{C})}{\mathsf{AC}}}\,x + \left(\frac{-\mathsf{F}}{\mathsf{A}}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\mathsf{C}-\mathsf{A}}{\mathsf{C}}}\,x + \sqrt{\frac{-\mathsf{F}}{\mathsf{A}}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\mathsf{C}-\mathsf{A}}{\mathsf{C}}}\left|x + \sqrt{\frac{\mathsf{FC}}{\mathsf{A}(\mathsf{A}-\mathsf{C})}}\right|;$$

y $\mathbf{d}(P, d) = \left|x + \sqrt{\frac{\mathsf{FC}}{\mathsf{A}(\mathsf{A}-\mathsf{C})}}\right|$. Así, al tomar la recta d, el punto fuera de ella F (pues $\mathsf{A} \neq 0$) y el número e (que satisface $0 < e < 1$), tendremos que $\mathcal{G}$ es la elipse de directriz d, foco F y excentricidad e.

De este modo hemos concluido la verificación del Teorema 20.

Note que, en el caso de la elipse, $a > b$ y que los números reales positivos a, b y c satisfacen la relación pitagórica

(6.10) $$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

que permitiría calcular uno cualquiera de ellos a partir de los otros dos.

El número real $2a$ (la distancia entre los vértices A y A') es llamado ***el diámetro mayor***, al igual que el segmento $\overline{AA'}^{\langle 1\rangle}$; el número real a (la distancia del centro C a cualquiera de los vértices A y A') es llamado ***el radio mayor***, al igual que los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{CA'}$; los puntos B y B' serán llamados ***puntos auxiliares*** de la elipse (pues la utilidad de estos puntos se hace patente en el momento de graficar la elipse); el número real $2b$ (la distancia entre los puntos auxiliares B y B') es llamado ***el diámetro menor***, al igual que el segmento $\overline{BB'}^{\langle 2\rangle}$; el número real b (la distancia del centro C a cualquiera de los puntos B y B') es llamado ***el radio menor***, al igual que los segmentos $\overline{CB}$ y $\overline{CB'}$; y el sistema de ejes rectangulares que hemos configurado es llamado ***el sistema de ejes canónico*** de la elipse $\mathcal{G}$.

Note además que, si se calculan los valores de los radios mayor y menor a y b, respectivamente, a partir de la ecuación (6.7) de una elipse tendremos, por lo probado en la segunda implicación del Teorema 20, que $a = \sqrt{\mathsf{C}}$ y $b = \sqrt{\mathsf{A}}$ (tal como resultó en la prueba de la primera implicación de ese Teorema). Como a y b son datos intrínsecos de la geometría de la elipse, y A y C no lo son, convendremos que:

Cada vez que se tenga la necesidad de hacer cálculos que involucren los datos geométricos básicos de una elipse, consideraremos como ecuación general de la misma la ecuación

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

ya que, a través de esta ecuación, expresamos además que el sistema de coordenadas que se está utilizando es el sistema de ejes canónico de la elipse.

➤ **EJEMPLO 6.1**

Para encontrar la ecuación general de la elipse de radio mayor 5*, radio menor* 3*, eje focal sobre el eje* **x***, y centro en el origen, planteamos la ecuación*

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

obteniendo que la ecuación requerida es

$$9x^2 + 25y^2 - 225 = 0.$$

QEE ◄

OBSERVACIÓN 6.2

(a) *La presencia exclusiva de términos cuadráticos, "x^2" y "y^2", en la ecuación de una elipse da garantía de que las elipses son simétricas respecto a ambos ejes, y respecto al origen, de su sistema de ejes canónico.*

Por esta razón, cualquier orientación que se escoja para los ejes canónicos daría una ecuación (canónica o general) con los mismos coeficientes.

(b) *La elipse no es la representación geométrica de una función $y = f(x)$, ni $x = f(y)$, al expresar las coordenadas de sus puntos respecto a su sistema de ejes canónico.*

(c) *Despejando "y" en la ecuación canónica de la elipse obtenemos*

$$y = \pm\tfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

lo que permite pensar la elipse como la representación geométrica de dos funciones, al expresar las coordenadas de sus puntos respecto a su sistema de ejes canónico:

$$y = \tfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \text{ (el arco que está en } L_{U'}\text{)}$$

y

$$y = -\tfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \text{ (el arco que está en } L'_{U'}\text{).}$$

En todo caso, para que "y" corresponda a un número real, necesariamente "x" debe estar en el intervalo cerrado $[-a, a]$.

(d) *Despejando "x" en la ecuación canónica de la elipse obtenemos*

$$x = \pm\tfrac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2};$$

lo que permite pensar la elipse como la representación geométrica de otras dos funciones, al expresar las coordenadas de sus puntos respecto a su sistema de ejes canónico:

$$x = \tfrac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \text{ (el arco que está en } L_{U}\text{)}$$

y

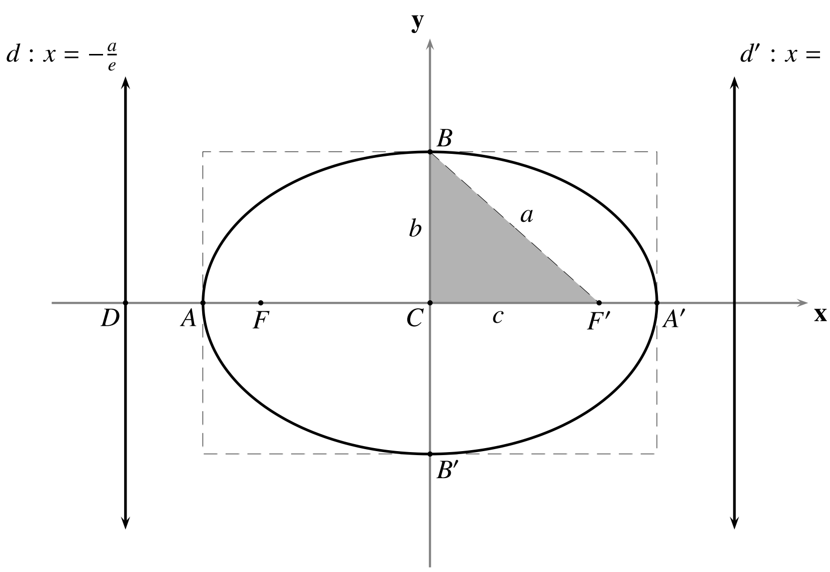
$$x = -\tfrac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \text{ (el arco que está en } L'_{U}\text{).}$$

En todo caso, para que "x" corresponda a un número real, necesariamente "y" debe estar en el intervalo cerrado $[-b, b]$.

(e) *Por lo dicho en las dos partes anteriores tenemos que la elipse está encerrada dentro del rectángulo $[-a, a] \times [-b, b]$.*

(f) *Si se considera el punto F', simétrico del foco F respecto al centro C, y la recta d', simétrica de la directriz d respecto al eje normal se tiene, después de hacer los cálculos con el punto $F' = (ae, 0)$ y la recta d' de ecuación $x = \frac{a}{e}$, que la elipse de foco F' y directriz d' coincide con la elipse de foco F y directriz d.*
Por esta razón consideraremos que la elipse tiene dos focos (F y F') y dos directrices (d y d').
El número real $2c$ (la distancia entre los focos F y F') es llamado ***la distancia focal*** *de la elipse; el número real c (la distancia del centro C a cualquiera de los focos F y F') es llamado* ***la semidistancia focal****.*

(g) *Note la sorprendente relación que aparece en el triángulo sombreado en la figura 6.6, es decir, el hecho de que a es también la distancia entre B y F (o entre B y F', o entre B' y F, o entre B' y F'). Los puntos auxiliares $B = (0, b)$ y $B' = (0, -b)$ permiten trazar el rectángulo formado por los puntos (a, b), $(a, -b)$, $(-a, -b)$ y $(-a, b)$, al cual llamaremos* ***rectángulo auxiliar*** *de la elipse, y es lo primero que deberíamos dibujar cuando intentemos dibujar una elipse, pues los únicos puntos de la elipse que tienen abscisa $x = a$, o $x = -a$, son sus vértices A y A', respectivamente, y los únicos puntos de la elipse que tienen ordenada $y = b$, o $y = -b$, son sus puntos auxiliares B y B', respectivamente; de donde las rectas $x = \pm a$ y $y = \pm b$ cortan a la elipse exclusivamente en los puntos A' y A, y B y B', respectivamente.*



$A = (-a, 0)$, $A' = (a, 0)$, $B = (0, b)$, $B' = (0, -b)$, $F = (-c, 0)$, $F' = (c, 0)$

FIGURA 6.6 Particularidades de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(h) *A partir de las relaciones $b = a\sqrt{1 - e^2}$ y $c = ae$ podemos asegurar que: mientras más cerca de 0 esté la excentricidad de la elipse, más se parece b a a, más pequeño será c respecto a a y, por tanto, la elipse es más redondeada, más parecida a un círculo, y menos excéntrica, con los focos más cercanos al centro; mientras más cerca de 1 esté la excentricidad de la elipse, más pequeño será b respecto a a, más se parece c a a y, por tanto, la elipse es más achatada, más parecida a un segmento de recta, y más excéntrica, con los focos más lejos del centro.*

En el caso límite con $e = 0$, tenemos $b = a$, los diámetros mayor y menor son iguales, $c = 0$, los focos coinciden con el centro, y la ecuación canónica de la elipse se convierte en la ecuación canónica de **un círculo** *de centro en el origen y radio a; de donde se puede decir que el círculo es, desde el punto de vista geométrico, una* ***elipse degenerada*** *o* ***límite****.*

(i) *De la relación $k = \frac{a}{e}$ y del hecho de que $0 < e < 1$ tenemos que $-k < -a < a < k$; con lo que la elipse está completamente contenida en la región limitada entre las directrices d y d'.*

(j) *Note que dada una elipse (es decir, su directriz d, su foco F y su excentricidad e), podemos obtener el eje focal* **f***, el centro C, el radio mayor a y el radio menor b*
(por la observación 6.1.(b), podemos contar con el eje focal **f** *y el centro C; pero además, podemos contar también con uno cualquiera de sus vértices, digamos A y, en consecuencia, obtenemos el radio mayor a mediante AC; finalmente, obtenemos el radio menor b a partir de la ecuación* (6.10)*).*
Pero además, y esto es lo crucial, también podemos obtener la directriz d, el foco F y la excentricidad e, a partir del eje focal **f***, el centro C, el radio mayor a y el radio menor b*
(a partir de la ecuación (6.10) *encontramos la semidistancia focal c y, con este dato, calculamos la excentricidad e, a partir de la segunda relación en* (6.8)*, y el foco F, tomando cualquiera de los dos puntos de* **f** *que están a distancia c del centro C; para encontrar la directriz, buscamos el punto D de* **f** *que está a una distancia $\frac{a}{e}$ del centro C, y del mismo lado de C en que ubicamos a F, y luego tomamos la perpendicular a* **f** *por D).*
Por estas razones, una elipse queda determinada si tenemos su eje focal, su centro y sus radios mayor y menor.

En el trabajo que hemos realizado sobre una elipse, hemos tenido la posibilidad de escoger el sistema de ejes ortogonales respecto al cual se expresan las coordenadas de sus puntos, y la ecuación que ellas satisfacen; nos interesa ahora averiguar cómo es la forma de la ecuación de una elipse, si los datos geométricos que la determinan (directriz, foco y excentricidad; o eje focal, centro y radios mayor y menor) están expresados respecto a un sistema de ejes ortogonales fijado previamente.

En este capítulo atenderemos sólo un caso particular de este problema: aquel en el que el eje focal es perpendicular a alguno de los ejes del sistema de ejes ortogonales prefijado; en el Capítulo 8 atenderemos el caso general.

En todo lo que sigue supondremos que se ha fijado un sistema de coordenadas **xOy** en el plano.

6.1.1 Eje focal perpendicular al eje y, centro (x_0, y_0), radio mayor a y radio menor b

Consideremos las relaciones g que asocian, a pares ordenados de números reales, un número real, cuyas reglas de asociación son polinomios de segundo grado en dos variables de la forma

$$g(x, y) := \mathsf{A}x^2 + \mathsf{C}y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F}$$
$$(\mathsf{A}, \mathsf{C}, \mathsf{D}, \mathsf{E} \text{ y } \mathsf{F} \text{ números reales tales que } \mathsf{C} > \mathsf{A} > 0 \text{ y } \mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF} > 0).$$

El objetivo central de esta parte del capítulo es verificar que, dada una figura geométrica $\mathcal{G}$ cualquiera, se tiene lo afirmado en la siguiente proposición.

COROLARIO 6.1
$\mathcal{G}$ es una elipse con eje focal perpendicular al eje **y** *si, y sólo si, $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación cuadrática en dos variables de la forma*

$$\mathsf{A}x^2 + \mathsf{C}y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0 \tag{6.11}$$

(A, C, D, E y F números reales tales que $\mathsf{C} > \mathsf{A} > 0$ y $\mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF} > 0$).

Verificado esto, la ecuación (6.11) será llamada ***la ecuación general***, o simplemente ***la ecuación***, de la elipse $\mathcal{G}$ con eje focal perpendicular al eje **y**.

Supongamos que $\mathcal{G}$ es una elipse con eje focal perpendicular al eje **y**. Así, la ecuación de su directriz d es de la forma

$$d: \; x - h = 0.$$

Por la observación 6.2.(j) podemos suponer, al tener la elipse $\mathcal{G}$, que tenemos como dato las coordenadas del centro C, digamos (x_0, y_0), su radio mayor, digamos a, y su radio menor, digamos b.

Por el Teorema 20 sabemos que la elipse $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación de la forma

$$\frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 1 \tag{6.12}$$

respecto al sistema de ejes canónico $\widehat{\mathbf{x}}\widehat{\mathbf{O}}\widehat{\mathbf{y}}$ de $\mathcal{G}$; para tener una ecuación en términos de x y y, que represente a $\mathcal{G}$, bastaría con aplicar las fórmulas adecuadas para transformar las coordenadas del sistema **xOy** al sistema $\widehat{\mathbf{x}}\widehat{\mathbf{O}}\widehat{\mathbf{y}}$.

Por la parte (a) de la observación 6.2, el sistema $\widehat{\mathbf{x}}\widehat{\mathbf{O}}\widehat{\mathbf{y}}$ puede ser considerado como el sistema $\check{\mathbf{x}}\check{\mathbf{O}}\check{\mathbf{y}}$, traslación del sistema **xOy** al punto $C = (x_0, y_0)$ (ver la figura 6.7); por tanto, debemos aplicar las fórmulas de traslación de coordenadas de **xOy** a $\check{\mathbf{x}}\check{\mathbf{O}}\check{\mathbf{y}}$

$$\begin{cases} \check{x} = x - x_0 \\ \check{y} = y - y_0 \end{cases}$$

obteniendo que la ecuación (6.12) se transforma en

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{6.13}$$

llamada ***ecuación canónica de una elipse con eje focal perpendicular al eje* y*, centro* (x_0, y_0)*, radio mayor* a *y radio menor* b.**

Como $a \neq 0$ y $b \neq 0$, la ecuación (6.13) es equivalente a la ecuación

$$b^2(x - x_0)^2 + a^2(y - y_0)^2 = a^2b^2. \tag{6.14}$$

Después de sacar las cuentas en la ecuación (6.14), tenemos que ésta es equivalente a la ecuación

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x_0x - 2a^2y_0y + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0. \tag{6.15}$$

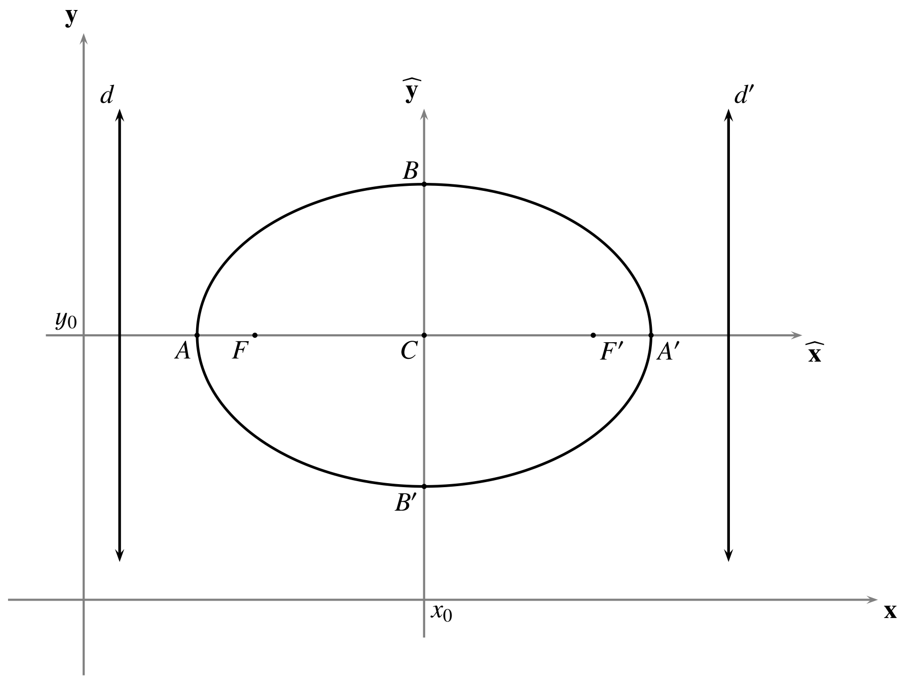


FIGURA 6.7 Eje focal perpendicular al eje **y**

Tomando $\mathsf{A} = b^2$, $\mathsf{C} = a^2$, $\mathsf{D} = -2b^2x_0$, $\mathsf{E} = -2a^2y_0$ y $\mathsf{F} = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2$, tendremos que las coordenadas cartesianas de los puntos de $\mathcal{G}$ satisfacen la ecuación (6.11) y, además, como $a^2 > b^2 > 0$ y $4a^4b^4 > 0$, se tiene que $\mathsf{C} > \mathsf{A} > 0$ y $\mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF} > 0$.

Hasta este punto hemos logrado verificar que, si $\mathcal{G}$ es una elipse con eje focal perpendicular al eje **y**, entonces $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación como (6.11); verificaremos ahora el recíproco de esta afirmación.

Después de completar cuadrados y realizar las simplificaciones de rigor, la ecuación (6.11) resulta equivalente a la ecuación

$$\mathsf{A}\left(x + \frac{\mathsf{D}}{2\mathsf{A}}\right)^2 + \mathsf{C}\left(y + \frac{\mathsf{E}}{2\mathsf{C}}\right)^2 - \frac{\mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF}}{4\mathsf{AC}} = 0 \tag{6.16}$$

(A, C, D, E y F números reales tales que $\mathsf{C} > \mathsf{A} > 0$ y $\mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF} > 0$).

Después de tener un sistema de ejes rectangulares $\breve{\mathbf{x}}\breve{\mathbf{O}}\breve{\mathbf{y}}$, por traslación del sistema **xOy** al punto

$$\left(-\tfrac{\mathsf{D}}{2\mathsf{A}}, -\tfrac{\mathsf{E}}{2\mathsf{C}}\right),$$

y cambiar las coordenadas de los puntos del plano por medio de las fórmulas de traslación de coordenadas, tendremos que dicha ecuación es equivalente a la ecuación

$$\mathsf{A}\breve{x}^2 + \mathsf{C}\breve{y}^2 - \frac{\mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF}}{4\mathsf{AC}} = 0$$

(A, C, D, E y F números reales tales que $\mathsf{C} > \mathsf{A} > 0$ y $\mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF} > 0$).

Al poner $\breve{\mathsf{A}} = \mathsf{A}$, $\breve{\mathsf{C}} = \mathsf{C}$ y $\breve{\mathsf{F}} = -\frac{\mathsf{CD}^2+\mathsf{AE}^2-4\mathsf{ACF}}{4\mathsf{AC}}$, tendremos que esta última ecuación es equivalente a la ecuación

$$\breve{\mathsf{A}}\breve{x}^2 + \breve{\mathsf{C}}\breve{y}^2 + \breve{\mathsf{F}} = 0$$

$$(\breve{\mathsf{A}}, \breve{\mathsf{C}} \text{ y } \breve{\mathsf{F}} \text{ números reales tales que } \breve{\mathsf{C}} > \breve{\mathsf{A}} > 0 \text{ y } \breve{\mathsf{F}} < 0).$$

Por el Teorema 20, esta última ecuación representa una elipse de la que su sistema de ejes canónico es una traslación del sistema **xOy**; con lo que esta última ecuación representa una elipse cuyo eje focal es perpendicular al eje **y**.

➤ **Ejemplo 6.2**
Para encontrar la ecuación general de la elipse con eje focal perpendicular al eje **y***, centro* $(-1, 3)$*, radio mayor* 5*, y radio menor* 3*, planteamos la ecuación*

$$\frac{(x-(-1))^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1,$$

obteniendo que la ecuación requerida es

$$9x^2 + 25y^2 + 18x - 150y + 9 = 0.$$

QEE ◄

➤ **Ejemplo 6.3**
Para encontrar el centro, los radios mayor y menor, la semidistancia focal, la excentricidad, los vértices, los puntos auxiliares, los focos y las directrices de la elipse

$$x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 92 = 0,$$

procedemos de la siguiente manera. Como $\mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF} = 840 > 0$*, el gráfico de la ecuación no es vacío ni se reduce a un punto.*

En primer lugar observamos que el eje focal de esta elipse es perpendicular al eje **y***, pues* $4 > 1$.

Completando cuadrados obtenemos la ecuación canónica de la elipse, a saber,

$$\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1.$$

De este modo: $C = (2, 1)$*,* $a = 10$*,* $b = 5$*,* $c = 5\sqrt{3}$*,* $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$*,* $A = (-8, 1)$*,* $A' = (12, 1)$*,* $B = (2, 6)$*,* $B' = (2, -4)$*,* $F = (2 - 5\sqrt{3}, 1)$*,* $F' = (2 + 5\sqrt{3}, 1)$*,* $d:\ x = 1 - \frac{20\sqrt{3}}{3}$ *y* $d':\ x = 1 + \frac{20\sqrt{3}}{3}$. QEE ◄

6.1.2 Eje focal perpendicular al eje x, centro (x_0, y_0), radio mayor a y radio menor b

Consideremos las relaciones g que asocian, a pares ordenados de números reales, un número real, cuyas reglas de asociación son polinomios de segundo grado en dos variables de la forma

$$g(x, y) := \mathsf{A}x^2 + \mathsf{C}y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F}$$

$$(\mathsf{A}, \mathsf{C}, \mathsf{D}, \mathsf{E} \text{ y } \mathsf{F} \text{ números reales tales que } \mathsf{A} > \mathsf{C} > 0 \text{ y } \mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF} > 0).$$

El objetivo central de esta parte del capítulo es verificar que, dada una figura geométrica $\mathcal{G}$ cualquiera, se tiene lo afirmado en la siguiente proposición.

Corolario 6.2

*$\mathcal{G}$ es una elipse con eje focal perpendicular al eje **x** si, y sólo si, $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación cuadrática en dos variables de la forma*

$$\mathsf{A}x^2 + \mathsf{C}y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0 \tag{6.17}$$

(A, C, D, E y F números reales tales que $\mathsf{A} > \mathsf{C} > 0$ y $\mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF} > 0$).

Verificado esto, la ecuación (6.17) será llamada ***la ecuación general***, o simplemente ***la ecuación***, de la elipse $\mathcal{G}$ con eje focal perpendicular al eje **x**.

Supongamos que $\mathcal{G}$ es una elipse con eje focal perpendicular al eje **x**. Así, la ecuación de su directriz d es de la forma

$$d:\ y - k = 0.$$

Por la observación 6.2.(j) podemos suponer, al tener la elipse $\mathcal{G}$, que tenemos como dato las coordenadas del centro C, digamos (x_0, y_0), su radio mayor, digamos a, y su radio menor, digamos b.

Por el Teorema 20 sabemos que la elipse $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación de la forma

$$\frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 1 \tag{6.18}$$

respecto al sistema de ejes canónico $\widehat{\mathbf{x}\mathrm{O}\mathbf{y}}$ de $\mathcal{G}$; para tener una ecuación en términos de x y y, que represente a $\mathcal{G}$, bastaría con aplicar las fórmulas adecuadas para transformar las coordenadas del sistema **xOy** al sistema $\widehat{\mathbf{x}\mathrm{O}\mathbf{y}}$.

Por la parte (a) de la observación 6.2, el sistema $\widehat{\mathbf{x}\mathrm{O}\mathbf{y}}$ puede ser considerado como el sistema $\dot{\breve{\mathbf{x}}}\breve{\mathrm{O}}\dot{\breve{\mathbf{y}}}$, la rotación por 90, de la traslación del sistema **xOy** al punto $C = (x_0, y_0)$ (ver la figura 6.8) (lo cual, de acuerdo con la observación 4.1.(e), equivale a cambiar la abscisa por su ordenada, y la ordenada por el opuesto de su abscisa, en los ejes del sistema trasladado); por tanto, debemos aplicar las fórmulas de traslación de coordenadas de **xOy** a $\breve{\mathbf{x}}\breve{\mathrm{O}}\breve{\mathbf{y}}$

$$\begin{cases} \breve{x} = x - x_0 \\ \breve{y} = y - y_0 \end{cases}$$

y cambiamos la abscisa por su ordenada, y la ordenada por el opuesto de su abscisa

$$\begin{cases} \dot{\breve{x}} = y - y_0 \\ \dot{\breve{y}} = -(x - x_0) \end{cases}$$

obteniendo que la ecuación (6.18) se transforma en

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1 \tag{6.19}$$

llamada ***ecuación canónica de una elipse con eje focal perpendicular al eje* x*, centro* (x_0, y_0)*, radio mayor* a *y radio menor* b.**

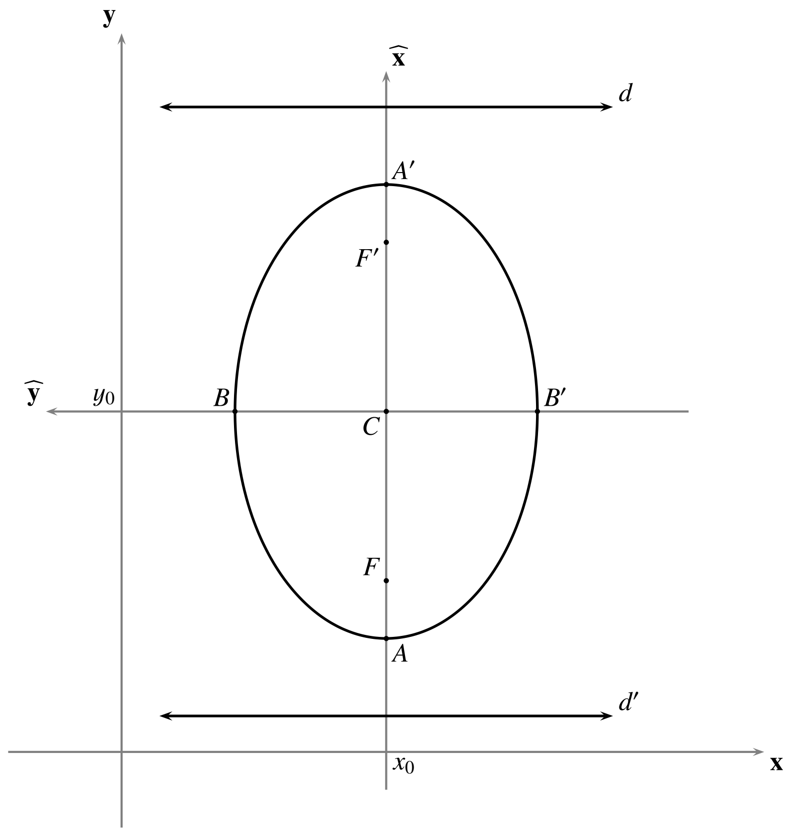


FIGURA 6.8 Eje focal perpendicular al eje $\mathbf{x}$

Como $a \neq 0$ y $b \neq 0$, la ecuación (6.19) es equivalente a la ecuación

$$a^2(x - x_0)^2 + b^2(y - y_0)^2 = a^2b^2. \tag{6.20}$$

Después de sacar las cuentas en la ecuación (6.20), tenemos que ésta es equivalente a la ecuación

$$a^2x^2 + b^2y^2 - 2a^2x_0x - 2b^2y_0y + a^2x_0^2 + b^2y_0^2 - a^2b^2 = 0. \tag{6.21}$$

Tomando $\mathsf{A} = a^2$, $\mathsf{C} = b^2$, $\mathsf{D} = -2a^2x_0$, $\mathsf{E} = -2b^2y_0$ y $\mathsf{F} = a^2x_0^2 + b^2y_0^2 - a^2b^2$, tendremos que las coordenadas cartesianas de los puntos de $\mathcal{G}$ satisfacen la ecuación (6.17) y, además, como $a^2 > b^2 > 0$ y $4a^4b^4 > 0$, se tiene que $\mathsf{A} > \mathsf{C} > 0$ y $\mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF} > 0$.

Hasta este punto hemos logrado verificar que, si $\mathcal{G}$ es una elipse con eje focal perpendicular al eje $\mathbf{x}$, entonces $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación como (6.17); verificaremos ahora el recíproco de esta afirmación.

Después de completar cuadrados y realizar las simplificaciones de rigor, la ecuación (6.17) resulta equivalente a la ecuación

$$\mathsf{A}\left(x + \frac{\mathsf{D}}{2\mathsf{A}}\right)^2 + \mathsf{C}\left(y + \frac{\mathsf{E}}{2\mathsf{C}}\right)^2 - \frac{\mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF}}{4\mathsf{AC}} = 0 \tag{6.22}$$

(A, C, D, E y F números reales tales que $\mathsf{A} > \mathsf{C} > 0$ y $\mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF} > 0$).

Después de tener un sistema de ejes rectangulares $\mathbf{\check{\dot{x}}\breve{O}\check{\dot{y}}}$, por traslación del sistema **xOy** hasta el punto

$$\left(-\frac{\mathsf{D}}{2\mathsf{A}}, -\frac{\mathsf{E}}{2\mathsf{C}}\right),$$

cambiar las coordenadas de los puntos del plano por medio de las fórmulas de traslación de coordenadas, y luego cambiar la abscisa por su ordenada, y la ordenada por el opuesto de su abscisa, tendremos que dicha ecuación es equivalente a la ecuación

$$\mathsf{C}\check{\dot{x}}^2 + \mathsf{A}\check{\dot{y}}^2 - \frac{\mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF}}{4\mathsf{AC}} = 0$$

(A, C, D, E y F números reales tales que $\mathsf{A} > \mathsf{C} > 0$ y $\mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF} > 0$).

Al poner $\check{\dot{\mathsf{A}}} = \mathsf{C}$, $\check{\dot{\mathsf{C}}} = \mathsf{A}$ y $\check{\dot{\mathsf{F}}} = -\frac{\mathsf{CD}^2+\mathsf{AE}^2-4\mathsf{ACF}}{4\mathsf{AC}}$, tendremos que esta última ecuación es equivalente a la ecuación

$$\check{\dot{\mathsf{A}}}\check{\dot{x}}^2 + \check{\dot{\mathsf{C}}}\check{\dot{y}}^2 + \check{\dot{\mathsf{F}}} = 0$$

($\check{\dot{\mathsf{A}}}$, $\check{\dot{\mathsf{C}}}$ y $\check{\dot{\mathsf{F}}}$ números reales tales que $\check{\dot{\mathsf{C}}} > \check{\dot{\mathsf{A}}} > 0$ y $\check{\dot{\mathsf{F}}} < 0$).

Por el Teorema 20, esta última ecuación representa una elipse, de la que su sistema de ejes canónico es la rotación por 90, de la traslación al punto $C = (x_0, y_0)$ del sistema **xOy**; con lo que esta última ecuación representa una elipse cuyo eje focal es perpendicular al eje **x**.

➤ Ejemplo 6.4

Para encontrar la ecuación general de la elipse con eje focal perpendicular al eje **x**, *centro* $(-1, 3)$, *radio mayor* 5, *y radio menor* 3, *planteamos la ecuación*

$$\frac{(x-(-1))^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1,$$

obteniendo que la ecuación requerida es

$$25x^2 + 9y^2 - 150x + 18y + 9 = 0.$$

QEE ◄

➤ Ejemplo 6.5

Para encontrar el centro, los radios mayor y menor, la semidistancia focal, la excentricidad, los vértices, los puntos auxiliares, los focos y las directrices de la elipse

$$25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 164 = 0,$$

procedemos de la siguiente manera. Como $\mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF} = 202500 > 0$, *el gráfico de la ecuación no es vacío ni se reduce a un punto.*

En primer lugar observamos que el eje focal de esta elipse es perpendicular al eje **x**, *pues* $25 > 9$.

Completando cuadrados obtenemos la ecuación canónica de la elipse, a saber,

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1.$$

De este modo: $C = (1, -2)$, $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$, $e = \frac{4}{5}$, $A = (1, -7)$, $A' = (1, 3)$, $B = (-2, -2)$, $B' = (4, -2)$, $F = (1, -6)$, $F' = (1, 2)$, $d: \ y = \frac{-33}{4}$ *y* $d': \ y = \frac{17}{4}$. **QEE ◄**

OBSERVACIÓN 6.3
En los problemas con datos numéricos, la diferencia entre ambas ecuaciones canónicas está marcada, en el caso de la elipse, por el hecho de que el denominador menor (b) está debajo de la variable que identifica al eje, del sistema de coordenadas fijado, al cual es perpendicular el eje focal de la elipse.

§ 6.2 Inecuaciones cuadráticas, e interior y exterior de una elipse

El estudio que haremos en esta sección tendrá como sistema de ejes ortogonales, el sistema de ejes canónico de la elipse, pues con otro sistema de ejes ortogonales el estudio es análogo.

Diremos que un punto ***está en el interior de*** una elipse, si su distancia al foco es menor que la excentricidad por su distancia a la directriz.

Diremos que un punto ***está en el exterior de*** una elipse, si su distancia al foco es mayor que la excentricidad por su distancia a la directriz.

Llamaremos ***interior*** de una elipse al conjunto de sus puntos interiores.

Llamaremos ***exterior*** de una elipse al conjunto de sus puntos exteriores.

El objetivo central de esta parte del capítulo es ofrecer la representación analítica de los puntos del plano que no están sobre una elipse, tomando como referencia la excentricidad, la distancia al foco y la distancia a la directriz.

Consideremos una elipse $\mathcal{E}$ de directriz d, foco F y excentricidad e. Por la tricotomía del orden de los números reales, todos los puntos del plano están en uno, y sólo uno, de los siguientes conjuntos: la elipse $\mathcal{E}$; el interior de la elipse $\mathcal{E}$; el exterior de la elipse $\mathcal{E}$. Ahora, atendiendo a la definición de estos dos últimos, verificaremos lo afirmado en el siguiente Teorema.

TEOREMA 21 (REPRESENTACIÓN ANALÍTICA DEL INTERIOR Y DEL EXTERIOR DE UNA ELIPSE)
Si la ecuación general de la elipse $\mathcal{E}$ *es* $\mathsf{A}x^2 + \mathsf{C}y^2 + \mathsf{F} = 0$ *(*$\mathsf{C} > \mathsf{A} > 0$ *y* $\mathsf{F} < 0$*), entonces su interior y su exterior son, respectivamente, los conjuntos*

$$I := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathsf{A}x^2 + \mathsf{C}y^2 + \mathsf{F} < 0\}$$
$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathsf{A}x^2 + \mathsf{C}y^2 + \mathsf{F} > 0\}.$$

Verificaremos sólo que el interior de $\mathcal{E}$ coincide con el conjunto I descrito, pues de manera análoga se verifica que el exterior de $\mathcal{E}$ coincide con el conjunto E.

Ya sabemos que, respecto al sistema de ejes canónico, el foco y la directriz de $\mathcal{E}$ son, respectivamente,

$$F = (-ae, 0) \qquad \text{y} \qquad d: \ x + \tfrac{a}{e} = 0, \qquad \text{donde} \quad a = \sqrt{\tfrac{-\mathsf{F}}{\mathsf{A}}} \quad \text{y} \quad b = \sqrt{\tfrac{-\mathsf{F}}{\mathsf{C}}}.$$

Un punto $P = (x, y)$ genérico está en el interior de $\mathcal{E}$ si, y sólo si, $PF < e \cdot \mathbf{d}(P, d)$, es decir, si, y sólo si,

$$\sqrt{(x + ae)^2 + y^2} < e \cdot |x + \tfrac{a}{e}|;$$

o, lo que es lo mismo, si, y sólo si $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$. Como $a^2 = \frac{-\mathsf{F}}{\mathsf{A}}$, $b^2 = \frac{-\mathsf{F}}{\mathsf{C}}$ y $-\mathsf{F} > 0$, tendremos que el interior de la elipse $\mathcal{E}$ coincide con I, tal como queríamos verificar.

En general, el conjunto solución de una desigualdad como $\mathsf{A}x^2 + \mathsf{C}y^2 + \mathsf{F} \lesseqgtr 0$ ($\mathsf{C} > \mathsf{A} > 0$ y $\mathsf{F} < 0$) será uno de esos conjuntos determinados por la elipse $\mathsf{A}x^2 + \mathsf{C}y^2 + \mathsf{F} = 0$; e incluirá el borde (es decir, la elipse misma), sólo en el caso en que tuviéramos “$\geqslant$” o “$\leqslant$”.

En lo que se refiere a la representación gráfica de esos conjuntos, haremos la misma convención que hemos hecho con las rectas (ver la página 16).

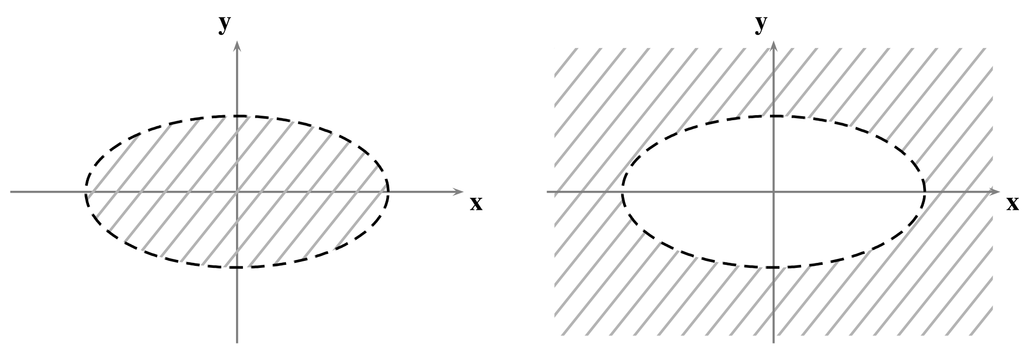


FIGURA 6.9 Interior y exterior de la elipse

§ 6.3 Posiciones relativas entre elipses y rectas

En los parágrafos sucesivos haremos un estudio sobre las relaciones que existen entre las posiciones relativas que pueden presentar una recta y una elipse, y los coeficientes de sus ecuaciones generales; en dicho estudio tomaremos como sistema de ejes ortogonales el sistema de ejes canónico de la elipse, pues con otro sistema de ejes ortogonales el estudio es análogo.

Consideremos una elipse $\mathcal{E}$ y una recta l, de ecuaciones

$$\mathcal{E}: \quad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \quad (a > b > 0) \qquad\qquad l: \quad \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0 \quad (\mathsf{A}^2 + \mathsf{B}^2 \neq 0).$$

El estudio de la ***incidencia*** entre la elipse $\mathcal{E}$ y la recta l equivale a la consideración de la existencia de pares ordenados (x, y) de números reales que satisfagan, simultáneamente, las siguientes dos condiciones

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0;$$

o, lo que es lo mismo, a la consideración de la ***existencia de soluciones*** del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\text{(6.23)} \qquad \begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \\ \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0 \end{cases}.$$

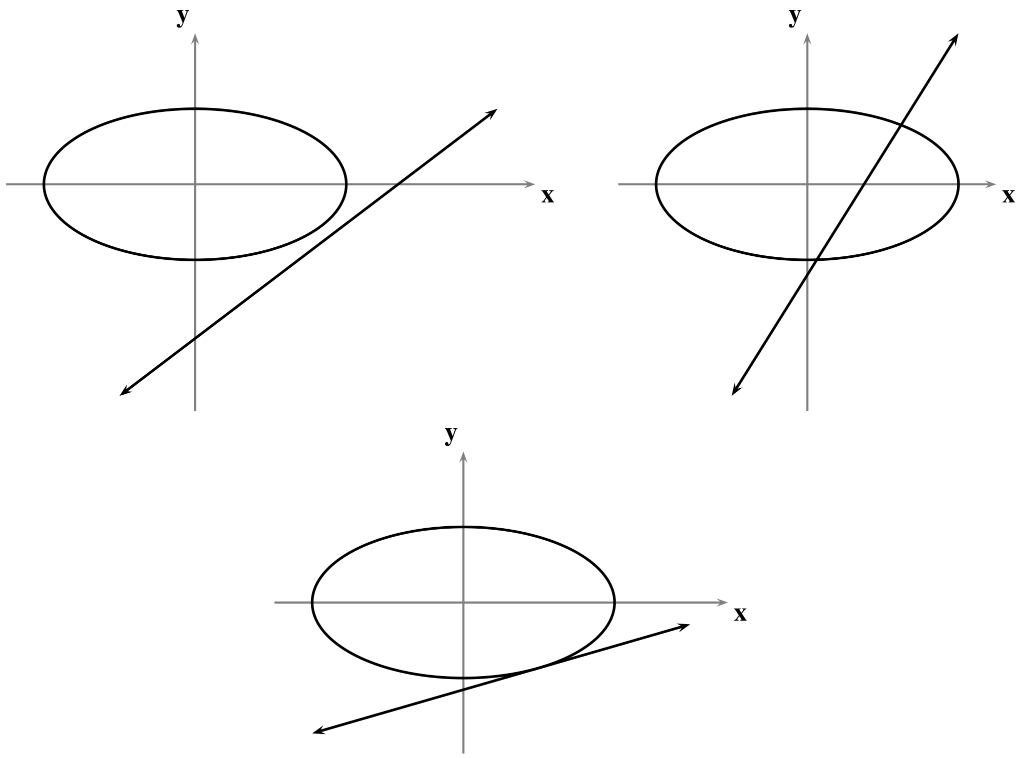


FIGURA 6.10 Incidencia entre una elipse y una recta

Desde el punto de vista geométrico (ver la figura 6.10 y el ejercicio 6.3), el sistema (6.23)

(N) no tendrá solución si, y sólo si, l y $\mathcal{E}$ ***no se cortan***.

(S) tendrá dos soluciones distintas si, y sólo si, l y $\mathcal{E}$ son ***secantes*** (es decir, l corta a $\mathcal{E}$ en dos puntos distintos).

(T) tendrá dos soluciones iguales si, y sólo si, l y $\mathcal{E}$ son ***tangentes*** (es decir, l corta a $\mathcal{E}$ en un único punto).

Desde el punto de vista algebraico, se puede proceder a resolver el sistema (6.23) despejando una de las variables en la segunda ecuación (una de las que tenga su coeficiente distinto de cero), y "sustituir" esa variable en la primera, tal como detallamos a continuación.

Si $\mathsf{B} \neq 0$, consideramos la forma corte-pendiente de la ecuación de l y el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \\ \qquad\qquad y = mx + t \end{cases} \tag{6.24}$$

equivalente al sistema (6.23) (donde $m = -\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}$ y $t = -\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{B}}$).

Al sustituir el término del lado derecho de la segunda igualdad por "y" en la primera ecuación, resulta la ecuación de segundo grado en la variable x

$$(b^2 + m^2a^2)x^2 + 2mta^2x + a^2(t^2 - b^2) = 0 \tag{6.25}$$

que, dependiendo del signo de su discriminante (ver el Apéndice C)

$$\Delta = 4a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - t^2) \tag{6.26}$$

(N) no tendrá solución si, y sólo si, $\Delta < 0$.

(S) tendrá dos soluciones distintas si, y sólo si, $\Delta > 0$.

(T) tendrá dos soluciones iguales si, y sólo si, $\Delta = 0$.

Si $\mathsf{B} = 0$ (de donde $\mathsf{A} \neq 0$), l es perpendicular al eje **x** y, en consecuencia, consideramos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \\ \hfill x = h \end{cases} \tag{6.27}$$

equivalente al sistema (6.23) (donde $h = -\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{A}}$).

Al sustituir el término del lado derecho de la segunda igualdad por "x" en la primera ecuación, resulta la ecuación de segundo grado en la variable y

$$a^2y^2 + b^2(h^2 - a^2) = 0 \tag{6.28}$$

que, dependiendo del signo de su discriminante (ver el Apéndice C)

$$\Delta = 4a^2b^2(a^2 - h^2) \tag{6.29}$$

(N) no tendrá solución si, y sólo si, h está en el conjunto $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$.

(S) tendrá dos soluciones distintas si, y sólo si, h está en el intervalo $(-a, a)$.

(T) tendrá dos soluciones iguales si, y sólo si, $h = \pm a$.

Una vez que se tengan las soluciones de la ecuación de segundo grado correspondiente, en caso de que existan, apenas se ha encontrado una de las coordenadas de cada uno de los puntos de corte entre $\mathcal{E}$ y l: las abscisas, si se procedió como en el caso $\mathsf{B} \neq 0$; las ordenadas, si se procedió como en el caso $\mathsf{B} = 0$. Para encontrar la otra coordenada que acompaña a la ya obtenida, y tener realmente las soluciones del sistema (6.23), sustituimos cada una de las soluciones obtenidas en la segunda ecuación del mismo sistema.

OBSERVACIÓN 6.4

Note que el discriminante (6.26) *permitiría calcular con precisión, de la familia de rectas $y = mx + t$ no perpendiculares al eje* **x** *(parametrizada con los parámetros m y t), cuáles de ellas son tangentes, secantes o disjuntas respecto a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, si tenemos como dato m o t.*

➤ EJEMPLO 6.6

Para estudiar la incidencia entre la elipse y la recta de ecuaciones

$$9x^2 + 25y^2 - 18x - 50y - 191 = 0 \quad y \quad x - y + 10 = 0,$$

respectivamente, procedemos de manera análoga a como realizamos el estudio previo.

Como la ecuación explícita de la recta es $y = x + 10$, resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 9x^2 + 25y^2 - 18x - 50y - 191 = 0 \\ y = x + 10 \end{cases}.$$

Al sustituir el lado derecho de la segunda ecuación por "y" en la primera, se obtiene la ecuación de segundo grado en la variable x

$$34x^2 + 432x + 1809 = 0.$$

Como el discriminante de esta ecuación es negativo, tenemos que la recta no corta a la elipse. **QEE ◀**

➤ EJEMPLO 6.7

Para estudiar la incidencia entre la elipse y la recta de ecuaciones

$$4x^2 + y^2 - 12x + 2y + 6 = 0 \quad y \quad x + y = 0,$$

respectivamente, procedemos de manera análoga a como realizamos el estudio previo.

Como la ecuación explícita de la recta es $y = -x$, resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 12x + 2y + 6 = 0 \\ y = -x \end{cases}.$$

Al sustituir el lado derecho de la segunda ecuación por "y" en la primera, se obtiene la ecuación de segundo grado en la variable x

$$5x^2 - 14x + 6 = 0.$$

Como el discriminante de esta ecuación es positivo, tenemos que la recta es secante a la elipse; después de sacar las cuentas, los puntos $(\frac{7+\sqrt{19}}{5}, -\frac{7+\sqrt{19}}{5})$ y $(\frac{7-\sqrt{19}}{5}, -\frac{7-\sqrt{19}}{5})$ son los puntos de corte entre ambas.
QEE ◀

➤ EJEMPLO 6.8

Para estudiar la incidencia entre la elipse y la recta de ecuaciones

$$9x^2 + y^2 - 18x - 2y - 8 = 0 \quad y \quad 3x - y + 4 = 0,$$

respectivamente, procedemos de manera análoga a como realizamos el estudio previo.

Como la ecuación explícita de la recta es $y = 3x + 4$, resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 9x^2 + y^2 - 18x - 2y - 8 = 0 \\ y = 3x + 4 \end{cases}.$$

Al sustituir el lado derecho de la segunda ecuación por "y" en la primera, se obtiene la ecuación de segundo grado en la variable x

$$x^2 = 0.$$

Como el discriminante de esta ecuación es 0, tenemos que la recta es tangente a la elipse; después de sacar las cuentas, el punto $(0, 4)$ es el punto de corte entre ambas. **QEE ◀**

Recta tangente y recta normal a una elipse

Un problema parecido al que acabamos de resolver es el de encontrar, bajo ciertas condiciones, ***una recta tangente*** a una elipse.

Consideremos una elipse $\mathcal{E}$ de ecuación

(6.30)
$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$
$$(a > b > 0).$$

Por la naturaleza intrínseca del tratamiento analítico de las rectas, en el análisis que desarrollaremos siempre se considerará aparte el caso de las rectas perpendiculares al eje **x**, pues éstas no se pueden tratar en términos de sus pendientes.

Ahora bien, la condición de que una recta l sea tangente a la elipse $\mathcal{E}$, sin más, no determina ninguna recta pues, como veremos más abajo, hay una por cada punto de $\mathcal{E}$; de manera que debemos contar con algún otro dato que determine a l. A continuación enumeramos algunas de las posibilidades sobre los datos que se pueden ofrecer.

(I) Un punto $P = (u, v)$ sobre l.

(1) l perpendicular al eje **x**.
Nos preguntamos si existe alguna recta l, tangente a $\mathcal{E}$, que sea perpendicular al eje **x** y que pase por P. Por el Principio E.7 tendremos que, si existe alguna recta que satisfaga esas condiciones, es única.
Ahora, al pasar l por P y ser perpendicular al eje **x**, tendremos que l se puede representar por la ecuación $x = u$. Procediendo de la misma forma en que resolvimos el sistema (6.27), l puede ser tangente a $\mathcal{E}$ si, y sólo si, el discriminante (6.29) se anula, es decir, si, y sólo si, $a^2 - u^2 = 0$. Así:

> Existirá una recta l tangente a $\mathcal{E}$, perpendicular al eje **x**, y que pase por $P = (u, v)$ si, y sólo si, $u = a$ o $u = -a$; en cuyo caso, l se puede representar por la ecuación $x = u$.

(2) l no perpendicular al eje **x**.
Nos preguntamos si existe alguna recta l, tangente a $\mathcal{E}$, que no sea perpendicular al eje **x** y que pase por P.
Ahora, al pasar l por P y no ser perpendicular al eje **x**, tendremos que l se puede representar por una ecuación de la forma

$$y - v = m(x - u).$$

El problema se transforma entonces en saber si existe m tal que l sea tangente a $\mathcal{E}$.
Para resolver este problema, despejamos y en la ecuación anterior,

$$y = mx - mu + v,$$

y sustituimos el lado derecho por y en la ecuación (6.30), obteniendo la siguiente ecuación de segundo grado en la variable x

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 - 2a^2m(mu - v)x + a^2((mu - v)^2 - b^2) = 0.$$

Ahora, para que l sea tangente a $\mathcal{E}$, esta ecuación debe tener dos soluciones iguales; y sabemos que esto sucede si, y sólo si, su discriminante se anula, es decir,

$$-4a^2b^2((u^2-a^2)m^2-2uvm+v^2-b^2)=0;$$

y esto sucede si, y sólo si,

$$(u^2-a^2)m^2-2uvm+v^2-b^2=0. \tag{6.31}$$

Así las cosas, el problema planteado tendrá solución si, y sólo si, la ecuación (6.31) tiene solución en la variable m.

En caso de que $u^2-a^2=0$ o, lo que es lo mismo, $a^2-u^2=0$ (en el que ya sabemos que existe una recta perpendicular al eje $\mathbf{x}$ que pasa por P y es tangente a $\mathcal{E}$), tendremos, al despejar m en la ecuación (6.31), que

$$m=\frac{v^2-b^2}{2uv}.$$

Como $u\neq 0$ (pues en caso contrario tendríamos, de $u^2-a^2=0$, que $a=0$) tendremos que la única manera en que esta ecuación no tenga solución es que $v=0$; en cuyo caso, las coordenadas del punto P del que hemos estado hablando serían $(a,0)$ o $(-a,0)$, es decir, en caso de que P sea uno de los vértices de $\mathcal{E}$. Por tanto, si P es alguno de los vértices, la única recta tangente a $\mathcal{E}$ que pasa por P es la perpendicular al eje $\mathbf{x}$ que encontramos en la aparte anterior.

Si P no es ninguno de los vértices entonces, como $u^2-a^2=0$, tendremos una segunda recta tangente a $\mathcal{E}$ que pasa por P cuya ecuación sería

$$(v^2-b^2)x-2uvy+u(v^2+b^2)=0.$$

En caso de que $u^2-a^2\neq 0$, la ecuación (6.31) es una ecuación de segundo grado en la variable m. Como ya sabemos, la naturaleza de las soluciones de esta ecuación depende de su discriminante

$$\Delta=4(b^2u^2+a^2v^2-a^2b^2), \tag{6.32}$$

la cual dependerá, a su vez, de la posición relativa del punto P respecto a $\mathcal{E}$.

(a) *El punto P está en la elipse*: en este caso, dicho discriminante es nulo (puesto que $b^2u^2+a^2v^2-a^2b^2=0$) y tenemos garantía de que siempre existirá una solución única para la pendiente requerida; la pendiente resulta

$$m=\frac{uv}{u^2-a^2}=\frac{uv}{-\frac{a^2v^2}{b^2}}=-\frac{b^2u}{a^2v}$$

y, en consecuencia, la ecuación de la tangente a la elipse $\mathcal{E}$ en el punto P es

$$b^2ux+a^2vy-a^2b^2=0.$$

(b) *El punto P está en el exterior de la elipse*: en este caso, dicho discriminante es positivo (puesto que, por el Teorema 21, $b^2u^2+a^2v^2-a^2b^2>0$) y tenemos garantía de que siempre existirán dos soluciones distintas para la pendiente requerida:

$$m=\frac{uv\pm\sqrt{b^2u^2+a^2v^2-a^2b^2}}{u^2-a^2}.$$

(c) *El punto P está en el interior de la elipse*: en este caso, dicho discriminante es negativo (puesto que, por el Teorema 21, $b^2u^2 + a^2v^2 - a^2b^2 < 0$) y, en consecuencia, no habrá ninguna recta tangente a la elipse $\mathcal{E}$ que pase por el punto P.

En conclusión:

Existirá una recta l tangente a $\mathcal{E}$, no perpendicular al eje **x**, y que pase por $P = (u, v)$ si, y sólo si, P no es ninguno de los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ (vértices de $\mathcal{E}$), ni está en el interior de $\mathcal{E}$.
Si $u = a$ o $u = -a$ ($v \neq 0$), entonces hay una única recta tangente a $\mathcal{E}$, no perpendicular al eje **x**, que pasa por P y su ecuación es

$$(v^2 - b^2)x - 2uvy + u(v^2 + b^2) = 0.$$

Si $u \neq a$ y $u \neq -a$, y P está sobre $\mathcal{E}$, entonces hay una única recta tangente a $\mathcal{E}$, no perpendicular al eje **x**, que pasa por P y su ecuación es

$$b^2ux + a^2vy - a^2b^2 = 0.$$

Si $u \neq a$ y $u \neq -a$, y P está en el exterior de $\mathcal{E}$, entonces hay dos rectas tangentes a $\mathcal{E}$, no perpendiculares al eje **x**, que pasan por P y sus pendientes son

$$m = \frac{uv \pm \sqrt{b^2u^2 + a^2v^2 - a^2b^2}}{u^2 - a^2}.$$

(II) La dirección de l.

(1) *l es perpendicular al eje* **x**.
Nos preguntamos si existe alguna recta l, tangente a $\mathcal{E}$, que sea perpendicular al eje **x**.
Procediendo de la misma forma en que resolvimos el sistema (6.27), concluimos que:

Existen exactamente dos rectas tangentes a $\mathcal{E}$, perpendiculares al eje **x**; y éstas son las que se pueden representar por las ecuaciones $x = a$ y $x = -a$.

(2) *l no es perpendicular al eje* **x**.
Nos preguntamos si existe alguna recta l, tangente a $\mathcal{E}$, que no sea perpendicular al eje **x**.
Este problema es equivalente al de saber si existe alguna recta l, tangente a $\mathcal{E}$, que tenga como pendiente algún número real m previamente fijado.
La familia de todas las rectas de pendiente m se puede representar, parametrizada por t (la ordenada en el origen), mediante la ecuación $y = mx + t$; la recta que estamos buscando es un miembro de esta familia.
Así las cosas, el problema original se transforma en saber si existe algún número real t tal que la recta representada por la ecuación $y = mx + t$ sea tangente a $\mathcal{E}$.
Procediendo de la misma forma en que resolvimos el sistema (6.24), la recta $y = mx + t$ es tangente a $\mathcal{E}$ si, y sólo si, el discriminante (6.26) se anula, es decir, si, y sólo si,

$$a^2m^2 + b^2 - t^2 = 0.$$

El problema se transforma entonces en saber si existe t que satisfaga la ecuación anterior; y, después de sacar las cuentas, tenemos que siempre hay dos valores:

$$t = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

Así, existen exactamente dos rectas tangentes a C de pendiente m y éstas se pueden representar por las ecuaciones

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

En conclusión:

Siempre existen dos rectas tangentes a $\mathcal{E}$, que tengan como pendiente algún número real m previamente fijado, y éstas se pueden representar por las ecuaciones

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

Fijado un punto P en una elipse $\mathcal{E}$, íntimamente ligado al concepto de recta tangente a una elipse por el punto P tenemos lo que se llama ***la recta normal*** a una elipse en el punto P: esta recta se define como *la perpendicular por P a la recta tangente a la elipse $\mathcal{E}$ en el punto P.*

➤ EJEMPLO 6.9

Consideremos la elipse $\mathcal{E} : 144x^2 + 64y^2 + 72x - 32y - 131 = 0$*, cuyo eje focal es perpendicular al eje* $\mathbf{x}$.

La ecuación canónica de esta elipse es

$$\frac{(x+\frac{1}{4})^2}{1} + \frac{(y-\frac{1}{4})^2}{\frac{9}{4}} = 1;$$

de donde $C = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $a = \frac{3}{2}$, $b = 1$, $A = (-\frac{1}{4}, -\frac{7}{4})$, $A' = (-\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$, $B = (-\frac{5}{4}, \frac{1}{4})$ *y* $B' = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$.

Estudiemos la existencia de rectas tangentes a la elipse $\mathcal{E}$ por los puntos que listamos a continuación (ver la figura 6.11) y, en caso de que existan, calculemos sus ecuaciones generales:

$$P = (-\tfrac{5}{4}, \tfrac{1}{4}),\ Q = (\tfrac{3}{4}, -1),\ R = (\tfrac{1}{2}, 1),\ S = (-1, \tfrac{1}{4} + \tfrac{3\sqrt{7}}{8})\ y\ T = (1, 2).$$

(a) *El punto P está en $\mathcal{E}$, pues* $144(-\frac{5}{4})^2 + 64(\frac{1}{4})^2 + 72(-\frac{5}{4}) - 32(\frac{1}{4}) - 131 = 0$.
Así, sólo habrá una recta tangente a $\mathcal{E}$ por P.
Además, como P coincide con el punto auxiliar B de la elipse, la recta tangente es perpendicular al eje $\mathbf{x}$ *y su ecuación es* $x = -\frac{5}{4}$.

(b) *El punto Q está en el exterior de $\mathcal{E}$, pues*

$$144(\tfrac{3}{4})^2 + 64(-1)^2 + 72(\tfrac{3}{4}) - 32(-1) - 131 = 100 > 0.$$

Así, habrá dos rectas tangentes a $\mathcal{E}$ por Q.
Como la abscisa de Q coincide con la abscisa del punto auxiliar B' de la elipse, una de las tangentes a $\mathcal{E}$ por Q, digamos l, es perpendicular al eje $\mathbf{x}$ *y su ecuación es* $x = \frac{3}{4}$.
Para hallar la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{E}$, no perpendicular al eje $\mathbf{x}$ *y que pasa por Q, digamos l', procedemos de manera análoga a como realizamos el estudio previo.*

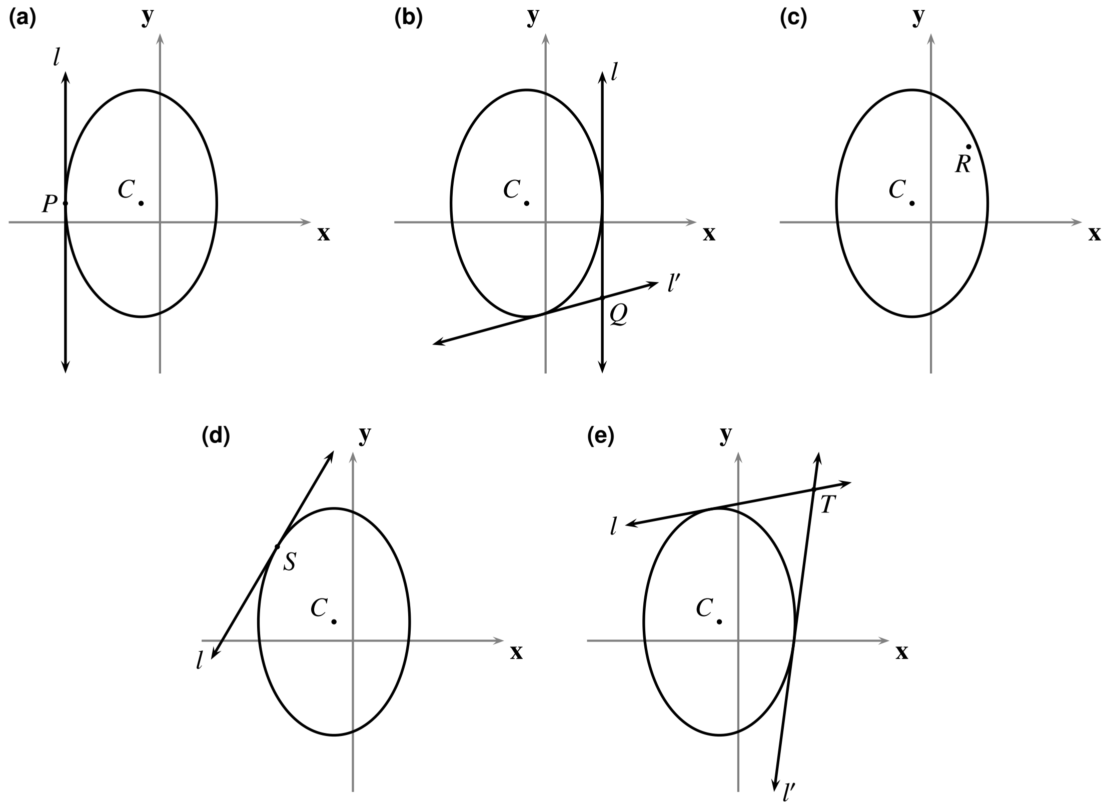


FIGURA 6.11 Representaciones gráficas correspondientes al ejemplo 6.9

Consideramos la ecuación de una recta l' genérica que pasa por Q, no perpendicular al eje $\mathbf{x}$*, digamos $y + 1 = m(x - \frac{3}{4})$ o, equivalentemente,*

$$y = mx - \tfrac{3}{4}m - 1.$$

Sustituimos el lado derecho de esta ecuación por "y" en la ecuación de la elipse y obtenemos la ecuación de segundo grado

$$(64m^2 + 144)x^2 + (-96m^2 - 160m + 72)x + (36m^2 + 120m - 35) = 0.$$

Para que l sea tangente a $\mathcal{E}$ en el punto Q, esta ecuación debe tener dos soluciones iguales o, lo que es lo mismo, su discriminante debe anularse, es decir,

$$40m - 11 = 0.$$

Así, el valor de m para el que la recta l' es tangente a $\mathcal{E}$ por Q es $m = \frac{11}{40}$ y, en consecuencia, su ecuación es $44x - 160y - 193 = 0$.

(c) *El punto R está en el interior de $\mathcal{E}$, pues $144(\frac{1}{2})^2 + 64(1)^2 + 72(\frac{1}{2}) - 32(1) - 131 = -27 < 0$. Así, no existe ninguna recta tangente a $\mathcal{E}$ por R.*

(d) *El punto S está en $\mathcal{E}$, pues $144(-1)^2 + 64(\frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{7}}{8})^2 + 72(-1) - 32(\frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{7}}{8}) - 131 = 0$. Como S no es ninguno de los puntos auxiliares de la elipse, habrá una única recta tangente a $\mathcal{E}$ por S, y ésta no es perpendicular al eje* $\mathbf{x}$.

Para hallar su ecuación, procedemos de manera análoga a como realizamos el estudio previo.
Consideramos la ecuación de una recta l genérica que pasa por S, no perpendicular al eje **x**, *digamos $y - (\frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{7}}{8}) = m(x+1)$ o, equivalentemente,*

$$y = mx + m + \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{7}}{8}.$$

Sustituimos el lado derecho de esta ecuación por "y" en la ecuación de la elipse y obtenemos la ecuación de segundo grado

$$(64m^2 + 144)x^2 + (128m^2 + 48\sqrt{7}m + 72)x + (64m^2 + 48\sqrt{7}m - 72) = 0.$$

Para que l sea tangente a $\mathcal{E}$ en el punto S, esta ecuación debe tener dos soluciones iguales o, lo que es lo mismo, su discriminante debe anularse, es decir,

$$28m^2 - 36\sqrt{7}m + 81 = 0.$$

Como el discriminante de esta última ecuación cuadrática en la variable m es nulo, sólo habrá un valor de m para el que la recta l es tangente a $\mathcal{E}$ por S, a saber, $m = \frac{9\sqrt{7}}{14}$.
Así, la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{E}$ en el punto S es $36\sqrt{7}x - 56y + 57\sqrt{7} + 14 = 0$.

(e) *El punto T está en el exterior de $\mathcal{E}$, pues* $144(1)^2 + 64(2)^2 + 72(1) - 32(2) - 131 = 277 > 0$.
Así, habrá dos rectas tangentes a $\mathcal{E}$ por T.
Como T tiene abscisa distinta de la de los puntos auxiliares de la elipse, las dos tangentes a $\mathcal{E}$ por T no son perpendiculares al eje **x**.
Para hallar sus ecuaciones, procedemos de manera análoga a como realizamos el estudio previo.
Consideramos la ecuación de una recta l genérica que pasa por T, no perpendicular al eje **x**, *digamos $y - 2 = m(x-1)$ o, equivalentemente,*

$$y = mx - m + 2.$$

Sustituimos el lado derecho de esta ecuación por "y" en la ecuación de la elipse y obtenemos la ecuación de segundo grado

$$(64m^2 + 144)x^2 + (-128m^2 + 224m + 72)x + (64m^2 - 224m + 61) = 0.$$

Para que l sea tangente a $\mathcal{E}$ en el punto T, esta ecuación debe tener dos soluciones iguales o, lo que es lo mismo, su discriminante debe anularse, es decir,

$$9m^2 - 70m + 13 = 0.$$

Como el discriminante de esta última ecuación cuadrática en la variable m es positivo, habrá dos valores distintos de m para los que la recta l es tangente a $\mathcal{E}$ por T, a saber: $m = \frac{35-2\sqrt{277}}{9}$ y $m = \frac{35+2\sqrt{277}}{9}$.
Así, las ecuaciones de las rectas tangentes a $\mathcal{E}$ por el punto T son $(35 - 2\sqrt{277})x - 9y - (33 - 2\sqrt{277}) = 0$ *y* $(35 + 2\sqrt{277})x - 9y - (33 + 2\sqrt{277}) = 0$.

QEE ◄

➤ **EJEMPLO 6.10**
Consideremos la misma elipse $\mathcal{E} : 144x^2 + 64y^2 + 72x - 32y - 131 = 0$ *del ejemplo anterior.*

Estudiemos la existencia de rectas tangentes a la elipse $\mathcal{E}$ *que tengan como pendiente el número real* 2 *(ver la figura 6.12).*

Sabemos que existen dos rectas tangentes a la elipse $\mathcal{E}$ *de pendiente* 2*; para hallar sus ecuaciones procedemos de manera análoga a como realizamos el estudio previo.*

Consideramos la ecuación de una recta l genérica de pendiente 2*, digamos* $y = 2x + t$.

Sustituimos el lado derecho de esta ecuación por "y" en la ecuación de la elipse y obtenemos la ecuación de segundo grado

$$400x^2 + (256t + 8)x + 64t^2 - 32t - 131 = 0.$$

Para que l sea tangente a $\mathcal{E}$*, esta ecuación debe tener dos soluciones iguales o, lo que es lo mismo, su discriminante debe anularse, es decir,*

$$16t^2 - 24t - 91 = 0.$$

Como el discriminante de esta ecuación de segundo grado en la variable t es positivo, habrá dos valores de t para los que la recta l es tangente a $\mathcal{E}$*, a saber:* $t = -\frac{7}{4}$ *y* $t = \frac{13}{4}$.

Por tanto, las ecuaciones de las rectas tangentes a $\mathcal{E}$ *de pendiente* 2 *son* $8x - 4y - 7 = 0$ *y* $8x - 4y + 13 = 0$.
QEE ➤

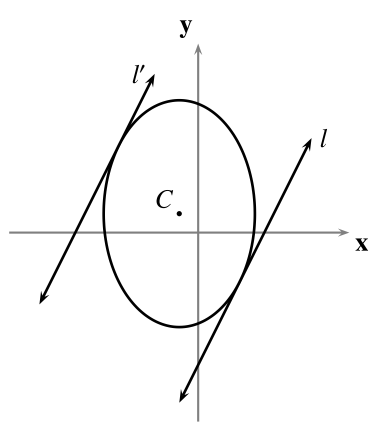


FIGURA 6.12 Representación gráfica correspondiente al ejemplo 6.10

§ 6.4 Aplicaciones de la elipse

En esta sección presentaremos algunas propiedades esenciales de las elipses que han permitido usarlas en múltiples aplicaciones en la Física y, en consecuencia, en la tecnología.

Una de las aplicaciones más relevantes de las elipses depende de la siguiente propiedad.

Consideremos una elipse $\mathcal{E}$ de focos F y F', y un punto P de $\mathcal{E}$, distinto de sus vértices.

Consideremos la recta l tangente a $\mathcal{E}$ por P.

Consideremos la recta l' normal a $\mathcal{E}$ por P; sabemos, por lo hecho en el parágrafo anterior y por el hecho de que P no es ninguno de los vértices, que l' no es paralela al eje focal de $\mathcal{E}$; llamemos N al punto donde l' corta al eje focal de $\mathcal{E}$.

TEOREMA 22 (PROPIEDAD FOCAL DE LAS ELIPSES)

(a) *l' contiene el bisector del ángulo $\angle FPF'$.*

(b) *l contiene los bisectores de los adyacentes lineales del ángulo $\angle FPF'$.*

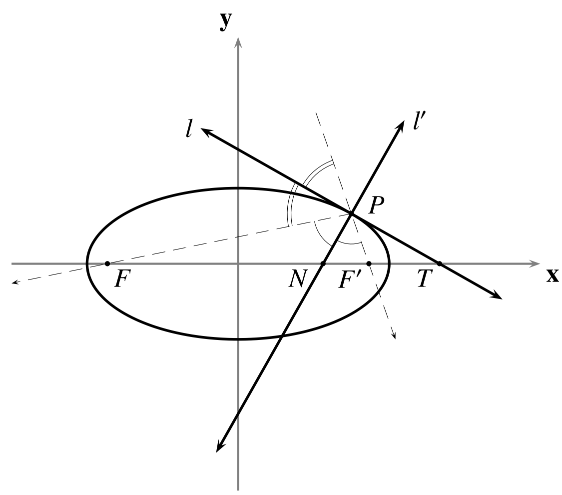


FIGURA 6.13 Propiedad focal de las elipses

■ **PRUEBA**

Consideremos la elipse $\mathcal{E}: \ b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ ($a > b > 0$), cuyos focos son

$$F = (-c, 0) \quad \text{y} \quad F' = (c, 0).$$

Consideremos un punto $P = (u, v)$ sobre la elipse $\mathcal{E}$ distinto de sus vértices, es decir, tal que

$$(u, v) \neq (-a, 0), \quad (u, v) \neq (a, 0) \quad \text{y} \quad b^2u^2 + a^2v^2 - a^2b^2 = 0.$$

Por lo hecho en el parágrafo anterior, la recta l tangente a la elipse $\mathcal{E}$ por el punto P se puede representar por la ecuación

$$b^2ux + a^2vy - a^2b^2 = 0.$$

Así, la recta l' normal a la elipse $\mathcal{E}$ por el punto P se puede representar por la ecuación

$$a^2vx - b^2uy - c^2uv = 0;$$

de donde, el punto N donde l' corta al eje focal de $\mathcal{E}$ es $N = (\frac{c^2u}{a^2}, 0)$.

Como $|u| < a$ y $0 < c < a$, tendremos que $\frac{c^2|u|}{a^2} < c$ y, en consecuencia, el punto N está entre los focos F y F'.

Por otro lado, como $b^2u^2 + a^2v^2 - a^2b^2 = 0$, tenemos que $(a^2 - c^2)u^2 + a^2v^2 - a^2(a^2 - c^2) = 0$ y, de aquí, que $u^2 + v^2 = a^2 - c^2 + \frac{c^2u^2}{a^2} = 0$. De este modo,

$$PF = \left|\frac{a^2 + cu}{a}\right| \quad \text{y} \quad PF' = \left|\frac{a^2 - cu}{a}\right|.$$

Como, además,

$$FN = \left|\frac{c(cu + a^2)}{a^2}\right| \quad \text{y} \quad F'N = \left|\frac{c(cu - a^2)}{a^2}\right|,$$

tendremos que $\frac{PF}{PF'} = \frac{FN}{F'N}$.

Así, por el Principio E.27, $\overrightarrow{PN}$ es bisector del ángulo $\angle FPF'$.

Como l es perpendicular a l' tendremos, por el Principio E.26, que l contiene los bisectores de los adyacentes lineales del ángulo $\angle FPF'$.

QEP ■

Así, si un rayo, lumínico o sonoro, parte de un foco en una superficie reflectora elipsoidal, entonces llega al otro foco.

Esta propiedad de reflexión de la elipse es la causa del efecto murmullo de algunos auditorios (se sabe que sucede así en uno de los salones del Capitolio de EUA, y en la Catedral de San Pablo en Londres) en el que, colocado un orador en un foco es escuchado, al murmurar en voz baja, por una persona que se encuentra en el otro foco, siendo inaudible para el resto de las personas en el auditorio; también dio lugar al tratamiento llamado litotricia (que permite eliminar un cálculo renal mediante un reflector de sección elíptica, donde en uno de los focos está el cálculo y en el otro se generan ondas acústicas de tal intensidad que destruyen el cálculo sin dañar el tejido circundante y sin necesidad de cirugía: se coloca a la persona en un tanque de agua elíptico, ubicando el cálculo del riñón exactamente en uno de los focos, y se emiten ondas acústicas desde el otro de los focos que pulverizan el cálculo).

De acuerdo con el modelo de Johannes Kepler, los planetas giran en torno al sol en órbitas elípticas con el sol en uno de sus focos (la excentricidad de la órbita de Marte es aproximadamente $\frac{1}{11}$, la de la Tierra es $\frac{1}{60}$, mientras que la del cometa Halley es 0.9675, casi parabólica). Los satélites en torno a la tierra y los electrones en torno al núcleo orbitan en trayectorias elípticas; algunos engranajes mecánicos y los arcos de algunos puentes son de forma elíptica.

Si vemos un círculo oblicuamente, nos parece una elipse. La superficie del agua que está en un recipiente cilíndrico inclinado determina una elipse.

Problemas

En cada uno de los problemas en los que sea pertinente, realice una representación gráfica.

6.1 Dados los focos y el diámetro mayor de una elipse, muestre un procedimiento para graficar puntos de la elipse, por medio de:

- **(a)** un cordón y dos tachuelas.
- **(b)** un canto recto y un compás.

6.2 Dados los diámetros mayor y menor de una elipse, muestre un procedimiento para graficar puntos de la elipse, por medio de un canto recto y un compás.

6.3 Verifique que ninguna elipse tiene tres puntos colineales distintos.

6.4 Encuentre la ecuación general de la elipse que satisface las respectivas condiciones.

- **(a)** directriz $x = -4$, foco el punto $(-1, 0)$ y excentricidad $\frac{1}{2}$.
- **(b)** directriz $y = 32$, foco el punto $(0, 2)$ y excentricidad $\frac{1}{4}$.
- **(c)** vértices los puntos $(5, 0)$, $(-5, 0)$ y foco el punto $(3, 0)$.
- **(d)** vértices los puntos $(0, 5)$, $(0, -5)$ y foco el punto $(0, -4)$.
- **(e)** focos los puntos $(7, 0)$, $(-7, 0)$, y su excentricidad es $\frac{1}{2}$.
- **(f)** centro en el origen, uno de sus vértices en el punto $(0, -4)$ y pasa por el punto $(3, 1)$.
- **(g)** centro en el origen, diámetro mayor sobre el eje **x** y pasa por los puntos $(2, 2)$, $(3, 1)$.
- **(h)** centro en el origen, diámetro menor sobre el eje **x**, pasa por el punto $(2, 1)$, y la longitud de su diámetro mayor es el doble de la de su diámetro menor.
- **(i)** focos los puntos $(2, 0)$, $(-2, 0)$, y su radio mayor mide 10.
- **(j)** focos los puntos $(2, 0)$, $(-2, 0)$, y su radio menor mide 3.
- **(k)** vértices $(3, 1)$, $(5, 1)$ y su excentricidad es $\frac{1}{5}$.
- **(l)** puntos auxiliares $(4, 2)$, $(0, 2)$, y su radio mayor mide 10.
- **(m)** vértices los puntos $(1, -1)$, $(-3, -1)$, y su radio menor mide 3.
- **(n)** directriz $y = 5$, foco el punto $(0, 2)$ y excentricidad $\frac{1}{4}$.

6.5 Si el centro de una elipse no es el origen y sus ejes son perpendiculares a los ejes coordenados, verifique que su ecuación queda completamente determinada por cuatro de sus puntos distintos.

6.6 Encuentre la ecuación de la elipse que pasa por los puntos:

- **(a)** $(8, -3)$, $(-6, 4)$, $(-8, 1)$ y $(2, -4)$.
- **(b)** $(-5, 0)$, $(-2, 2)$, $(0, 1)$ y $(2, -1)$.
- **(c)** $(-3, 2)$, $(7, 2)$, $(2, 5)$ y $(2, -1)$.

6.7 Encuentre el centro, los radios mayor y menor, la semidistancia focal, la excentricidad, los vértices, los puntos auxiliares, los focos y las directrices de las elipses siguientes.

(a) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0.$

(b) $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0.$

(c) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 32y + 37 = 0.$

(d) $3x^2 + 5y^2 + 6x + 20y + 8 = 0.$

(e) $2x^2 + 4y^2 - 36x + 154 = 0.$

(f) $7x^2 + 2y^2 - 28x - 12y + 32 = 0.$

6.8 Encuentre, parametrizada con la excentricidad y la distancia p del foco a la directriz, la ecuación de la elipse que tiene directriz d, foco F y excentricidad e, respecto al sistema de ejes ortogonales cuyo eje $\mathbf{x}$ coincide con su eje focal, orientado positivamente desde D hacia F, y cuyo eje $\mathbf{y}$ coincide con su directriz.

6.9 Encuentre, parametrizada con la longitud del radio mayor, la familia de elipses que tienen centro $(1, 5)$, eje focal común y perpendicular al eje $\mathbf{y}$, y excentricidad $\frac{1}{3}$.

6.10 En la familia de elipses $x^2 + 4y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + 1 = 0$, encuentre la ecuación de la que pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(6, 1)$.

6.11 En la familia de elipses $\mathsf{A}x^2 + y^2 + 8x - 6y - 12 = 0$, encuentre las ecuaciones de las que tienen excentricidad $\frac{1}{3}$.

6.12 Dada la elipse $25x^2 + 16y^2 = 400$, encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes:

(a) por el punto $(2, \frac{75}{4})$.

(b) de pendiente -1.

(c) desde el punto $(3, 6)$.

(d) por los vértices.

6.13 Dada la elipse $3x^2 + 5y^2 + 6x + 20y + 8 = 0$, encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes que son paralelas (perpendiculares) a la recta $x + y + 1 = 0$.

6.14 Calcule los ángulos entre las rectas tangentes desde el punto $(1, 3)$ a la elipse $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$, y las coordenadas de los puntos de contacto.

6.15 Adecuando las definiciones dadas en el ejercicio 3.17, encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal, y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, para cada elipse y punto de contacto dados.

(a) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$; $(1, \frac{4\sqrt{2}}{3})$.

(b) $9x^2 + 4y^2 + 32x - 18y + 37 = 0$; $(-1, 1)$.

(c) $9x^2 + y^2 - 18x - 2y + 1 = 0$; $(2, 1)$.

(d) $2x^2 + 4y^2 - 36x + 154 = 0$; $(7, 0)$.

6.16 Dada la elipse $7x^2 + 2y^2 - 28x - 12y + 32 = 0$, encuentre los valores de t para los que la recta $y = 2x + t$

(a) no corta a la elipse.

(b) es secante a la elipse.

(c) es tangente a la elipse.

6.17 Dada la elipse $7x^2 + 2y^2 - 28x - 12y + 32 = 0$, encuentre los valores de m para los que la recta $y = mx + 3$

(a) no corta a la elipse.

(b) es secante a la elipse.

(c) es tangente a la elipse.

6.18 Dada la elipse $7x^2+2y^2-28x-12y+32 = 0$, encuentre los valores de h para los que la recta $x = h$

(a) no corta a la elipse.

(b) es secante a la elipse.

(c) es tangente a la elipse.

6.19 Calcule los ángulos entre la recta $x - y - 1 = 0$ y la elipse $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.⟨3⟩

6.20 Calcule los ángulos entre la parábola $y^2 - x = 0$ y la elipse $25x^2 + 4y^2 - 100 = 0$.

6.21 Calcule los ángulos entre las elipses $25x^2 + 4y^2 - 100 = 0$ y $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$, en uno de sus puntos de intersección.

6.22 Verifique que las elipses $9x^2 + 16y^2 + 96y = 0$ y $9x^2 + 4y^2 - 36x = 0$ son ortogonales.

6.23 Verifique que no puede haber dos elipses ortogonales con el mismo sistema de ejes canónicos.

6.24 En una elipse, se llama:

- ***cuerda*** a cualquier segmento que une dos puntos distintos de la elipse.
- ***cuerda focal*** a cualquier cuerda que contiene un foco de la elipse.
- ***lado recto*** (del latín, *latus rectum*) a una cuerda focal perpendicular al eje focal de la elipse.
- ***radio focal*** a cualquier segmento cuyos extremos son un foco de la elipse y un punto de ella.
- ***diámetro*** a cualquier cuerda que contiene el centro de la elipse, o a su longitud.
- ***diametral*** a cualquier recta que contiene el centro de la elipse.
- ***radio*** a cualquier segmento cuyos extremos son el centro de la elipse y un punto de ella, o a su longitud.
- ***cuerda de contacto del punto*** P exterior a la elipse a la cuerda cuyos extremos son los puntos de contacto de las tangentes a la elipse desde P.

En cualquier elipse de radio mayor a y radio menor b, verifique que:

(a) cualquier radio está en el intervalo $[b, a]$⟨4⟩.

(b) las ordenadas de los extremos de los lados rectos están dadas por $\pm\frac{b^2}{a}$; muestre que dichas ordenadas también se pueden expresar como $\pm(a - ec)$⟨5⟩.

(c) la longitud del lado recto es $\frac{2b^2}{a}$.

6.25 Si $P = (u, v)$ es un punto exterior de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, verifique que la ecuación de la secante determinada por la cuerda de contacto de P es $b^2ux + a^2vy = a^2b^2$.

6.26 Dada la elipse $x^2 + 2y^2 = 2$, encuentre la ecuación de la secante determinada por la cuerda de contacto del punto $(3, 1)$.

6.27 Verifique que el valor absoluto de las pendientes de las rectas tangentes a una elipse en los extremos de sus lados rectos es su excentricidad.

6.28 Verifique que el diámetro menor de una elipse es media proporcional entre su diámetro mayor y su lado recto.

6.29 Encuentre la ecuación general de la elipse que satisface las siguientes condiciones:

(a) focos $(1, 0)$, $(-1, 0)$, y longitud de sus lados rectos 2.

(b) vértices $(2, 6)$ y $(2, 2)$, y longitud de sus lados rectos 2.

6.30 Todo círculo con centro en el centro de una elipse, y radio entre sus radios menor y mayor, intersecta a la elipse en cuatro puntos distintos.

6.31 Si $P = (u, v)$ es un punto cualquiera de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, verifique que la longitud de sus radios focales son $a + eu$, y $a - eu$.⟨6⟩

6.32 Encuentre la longitud de los radios focales del punto $(1, \frac{4\sqrt{5}}{5})$ que está sobre la elipse $4x^2+5y^2 = 20$.

6.33 **(Definición del cordón)**⟨7⟩
Verifique que una ***elipse*** coincide con el conjunto de los puntos del plano para los que la suma de las distancias a dos puntos previamente fijados (los ***focos***) es una constante positiva $2a$ (la longitud de su diámetro mayor), mayor que la distancia entre los focos (la distancia focal).

6.34 **(Propiedad intrínseca de la elipse)**
Fijada una recta f, un punto C sobre f, y dos números reales positivos a y b, verifique que una ***elipse*** coincide con el conjunto de los puntos P del plano para los que

$$\frac{(CP)^2}{a^2} + \frac{(PP')^2}{b^2} = 1,$$

donde P' es la proyección de P sobre f.

6.35 Considere un círculo C y uno de sus diámetros; por cada punto Q del círculo, distinto de los extremos del diámetro fijado, considere el punto Q' que es la proyección de Q sobre dicho diámetro; considere finalmente el punto P que es punto medio del segmento $\overline{QQ'}$.

(a) Verifique que la figura geométrica compuesta por los extremos del diámetro fijado, y todos los puntos P que se obtienen de la manera descrita, coincide con el conjunto de los puntos (x, y) del plano tales que $(x, 2y)$ está en C.

(b) ¿Qué tipo de figura geométrica es la anterior?

6.36 Considere un círculo C y uno de sus diámetros; por cada punto Q del círculo, distinto de los extremos del diámetro fijado, considere el punto Q' que es la proyección de Q sobre dicho diámetro; considere finalmente un número real positivo k y el punto P del segmento $\overline{QQ'}$ tal que $\frac{PQ}{PQ'} = k$.

(a) Verifique que la figura geométrica compuesta por los extremos del diámetro fijado, y todos los puntos P que se obtienen de la manera descrita, coincide con el conjunto de los puntos (x, y) del plano tales que $(x, (k+1)y)$ está en C.

(b) ¿Qué tipo de figura geométrica es la anterior?

6.37 Si $P = (u, v)$ es un punto cualquiera de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, verifique que $Q = (-u, -v)$ es el otro extremo del diámetro que tiene un extremo en P.⟨8⟩

6.38 Verifique que, en la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, la suma de las longitudes de los radios focales de los extremos de un diámetro, respecto al mismo foco, es $2a$.

6.39 Verifique que los extremos de cualquier diámetro de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, y sus focos, determinan un paralelogramo de área $2ae$ por el valor absoluto de la ordenada de cualquiera de sus extremos.

6.40 Dada la elipse $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$, calcule la longitud de:

(a) la cuerda que está sobre la recta $x + y = 0$.

(b) las cuerdas focales que son paralelas a la recta $3x + y - 7 = 0$.

6.41 Represente gráficamente las figuras geométricas que satisfacen las condiciones dadas.

(a) $x + y - 1 > 0$ y $9x^2 + 4y^2 - 36 < 0$.

(b) $y^2 - x - 10y + 20 < 0$ y $25x^2 + 4y^2 - 100 \leq 0$.

(c) $9x^2 + 4y^2 - 36 \leq 0$ y $4x^2 + 9y^2 - 36 > 0$

6.42 Considere la elipse $\mathcal{E} : \ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ y el círculo $C : \ x^2 + y^2 = a^2$, y considere además un punto $P = (u, v)$ en $\mathcal{E}$ y cualquiera de los dos puntos $P' = (u, v')$ de corte entre la recta $x = u$ y C. Verifique que la recta tangente a $\mathcal{E}$ en P corta al eje $\mathbf{x}$ en el mismo punto en que lo corta la recta tangente a C en P'.

6.43 Considerando los dos ejercicios anteriores, muestre sendos procedimientos para graficar la tangente y la normal a una elipse en cualquiera de sus puntos.

6.44 Verifique que una recta es secante a una elipse, si y sólo si, contiene un punto de su interior.

6.45 Verifique que el radio menor de una elipse es media proporcional entre las distancias de los focos a cualquier tangente.

6.46 Verifique que el radio menor de una elipse es media proporcional entre los dos segmentos del diámetro mayor determinados por uno cualquiera de los focos.

6.47 Verifique que dos elipses tienen la misma excentricidad si, y sólo si, tienen diámetros correspondientes proporcionales.

6.48 Verifique que las tangentes a una elipse, en los extremos de un diámetro, son paralelas.

6.49 Considere la familia de todas las cuerdas de una elipse paralelas a una cuerda dada. Verifique que el conjunto de los puntos medios de los miembros de esa familia es un diámetro de la elipse, excepto sus extremos.

6.50 Verifique que la ecuación de la recta que contiene los puntos medios de cualquier familia de cuerdas paralelas de pendiente m ($m \neq 0$, $m \neq \pm\frac{b}{a}$) de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ es $y = -\frac{b^2}{a^2m}x$.

6.51 En una elipse, se llaman:

- ***diámetros conjugados***, a dos diámetros tales que cada uno de ellos contiene a los puntos medios de las cuerdas paralelas al otro.
- ***cuerdas suplementarias***, a dos cuerdas tales que tienen un extremo común y los otros dos extremos son extremos de un diámetro que no contiene al extremo común.

Verifique que:

(a) Los diámetros mayor y menor de una elipse son conjugados.

(b) Los diámetros paralelos a dos cuerdas suplementarias de una elipse son conjugados.

6.52 Una tangente a una elipse, en un extremo de uno de sus diámetros, es perpendicular a ese diámetro si, y sólo si, ese diámetro es el mayor o el menor.

6.53 Los únicos diámetros de una elipse conjugados y perpendiculares son los diámetros mayor y menor.

6.54 Dado el dibujo (el trazado) de una elipse, dibuje su centro, eje focal, sus focos, sus diámetros menor y mayor, y sus directrices.

6.55 Dibuje (en una escala apropiada) la órbita de traslación de la Tierra alrededor del Sol, y ubique este último en ella, sabiendo que es una elipse de excentricidad 0.017, cuyo diámetro mayor mide 299.000.000km, y que el Sol está en uno de sus focos.

6.56 El cometa Halley tiene una órbita elíptica alrededor del Sol con diámetros mayor y menor 36.18 UA (UA es la distancia media de la Tierra al Sol) y 9.12 UA, respectivamente. Encuentre su máximo acercamiento al Sol, suponiendo que el Sol está en uno de sus focos.

6.57 En una mesa de billar elíptica, una bola es disparada desde uno de los focos con una fuerza tal que continua rebotando indefinidamente sobre las barandas. Describa su trayectoria final.

6.58 Un arco tiene forma elíptica cuyo claro de luz es 120m y cuya altura es 75m. Encuentre la longitud de dos soportes verticales situados cada uno a igual distancia del extremo del arco.

6.59 (Parametrización de una elipse)
Si $\mathcal{E}$ es la elipse con centro en el origen, radio mayor a, radio menor b y eje focal sobre el eje $\mathbf{x}$, verifique que el punto $P = (u, v)$ está en $\mathcal{E}$ si, y sólo si, existe un número real t con $0 \leqslant t < 2\pi$ tal que

$$u = a\cos t \qquad \text{y} \qquad v = b\,\mathrm{sen}\, t.$$

6.60 (Parametrización racional de una elipse)
Si $\mathcal{E}$ es la elipse con centro en el origen, radio mayor a, radio menor b y eje focal sobre el eje $\mathbf{x}$, verifique que el punto $P = (u, v)$ distinto de $A = (-a, 0)$ está en $\mathcal{E}$ si, y sólo si, existe un número real t tal que

$$u = a\frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad \text{y} \qquad v = b\frac{2t}{1 + t^2}.$$

6.61 (Parametrización racional de una elipse)
Si $\mathcal{E}$ es la elipse con centro en el origen, radio mayor a, radio menor b y eje focal sobre el eje $\mathbf{x}$, y k es cualquier número real no nulo, verifique que el punto $P = (u, v)$ distinto de $A = (-a, 0)$ está en $\mathcal{E}$ si, y sólo si, existe un número real t tal que

$$u = a\frac{1 - (kt)^2}{1 + (kt)^2} \qquad \text{y} \qquad v = b\frac{2(kt)}{1 + (kt)^2}.$$

Comentarios

⟨1⟩ Algunas veces este segmento es llamado ***el eje mayor*** de la elipse; y, en consecuencia, el número real $2a$ es llamado la longitud del eje mayor.

⟨2⟩ Algunas veces este segmento es llamado ***el eje menor*** de la elipse; y, en consecuencia, el número real $2b$ es llamado la longitud del eje menor.

⟨3⟩ En general, para calcular esos ángulos entre dos figuras geométricas de las que estamos estudiando, se encuentran primero los puntos de corte resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de dichas figuras geométricas, se encuentran las rectas tangentes a cada una de esas figuras en esos puntos de corte y, finalmente, se calculan los ángulos entre las rectas tangentes.

⟨4⟩ Es por esta razón razón que a es llamado radio mayor, y b radio menor, de la elipse.

⟨5⟩ Este dato facilita el trabajo de hacer un dibujo aproximado de una elipse, pues provee cuatro puntos adicionales de la elipse, aparte de los cuatro vértices que ya se tienen, a saber: los extremos de los dos lados rectos, uno por cada foco.

⟨6⟩ Note que la suma de los radios focales de cualquier punto de una elipse es constante e igual a la longitud de su diámetro mayor.

⟨7⟩ En general, el apósito ***del cordón*** que adjuntamos a las definiciones de la cónicas proviene del hecho de que estas definiciones perfilan la manera de dibujar la cónica usando un cordón.

⟨8⟩ Note que Q es el simétrico de P respecto al origen; con lo que el centro de la elipse es el punto medio de cualquiera de sus diámetros, y que la longitud de un diámetro es el doble de la longitud de los radios que determina.

Orientación para resolver los problemas del Capítulo 6

A continuación ofrecemos ***ayudas*** para algunos de los problemas.

6.1.(a): Este procedimiento tiene su sustento en el ejercicio 6.33.

6.1.(b): Trace la recta $\overleftrightarrow{FF'}$, considere el punto medio del segmento $\overline{FF'}$ y ahora trace los puntos A y A'. Para obtener otros puntos de la elipse, tome un punto M cualquiera entre F y F' y considere los puntos de intersección de los círculos de centros en F y F', y de radios MA y MA' (son cuatro círculos). Verifique que tales puntos están sobre la elipse. Observe que, si toma los puntos M que no estén entre F y F', los círculos no se cortan.

6.2: Considere dos círculos concéntricos de radios a y b, y centro C en el origen de un sistema de coordenadas; tome en el círculo de radio mayor un punto P cualquiera, y considere el punto Q de intersección del segmento $\overline{CP}$ con el círculo de radio menor. Usando el Teorema de Thales, verifique que el punto T que tiene la ordenada de P y la abscisa de Q está en la elipse.

6.24: Tome los ejes canónicos de la elipse a la que pertenece un punto $P = (u, v)$; verifique que $OP = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}u^2 + b^2}$ y use el hecho de que $|u| \leqslant a$.

6.31: Para eliminar los valores absolutos que resultan después de calcular la distancia del punto a un foco, recuerde que $-a \leqslant u \leqslant a$ y que $0 < e < 1$; de donde $-ea \leqslant \pm eu \leqslant ea < a$.

6.33: Para una de las inclusiones use el ejercicio 6.30.

6.44: Para una de la implicaciones, tome un punto $P = (u, v)$ en el interior de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Analice aparte las rectas verticales por P. Tome como ecuación de las que no son verticales por P, la ecuación $y = mx - mu + v$. Verifique que el discriminante de la ecuación de segundo grado que resulta del sistema de ecuaciones entre esta recta y la elipse es siempre positivo, mostrando que éste debe tener siempre el mismo signo para cualquier m (al expresarlo en función de m y mostrar que el discriminante de esa ecuación en m es siempre negativo), y que es positivo cuando $m = 0$.

Para la otra implicación, verifique que el punto medio del segmento determinado por los dos puntos de corte de la secante con la elipse está en el interior, mostrando que satisface la definición geométrica del interior de la elipse, al usar los siguientes dos Principios de la Geometría elemental: la mediana de un triángulo es menor que la semisuma de los dos lados adyacentes; el segmento que une los puntos medios de los dos lados que no son base de un trapecio mide la semisuma de las bases.

6.49: Verifique que los puntos medios de cualesquiera dos cuerdas paralelas están en una diametral cuya pendiente es $-\frac{b^2}{a^2m}$ con m la pendiente común, utilizando el hecho de que la suma de las raíces de una ecuación de segundo grado es el opuesto del cociente entre el coeficiente del término de primer grado y el coeficiente del término de segundo grado.

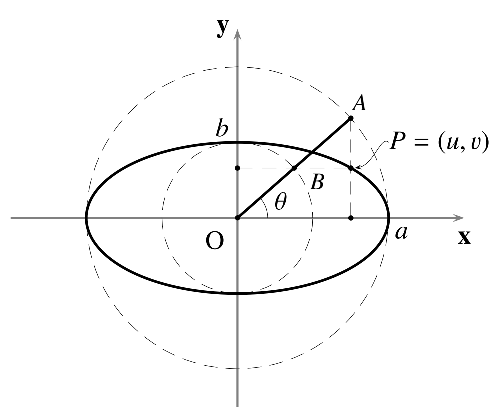


FIGURA 6.14 Ayuda del ejercicio 6.59

6.54: Para encontrar el centro: tome tres puntos distintos; por uno de ellos trace una cuerda paralela a la determinada por los otros dos; los puntos medios de estas cuerdas determinan un diámetro; tome ahora el punto medio de ese diámetro.

Para el eje focal y los diámetros mayor y menor: trace el círculo con centro en el centro de la elipse y radio la mitad del diámetro que encontró anteriormente; use el ejercicio 6.31 y considere las dos cuerdas con extremo común en uno de los puntos de corte del círculo y la elipse, y los otros extremos son los extremos del diámetro anterior; observe que estas cuerdas son perpendiculares y suplementarias; las paralelas a estas cuerdas por el centro son diámetros perpendiculares y conjugados; use ahora el ejercicio 6.53.

Para los focos: considere los puntos de corte con el diámetro mayor de un círculo de radio el radio mayor y centro en uno de los extremos del diámetro menor.

Para las directrices: considere un rayo que parte del centro y que no esté contenido en el eje focal; ubique en él los puntos que distan del centro tanto como distan del centro un vértice y el foco correspondiente; use el Teorema de Thales para mostrar que la directriz pasa por el punto del eje focal en que una paralela a la recta determinada por el vértice en cuestión, y el punto sobre el rayo que corresponde al foco en cuestión, corta al eje focal.

6.59: Considere los círculos C_a y C_b, de radios a y b con centro en el origen (ver la figura 6.14); por el punto $P = (u, v)$ de la elipse, considere la recta perpendicular al eje **x**; tome el punto $A = (u, z)$, de corte entre la recta anterior y el círculo C_a, que está del mismo lado del eje **x** en el que está el punto P; considere el segmento $\overline{OA}$; tome $\boxed{t = \theta}$, el ángulo que determina el rayo $\overrightarrow{OA}$ con el sentido positivo del eje **x**; usando el ejercicio 3.46, pruebe que $u = a \cos t$. Por el punto $P = (u, v)$ de la elipse, considere la recta perpendicular al eje **y**; llame B al punto de intersección de la recta anterior con la recta $\overleftrightarrow{OA}$ ($y = \frac{z}{u}x$, si $u \neq 0$); verifique que B está sobre el círculo C_b, comprobando que las coordenadas de ese punto satisfacen su ecuación (recuerde que $u^2 + z^2 = a^2$, pues A está en C_a, y que $a^2v^2 = b^2(a^2 - u^2)$, pues P está en $\mathcal{E}$); usando el ejercicio 3.46, pruebe que $v = b \operatorname{sen} t$.
Note que este procedimiento presupone que el punto P no es ninguno de los vértices de la elipse; verifique aparte, con el mismo t, que la afirmación también es cierta para estos puntos.

6.60: Utilice un procedimiento análogo al del ejercicio 3.47, con el punto $A = (-a, 0)$ y $\boxed{t = \frac{a}{b} \tan \alpha}$.

6.61: Utilice un procedimiento análogo al del ejercicio 3.48.

CAPÍTULO

7

HIPÉRBOLAS

Recordemos que una ***hipérbola*** es el conjunto de los puntos P del plano para los que

$$PF = e \cdot \mathbf{d}(P, d), \tag{7.1}$$

donde d es su ***directriz***, F es su ***foco*** y e, tal que $e > 1$, es su ***excentricidad***; tal como establecimos en el Capítulo 5 para las cónicas en general, denotemos por $\mathbf{f}$ a su ***eje focal*** y por D al punto de corte entre $\mathbf{f}$ y d.

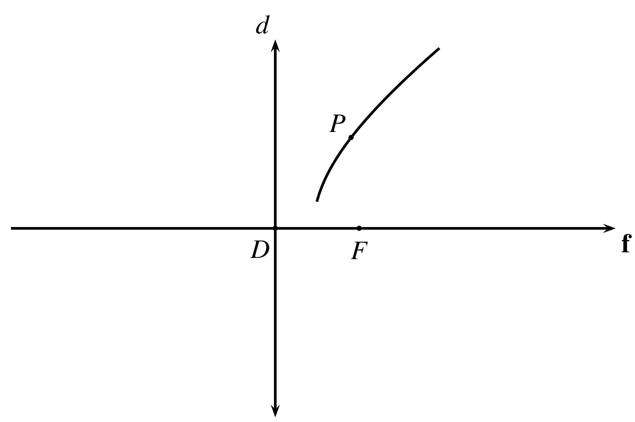


FIGURA 7.1 Eje focal de una hipérbola

§ 7.1 Ecuación general y ecuación canónica de una hipérbola

Antes de iniciar el estudio analítico de las hipérbolas, verificaremos primero lo afirmado en las siguientes dos proposiciones.

LEMA 7.1
Las hipérbolas tienen exactamente dos puntos de corte con su eje focal: uno que está entre F y D, que denotaremos por A, y otro separado de F por D, que denotaremos por A′.

■ **PRUEBA**
Consideremos una hipérbola $\mathcal{H}$, de directriz d, foco F y excentricidad e.
Supongamos que V es un punto que está en el eje focal de $\mathcal{H}$ y en $\mathcal{H}$; así, V, F y D son colineales.
Por el lema 5.1, V, F y D son distintos. Así, $VF > 0$, $VD > 0$ y $FD > 0$, y además, por las propiedades de la Interposición de puntos en una recta, se cumple una, y sólo una, de las siguientes afirmaciones:

(I) F está entre V y D. **(II)** V está entre F y D. **(III)** D está entre F y V.

Por ser el eje focal perpendicular a la directriz, y estar V sobre el eje focal, tendremos que

$$\mathbf{d}(V, d) = VD.$$

Así, por (7.1) y la definición de hipérbola tendremos que,

$$VF = e \cdot VD. \tag{7.2}$$

Si acaso se cumpliera (I), tendríamos que $FD = VD - VF = VD - e \cdot VD = (1 - e)VD$; de donde, por el hecho de que $e > 1$, tenemos que $FD < 0$; contrario al hecho de que $FD > 0$.
Así hemos verificado que $\mathcal{H}$ no puede tener más de dos puntos de corte con su eje focal: uno entre F y D, y el otro separado de F por D.
Por otro lado, en virtud del resultado expuesto en el problema 1.21, llamemos A al único punto del eje focal que satisface

$$D\text{-}A\text{-}F \qquad \text{y} \qquad \frac{AF}{AD} = e,$$

y A' al único punto del eje focal que satisface

$$A'\text{-}D\text{-}F \qquad \text{y} \qquad \frac{A'F}{A'D} = e.$$

Así tendremos que

$$\frac{DF}{DA} = e + 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{DF}{DA'} = e - 1.$$

Como $AF = DF - AD = (e + 1) \cdot AD - AD = e \cdot AD$, tendremos que A está en $\mathcal{H}$; de manera análoga se verifica que A' está en $\mathcal{H}$. Como A y A' son dos puntos distintos de $\mathcal{H}$ que están sobre el eje focal, tendremos que $\mathcal{H}$ corta su eje focal exactamente en los puntos A y A' definidos anteriormente.

QEP ■

Llamaremos ***vértices*** de una hipérbola, a los puntos A y A' en que corta a su eje focal.

Llamaremos ***centro*** de una hipérbola, al punto C que es el punto medio entre sus vértices A y A'.

Es claro, por la proposición anterior, que la hipérbola no contiene su centro (pues, en caso contrario, la hipérbola cortaría su eje focal en tres puntos distintos).

Llamaremos ***eje normal*** de una hipérbola, a la recta **n** perpendicular al eje focal y que pasa por el centro C, escogiendo una cualquiera de sus dos orientaciones (que, como consecuencia de su definición, es paralelo a la directriz).

LEMA 7.2
El vértice A de la hipérbola está entre su centro C y su foco F.

■ **PRUEBA**
Consideremos una hipérbola $\mathcal{H}$ de foco F, vértices A y A', y centro C.
Como D-A-F y A'-D-F, tendremos que A'-A-F. Además, por definición de punto medio, tendremos que A'-C-A. Por tanto, C-A-F.

QEP ■

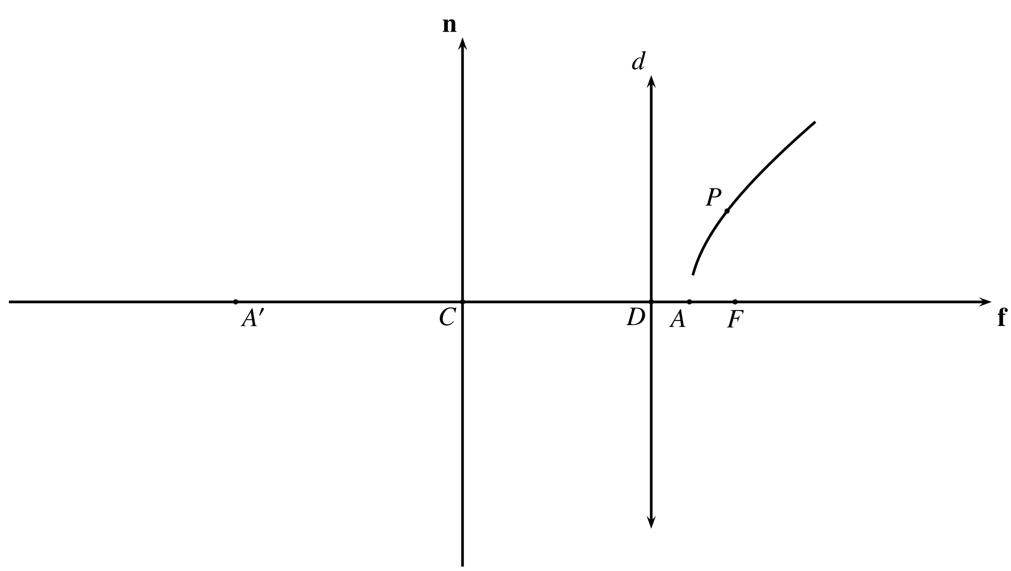


FIGURA 7.2 Vértices, centro y eje normal de una hipérbola

OBSERVACIÓN 7.1

(a) *Note que, de los dos semiplanos que determina la directriz, el foco F y el vértice A están en el semiplano opuesto del semiplano en el que están el centro C y el vértice A'.*

(b) *Note que dada una hipérbola (es decir, su directriz d, su foco F y su excentricidad e), podemos obtener el eje focal **f**, los vértices A y A', y el centro C*
*(el eje focal **f** es la recta perpendicular a d por F, orientada de D hacia F, donde D es el punto de corte entre d y **f**; los vértices A y A' son los únicos puntos que satisfacen $DA = \frac{DF}{e+1}$ y $DA' = \frac{DF}{e-1}$; el centro C es el punto medio del segmento de extremos A y A').*

Consideremos las relaciones g que asocian, a pares ordenados de números reales, un número real, cuyas reglas de asociación son polinomios de segundo grado en dos variables de la forma

$$g(x, y) := \mathsf{A}x^2 + \mathsf{C}\,y^2 + \mathsf{F}$$
$$(\mathsf{A}, \mathsf{C} \text{ y } \mathsf{F} \text{ números reales tales que } \mathsf{A} > 0, \mathsf{C} < 0 \text{ y } \mathsf{F} < 0).$$

El objetivo central de esta parte del capítulo es verificar que, dada una figura geométrica $\mathcal{G}$ cualquiera, se tiene lo afirmado en el siguiente Teorema.

Teorema 23 (Representación analítica de una hipérbola)
$\mathcal{G}$ es una hipérbola si, y sólo si, existe un sistema de ejes ortogonales **xOy** *tal que $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación cuadrática en dos variables de la forma*

$$\mathsf{A}x^2 + \mathsf{C}\,y^2 + \mathsf{F} = 0 \tag{7.3}$$
$$(\mathsf{A}, \mathsf{C} \text{ y } \mathsf{F} \text{ números reales tales que } \mathsf{A} > 0, \mathsf{C} < 0 \text{ y } \mathsf{F} < 0).$$

Verificado esto, la ecuación (7.3) será llamada ***la ecuación general***, o simplemente ***la ecuación***, de la hipérbola $\mathcal{G}$.

Supongamos que $\mathcal{G}$ es una hipérbola, y llamemos: d a su directriz, F a su foco y e, con $e > 1$, a su excentricidad. Por la observación 7.1.(b), podemos suponer que tenemos como datos adicionales: sus vértices A y A', y su centro C.

Consideremos el sistema de ejes ortogonales **xOy** que tiene: como eje **x**, el eje focal de la hipérbola, ubicando el 0 en el centro C; y como eje **y**, el eje normal de la hipérbola, ubicando el 0 en el centro C (ver la figura 7.3).

Consideremos los números reales positivos $a = CA$, $c = CF$ y $k = CD$; así, las coordenadas de C son $(0, 0)$, las de F son $(c, 0)$, las de A son $(a, 0)$, las de A' son $(-a, 0)$, las de D son $(k, 0)$ y la ecuación de la directriz d es $x = k$ (por ser perpendicular al eje **x**).

Por los lemas 7.1 y 7.2, tenemos que $k < a < c$.

Por comodidad en el desarrollo algebraico subsiguiente, y apoyados en la parte (b) de la observación 7.1, calculamos c y k en términos de a y e, de la siguiente manera. Como A y A' están sobre la hipérbola tendremos, por definición, que $AF = e \cdot \mathbf{d}(A, d) = e \cdot AD$ y $A'F = e \cdot \mathbf{d}(A', d) = e \cdot A'D$. Como $|c - a| = |a - c| = c - a$, $|a - k| = |k - a| = a - k$, $|-a - c| = |c + a| = c + a$ y $|-a - k| = |k + a| = a + k$ tendremos, de

$$\begin{cases} c - a = e \cdot (a - k) \\ c + a = e \cdot (a + k) \end{cases},$$

que

$$k = \frac{a}{e} \quad \text{y} \quad c = ae; \tag{7.4}$$

de donde, sustituyendo correspondientemente, las coordenadas de F son $(ae, 0)$, y la ecuación de la directriz d es $x = \frac{a}{e}$ (ver la figura 7.4).

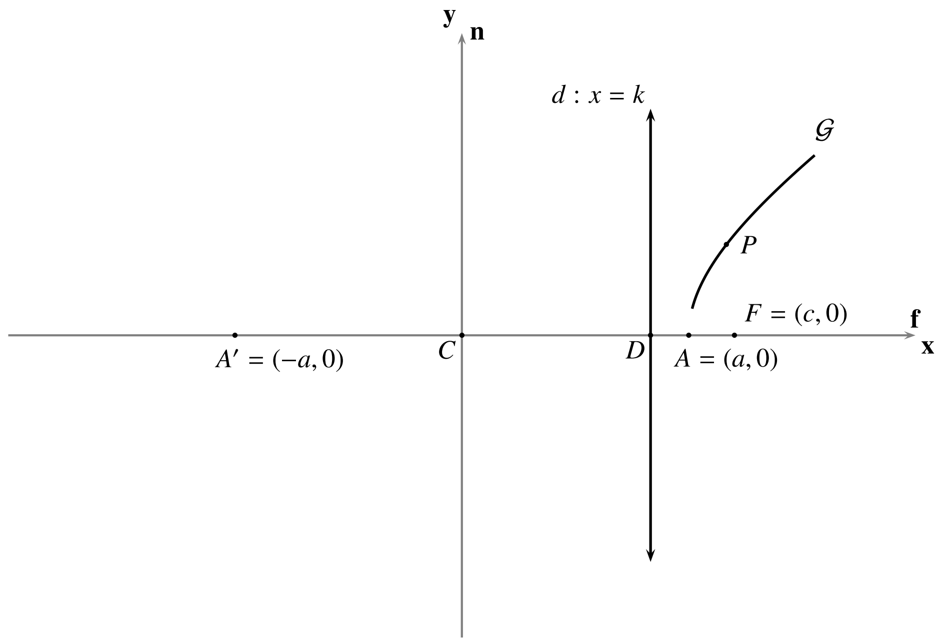


FIGURA 7.3 Ejes canónicos de la hipérbola

Consideremos un punto P cualquiera, y sus coordenadas (x, y) respecto al sistema de ejes ortogonales **xOy** que hemos configurado.

Por definición, P está en $\mathcal{G}$ si, y sólo si, $PF = e \cdot \mathbf{d}(P, d)$. Como

$$PF = \sqrt{(x - ae)^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \mathbf{d}(P, d) = |x - \tfrac{a}{e}|,$$

tendremos que P está en $\mathcal{G}$ si, y sólo si, las coordenadas de P satisfacen la ecuación

$$\sqrt{(x - ae)^2 + y^2} = e \cdot |x - \tfrac{a}{e}|.$$

Como ambos términos de la igualdad son positivos tendremos, después de elevar al cuadrado, que esta ecuación es equivalente a

$$x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = e^2(x^2 - 2\tfrac{a}{e}x + \tfrac{a^2}{e^2}),$$

que es la misma que

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2(1 - e^2). \tag{7.5}$$

Como $a^2(1 - e^2) < 0$ tendremos, tomando $x = 0$ en la ecuación (7.5), que la hipérbola no corta a su eje normal: por razones que expondremos más adelante, consideremos los puntos $B = (0, a\sqrt{e^2 - 1})$ y $B' = (0, -a\sqrt{e^2 - 1})$ (el primero con ordenada positiva, y el segundo con ordenada negativa).

Dividiendo ambos términos de la ecuación (7.5) por $a^2(1 - e^2)$ y realizando las simplificaciones de rigor, tendremos que P está en $\mathcal{G}$ si, y sólo si, las coordenadas de P satisfacen la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1.$$

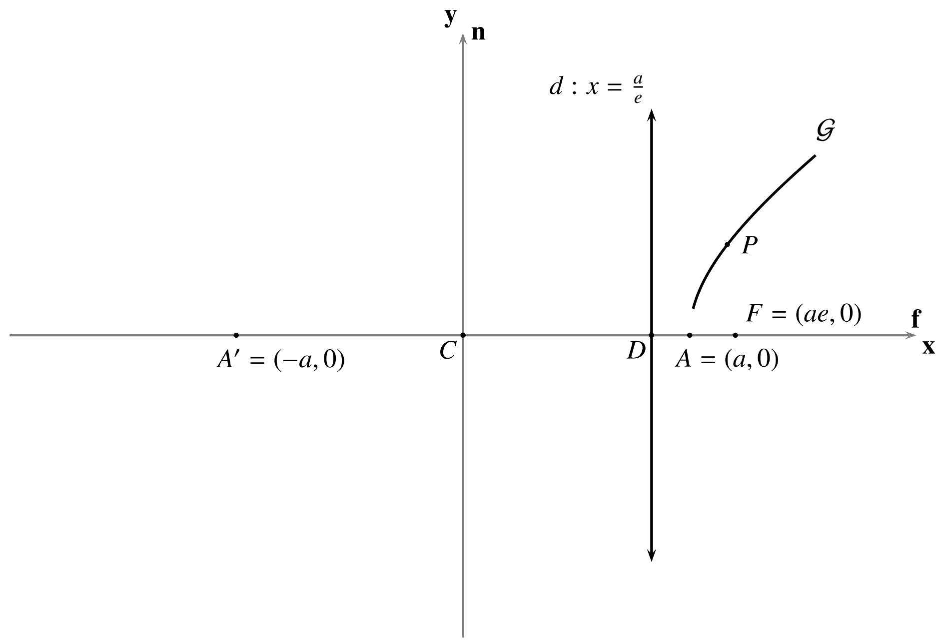


FIGURA 7.4 Datos parciales de la hipérbola

Tomando $b^2 = a^2(e^2 - 1) = -a^2(1 - e^2)$, tendremos que P está en $\mathcal{G}$ si, y sólo si, las coordenadas de P satisfacen la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

llamada ***ecuación canónica*** de la hipérbola que tiene eje focal sobre el eje **x**, centro en el origen, distancia del centro, a cualquiera de sus vértices, a y distancia del centro, a cualquiera de los puntos B y B', b.

Es claro, al sumar las fracciones del lado izquierdo y multiplicar ambos términos por a^2b^2, que esta última ecuación es equivalente a la ecuación

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Así, al definir $\mathsf{A} = b^2$, $\mathsf{C} = -a^2$ y $\mathsf{F} = -a^2b^2$, tendremos que el punto P está en $\mathcal{G}$ si, y sólo si, sus coordenadas cartesianas satisfacen la ecuación (7.3), para la que $\mathsf{A} > 0$, $\mathsf{C} < 0$ y $\mathsf{F} < 0$.

Supongamos ahora que existe un sistema de ejes ortogonales **xOy**, tal que $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación como (7.3).

Tomando el número real $e = \sqrt{\frac{\mathsf{C-A}}{\mathsf{C}}}$ (con lo que $e > 1$), el punto $F = (-\sqrt{\frac{\mathsf{F(A-C)}}{\mathsf{AC}}}, 0)$, y la recta d de ecuación $x = -\sqrt{\frac{\mathsf{FC}}{\mathsf{A(A-C)}}}$ tendremos, para cualquier punto $P = (x, y)$ de $\mathcal{G}$, que

$$PF = \sqrt{\left(x + \sqrt{\frac{\mathsf{F(A-C)}}{\mathsf{AC}}}\right)^2 + y^2}$$

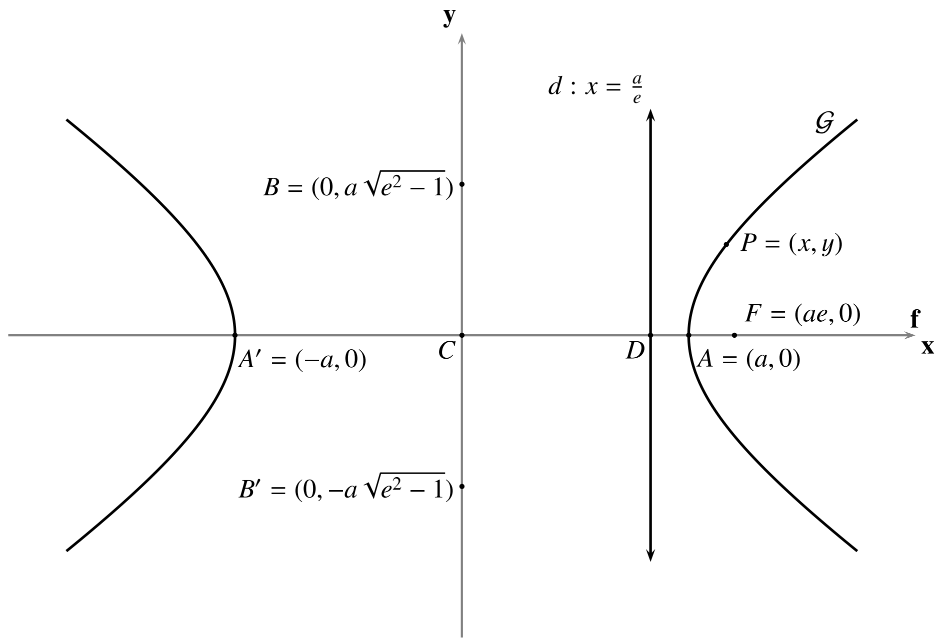


FIGURA 7.5 Datos adicionales de la hipérbola

$$= \sqrt{x^2 + 2\sqrt{\frac{\mathsf{F(A-C)}}{\mathsf{AC}}}x + \frac{\mathsf{F(A-C)}}{\mathsf{AC}} - \frac{\mathsf{F}}{\mathsf{C}} - \frac{\mathsf{A}}{\mathsf{C}}x^2} \qquad \text{(despejando } y^2 \text{ en la ecuación (7.3))}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\mathsf{C-A}}{\mathsf{C}}\right)x^2 + 2\sqrt{\frac{\mathsf{F(A-C)}}{\mathsf{AC}}}x + \left(\frac{-\mathsf{F}}{\mathsf{A}}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\mathsf{C-A}}{\mathsf{C}}}x + \sqrt{\frac{-\mathsf{F}}{\mathsf{A}}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\mathsf{C-A}}{\mathsf{C}}}\left|x + \sqrt{\frac{\mathsf{FC}}{\mathsf{A(A-C)}}}\right|;$$

y $\mathbf{d}(P, d) = \left|x + \sqrt{\frac{\mathsf{FC}}{\mathsf{A(A-C)}}}\right|$. Así, al tomar la recta d, el punto fuera de ella F (pues $\mathsf{A} \neq 0$) y el número e (que satisface $e > 1$), tendremos que $\mathcal{G}$ es la hipérbola de directriz d, foco F y excentricidad e.

De este modo hemos concluido la verificación del Teorema 23.

Note que, en el caso de la hipérbola, puede suceder que $a = b$, o $a > b$, o $a < b$; y que los números reales positivos a, b y c satisfacen la relación pitagórica

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2} \tag{7.6}$$

que permitiría calcular uno cualquiera de ellos a partir de los otros dos.

El número real $2a$ (la distancia entre los vértices A y A') es llamado ***el diámetro real***, al igual que el segmento $\overline{AA'}$⟨1⟩; el número real a (la distancia del centro C a cualquiera de los vértices A y A') es llamado ***el radio real***, al igual que los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{CA'}$; los puntos B y B' serán llamados ***puntos auxiliares*** de la hipérbola (pues la utilidad de estos puntos se hace patente en el momento de graficar la hipérbola); el número real $2b$ (la distancia entre los puntos auxiliares B y B') es llamado ***el diámetro imaginario***, al igual que el segmento $\overline{BB'}^{\langle 2\rangle}$; el número real b (la distancia del centro C a cualquiera de los puntos B y B') es llamado ***el radio imaginario***, al igual que los segmentos $\overline{CB}$ y $\overline{CB'}$; y el sistema de ejes rectangulares que hemos configurado es llamado ***el sistema de ejes canónico*** de la hipérbola $\mathcal{G}$.

Note además que, si se calculan los valores de los radios real e imaginario a y b, respectivamente, a partir de la ecuación (7.3) de una hipérbola tendremos, por lo probado en la segunda implicación del Teorema 23, que $a = \sqrt{-\mathsf{C}}$ y $b = \sqrt{\mathsf{A}}$ (tal como resultó en la prueba de la primera implicación de ese Teorema). Como a y b son datos intrínsecos de la geometría de la hipérbola, y A y C no lo son, convendremos que:

> *Cada vez que se tenga la necesidad de hacer cálculos que involucren los datos geométricos básicos de una hipérbola, consideraremos como ecuación general de la misma la ecuación*
>
> $$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$
>
> *ya que a través de esta ecuación expresamos, además, que el sistema de coordenadas que se está utilizando es el sistema de ejes canónico de la hipérbola.*

➤ Ejemplo 7.1

Para encontrar la ecuación general de la hipérbola que tiene eje focal sobre el eje **x***, centro en el origen, radio real* 5*, y radio imaginario* 3*, respecto a su sistema de ejes canónico, planteamos la ecuación*

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1,$$

obteniendo que la ecuación requerida es

$$9x^2 - 25y^2 - 225 = 0.$$

QEE ◀

Observación 7.2

(a) *La presencia exclusiva de términos cuadráticos, "x^2" y "y^2", en la ecuación de una hipérbola da garantía de que las hipérbolas son simétricas respecto a ambos ejes, y respecto al origen, de su sistema de ejes canónico.*
Por esta razón, cualquier orientación que se escoja para los ejes canónicos daría una ecuación (canónica o general) con los mismos coeficientes.

(b) *La hipérbola no es la representación geométrica de una función $y = f(x)$, ni $x = f(y)$, al expresar las coordenadas de sus puntos respecto a su sistema de ejes canónico.*

(c) *Despejando "y" en la ecuación canónica de la hipérbola obtenemos*

$$y = \pm\tfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2};$$

lo que permite pensar la hipérbola como la representación geométrica de dos funciones, al expresar las coordenadas de sus puntos respecto a su sistema de ejes canónico:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \text{ (los arcos que están en } L_{U'}\text{)}$$

y

$$y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \text{ (los arcos que están en } L'_{U'}\text{).}$$

En todo caso, para que "y" corresponda a un número real, necesariamente x debe estar en el conjunto $(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$ *(es decir, x debe satisfacer* $|x| \geqslant a$*).*

(d) *Despejando "x" en la ecuación canónica de la hipérbola obtenemos*

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2};$$

lo que permite pensar la hipérbola como la representación geométrica de otras dos funciones, al expresar las coordenadas de sus puntos respecto a su sistema de ejes canónico:

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2} \text{ (la rama que está en } L_U\text{)}$$

y

$$x = -\frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2} \text{ (la rama que está en } L'_U\text{).}$$

En todo caso, "x" corresponderá a un número real, cualquiera sea el valor de "y".

(e) *Por lo dicho en las dos partes anteriores tenemos que la hipérbola está fuera de la franja* $(-a, a)\times\mathbb{R}$*; y por el hecho de que tiene puntos en ambos lados de esa franja, dibujamos la hipérbola con* ***dos ramas****: la formada por aquellos de sus puntos cuyas abscisas satisfacen* $x \geqslant a$*, y la formada por aquellos de sus puntos cuyas abscisas satisfacen* $x \leqslant -a$*.*

(f) *Si se considera el punto F', simétrico del foco F respecto al centro C, y la recta d', simétrica de la directriz d respecto al eje normal se tiene, después de hacer los cálculos con el punto* $F' = (-ae, 0)$ *y la recta d' de ecuación* $x = -\frac{a}{e}$*, que la hipérbola de foco F' y directriz d' coincide con la hipérbola de foco F y directriz d.*
Por esta razón consideraremos que la hipérbola tiene dos focos (F y F') y dos directrices (d y d').
El número real $2c$ (la distancia entre los focos F y F') es llamado ***la distancia focal*** *de la hipérbola; el número real c (la distancia del centro C a cualquiera de los focos F y F') es llamado* ***la semidistancia focal****.*

(g) *A partir de las relaciones* $b = a\sqrt{e^2 - 1}$ *y* $c = ae$ *podemos asegurar que: mientras más cerca de* 1 *esté la excentricidad de la hipérbola, más se parece c a a, más pequeño será b respecto a a y, por tanto, la hipérbola es más parecida a un par de rayos; y mientras más grande sea la excentricidad de la hipérbola, más grande será c respecto a a, más grande será b respecto a a y, por tanto, la hipérbola es más parecida a un par de rectas paralelas.*

(h) *De la relación* $k = \frac{a}{e}$ *y del hecho de que* $e > 1$ *tenemos que* $-a < -k < k < a$*; con lo que la hipérbola está completamente fuera de la región limitada entre las directrices d y d'.*

(i) *Note que dada una hipérbola (es decir, su directriz d, su foco F y su excentricidad e), podemos obtener el eje focal* **f***, el centro C, el radio real a y el radio imaginario b*
(por la observación 7.1.(b), podemos contar con el eje focal **f** *y el centro C; pero además, podemos contar también con uno cualquiera de sus vértices, digamos A y, en consecuencia, obtenemos el radio real a mediante AC; finalmente, obtenemos el radio menor b a partir de la ecuación* (7.6)*).*
Pero además, y esto es lo crucial, también podemos obtener la directriz d, el foco F y la excentricidad e, a partir del eje focal **f***, el centro C, el radio mayor a y el radio menor b*

(a partir de la ecuación (7.6) *encontramos la semidistancia focal c y, con este dato, calculamos la excentricidad e, a partir de la segunda relación en* (7.4)*, y el foco F, tomando cualquiera de los dos puntos de* **f** *que están a distancia c del centro C; para encontrar la directriz, buscamos el punto D de* **f** *que está a una distancia* $\frac{a}{e}$ *del centro C, y del mismo lado de C en que ubicamos a F, y luego tomamos la perpendicular a* **f** *por D).*
Por estas razones, una hipérbola queda determinada si tenemos su eje focal, su centro y sus radios real e imaginario.

Asíntotas de una hipérbola

Las siguientes rectas, concurrentes en el origen del sistema de ejes canónicos de la hipérbola

$$l_1 : \ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \qquad l_2 : \ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0,$$

o, equivalentemente,

$$l_1 : \ bx - ay = 0 \qquad l_2 : \ bx + ay = 0,$$

o también

$$l_1 : \ y = \frac{b}{a}x \qquad l_2 : \ y = -\frac{b}{a}x$$

reciben el nombre de ***asíntotas*** de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, de radio real a y radio imaginario b.

Las rectas l_1 y l_2 determinan cuatro ángulos con vértice en el origen del sistema de ejes canónico de la hipérbola; consideremos los siguientes dos:

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geqslant 0 \ \wedge \ |y| = \frac{b}{a}x\}$$

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \leqslant 0 \ \wedge \ |y| = -\frac{b}{a}x\}$$

y sus respectivos interiores

$$I_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0 \ \wedge \ |y| < \frac{b}{a}x\}$$

$$I_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x < 0 \ \wedge \ |y| < -\frac{b}{a}x\}.$$

Consideremos, por otro lado, las ramas de la hipérbola que contienen, respectivamente, los vértices A y A':

$$R_A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geqslant a \ \wedge \ |y| = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\}$$

$$R_{A'} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \leqslant -a \ \wedge \ |y| = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\}$$

Es claro que el vértice A, así como el foco F, se encuentra en I_1, y que el vértice A', así como el foco F', se encuentra en I_2; verificaremos de inmediato que R_A está contenida en I_1, y que $R_{A'}$ está contenida en I_2.

Consideremos un punto (u, v) cualquiera de la rama R_A. Como, por definición, $u \geqslant a$, tendremos que $\sqrt{u^2 - a^2} < u$. Como $\frac{b}{a} > 0$, tendremos que $\frac{b}{a}\sqrt{u^2 - a^2} < \frac{b}{a}u$. Así, por la definición de R_A, $|v| < \frac{b}{a}u$

(es decir, los puntos de la rama R_A de la hipérbola están por debajo de los puntos de l_1 y por encima de los puntos de l_2, al fijar una abscisa $u \geqslant a$) y, en consecuencia, (u, v) está en I_1. De manera análoga se prueba que $R_{A'}$ está contenida en I_2.

El nombre de ***asíntota***⟨3⟩ dado a cada una de esas rectas proviene del hecho de que la hipérbola se acerca tanto como se quiera a esas rectas, sin llegar a tocarlas. Más precisamente: verificaremos que, fijada una rama de la hipérbola y el ángulo determinado por las rectas l_1 y l_2 en cuyo interior está contenida, se tiene que el arco de esa rama que está contenido en uno de los semiplanos del eje **x** se acerca tanto como se quiera al lado de ese ángulo cuyos puntos, excepto el origen, están contenidos en ese mismo semiplano.

Consideremos el arco de la rama R_A que se encuentra en $L_{U'}$

$$R_A^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geqslant a \ \wedge \ y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\}$$

y el lado del ángulo determinado por las rectas l_1 y l_2 en cuyo interior está contenida R_A, y cuyos puntos, excepto el origen, se encuentran en ese mismo semiplano

$$A_1^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geqslant 0 \ \wedge \ y = \frac{b}{a}x\}.$$

Consideremos los puntos (u, v) y (u, w) sobre R_A^+ y A_1^+, respectivamente, que tienen la misma abscisa u; con lo que $v = \frac{b}{a}\sqrt{u^2 - a^2}$ y $w = \frac{b}{a}u$. Como $w^2 - v^2 = b^2$, $w^2 - v^2 = (w - v)(w + v)$ y $0 < v < w$, tendremos que

$$|w - v| = w - v = \frac{b^2}{w + v} < \frac{b^2}{w} = \frac{ab}{u}.$$

Como ab es un número real positivo cuyo valor está predeterminado tendremos que, fijado cualquier número real positivo ϵ (tan pequeño como se quiera), siempre podremos encontrar $u > 0$ de tal manera que $|w - v| < \epsilon$ (basta tomar $u = \frac{ab}{\epsilon}$). De manera análoga se hace la prueba para los demás arcos.

Observación 7.3

Note la sorprendente relación que aparece en el triángulo sombreado en la figura 7.6, es decir, el hecho de que c es también la distancia entre B y A (o entre B y A′, o entre B′ y A, o entre B′ y A′).

Los puntos auxiliares $B = (0, b)$ *y* $B' = (0, -b)$ *permiten trazar el rectángulo formado por los puntos* (a, b), $(a, -b)$, $(-a, -b)$ *y* $(-a, b)$, *cuyas diagonales están sobre las asíntotas* l_1 *y* l_2, *al cual llamaremos* ***rectángulo auxiliar*** *de la hipérbola, y es lo primero que deberíamos dibujar cuando intentemos dibujar una hipérbola.*

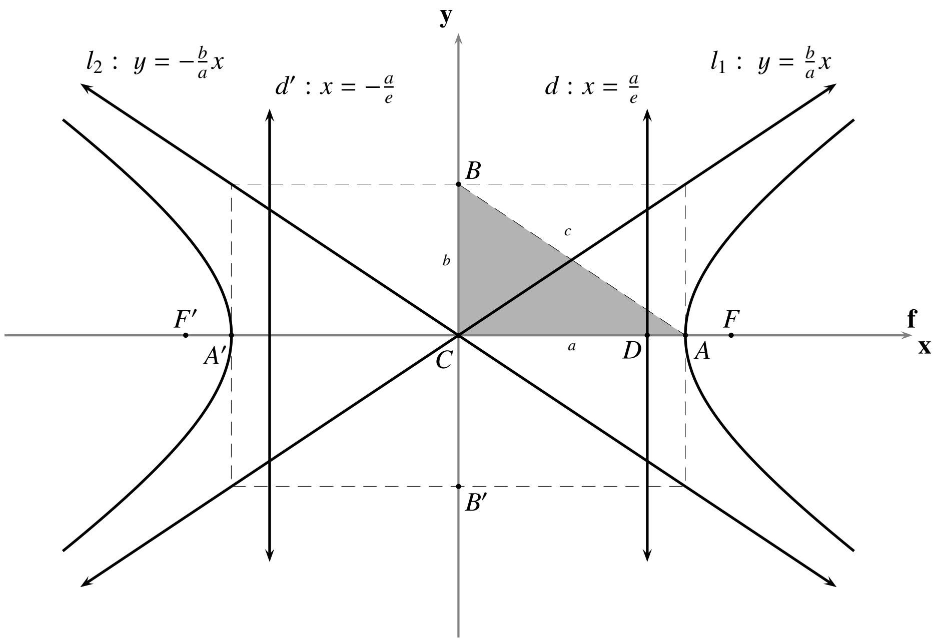
➤ **Ejemplo 7.2**

Las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 25y^2 - 225 = 0$ *son*

$$3x - 5y = 0 \qquad y \qquad 3x + 5y = 0.$$

QEE ◄

En el trabajo que hemos realizado sobre una hipérbola, hemos tenido la posibilidad de escoger el sistema de ejes ortogonales respecto al cual se expresan las coordenadas de sus puntos, y la ecuación que



$A = (a, 0)$, $A' = (-a, 0)$, $B = (0, b)$, $B' = (0, -b)$, $F = (c, 0)$, $F' = (-c, 0)$

FIGURA 7.6 Particularidades de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

ellas satisfacen; nos interesa ahora averiguar cómo es la forma de la ecuación de una hipérbola, si los datos geométricos que la determinan (directriz, foco y excentricidad; o eje focal, centro y radios real e imaginario) están expresados respecto a un sistema de ejes ortogonales fijado previamente.

En este capítulo atenderemos sólo un caso particular de este problema: aquel en el que el eje focal es perpendicular a alguno de los ejes del sistema de ejes ortogonales prefijado; en el Capítulo 8 atenderemos el caso general.

En todo lo que sigue supondremos que se ha fijado un sistema de coordenadas $\mathbf{x}O\mathbf{y}$ en el plano.

7.1.1 Eje focal perpendicular al eje y, centro (x_0, y_0), radio real a y radio imaginario b

Consideremos las relaciones g que asocian, a pares ordenados de números reales, un número real, cuyas reglas de asociación son polinomios de segundo grado en dos variables de la forma

$$g(x, y) := \mathsf{A}x^2 + \mathsf{C}\,y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F}$$

(A, C, D, E y F números reales tales que $\mathsf{A} > 0$, $\mathsf{C} < 0$ y $\mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF} < 0$).

El objetivo central de esta parte del capítulo es verificar que, dada una figura geométrica $\mathcal{G}$ cualquiera, se tiene lo afirmado en la siguiente proposición.

COROLARIO 7.1
$\mathcal{G}$ es una hipérbola con eje focal perpendicular al eje **y** *si, y sólo si, $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación cuadrática en dos variables de la forma*

$$\mathsf{A}x^2 + \mathsf{C}\,y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0 \tag{7.7}$$

(A, C, D, E y F números reales tales que $\mathsf{A} > 0$, $\mathsf{C} < 0$ y $\mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF} < 0$).

Verificado esto, la ecuación (7.7) será llamada ***la ecuación general***, o simplemente ***la ecuación***, de la hipérbola $\mathcal{G}$ con eje focal perpendicular al eje **y**.

Supongamos que $\mathcal{G}$ es una hipérbola con eje focal perpendicular al eje **y**. Así, la ecuación de su directriz d es de la forma

$$d: \ x - h = 0.$$

Por la observación 7.2.(i) podemos suponer, al tener la hipérbola $\mathcal{G}$, que tenemos como dato las coordenadas del centro C, digamos (x_0, y_0), su radio real, digamos a, y su radio imaginario, digamos b.

Por el Teorema 23 sabemos que la hipérbola $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación de la forma

$$\frac{\hat{x}^2}{a^2} - \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 1 \tag{7.8}$$

respecto al sistema de ejes canónico $\widehat{\mathbf{x}\mathbf{O}\mathbf{y}}$ de $\mathcal{G}$; para tener una ecuación en términos de x y y, que represente a $\mathcal{G}$, bastaría con aplicar las fórmulas adecuadas para transformar las coordenadas del sistema **xOy** al sistema $\widehat{\mathbf{x}\mathbf{O}\mathbf{y}}$.

Por la parte (a) de la observación 7.2, el sistema $\widehat{\mathbf{x}\mathbf{O}\mathbf{y}}$ puede ser considerado como el sistema $\breve{\mathbf{x}}\breve{\mathbf{O}}\breve{\mathbf{y}}$, traslación del sistema **xOy** al punto $C = (x_0, y_0)$ (ver la figura 7.7); por tanto, debemos aplicar las fórmulas de traslación de coordenadas de **xOy** a $\breve{\mathbf{x}}\breve{\mathbf{O}}\breve{\mathbf{y}}$

$$\begin{cases} \breve{x} = x - x_0 \\ \breve{y} = y - y_0 \end{cases}$$

obteniendo que la ecuación (7.8) se transforma en

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{7.9}$$

llamada ***ecuación canónica de una hipérbola con eje focal perpendicular al eje* y*, centro* (x_0, y_0)*, radio real* a *y radio imaginario* b.**

Como $a \neq 0$ y $b \neq 0$, la ecuación (7.9) es equivalente a la ecuación

$$b^2(x - x_0)^2 - a^2(y - y_0)^2 = a^2b^2. \tag{7.10}$$

Después de sacar las cuentas en la ecuación (7.10), tenemos que ésta es equivalente a la ecuación

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2x_0x + 2a^2y_0y + b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0. \tag{7.11}$$

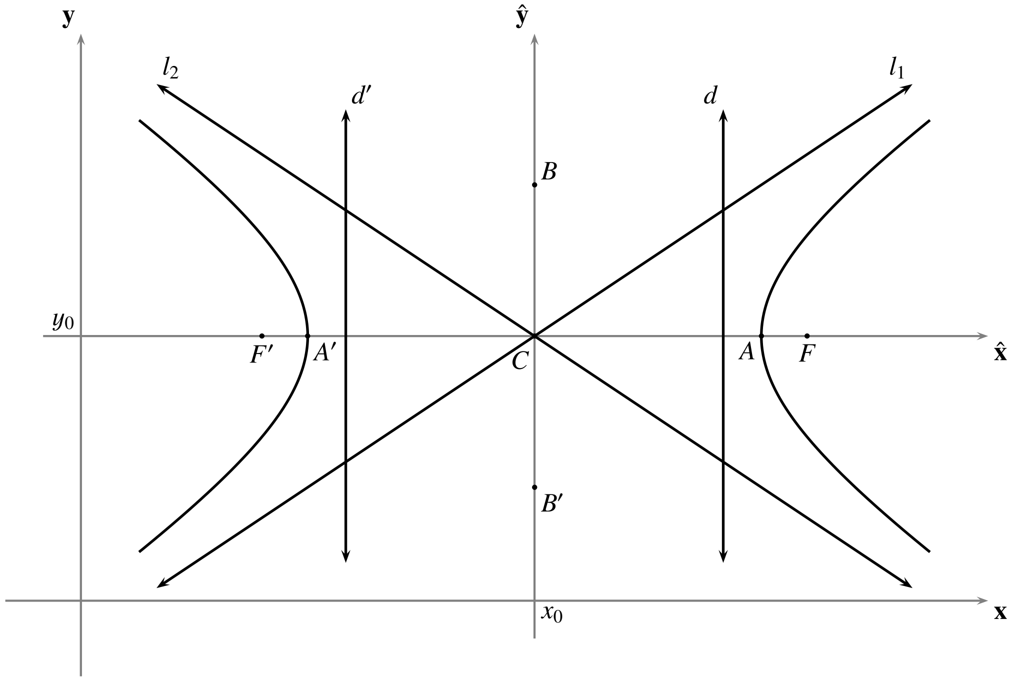


FIGURA 7.7 Eje focal perpendicular al eje **y**

Tomando $\mathsf{A} = b^2$, $\mathsf{C} = -a^2$, $\mathsf{D} = -2b^2x_0$, $\mathsf{E} = 2a^2y_0$ y $\mathsf{F} = b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2$, las coordenadas cartesianas de los puntos de $\mathcal{G}$ satisfacen la ecuación (7.7), para la que $\mathsf{A} > 0$, $\mathsf{C} < 0$ y $\mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF} < 0$.

Hasta este punto hemos logrado verificar que, si $\mathcal{G}$ es una hipérbola con eje focal perpendicular al eje **y**, entonces $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación como (7.7); verificaremos ahora el recíproco de esta afirmación.

Después de completar cuadrados y realizar las simplificaciones de rigor, la ecuación (7.7) resulta equivalente a la ecuación

$$\mathsf{A}\left(x + \frac{\mathsf{D}}{2\mathsf{A}}\right)^2 + \mathsf{C}\left(y + \frac{\mathsf{E}}{2\mathsf{C}}\right)^2 - \frac{\mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF}}{4\mathsf{AC}} = 0 \tag{7.12}$$

(A, C, D, E y F números reales tales que $\mathsf{A} > 0$, $\mathsf{C} < 0$ y $\mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF} < 0$).

Después de tener un sistema de ejes rectangulares $\breve{\mathbf{x}}\breve{O}\breve{\mathbf{y}}$, por traslación del sistema **x**O**y** al punto

$$\left(-\frac{\mathsf{D}}{2\mathsf{A}}, -\frac{\mathsf{E}}{2\mathsf{C}}\right),$$

y cambiar las coordenadas de los puntos del plano por medio de las fórmulas de traslación de coordenadas, tendremos que dicha ecuación es equivalente a la ecuación

$$\mathsf{A}\breve{x}^2 + \mathsf{C}\breve{y}^2 - \frac{\mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF}}{4\mathsf{AC}} = 0$$

(A, C, D, E y F números reales tales que $\mathsf{A} > 0$, $\mathsf{C} < 0$ y $\mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF} < 0$).

Al poner $\breve{\mathsf{A}} = \mathsf{A}$, $\breve{\mathsf{C}} = \mathsf{C}$, y $\breve{\mathsf{F}} = -\frac{\mathsf{CD}^2+\mathsf{AE}^2-4\mathsf{ACF}}{4\mathsf{AC}}$, tendremos que esta última ecuación es equivalente a la ecuación

$$\breve{\mathsf{A}}\breve{x}^2 + \breve{\mathsf{C}}\breve{y}^2 + \breve{\mathsf{F}} = 0$$

$$(\breve{\mathsf{A}}, \breve{\mathsf{C}} \text{ y } \breve{\mathsf{F}} \text{ números reales tales que } \breve{\mathsf{A}} > 0, \breve{\mathsf{C}} < 0 \text{ y } \breve{\mathsf{F}} < 0).$$

Por el Teorema 23, esta última ecuación representa una hipérbola, de la que su sistema de ejes canónico es una traslación del sistema **xOy**; con lo que esta última ecuación representa una hipérbola cuyo eje focal es perpendicular al eje **y**.

➤ **EJEMPLO 7.3**

Para encontrar la ecuación general de la hipérbola con eje focal perpendicular al eje **y**, *centro* $(-1, 3)$, *radio real* 5, *y radio imaginario* 3, *planteamos la ecuación*

$$\frac{(x-(-1))^2}{25} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1,$$

obteniendo que la ecuación requerida es

$$9x^2 - 25y^2 + 18x + 150y - 441 = 0.$$

QEE ➤

➤ **EJEMPLO 7.4**

Para encontrar el centro, los radios real e imaginario, la semidistancia focal, la excentricidad, los vértices, los puntos auxiliares, los focos, las directrices y las asíntotas de la hipérbola

$$x^2 - 4y^2 - 4x + 8y - 100 = 0,$$

procedemos de la siguiente manera.

En primer lugar observamos que el eje focal de esta hipérbola es perpendicular al eje **y**, *pues* $1 > 0$, $-4 < 0$ *y* $(-4)(-4)^2 + (1)(8)^2 - 4(1)(-4)(-100) = -1600 < 0$.

Completando cuadrados obtenemos la ecuación canónica de la hipérbola, a saber,

$$\frac{(x-2)^2}{100} - \frac{(y-1)^2}{25} = 1.$$

De este modo: $C = (2, 1)$, $a = 10$, $b = 5$, $c = 5\sqrt{5}$, $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $A = (12, 1)$, $A' = (-8, 1)$, $B = (2, 6)$, $B' = (2, -4)$, $F = (2 + 5\sqrt{5}, 1)$, $F' = (2 - 5\sqrt{5}, 1)$, $l_1 : \ y - 1 = \frac{1}{2}(x-2)$, $l_2 : \ y - 1 = -\frac{1}{2}(x-2)$, $d : \ x = 1 + 4\sqrt{5}$ *y* $d' : \ x = 1 - 4\sqrt{5}$. QEE ➤

7.1.2 Eje focal perpendicular al eje x, centro (x_0, y_0), radio real a y radio imaginario b

Consideremos las relaciones g que asocian, a pares ordenados de números reales, un número real, cuyas reglas de asociación son polinomios de segundo grado en dos variables de la forma

$$g(x, y) := \mathsf{A}x^2 + \mathsf{C}\,y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F}$$

$$(\mathsf{A}, \mathsf{C}, \mathsf{D}, \mathsf{E} \text{ y } \mathsf{F} \text{ números reales tales que } \mathsf{A} > 0, \mathsf{C} < 0 \text{ y } \mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF} > 0).$$

El objetivo central de esta parte del capítulo es verificar que, dada una figura geométrica $\mathcal{G}$ cualquiera, se tiene lo afirmado en la siguiente proposición.

COROLARIO 7.2

$\mathcal{G}$ es una hipérbola con eje focal perpendicular al eje **x** *si, y sólo si, $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación cuadrática en dos variables de la forma*

$$\mathsf{A}x^2 + \mathsf{C}\,y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0 \tag{7.13}$$

(A, C, D, E y F números reales tales que $\mathsf{A} > 0$, $\mathsf{C} < 0$ y $\mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF} > 0$).

Verificado esto, la ecuación (7.13) será llamada ***la ecuación general***, o simplemente ***la ecuación***, de la hipérbola $\mathcal{G}$ con eje focal perpendicular al eje **x**.

Supongamos que $\mathcal{G}$ es una hipérbola con eje focal perpendicular al eje **x**. Así, la ecuación de su directriz d es de la forma

$$d: \; y - k = 0.$$

Por la observación 7.2.(i) podemos suponer, al tener la hipérbola $\mathcal{G}$, que tenemos como dato las coordenadas del centro C, digamos (x_0, y_0), su radio real, digamos a, y su radio imaginario, digamos b.

Por el Teorema 23 sabemos que la hipérbola $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación de la forma

$$\frac{\hat{x}^2}{a^2} - \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 1 \tag{7.14}$$

respecto al sistema de ejes canónico $\widehat{\mathbf{xOy}}$ de $\mathcal{G}$; para tener una ecuación en términos de x y y, que represente a $\mathcal{G}$, bastaría con aplicar las fórmulas adecuadas para transformar las coordenadas del sistema **xOy** al sistema $\widehat{\mathbf{xOy}}$.

Por la parte (a) de la observación 7.2, el sistema $\widehat{\mathbf{xOy}}$ puede ser considerado como el sistema $\dot{\check{\mathbf{x}}}\check{\mathbf{O}}\dot{\check{\mathbf{y}}}$, la rotación por 90, de la traslación del sistema **xOy** al punto $C = (x_0, y_0)$ (ver la figura 7.8) (lo cual, de acuerdo con la observación 4.1.(e), equivale a cambiar la abscisa por su ordenada, y la ordenada por el opuesto de su abscisa, en los ejes del sistema trasladado); por tanto, debemos aplicar las fórmulas de traslación de coordenadas de **xOy** a $\check{\mathbf{x}}\check{\mathbf{O}}\check{\mathbf{y}}$

$$\begin{cases} \check{x} = x - x_0 \\ \check{y} = y - y_0 \end{cases}$$

y cambiamos la abscisa por su ordenada, y la ordenada por el opuesto de su abscisa

$$\begin{cases} \dot{\check{x}} = y - y_0 \\ \dot{\check{y}} = -(x - x_0) \end{cases}$$

obteniendo que la ecuación (7.14) se transforma en

$$-\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1 \tag{7.15}$$

llamada ***ecuación canónica de una hipérbola con eje focal perpendicular al eje* x*, centro* (x_0, y_0)*, radio real* a *y radio imaginario* b.**

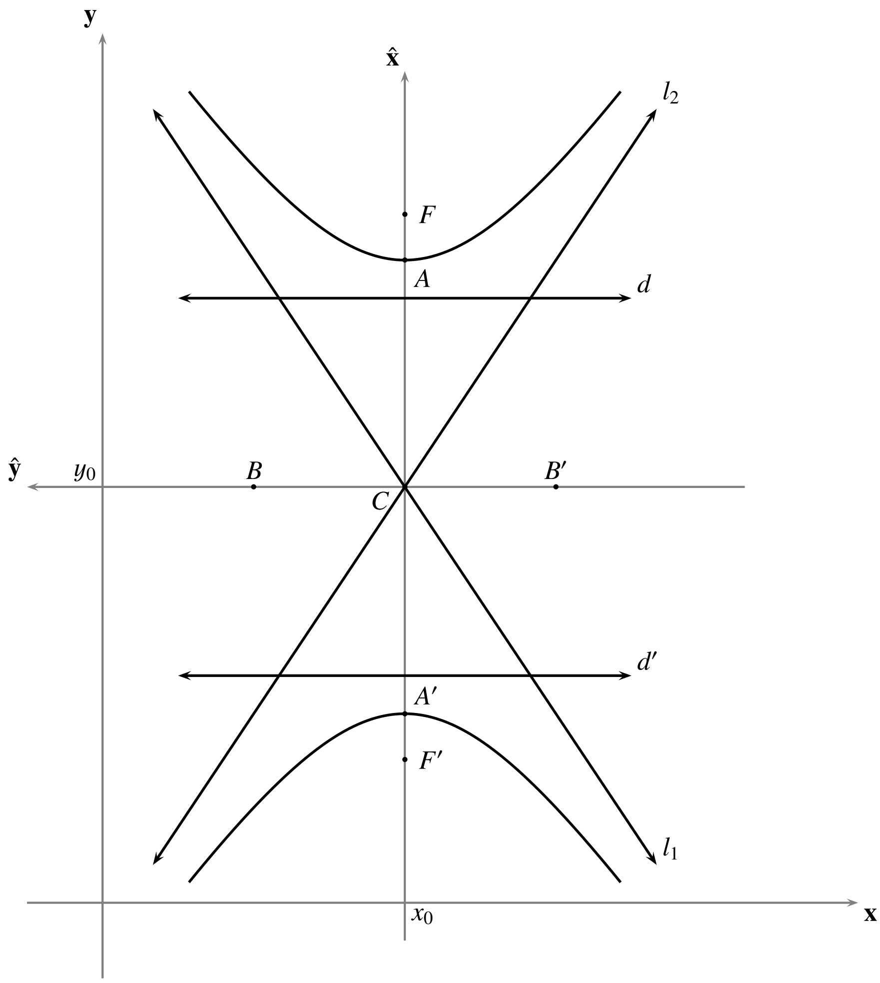


FIGURA 7.8 Eje focal perpendicular al eje $\mathbf{x}$

Como $a \neq 0$ y $b \neq 0$, la ecuación (7.15) es equivalente a la ecuación

$$-a^2(x - x_0)^2 + b^2(y - y_0)^2 = a^2b^2. \tag{7.16}$$

Después de sacar las cuentas en la ecuación (7.16), tenemos que ésta es equivalente a la ecuación

$$a^2x^2 - b^2y^2 - 2a^2x_0x + 2b^2y_0y + a^2x_0^2 - b^2y_0^2 + a^2b^2 = 0. \tag{7.17}$$

Tomando $\mathsf{A} = a^2$, $C = -b^2$, $\mathsf{D} = -2a^2x_0$, $\mathsf{E} = 2b^2y_0$ y $\mathsf{F} = a^2x_0^2 - b^2y_0^2 + a^2b^2$, las coordenadas cartesianas de los puntos de $\mathcal{G}$ satisfacen la ecuación (7.13), para la que $\mathsf{A} > 0$, $\mathsf{C} < 0$ y $\mathsf{CD}^2 + \mathsf{AE}^2 - 4\mathsf{ACF} > 0$.

Hasta este punto hemos logrado verificar que, si $\mathcal{G}$ es una hipérbola con eje focal perpendicular al eje $\mathbf{x}$, entonces $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación como (7.13); verificaremos ahora el recíproco de esta afirmación.

Después de completar cuadrados y realizar las simplificaciones de rigor, la ecuación (7.13) resulta equivalente a la ecuación

$$\text{(7.18)} \qquad A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2 - \frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4AC} = 0$$

(A, C, D, E y F números reales tales que $A > 0$, $C < 0$ y $CD^2 + AE^2 - 4ACF > 0$).

Después de tener un sistema de ejes rectangulares $\dot{\breve{\mathbf{x}}}\breve{O}\dot{\breve{\mathbf{y}}}$, por traslación del sistema **xOy** hasta el punto

$$\left(-\tfrac{D}{2A}, -\tfrac{E}{2C}\right),$$

cambiar las coordenadas de los puntos del plano por medio de las fórmulas de traslación de coordenadas, y luego cambiar la abscisa por su ordenada, y la ordenada por el opuesto de su abscisa, tendremos que dicha ecuación es equivalente a la ecuación

$$C\,\dot{\breve{x}}^2 + A\dot{\breve{y}}^2 - \frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4AC} = 0$$

(A, C, D, E y F números reales tales que $A > 0$, $C < 0$ y $CD^2 + AE^2 - 4ACF > 0$).

Al poner $\dot{\breve{A}} = -C$, $\dot{\breve{C}} = -A$ y $\dot{\breve{F}} = \frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4AC}$, tendremos que esta última ecuación es equivalente a la ecuación

$$\dot{\breve{A}}\dot{\breve{x}}^2 + \dot{\breve{C}}\dot{\breve{y}}^2 + \dot{\breve{F}} = 0$$

($\dot{\breve{A}}$, $\dot{\breve{C}}$ y $\dot{\breve{F}}$ números reales tales que $\dot{\breve{A}} > 0$, $\dot{\breve{C}} < 0$ y $\dot{\breve{F}} < 0$).

Por el Teorema 23, esta última ecuación representa una hipérbola, de la que su sistema de ejes canónico es la rotación por 90, de la traslación al punto $C = (x_0, y_0)$ del sistema **xOy**; con lo que esta última ecuación representa una hipérbola cuyo eje focal es perpendicular al eje **x**.

➤ Ejemplo 7.5

Para encontrar la ecuación general de la hipérbola con eje focal perpendicular al eje **x***, centro* $(-1, 3)$*, radio real* 5*, y radio imaginario* 3*, planteamos la ecuación*

$$-\frac{(x-(-1))^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1,$$

obteniendo que la ecuación requerida es

$$25x^2 - 9y^2 - 50x + 54y + 169 = 0.$$

QEE ➤

➤ Ejemplo 7.6

Para encontrar el centro, los radios real e imaginario, la semidistancia focal, la excentricidad, los vértices, los puntos auxiliares, los focos, las directrices y las asíntotas de la hipérbola

$$25x^2 - 9y^2 - 50x - 36y + 216 = 0,$$

procedemos de la siguiente manera.

En primer lugar observamos que el eje focal de esta hipérbola es perpendicular al eje **x**, *pues* $25 > 0$, $-9 < 0$ *y* $(-9)(-50)^2 + (25)(-36)^2 - 4(25)(-9)(216) = 204300 > 0$.

Completando cuadrados obtenemos la ecuación canónica de la hipérbola, a saber,

$$-\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1.$$

De este modo: $C = (1,-2)$, $a = 5$, $b = 3$, $c = \sqrt{34}$, $e = \frac{\sqrt{34}}{5}$, $A = (1,3)$, $A' = (1,-7)$, $B = (-2,-2)$, $B' = (4,-2)$, $F = (1,-2+\sqrt{34})$, $F' = (1,-2-\sqrt{34})$, $l_1 : \ y+2 = \frac{5}{3}(x-1)$, $l_2 : \ y+2 = -\frac{5}{3}(x-1)$, $d : \ y = -2 + \frac{25\sqrt{34}}{34}$ *y* $d' : \ y = -2 - \frac{25\sqrt{34}}{34}$. QEE ◀

OBSERVACIÓN 7.4
En los problemas con datos numéricos, la diferencia entre ambas ecuaciones canónicas está marcada, en el caso de la hipérbola, por el hecho de que el signo negativo acompaña a la variable que identifica al eje, del sistema de coordenadas fijado, al cual es perpendicular el eje focal de la hipérbola; además, el denominador de esa variable es el que corresponde al cuadrado del radio imaginario.

§ 7.2 Inecuaciones cuadráticas, e interior y exterior de una hipérbola

El estudio que haremos en esta sección tendrá como sistema de ejes ortogonales, el sistema de ejes canónico de la hipérbola, pues con otro sistema de ejes ortogonales el estudio es análogo.

Diremos que un punto ***está en el interior de*** una hipérbola, si su distancia al foco es menor que la excentricidad por su distancia a la directriz.

Diremos que un punto ***está en el exterior de*** una hipérbola, si su distancia al foco es mayor que la excentricidad por su distancia a la directriz.

Llamaremos ***interior*** de una hipérbola al conjunto de sus puntos interiores.

Llamaremos ***exterior*** de una hipérbola al conjunto de sus puntos exteriores.

El objetivo central de esta parte del capítulo es ofrecer una representación analítica de los puntos del plano que no están sobre una hipérbola, tomando como referencia la excentricidad, la distancia al foco y la distancia a la directriz.

Consideremos una hipérbola $\mathcal{H}$ de directriz d, foco F y excentricidad e. Por la tricotomía del orden de los números reales, todos los puntos del plano están en uno, y sólo uno, de los siguientes conjuntos: la hipérbola $\mathcal{H}$; el interior de la hipérbola $\mathcal{H}$; el exterior de la hipérbola $\mathcal{H}$. Ahora, atendiendo a la definición de estos dos últimos, verificaremos lo afirmado en el siguiente Teorema.

TEOREMA 24 (REPRESENTACIÓN ANALÍTICA DEL INTERIOR Y DEL EXTERIOR DE UNA HIPÉRBOLA)
Si la ecuación general de la hipérbola $\mathcal{H}$ *es* $\mathsf{A}x^2 + \mathsf{C}\,y^2 + \mathsf{F} = 0$ ($\mathsf{A} > 0$, $\mathsf{C} < 0$ *y* $\mathsf{F} < 0$)*, entonces su interior y su exterior son, respectivamente, los conjuntos*

$$I := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathsf{A}x^2 + \mathsf{C}\,y^2 + \mathsf{F} > 0\}$$
$$E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathsf{A}x^2 + \mathsf{C}\,y^2 + \mathsf{F} < 0\}.$$

Verificaremos sólo que el interior de $\mathcal{H}$ coincide con el conjunto I descrito, pues de manera análoga se verifica que el exterior de $\mathcal{H}$ coincide con el conjunto E.

Ya sabemos que, respecto al sistema de ejes canónico, el foco y la directriz de $\mathcal{H}$ son, respectivamente,

$$F = (ae, 0) \qquad \text{y} \qquad d:\ x - \tfrac{a}{e} = 0, \qquad \text{donde} \quad a = \sqrt{\tfrac{-\mathsf{F}}{\mathsf{A}}} \quad \text{y} \quad b = \sqrt{\tfrac{\mathsf{F}}{\mathsf{C}}}.$$

Un punto $P = (x, y)$ genérico está en el interior de $\mathcal{H}$ si, y sólo si, $PF < e \cdot \mathbf{d}(P, d)$, es decir, si, y sólo si,

$$\sqrt{(x - ae)^2 + y^2} < e \cdot |x - \tfrac{a}{e}|;$$

o, lo que es lo mismo, si, y sólo si $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1$. Como $a^2 = \frac{-\mathsf{F}}{\mathsf{A}}$, $b^2 = \frac{\mathsf{F}}{\mathsf{C}}$ y $-\mathsf{F} > 0$, tendremos que el interior de la hipérbola $\mathcal{H}$ coincide con I, tal como queríamos verificar.

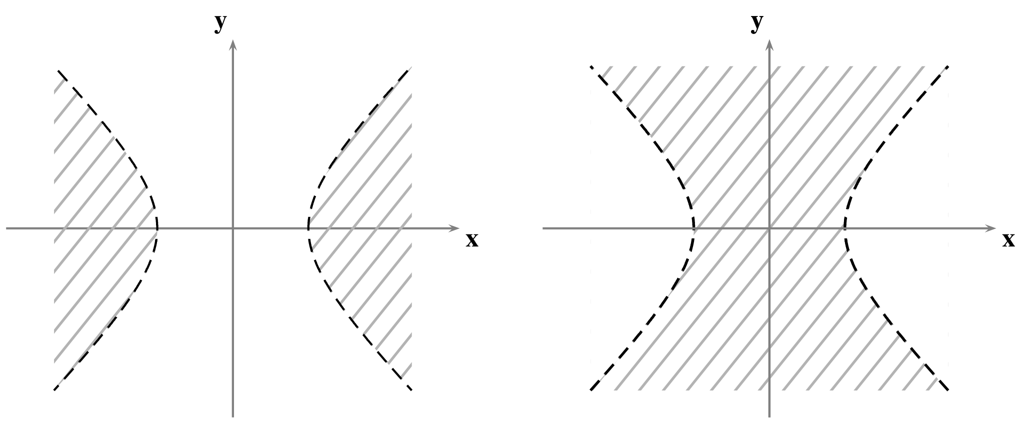


FIGURA 7.9 Interior y exterior de la hipérbola

En general, el conjunto solución de una desigualdad como $\mathsf{A}x^2 + \mathsf{C}\,y^2 + \mathsf{F} \gtreqless 0$ ($\mathsf{A} > 0$, $\mathsf{C} < 0$ y $\mathsf{F} < 0$) será uno de esos conjuntos determinados por la hipérbola $\mathsf{A}x^2 + \mathsf{C}\,y^2 + \mathsf{F} = 0$; e incluirá el borde (es decir, la hipérbola misma), sólo en el caso en que tuviéramos "$\geqslant$" o "$\leqslant$".

En lo que se refiere a la representación gráfica de esos conjuntos, haremos la misma convención que hemos hecho con las rectas (ver la página 16).

§ 7.3 Posiciones relativas entre hipérbolas y rectas

En los parágrafos sucesivos haremos un estudio sobre las relaciones que existen entre las posiciones relativas que pueden presentar una recta y una hipérbola, y los coeficientes de sus ecuaciones generales; en dicho estudio tomaremos como sistema de ejes ortogonales el sistema de ejes canónico de la hipérbola, pues con otro sistema de ejes ortogonales el estudio es análogo.

Consideremos una hipérbola $\mathcal{H}$ y una recta l, de ecuaciones

$$\mathcal{H}:\ b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \quad (a > 0 \text{ y } b > 0) \qquad\qquad l:\ \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0 \quad (\mathsf{A}^2 + \mathsf{B}^2 \neq 0).$$

El estudio de la ***incidencia*** entre la hipérbola $\mathcal{H}$ y la recta l equivale a la consideración de la existencia de pares ordenados (x, y) de números reales que satisfagan, simultáneamente, las siguientes dos condiciones

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0;$$

o, lo que es lo mismo, a la consideración de la ***existencia de soluciones*** del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \\ \qquad \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0 \end{cases}. \tag{7.19}$$

Desde el punto de vista geométrico (ver la figura 7.10 y el ejercicio 7.2), el sistema (7.19)

(N) no tendrá solución si, y sólo si, l y $\mathcal{H}$ ***no se cortan***.

(S) tendrá dos soluciones distintas si, y sólo si, l y $\mathcal{H}$ son ***secantes*** (es decir, l corta a $\mathcal{H}$ en dos puntos distintos).

(T) tendrá dos soluciones iguales si, y sólo si, l y $\mathcal{H}$ son ***tangentes*** (es decir, l corta a $\mathcal{H}$ en un único punto y no es paralela a ninguna de sus asíntotas)⟨4⟩.

(R) tendrá una solución única si, y sólo si, l y $\mathcal{H}$ son ***transversales*** (es decir, l corta a $\mathcal{H}$ en un único punto y es paralela a una de sus asíntotas).

Desde el punto de vista algebraico, se puede proceder a resolver el sistema (7.19) despejando una de las variables en la segunda ecuación (una de las que tenga su coeficiente distinto de cero), y "sustituir" esa variable en la primera, tal como detallamos a continuación.

Si $\mathsf{B} \neq 0$, consideramos la forma corte-pendiente de la ecuación de l y el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \\ \qquad\qquad\quad y = mx + t \end{cases} \tag{7.20}$$

equivalente al sistema (7.19) (donde $m = -\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}$ y $t = -\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{B}}$).

Al sustituir el término del lado derecho de la segunda igualdad por "y" en la primera ecuación, resulta la ecuación

$$(b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2mtx - a^2(b^2 + t^2) = 0. \tag{7.21}$$

En caso de que $b^2 - a^2m^2 \neq 0$, la ecuación (7.21) es una ecuación cuadrática en la variable x que, dependiendo de su discriminante,

$$\Delta = 4a^2b^2(b^2 - a^2m^2 + t^2) \tag{7.22}$$

(N) no tendrá solución si, y sólo si, $\Delta < 0$.

(S) tendrá dos soluciones distintas si, y sólo si, $\Delta > 0$.

(T) tendrá dos soluciones iguales si, y sólo si, $\Delta = 0$.

En caso de que $b^2 - a^2m^2 = 0$, es decir, de que $m = \pm\frac{b}{a}$ (l coincide o es paralela a una de las asíntotas), la ecuación (7.21) es una ecuación lineal en la variable x que

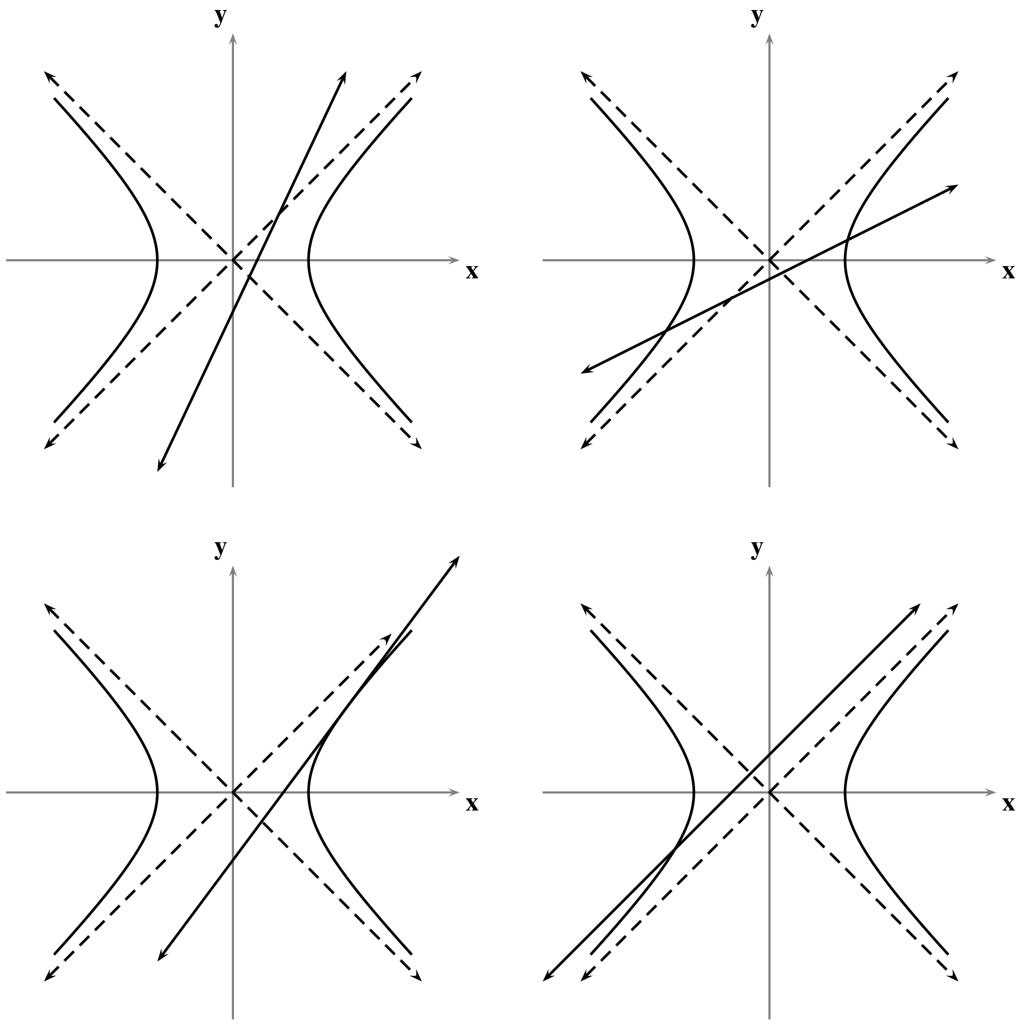


FIGURA 7.10 Incidencia entre una hipérbola y una recta

(N) no tendrá solución si, y sólo si, $t = 0$ (es decir, si, y sólo si, l es una de las asíntotas de $\mathcal{H}$).

(R) tendrá una solución única si, y sólo si, $t \neq 0$ (es decir, si, y sólo si, l es paralela a una de las asíntotas de $\mathcal{H}$).

Si $\mathsf{B} = 0$ (de donde $\mathsf{A} \neq 0$), l es perpendicular al eje **x** y, en consecuencia, consideramos el sistema de ecuaciones

(7.23)
$$\begin{cases} b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad x = h \end{cases}$$

equivalente al sistema (7.19) (donde $h = -\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{A}}$).

Al sustituir el término del lado derecho de la segunda igualdad por "x" en la primera ecuación, resulta la ecuación de segundo grado en la variable y

(7.24)
$$a^2y^2 - b^2(h^2 - a^2) = 0$$

que, dependiendo del signo de su discriminante (ver el Apéndice C)

(7.25) $$\Delta = 4a^2b^2(h^2 - a^2)$$

(N) no tendrá solución si, y sólo si, h está en el intervalo $(-a, a)$.

(S) tendrá dos soluciones distintas si, y sólo si, h está en el conjunto $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$.

(T) tendrá dos soluciones iguales si, y sólo si, $h = \pm a$.

Una vez que tengamos las soluciones de las ecuaciones correspondientes, en caso de que existan, apenas se ha encontrado una de las coordenadas de cada uno de los puntos de corte entre $\mathcal{H}$ y l: las abscisas, si se procedió como en el caso $\mathsf{B} \neq 0$; las ordenadas, si se procedió como en el caso $\mathsf{B} = 0$. Para encontrar la otra coordenada que acompaña a la ya obtenida, y tener realmente las soluciones del sistema (7.19), sustituimos cada una de las soluciones obtenidas en la segunda ecuación del mismo sistema.

OBSERVACIÓN 7.5
Note que el discriminante (7.22) *permitiría calcular con precisión, de la familia de rectas $y = mx + t$ no perpendiculares al eje* **x** *(parametrizada con los parámetros m y t), cuáles de ellas son tangentes, secantes, transversales o disjuntas respecto a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, si tenemos como dato m o t.*

➤ EJEMPLO 7.7
Para estudiar la incidencia entre la hipérbola y la recta de ecuaciones

$$4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y - 68 = 0 \quad y \quad x - y + 1 = 0,$$

respectivamente, procedemos de manera análoga a como realizamos el estudio previo.

Como la ecuación explícita de la recta es $y = x + 1$, resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y - 68 = 0 \\ y = x + 1 \end{cases}.$$

Al sustituir el lado derecho de la segunda ecuación por "y" en la primera, se obtiene la ecuación de segundo grado en la variable x

$$5x^2 - 10x + 41 = 0$$

Como el discriminante de esta ecuación es negativo, tenemos que la recta no corta a la hipérbola. QEE ◄

➤ EJEMPLO 7.8
Para estudiar la incidencia entre la hipérbola y la recta de ecuaciones

$$x^2 - y^2 + 2x - 4y - 2 = 0 \quad y \quad 2x - y = 0,$$

respectivamente, procedemos de manera análoga a como realizamos el estudio previo.

Como la ecuación explícita de la recta es $y = 2x$, resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x - 4y - 2 = 0 \\ y = 2x \end{cases}.$$

Al sustituir el lado derecho de la segunda ecuación por "y" en la primera, se obtiene la ecuación de segundo grado en la variable x

$$3x^2 + 6x + 2 = 0$$

Como el discriminante de esta ecuación es positivo, tenemos que la recta es secante a la hipérbola; después de sacar las cuentas, los puntos $(\frac{-3+\sqrt{3}}{3}, \frac{-6+2\sqrt{3}}{3})$ y $(\frac{-3-\sqrt{3}}{3}, \frac{-6-2\sqrt{3}}{3})$ son los puntos de corte entre ambas. **QEE** ➤

➤ EJEMPLO 7.9

Para estudiar la incidencia entre la hipérbola y la recta de ecuaciones

$$x^2 - y^2 - 2x + 7 = 0 \quad y \quad x - \sqrt{7}y + 5 = 0,$$

respectivamente, procedemos de manera análoga a como realizamos el estudio previo.

Como la ecuación explícita de la recta es $y = \frac{\sqrt{7}}{7}x + \frac{5\sqrt{7}}{7}$, resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 7 = 0 \\ y = \frac{\sqrt{7}}{7}x + \frac{5\sqrt{7}}{7} \end{cases}.$$

Al sustituir el lado derecho de la segunda ecuación por "y" en la primera, se obtiene la ecuación de segundo grado en la variable x

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

Como el discriminante de esta ecuación es 0, tenemos que la recta es tangente a la hipérbola; después de sacar las cuentas, el punto $(2, \sqrt{7})$ es el punto de corte entre ambas. **QEE** ➤

➤ EJEMPLO 7.10

Para estudiar la incidencia entre la hipérbola y la recta de ecuaciones

$$x^2 - y^2 + 2x - 4y - 2 = 0 \quad y \quad x - y + 3 = 0,$$

respectivamente, procedemos de manera análoga a como realizamos el estudio previo.

Resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x - 4y - 2 = 0 \\ y = x + 3 \end{cases}.$$

Al sustituir el lado derecho de la segunda ecuación por "y" en la primera, se obtiene

$$x = -\frac{23}{8}.$$

Así, la recta es transversal a la hipérbola en el punto $(-\frac{23}{8}, \frac{1}{8})$. **QEE** ➤

Recta tangente y recta normal a una hipérbola

Un problema parecido al que acabamos de resolver es el de encontrar, bajo ciertas condiciones, ***una recta tangente*** a una hipérbola.

Consideremos una hipérbola $\mathcal{H}$ de ecuación

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \quad (a > 0 \text{ y } b > 0). \tag{7.26}$$

Recordemos que una recta es tangente a la hipérbola $\mathcal{H}$, si corta a $\mathcal{H}$ en un único punto y no es paralela a sus asíntotas; condición esta última que se traduce en que su ángulo de inclinación no puede tener tangente igual a $\frac{b}{a}$ ni a $-\frac{b}{a}$.

Por la naturaleza intrínseca del tratamiento analítico de las rectas, en el análisis que desarrollaremos siempre se considerará aparte el caso de las rectas perpendiculares al eje $\mathbf{x}$, pues éstas no se pueden tratar en términos de sus pendientes.

Ahora bien, la condición de que una recta l sea tangente a la hipérbola $\mathcal{H}$, sin más, no determina ninguna recta, pues, como veremos más abajo, hay una por cada punto de $\mathcal{H}$; de manera que debemos contar con algún otro dato que determine a l. A continuación enumeramos algunas de las posibilidades sobre los datos que se pueden ofrecer.

(I) Un punto $P = (u, v)$ sobre l.

(1) l perpendicular al eje $\mathbf{x}$.
Nos preguntamos si existe alguna recta l, tangente a $\mathcal{H}$, que sea perpendicular al eje $\mathbf{x}$ y que pase por P. Por el Principio E.7 tendremos que, si existe alguna recta que satisfaga esas condiciones, es única.
Ahora, al pasar l por P y ser perpendicular al eje $\mathbf{x}$, tendremos que l se puede representar por la ecuación $x = u$. Procediendo de la misma forma en que resolvimos el sistema (7.23), l puede ser tangente a $\mathcal{H}$ si, y sólo si, el discriminante (7.25) se anula, es decir, si, y sólo si, $u^2 - a^2 = 0$. Así:

> Existirá una recta l tangente a $\mathcal{H}$, perpendicular al eje $\mathbf{x}$, y que pase por $P = (u, v)$ si, y sólo si, $u = a$ o $u = -a$; en cuyo caso, l se puede representar por la ecuación $x = u$.

(2) l no perpendicular al eje $\mathbf{x}$.
Nos preguntamos si existe alguna recta l, tangente a $\mathcal{H}$, que no sea perpendicular al eje $\mathbf{x}$ y que pase por P.
Ahora, al pasar l por P y no ser perpendicular al eje $\mathbf{x}$, tendremos que l se puede representar por una ecuación de la forma

$$y - v = m(x - u).$$

El problema se transforma entonces en saber si existe m tal que l sea tangente a $\mathcal{H}$.
Para resolver este problema, despejamos y en la ecuación anterior,

$$y = mx - mu + v,$$

y sustituimos el lado derecho por y en la ecuación (7.26), obteniendo la siguiente ecuación de segundo grado en la variable x (ya que, al no ser paralela a las asíntotas, $b^2 - a^2m^2 \neq 0$)

$$(b^2 - a^2m^2)x^2 + 2a^2m(mu - v)x - a^2((mu - v)^2 + b^2) = 0.$$

Ahora, para que l sea tangente a $\mathcal{H}$, esta ecuación debe tener dos soluciones iguales; y sabemos que esto sucede si, y sólo si, su discriminante se anula, es decir

$$4a^2b^2((u^2 - a^2)m^2 - 2uvm + v^2 + b^2) = 0;$$

y esto sucede si, y sólo si,

$$(u^2 - a^2)m^2 - 2uvm + (v^2 + b^2) = 0. \tag{7.27}$$

Así las cosas, el problema planteado tendrá solución si, y sólo si, la ecuación (7.27) tiene solución en la variable m.
En caso de que $u^2 - a^2 = 0$ (en el que ya sabemos que existe una recta perpendicular al eje **x** que pasa por P y es tangente a $\mathcal{H}$) tendremos, al despejar m en la ecuación (7.27), que

$$m = \frac{v^2 + b^2}{2uv}.$$

Como $u \neq 0$ (pues en caso contrario tendríamos, de $u^2 - a^2 = 0$, que $a = 0$) tendremos que la única manera en que esta ecuación no tenga solución es que $v = 0$; en cuyo caso, las coordenadas del punto P del que hemos estado hablando serían $(a, 0)$ o $(-a, 0)$, es decir, en caso de que P sea uno de los vértices de $\mathcal{H}$. Por tanto, si P es alguno de los vértices, la única recta tangente a $\mathcal{H}$ que pasa por P es la perpendicular al eje **x** que encontramos en la parte anterior.
Si P no es ninguno de los vértices entonces, como $u^2 - a^2 = 0$, tendremos una segunda recta tangente a $\mathcal{H}$ que pasa por P cuya ecuación sería

$$(v^2 + b^2)x - 2uvy + (v^2 - b^2)u = 0.$$

En caso de que $u^2 - a^2 \neq 0$, la ecuación (7.27) es una ecuación de segundo grado en la variable m. Como ya sabemos, la naturaleza de las soluciones de esta ecuación depende de su discriminante

$$\Delta = -4(b^2u^2 - a^2v^2 - a^2b^2), \tag{7.28}$$

la cual dependerá, a su vez, de la posición relativa del punto P respecto a $\mathcal{H}$.

(a) *El punto P está en la hipérbola*: en este caso, dicho discriminante es nulo (puesto que $b^2u^2 - a^2v^2 - a^2b^2 = 0$) y tenemos garantía de que siempre existirá una solución única para la pendiente requerida; la pendiente resulta

$$m = \frac{uv}{u^2 - a^2} = \frac{uv}{\frac{a^2v^2}{b^2}} = \frac{b^2}{a^2}\frac{u}{v}$$

y, en consecuencia, la ecuación de la tangente a la hipérbola $\mathcal{H}$ en el punto P es

$$b^2ux - a^2vy - a^2b^2 = 0.$$

(b) *El punto P está en el exterior de la hipérbola*: si $P = (0, 0)$ (es decir, si P es el centro de la hipérbola $\mathcal{H}$), entonces el discriminante (7.28) daría $4a^2b^2$ y, en consecuencia, las soluciones de la ecuación (7.27) serían $m = \pm\frac{b}{a}$; pero, como por definición sabemos que las tangentes a la hipérbola $\mathcal{H}$ no pueden tener pendiente $\pm\frac{b}{a}$, concluimos que no habrá ninguna recta tangente a $\mathcal{H}$ que pase por P.
Si $P \neq (0, 0)$ (es decir, si P no es el centro de la hipérbola $\mathcal{H}$), entonces dicho discriminante es positivo (puesto que, por el Teorema 24, $b^2u^2 - a^2v^2 - a^2b^2 < 0$) y tenemos garantía de que siempre existirán dos soluciones distintas para la pendiente requerida:

$$m = \frac{uv \pm \sqrt{-(b^2u^2 - a^2v^2 - a^2b^2)}}{u^2 - a^2}.$$

(c) *El punto P está en el interior de la hipérbola*: en este caso, dicho discriminante es negativo (puesto que, por el Teorema 24, $b^2u^2 - a^2v^2 - a^2b^2 > 0$) y, en consecuencia, no habrá ninguna recta tangente a la hipérbola $\mathcal{H}$ que pase por el punto P.

En conclusión:

> Existirá una recta l tangente a $\mathcal{H}$, no perpendicular al eje $\mathbf{x}$, y que pase por $P = (u, v)$ si, y sólo si, P no es ninguno de los vértices de $\mathcal{H}$, ni es el centro de $\mathcal{H}$, ni está en el interior de $\mathcal{H}$.
> Si $u = a$ o $u = -a$ ($v \neq 0$), entonces hay una única recta tangente a $\mathcal{H}$, no perpendicular al eje $\mathbf{x}$, que pasa por P y su ecuación es
>
> $$(v^2 + b^2)x - 2uvy + (v^2 - b^2)u = 0.$$
>
> Si $u \neq a$ y $u \neq -a$, y P está sobre $\mathcal{H}$, entonces hay una única recta tangente a $\mathcal{H}$, no perpendicular al eje $\mathbf{x}$, que pasa por P y su ecuación es
>
> $$b^2ux - a^2vy - a^2b^2 = 0.$$
>
> Si $u \neq a$ y $u \neq -a$, y P está en el exterior de $\mathcal{H}$, entonces hay dos rectas tangentes a $\mathcal{H}$, no perpendiculares al eje $\mathbf{x}$, que pasan por P y sus pendientes son
>
> $$m = \frac{uv \pm \sqrt{-(b^2u^2 - a^2v^2 - a^2b^2)}}{u^2 - a^2}.$$

(II) La dirección de l.

(1) *l perpendicular al eje* $\mathbf{x}$.
Nos preguntamos si existe alguna recta l, tangente a $\mathcal{H}$, que sea perpendicular al eje $\mathbf{x}$. Procediendo de la misma forma en que resolvimos el sistema (7.23), concluimos que:

> Existen exactamente dos rectas tangentes a $\mathcal{H}$, perpendiculares al eje $\mathbf{x}$; y éstas son las que se pueden representar por las ecuaciones $x = a$ y $x = -a$.

(2) *l no perpendicular al eje* **x**.

Nos preguntamos si existe alguna recta l, tangente a $\mathcal{H}$, que no sea perpendicular al eje **x**.
Este problema es equivalente al de saber si existe alguna recta l, tangente a $\mathcal{H}$, que tenga como pendiente algún número real m previamente fijado.
Por la definición de recta tangente sabemos que, si $m = \pm\frac{b}{a}$ (o, lo que es lo mismo, si $b^2 - a^2m^2 = 0$), entonces no existe ninguna recta tangente a $\mathcal{H}$ de pendiente m.
Supongamos entonces que $m \neq \pm\frac{b}{a}$ (o, lo que es lo mismo, que $b^2 - a^2m^2 \neq 0$).
La familia de todas las rectas de pendiente m se puede representar, parametrizada por t (la ordenada en el origen), mediante la ecuación $y = mx + t$; la recta que estamos buscando es un miembro de esta familia.
Así las cosas, el problema original se transforma en saber si existe algún número real t tal que la recta representada por la ecuación $y = mx + t$ sea tangente a $\mathcal{H}$.
Procediendo de la misma forma en que resolvimos el sistema (7.20), la recta $y = mx + t$ es tangente a $\mathcal{H}$ si, y sólo si, el discriminante (7.22) se anula, es decir, si, y sólo si,

$$b^2 - a^2m^2 + t^2 = 0.$$

El problema se transforma entonces en saber si existe t que satisfaga la ecuación anterior; y la respuesta es positiva si, y sólo si, $a^2m^2 - b^2 > 0$, es decir si, y sólo si, $|m| > \frac{b}{a}$. Además, en ese caso, existen exactamente dos valores de t que satisfacen las condiciones dadas

$$t = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2};$$

en cuyo caso existen exactamente dos rectas tangentes a $\mathcal{H}$ de pendiente m y éstas se pueden representar por las ecuaciones

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}.$$

En conclusión:

> Existirá alguna recta l, tangente a $\mathcal{H}$, que tenga como pendiente algún número real m previamente fijado si, y sólo si, $|m| > \frac{b}{a}$; en cuyo caso existen exactamente dos rectas tangentes a $\mathcal{H}$ y éstas se pueden representar por las ecuaciones
>
> $$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}.$$

Fijado un punto P en una hipérbola $\mathcal{H}$, íntimamente ligado al concepto de recta tangente a una hipérbola por el punto P tenemos lo que se llama ***la recta normal*** a una hipérbola en el punto P: esta recta se define como *la perpendicular por P a la recta tangente a la hipérbola $\mathcal{H}$ en el punto P.*

➤ Ejemplo 7.11

Consideremos la hipérbola $\mathcal{H} : 9x^2 - 16y^2 + 18x + 32y - 8 = 0$*, cuyo eje focal es perpendicular al eje* **y** *(pues* $9 > 0$*,* $-16 < 0$ *y* $(-16)(18)^2 + (9)(32)^2 - 4(9)(-16)(-8) = -576 < 0$*).*

La ecuación canónica de esta hipérbola es

$$\frac{(x+1)^2}{\frac{1}{9}} - \frac{(y-1)^2}{\frac{1}{16}} = 1;$$

de donde $C = (-1, 1)$, $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{4}$, $A = (-\frac{2}{3}, 1)$, $A' = (-\frac{4}{3}, 1)$, $B = (-1, \frac{5}{4})$ *y* $B' = (-1, \frac{3}{4})$.

Estudiemos la existencia de rectas tangentes a la hipérbola $\mathcal{H}$ *por los puntos que listamos a continuación y, en caso de que existan, calculemos sus ecuaciones generales:*

$$P = (-\tfrac{4}{3}, 1),\ Q = (-\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{2}),\ R = (1, 2),\ S = (-\tfrac{3}{2}, 1 + \tfrac{\sqrt{5}}{8}) \text{ y } T = (-\tfrac{5}{6}, \tfrac{3}{4}).$$

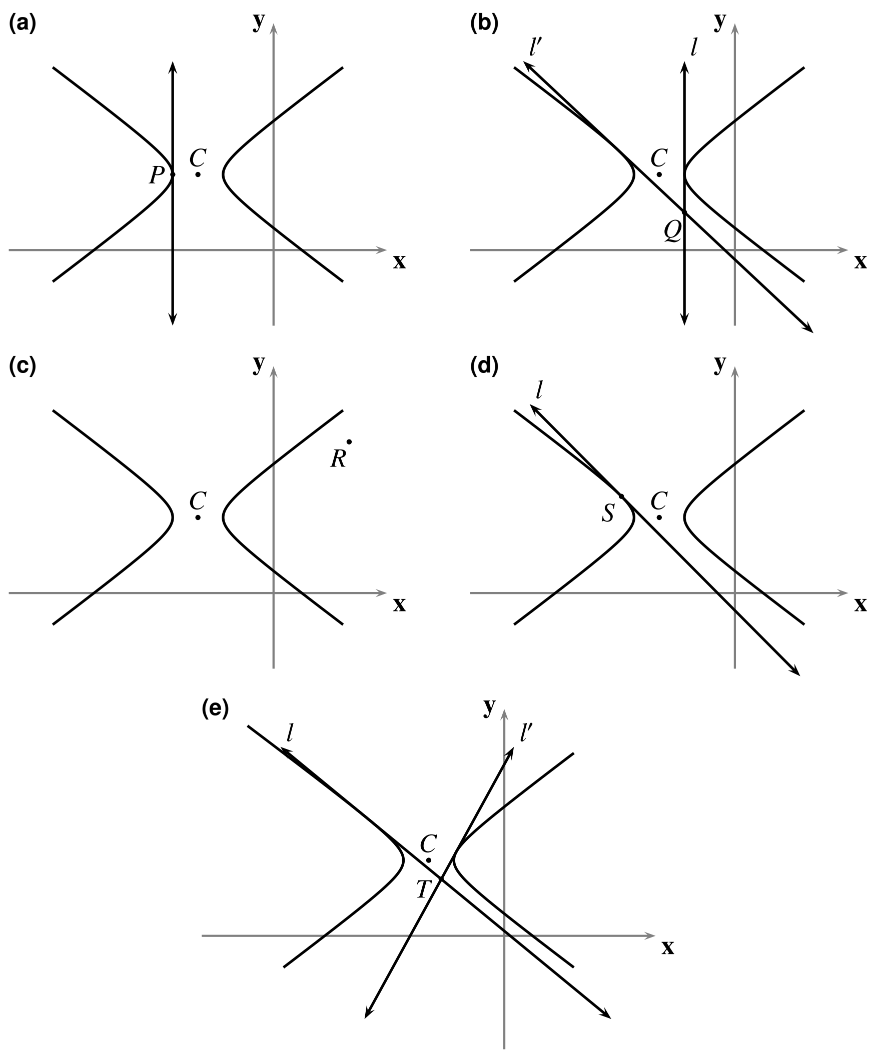


FIGURA 7.11 Representaciones gráficas correspondientes al ejemplo 7.11

(a) *El punto P está en* $\mathcal{H}$, *pues* $9(-\frac{4}{3})^2 - 16(1)^2 + 18(-\frac{4}{3}) + 32(1) - 8 = 0$.
Así, sólo habrá una recta tangente a $\mathcal{H}$ *por P.*
Además, como P coincide con el vértice A′ de la hipérbola, la recta tangente es perpendicular al eje **x** *y su ecuación es* $x = -\frac{4}{3}$.

(b) *El punto Q está en el exterior de* $\mathcal{H}$, *pues* $9(-\frac{2}{3})^2 - 16(\frac{1}{2})^2 + 18(-\frac{2}{3}) + 32(\frac{1}{2}) - 8 = -4 < 0$.
Así, habrá dos rectas tangentes a $\mathcal{H}$ *por Q.*

Como la abscisa de Q coincide con la abscisa del vértice A de la hipérbola, una de las tangentes a $\mathcal{H}$ por Q, digamos l, es perpendicular al eje $\mathbf{x}$ *y su ecuación es* $x = -\frac{2}{3}$.
Para hallar la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{H}$, no perpendicular al eje $\mathbf{x}$ *y que pasa por Q, digamos l', procedemos de manera análoga a como realizamos el estudio previo.*
Consideramos la ecuación de una recta l' genérica que pasa por Q, no perpendicular al eje $\mathbf{x}$*, digamos* $y - \frac{1}{2} = m(x + \frac{2}{3})$ *o, equivalentemente,*

$$y = mx + \tfrac{2}{3}m + \tfrac{1}{2}.$$

Sustituimos el lado derecho de esta ecuación por "y" en la ecuación de la hipérbola y obtenemos la ecuación de segundo grado

$$(-16m^2 + 9)x^2 + (-\tfrac{64}{3}m^2 + 16m + 18)x + (-\tfrac{64}{9}m^2 + \tfrac{32}{3}m + 4) = 0.$$

Para que l sea tangente a $\mathcal{H}$ en el punto Q, esta ecuación debe tener dos soluciones iguales o, lo que es lo mismo, su discriminante debe anularse, es decir,

$$16m + 15 = 0.$$

Así, el valor de m para el que la recta l' es tangente a $\mathcal{H}$ por Q es $m = -\frac{15}{16}$ *y, en consecuencia, su ecuación es* $15x + 16y + 2 = 0$.

(c) *El punto R está en el interior de $\mathcal{H}$, pues* $9(1)^2 - 16(2)^2 + 18(1) + 32(2) - 8 = 19 > 0$.
Así, no existe ninguna recta tangente a $\mathcal{H}$ por R.

(d) *El punto S está en $\mathcal{H}$, pues* $9(-\frac{3}{2})^2 - 16(1 + \frac{\sqrt{5}}{8})^2 + 18(-\frac{3}{2}) + 32(1 + \frac{\sqrt{5}}{8}) - 8 = 0$.
Como S no es ninguno de los vértices de la hipérbola, habrá una única recta tangente a $\mathcal{H}$ por S, y ésta no es perpendicular al eje $\mathbf{x}$.
Para hallar su ecuación, procedemos de manera análoga a como realizamos el estudio previo.
Consideramos la ecuación de una recta l genérica que pasa por S, no perpendicular al eje $\mathbf{x}$*, digamos* $y - (1 + \frac{\sqrt{5}}{8}) = m(x + \frac{3}{2})$ *o, equivalentemente,*

$$y = mx + \tfrac{3}{2}m + 1 + \tfrac{\sqrt{5}}{8}.$$

Sustituimos el lado derecho de esta ecuación por "y" en la ecuación de la hipérbola y obtenemos la ecuación de segundo grado

$$(-16m^2 + 9)x^2 + (-48m^2 - 4\sqrt{5}m + 18)x + (-36m^2 - 6\sqrt{5}m + \tfrac{27}{4}) = 0.$$

Para que l sea tangente a $\mathcal{H}$ en el punto S, esta ecuación debe tener dos soluciones iguales o, lo que es lo mismo, su discriminante debe anularse, es decir,

$$80m^2 + 72\sqrt{5}m + 81 = 0.$$

Como el discriminante de esta última ecuación cuadrática en la variable m es nulo, sólo habrá un valor de m para el que la recta l es tangente a $\mathcal{H}$ por S, a saber, $m = -\frac{9\sqrt{5}}{20}$.
Así, la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{H}$ en el punto S es $9\sqrt{5}x + 20y + 11\sqrt{5} - 20 = 0$.

(e) *El punto T está en el exterior de $\mathcal{H}$, pues* $9(-\frac{5}{6})^2 - 16(\frac{3}{4})^2 + 18(-\frac{5}{6}) + 32(\frac{3}{4}) - 8 = -\frac{7}{4} < 0$.
Así, como T es distinto del centro C, habrá dos rectas tangentes a $\mathcal{H}$ por T.

Como T tiene abscisa distinta de la de los vértices de la hipérbola, las dos tangentes a $\mathcal{H}$ por T no son perpendiculares al eje **x**.
Para hallar sus ecuaciones, procedemos de manera análoga a como realizamos el estudio previo.
Consideramos la ecuación de una recta l genérica que pasa por T, no perpendicular al eje **x**, *digamos $y - \frac{3}{4} = m(x + \frac{5}{6})$ o, equivalentemente,*

$$y = mx + \tfrac{5}{6}m + \tfrac{3}{4}.$$

Sustituimos el lado derecho de esta ecuación por "y" en la ecuación de la hipérbola y obtenemos la ecuación de segundo grado

$$(-16m^2 + 9)x^2 + (-\tfrac{80}{3}m^2 + 8m + 18)x + (-\tfrac{100}{9}m^2 + \tfrac{20}{3}m + 7) = 0.$$

Para que l sea tangente a $\mathcal{H}$ en el punto T, esta ecuación debe tener dos soluciones iguales o, lo que es lo mismo, su discriminante debe anularse, es decir,

$$2m^2 - 2m - 3 = 0.$$

Como el discriminante de esta última ecuación cuadrática en la variable m es positivo, habrá dos valores distintos de m para los que la recta l es tangente a $\mathcal{H}$ por T, a saber: $m = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$ y $m = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$.
Así, las ecuaciones de las rectas tangentes a $\mathcal{H}$ por el punto T son $(6-6\sqrt{7})x-12y+(14-5\sqrt{7}) = 0$ *y* $(6 + 6\sqrt{7})x - 12y + (14 + 5\sqrt{7}) = 0$.

QEE ◀

➤ Ejemplo 7.12

Consideremos la misma hipérbola $\mathcal{H} : 9x^2 - 16y^2 + 18x + 32y - 8 = 0$ *del ejemplo anterior.*

Estudiemos la existencia de rectas tangentes a la hipérbola $\mathcal{H}$ que tengan como pendiente el número real 1 *(ver la figura 7.12).*

Como $|1| = 1 > \frac{1/4}{1/3} = \frac{3}{4}$, *sabemos que existen dos rectas tangentes a la hipérbola $\mathcal{H}$ de pendiente* 1*; para hallar sus ecuaciones procedemos de manera análoga a como realizamos el estudio previo.*

Consideramos la ecuación de una recta l genérica de pendiente 1, *digamos $y = x + t$.*

Sustituimos el lado derecho de esta ecuación por "y" en la ecuación de la hipérbola y obtenemos la ecuación de segundo grado

$$7x^2 + (32t - 50)x + 16t^2 - 32t + 8 = 0.$$

Para que l sea tangente a $\mathcal{H}$, esta ecuación debe tener dos soluciones iguales o, lo que es lo mismo, su discriminante debe anularse, es decir,

$$283t^2 - 1152t + 1138 = 0.$$

Como el discriminante de esta ecuación de segundo grado en la variable t es positivo, habrá dos valores de t para los que la recta l es tangente a $\mathcal{H}$, a saber: $t = 2 + \frac{\sqrt{7}}{12}$ y $t = 2 - \frac{\sqrt{7}}{12}$.

Por tanto, las ecuaciones de las rectas tangentes a $\mathcal{H}$ de pendiente 1 *son* $12x - 12y + 24 + \sqrt{7} = 0$ *y* $12x - 12y + 24 - \sqrt{7} = 0$.

QEE ◀

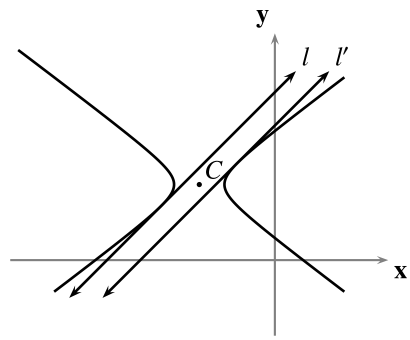


FIGURA 7.12 Representación gráfica correspondiente al ejemplo 7.12

§ 7.4 Aplicaciones de la hipérbola

En esta sección presentaremos algunas propiedades esenciales de las hipérbolas que han permitido usarlas en múltiples aplicaciones en la Física y, en consecuencia, en la tecnología.

Una de las aplicaciones más relevantes de las hipérbolas depende de la siguiente propiedad.

Consideremos una hipérbola $\mathcal{H}$ de focos F y F', y un punto P de $\mathcal{H}$, distinto de sus vértices.

Consideremos la recta l tangente a $\mathcal{H}$ por P; sabemos, por lo hecho en el parágrafo anterior y por el hecho de que P no es ninguno de los vértices de $\mathcal{H}$, que l no es paralela al eje focal de $\mathcal{H}$; llamemos T al punto donde l corta al eje focal de $\mathcal{H}$.

Consideremos la recta l' normal a $\mathcal{H}$ por P; sabemos, por lo hecho en el parágrafo anterior y por el hecho de que P no es ninguno de los vértices, que l' no es paralela a (ni coincide con) el eje focal de $\mathcal{H}$; llamemos N al punto donde l' corta al eje focal de $\mathcal{H}$.

TEOREMA 25 (PROPIEDAD FOCAL DE LAS HIPÉRBOLAS)

(a) *l contiene el bisector del ángulo $\angle FPF'$.*

(b) *l' contiene los bisectores de los adyacentes lineales del ángulo $\angle FPF'$.*

■ **PRUEBA**

Consideremos la hipérbola $\mathcal{H}: \; b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ ($a > 0$ y $b > 0$), cuyos focos son

$$F = (c, 0) \quad \text{y} \quad F' = (-c, 0).$$

Consideremos un punto $P = (u, v)$ sobre la hipérbola $\mathcal{H}$ distinto de sus vértices, es decir, tal que

$$(u, v) \neq (a, 0), \quad (u, v) \neq (-a, 0) \quad \text{y} \quad b^2u^2 - a^2v^2 - a^2b^2 = 0.$$

Por lo hecho en el parágrafo anterior, la recta l tangente a la hipérbola $\mathcal{H}$ por el punto P se puede representar por la ecuación

$$b^2ux - a^2vy - a^2b^2 = 0;$$

de donde, el punto T donde l corta al eje focal de $\mathcal{H}$ es $T = (\frac{a^2}{u}, 0)$.

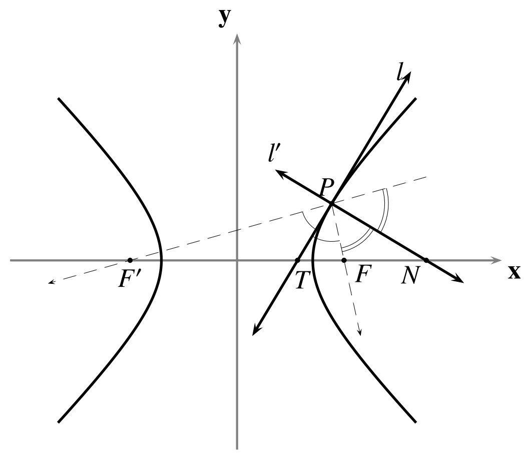


FIGURA 7.13 Propiedad focal de las hipérbolas

Como $|u| > a$ y $0 < a < c$, tendremos que $\frac{a^2}{|u|} < c$ y, en consecuencia, el punto T está entre los focos F y F'.

Por otro lado, como $b^2u^2 - a^2v^2 - a^2b^2 = 0$, tenemos que $(c^2 - a^2)u^2 - a^2v^2 - a^2(c^2 - a^2) = 0$ y, de aquí, que $u^2 + v^2 = a^2 - c^2 + \frac{c^2u^2}{a^2} = 0$. De este modo,

$$PF = \left|\frac{a^2 - cu}{a}\right| \quad \text{y} \quad PF' = \left|\frac{a^2 + cu}{a}\right|.$$

Como, además,

$$FT = \left|\frac{a^2 - cu}{u}\right| \quad \text{y} \quad F'T = \left|\frac{a^2 + cu}{u}\right|,$$

tendremos que $\frac{PF}{PF'} = \frac{FT}{F'T}$.

Así, por el Principio E.27, $\overrightarrow{PT}$ es bisector del ángulo $\angle FPF'$.

Como l' es perpendicular a l tendremos, por el Principio E.26, que l' contiene los bisectores de los adyacentes lineales del ángulo $\angle FPF'$.

QEP ■

Así, si un rayo, lumínico o sonoro, parte de un foco en una superficie reflectora cuyas secciones transversales son la misma rama de una hipérbola, entonces se aleja en la orientación opuesta a la determinada por el punto de incidencia de dicho rayo y el otro foco de la hipérbola.

El sistema LORAN (long range) de navegación para ubicar barcos que emiten señales radiotelegráficas en altamar, así como otros sistemas que precisan la ubicación de cañones ocultos, se basan en las propiedades geométricas de la hipérbola. El fenómeno se puede describir de la siguiente manera. Considere tres estaciones receptoras de señales sonoras A, B y C, y una estación emisora del mismo tipo de señal S; supongamos que las cuatro estaciones están sincronizadas y que el sonido se propaga con movimiento uniforme a velocidad v. Si en las estaciones receptoras se anotan los instantes t_A, t_B y t_C en que recibieron una señal emitida por S en cierto instante t, resulta que

$$SA = v(t_A - t); \quad SB = v(t_B - t) \quad \text{y} \quad SC = v(t_C - t);$$

con lo que

$$|SA - SB| = v|t_A - t_B| \quad \text{y} \quad |SA - SC| = v|t_A - t_C|.$$

Ahora, como v, t_A, t_B y t_C son constantes, tendremos que $|SA - SB| = constante$ y $|SA - SC| = constante$ (ver el ejercicio 7.46), es decir, S se encuentra en la intersección de las hipérbolas de focos A y B con diámetro real $v|t_A - t_B|$, y de focos A y C con diámetro real $v|t_A - t_C|$.

Si se emite una señal de radio desde una fuente, ésta se propaga en el tiempo en la forma de un círculo con centro en la fuente; de este modo, si se emiten simultáneamente señales de radio desde dos fuentes distintas, que se propagan formando dos familias de círculos concéntricos, las señales sincronizadas se intersectan formando hipérbolas.

Los telescopios reflectores combinan las propiedades ópticas de la parábola y la hipérbola; la trayectoria de una partícula alfa en el campo eléctrico producido por el núcleo de un átomo es una hipérbola; la relación entre la presión y el volumen de un gas expresada en la ley de Boyle, a temperatura constante, genera una hipérbola. Cuando afilamos un lápiz que tiene sección transversal poligonal con un sacapuntas, el patrón curvo que se observa en el cono del extremo está compuesto por arcos de hipérbolas. Cuando ubicamos cerca de una pared una lámpara que tiene cubierto el bombillo con una especie de sombrero abierto por arriba y por abajo, el patrón de luz que se proyecta en la pared forma arcos hiperbólicos.

Problemas

En cada uno de los problemas en los que sea pertinente, realice una representación gráfica.

7.1 Dados los focos y el diámetro real de una hipérbola, muestre un procedimiento para graficar puntos de la hipérbola, por medio de:

(a) un canto recto, un cordón y dos tachuelas.

(b) un canto recto y un compás.

7.2 Verifique que ninguna hipérbola tiene tres puntos colineales distintos.

7.3 Encuentre la ecuación general de la hipérbola que satisface las siguientes condiciones:

(a) directriz $x = -4$, foco el punto $(-1, 0)$ y excentricidad 2.

(b) directriz $y = 32$, foco el punto $(0, 2)$ y excentricidad 4.

(c) vértices $(3, 0)$, $(-3, 0)$ y foco $(4, 0)$.

(d) vértices $(0, 3)$, $(0, -3)$ y foco $(0, 4)$.

(e) focos $(2, 0)$, $(-2, 0)$, y su excentricidad es igual a 2.

(f) centro en el origen, uno de sus vértices en el punto $(0, -7)$ y pasa por el punto $(3, 10)$.

(g) centro en el origen, su diámetro real está sobre el eje **x** y pasa por los puntos $(2, 0)$, $(2, 3)$.

(h) pasa por el punto $(2, 1)$, tiene su centro en el origen, su diámetro imaginario está sobre el eje **x** y su diámetro real es el doble de su diámetro imaginario.

(i) focos $(2, 0)$, $(-2, 0)$, y su radio real 1.

(j) focos $(2, 0)$, $(-2, 0)$, y su radio imaginario 1.

(k) vértices $(3, 1)$, $(5, 1)$ y su excentricidad es igual a 14.

(l) pasa por el punto $(2, 3)$, tiene su centro en el origen, su diámetro real está sobre el eje **y** y una de sus asíntotas es la recta $2y - x = 0$.

(m) pasa por el punto $(3, -1)$, su centro está en el origen, su diámetro real está sobre el eje **x** y una de sus asíntotas es la recta $2x - y = 0$.

7.4 Si el centro de una hipérbola no es el origen y sus ejes son perpendiculares a los ejes coordenados, verifique que su ecuación queda completamente determinada por cuatro de sus puntos distintos.

7.5 Encuentre la ecuación de la hipérbola que pasa por los puntos:

(a) $(2, 1)$, $(1 + \sqrt{5}, 3)$, $(3, 1 + \sqrt{3})$ y $(5, 1 + \sqrt{15})$.

(b) $(2, -2)$, $(3, -2 + \frac{2\sqrt{7}}{3})$, $(-4, -2)$ y $(-5, -2 + 2\sqrt{3})$.

7.6 Encuentre los radios real e imaginario, la excentricidad, la semidistancia focal, el centro, el eje focal, los vértices, los puntos auxiliares, los focos, las directrices y las asíntotas de las hipérbolas siguientes.

(a) $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0.$

(b) $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0.$

(c) $4y^2 - 9x^2 - 36 = 0.$

(d) $y^2 - 9x^2 - 9 = 0.$

(e) $9x^2 - 16y^2 + 54x + 64y - 127 = 0.$

(f) $4x^2 - y^2 - 6y - 5 = 0.$

(g) $25x^2 - 4y^2 + 150x - 8y + 129 = 0.$

(h) $3x^2 - y^2 + 30x + 78 = 0.$

7.7 Encuentre, parametrizada con la excentricidad y la distancia p del foco a la directriz, la ecuación de la hipérbola que tiene directriz d, foco F y excentricidad e, respecto al sistema de ejes ortogonales cuyo eje **x** coincide con su eje focal, orientado positivamente desde D hacia F, y cuyo eje **y** coincide con su directriz.

7.8 Encuentre, parametrizada con la longitud del radio real, la familia de hipérbolas que tienen centro $(1, 5)$, eje focal común y perpendicular al eje **y**, y excentricidad 3.

7.9 En la familia de hipérbolas $x^2 - 4y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + 1 = 0$, encuentre la ecuación de la que pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(6, 1)$.

7.10 En la familia de hipérbolas $\mathsf{A}x^2 - y^2 + 8x - 6y - 12 = 0$, encuentre las ecuaciones de las que tienen excentricidad 3.

7.11 Verifique que las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $b^2(x - x_0)^2 - a^2(y - y_0)^2 = a^2b^2$ son $b(x - x_0) + a(y - y_0) = 0$ y $b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$.

7.12 Verifique que la distancia de un foco de una hipérbola a una cualquiera de sus asíntotas es igual a su radio imaginario.

7.13 Encuentre la distancia de uno de los focos de la hipérbola $16x^2 - 9y^2 = 144$ a una cualquiera de sus asíntotas.

7.14 Verifique que el producto de las distancias de cualquier punto de una hipérbola a sus asíntotas es constante e igual a $\frac{a^2b^2}{c^2}$ (o, lo que es lo mismo, e^2b^2).

7.15 Encuentre los ángulos entre las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - y^2 - 36x - 2y + 44 = 0$.

7.16 Dada la hipérbola $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$, encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes:

(a) por el punto $(6, 2\sqrt{3})$.

(b) por el punto $(-3, 0)$.

(c) de pendiente -1.

(d) desde el punto $(1, 1)$.

7.17 Encuentre las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $x^2 - 2y^2 + 4x - 8y - 6 = 0$ que son paralelas (perpendiculares) a la recta $4x - 4y + 11 = 0$.

7.18 Calcule los ángulos entre las rectas tangentes desde el punto $(3, 6)$ a la hipérbola $x^2 - y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$, y las coordenadas de los puntos de contacto.

7.19 Adecuando las definiciones dadas en el ejercicio 3.17, encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal, y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, para cada hipérbola y punto de contacto dados.

(a) $4y^2 - 4x^2 - 1 = 0$; $(0, \frac{1}{2})$.

(b) $4x^2 - y^2 - 6y - 5 = 0$; $(\sqrt{3}, 1)$.

(c) $y^2 - 9x^2 - 9 = 0$; $(0, 3)$.

(d) $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$; $(\frac{3}{4}\sqrt{5}, 1)$.

7.20 Dada la hipérbola $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$, encuentre los valores de t para los que la recta $y = 2x + t$

(a) no corta a la hipérbola.

(b) es secante a la hipérbola.

(c) es tangente a la hipérbola.

(d) es transversal a la hipérbola.

7.21 Dada la hipérbola $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$, encuentre los valores de m para los que la recta $y = mx + 3$

(a) no corta a la hipérbola.

(b) es secante a la hipérbola.

(c) es tangente a la hipérbola.

(d) es transversal a la hipérbola.

7.22 Dada la hipérbola $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$, encuentre los valores de h para los que la recta $x = h$

(a) no corta a la hipérbola.

(b) es secante a la hipérbola.

(c) es tangente a la hipérbola.

(d) es transversal a la hipérbola.

7.23 Verifique que el producto de las distancias de los focos de una hipérbola a cualquier tangente es constante e igual al cuadrado de la longitud del radio imaginario.

7.24 Verifique que el valor absoluto de la pendiente de las rectas tangentes de una hipérbola en cualquier extremo de sus lados rectos es igual a su excentricidad.

7.25 Verifique que el punto de contacto de cualquier tangente a una hipérbola es el punto medio del segmento de tangente comprendido entre las asíntotas.

7.26 Verifique que el triángulo formado por una tangente cualquiera a una hipérbola y sus asíntotas tiene un área constante.

7.27 Las tangentes en los vértices de una hipérbola cortan a otra tangente cualquiera en los puntos P y Q. Verifique que los puntos P y Q, y los focos de la hipérbola están sobre un círculo.

7.28 Adecúe las definiciones dadas en el ejercicio 6.24, y verifique que en cualquier hipérbola de radio real a y radio imaginario b:

(a) las ordenadas de los extremos de los lados rectos están dadas por $\pm\frac{b^2}{a}$; muestre que dichas ordenadas también se pueden expresar como $\pm(a - ec)$.[5]

(b) la longitud del lado recto es $\frac{2b^2}{a}$.

7.29 Encuentre la ecuación general de la hipérbola que satisface las siguientes condiciones:

(a) focos $(3, 0)$, $(-3, 0)$, y longitud de sus lados rectos igual a 9.

(b) vértices $(2, 6)$ y $(2, 2)$, y longitud de sus lados rectos igual a 2.

7.30 Verifique que la suma de las abscisas de los extremos de una cuerda (no perpendicular al eje $\mathbf{x}$) de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ es $\frac{2a^2mt}{b^2-a^2m^2}$, donde $y = mx + t$ es la recta que contiene a dicha cuerda.

7.31 Si $P = (u, v)$ es un punto cualquiera de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, verifique que la longitud de sus radios focales son $|a + eu|$ y $|a - eu|$. ⟨6⟩

7.32 Encuentre las longitudes de los radios focales del punto $(4, \frac{2\sqrt{7}}{3})$ que está sobre la hipérbola $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$.

7.33 Si $P = (u, v)$ es un punto exterior a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, verifique que la ecuación de la secante determinada por la cuerda de contacto de P es $b^2ux - a^2vy - a^2b^2 = 0$. Explique el parecido con la ecuación de la tangente a la hipérbola cuando el punto P está sobre ella.

7.34 Dada la hipérbola $x^2 + 2y^2 = 2$, encuentre la ecuación de la secante determinada por la cuerda de contacto del punto $(-2, 4)$.

7.35 Una hipérbola se llama ***equilátera***, cuando las longitudes de sus radios real e imaginario son iguales; y una hipérbola se llama ***rectangular***, cuando sus asíntotas son perpendiculares.

Verifique que:

(a) una hipérbola es equilátera si, y sólo si, es rectangular.

(b) todas las hipérbolas equiláteras tienen excentricidad $\sqrt{2}$.

(c) una figura geométrica $\mathcal{G}$ es una hipérbola equilátera si, y sólo si, el producto de las distancias de cualquier punto de $\mathcal{G}$ a dos rectas perpendiculares es una constante positiva.

(d) la distancia de cualquier punto de una hipérbola equilátera a su centro es media proporcional de las longitudes de los dos radios focales con extremo en dicho punto.

7.36 Dada una hipérbola equilátera, considere la recta l normal a la hipérbola por uno de sus puntos, digamos P, distinto de sus vértices. Si C es el centro de la hipérbola y N es el punto donde l corta a su eje focal, verifique que $PC = PN$.

7.37 Dos hipérbolas se llaman ***conjugadas***, cuando el diámetro real de una es el diámetro imaginario de la otra.

Verifique que:

(a) toda hipérbola tiene exactamente una conjugada.

(b) si dos hipérbolas son conjugadas, entonces tienen el mismo centro, las mismas asíntotas, y sus focos equidistan del centro (están sobre un círculo con centro en el centro de las hipérbolas).

(c) si una hipérbola es equilátera, entonces su conjugada también lo es.

(d) si las excentricidades de dos hipérbolas conjugadas son e_1 y e_2, entonces $\frac{e_1}{e_2} = \frac{b}{a}$ y $e_1^2 + e_2^2 = e_1^2 e_2^2$.

7.38 Verifique que la excentricidad de una hipérbola es igual a la secante del ángulo de inclinación de una de sus asíntotas.

7.39 Verifique que la elipse $2x^2 + y^2 = 10$ y la hipérbola $4y^2 - x^2 = 4$ son ortogonales.

7.40 Verifique que la elipse $x^2 + 3y^2 = 6$ y la hipérbola $x^2 - 3y^2 = 3$ tienen los mismos focos.

7.41 Verifique que una hipérbola y una elipse con los mismos focos son ortogonales.

7.42 Considere la familia de todas las cuerdas de una hipérbola paralelas a una cuerda dada. Verifique que el conjunto de los puntos medios de los miembros de esa familia están sobre una diametral de la misma.

7.43 Verifique que la ecuación de la recta que contiene los puntos medios de cualquier familia de cuerdas paralelas de pendiente m ($m \neq 0$, $m \neq \pm\frac{b}{a}$) de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ es $y = \frac{b^2}{a^2m}x$.

7.44 Verifique que si un diámetro de una hipérbola biseca a todas las cuerdas paralelas a otro diámetro, el segundo diámetro biseca a todas las cuerdas paralelas al primero. Tales diámetros se llaman ***diámetros conjugados*** de la hipérbola.

7.45 Verifique que la longitud del radio imaginario de una hipérbola es media proporcional entre la longitud de su radio real y su lado recto.

7.46 **(Definición del cordón)**
Verifique que una ***hipérbola*** coincide con el conjunto de los puntos del plano para los que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos previamente fijados (los ***focos***) es una constante positiva $2a$ (la longitud de su diámetro real), menor que la distancia entre los focos (la distancia focal).

7.47 **(Propiedad intrínseca de la hipérbola)**
Fijada una recta f, un punto C sobre f, y dos números reales positivos a y b, verifique que una ***hipérbola*** coincide con el conjunto de los puntos P del plano para los que

$$\frac{(CP)^2}{a^2} - \frac{(PP')^2}{b^2} = 1,$$

donde P' es la proyección de P sobre f.

7.48 Verifique que la recta que pasa por el foco de una hipérbola y es perpendicular a una asíntota intersecta a esa asíntota en la directriz más cercana al foco.

7.49 Represente gráficamente las figuras geométricas que satisfacen las condiciones dadas.

(a) $x + y - 1 > 0$ y $9x^2 - 4y^2 - 36 < 0$.

(b) $y^2 - x - 10y + 20 \leq 0$ y $25x^2 - 4y^2 - 100 \geq 0$.

(c) $9x^2 + 4y^2 - 36 \leq 0$ y $9y^2 - 4x^2 - 36 > 0$.

(d) $x^2 + y^2 - 25 \leq 0$ y $9y^2 - 4x^2 - 36 > 0$.

7.50 Un observador ubicado en el punto P oye el estampido de un rifle, y el golpe de la bala sobre el objetivo, en el mismo instante. Verifique que todos los posibles puntos P en los que puede ocurrir este fenómeno constituyen una hipérbola.

7.51 Tres sujetos ubicados en los puntos $A = (-8, 0)$, $B = (8, 0)$ y $C = (8, 10)$, escucharon una explosión. Si los sujetos en B y C la escucharon al mismo tiempo, y el sujeto en A la escuchó 12 segundos después, ¿dónde ocurrió la explosión?

7.52 Para cada uno de los siguientes casos, encuentre la relación que satisfacen las coordenadas cartesianas del punto $P = (x, y)$ sujeto a la condición correspondiente.

(a) su distancia al punto $(3, 2)$ es siempre igual al triple de su distancia a la recta $y + 1 = 0$.

(b) su distancia al punto $(6, 0)$ es siempre igual al doble de su distancia de la recta $2x - 3 - 0$.

(c) el producto de las pendientes de las rectas que concurren en P, y que pasan por los puntos $(3, 0)$ y $(-3, 0)$, es igual a 4.

7.53 **(Parametrización de una hipérbola)**
Si $\mathcal{H}$ es la hipérbola con centro en el origen, radio real a, radio imaginario b y eje focal sobre el eje **x**, verifique que el punto $P = (u, v)$ está en $\mathcal{H}$ si, y sólo si, existe un número real t distinto de $\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}$ tal que

$$u = a \sec t \qquad \text{y} \qquad v = b \tan t.$$

7.54 **(Parametrización racional de una hipérbola)**
Si $\mathcal{H}$ es la hipérbola con centro en el origen, radio real a, radio imaginario b y eje focal sobre el eje **x**, verifique que el punto $P = (u, v)$ distinto de $A = (-a, 0)$ está en $\mathcal{H}$ si, y sólo si, existe un número real t distinto de 1 y -1 tal que

$$u = a\frac{1 + t^2}{1 - t^2} \qquad \text{y} \qquad v = b\frac{2t}{1 - t^2}.$$

7.55 **(Parametrización racional de una hipérbola)**
Si $\mathcal{H}$ es la hipérbola con centro en el origen, radio real a, radio imaginario b y eje focal sobre el eje **x**, y k es cualquier número real no nulo, verifique que el punto $P = (u, v)$ distinto de $A = (-a, 0)$ está en $\mathcal{H}$ si, y sólo si, existe un número real t distinto de $\frac{1}{k}$ y $-\frac{1}{k}$ tal que

$$u = a\frac{1 + (kt)^2}{1 - (kt)^2} \qquad \text{y} \qquad v = b\frac{2(kt)}{1 - (kt)^2}.$$

Comentarios

⟨1⟩ Muchas veces este segmento es llamado ***el eje real*** o ***el eje transverso*** de la hipérbola; y, en consecuencia, el número real $2a$ es llamado la longitud del eje real o transverso.

⟨2⟩ Muchas veces este segmento es llamado ***eje imaginario*** o ***eje conjugado*** de la hipérbola; y, en consecuencia, el número real $2b$ es llamado la longitud del eje imaginario o conjugado.

⟨3⟩ La palabra *asíntota*, sustantivo en español, es originariamente un adjetivo calificativo que califica una relación entre dos objetos. Más precisamente: esa palabra corresponde al adjetivo calificativo griego *ασύμπτωτος*. Esta palabra griega está compuesta por: el prefijo *α* que indica la negación de aquello a lo que ella precede; el prefijo *συν* que indica que aquello a lo que ella precede sucede simultáneamente, en el mismo tiempo, o uno junto a otro, uno en relación al otro; y el adjetivo verbal (no existente, y calificado de incorrecto por los expertos) del verbo *πίπτω* que significa, entre muchas otras cosas, *caer hasta encontrarse* (se presupone con lo último, con el fin, con el límite). Así las cosas, la metáfora escondida detrás de la palabra *asíntota* da cuenta de dos entes que *caen, uno en relación al otro, pero que no se encuentran el uno con el otro*. En español se usa el sustantivo *asíntota* para referirse a aquel de los entes respecto al cual el otro cae o se acerca: en nuestro caso, la recta.

⟨4⟩ Para introducir esta categoría de posición relativa entre una recta y una hipérbola, y la categoría siguiente, se podría comentar que, para definir tangencia entre una recta y una hipérbola, no basta con decir que se cortan en un único punto (como en los círculos y las elipses), pues hay dos tipos de rectas que cortan a una hipérbola en un único punto: las que definimos en este aparte, que son las tangentes, y las que se definirán en el siguiente, que son las transversales.

Algunos lectores podrían juzgar como antinatural presentar primero aquella de la que tenemos que establecer una condición en forma negativa ("no paralela a"); pero, presentándolo del otro modo, se rompería la naturalidad del estudio del signo del discriminante de la ecuación cuadrática resultante. Preferimos conservar este último orden de presentación.

⟨5⟩ Este dato facilita el trabajo de hacer un dibujo aproximado de una hipérbola, pues provee cuatro puntos adicionales de la hipérbola, aparte de vértices: los extremos de los dos lados rectos, uno por cada foco.

⟨6⟩ Note que el valor absoluto de la diferencia de los radios focales de cualquier punto de una hipérbola es constante e igual a la longitud de su diámetro real.

Orientación para resolver los problemas del Capítulo 7

A continuación ofrecemos ***ayudas*** para algunos de los problemas.

7.1.(a): Este procedimiento tiene su sustento en el ejercicio 7.46.

7.1.(b): Trace la recta $\overleftrightarrow{FF'}$, considere el punto medio del segmento $\overline{FF'}$ y ahora trace los puntos A y A'. Para obtener otros puntos de la hipérbola, tome un punto M cualquiera fuera del segmento $\overline{FF'}$ y considere los puntos de intersección de los círculos de centro F y radio MA' con los círculos de centro F' y radio MA; considere también los puntos de intersección de los círculos de centro F y radio MA con los círculos de centro F' y radio MA'. Verifique que tales puntos están sobre la hipérbola. Observe que, si toma los puntos M que estén entre F y F', los círculos no se cortan.

7.53: Considere los círculos C_a y C_b, de radios a y b con centro en el origen (ver la figura 7.14); considere el punto A, proyección del punto $P = (u, v)$ de la hipérbola sobre el eje $\mathbf{x}$; considere el segmento $\overline{AB}$ tangente al círculo C_a, con B en el mismo lado del eje $\mathbf{x}$ en el que está el punto P; considere el segmento $\overline{OB}$; tome $\boxed{t = \theta}$, el ángulo que determina el rayo $\overrightarrow{OB}$ con el sentido positivo del eje $\mathbf{x}$; pruebe que $u = a \sec t$. Por el punto $C = (b, 0)$, considere la recta perpendicular al eje $\mathbf{x}$, y llame $D = (b, z)$ al punto en que corta al rayo $\overrightarrow{OB}$; verifique que $z = v$ (pruebe, por el Teorema de Pitágoras, que $AB^2 = u^2 - a^2$; calculando $\tan\theta$ en $\triangle OCD$ y en

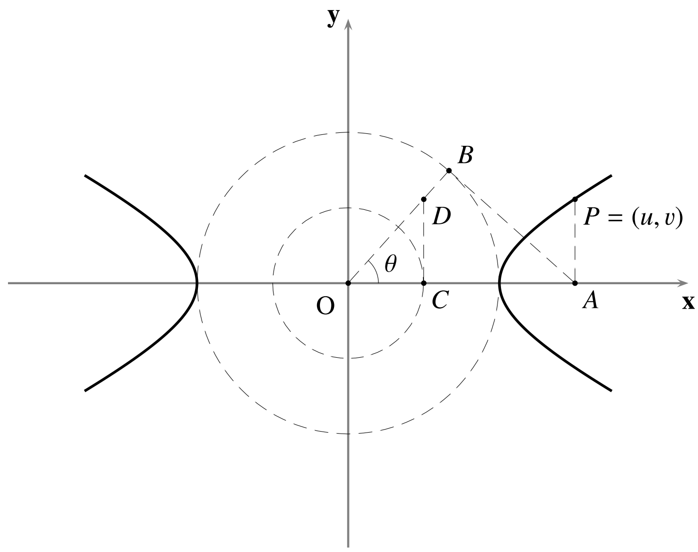


FIGURA 7.14 Ayuda del ejercicio 7.53

$\triangle OBA$, pruebe que $AB^2 = \frac{a^2}{b^2}z^2$; recuerde que $a^2v^2 = b^2(u^2 - a^2)$, pues P está en $\mathcal{H}$); pruebe que $v = b\tan t$.

Note que este procedimiento presupone que el punto P no es ninguno de los vértices de la hipérbola; verifique aparte, con el mismo t, que la afirmación también es cierta para estos puntos.

7.54: Utilice un procedimiento análogo al de los ejercicios 3.47 y 6.60, con el punto $A = (-a, 0)$ y $\boxed{t = \frac{a}{b}\tan\alpha}$.

7.55: Utilice un procedimiento análogo al del ejercicio 3.48 y 6.61.

CAPÍTULO

8

Secciones cónicas y ecuaciones cuadráticas

Hemos dedicado los últimos tres capítulos a estudiar una familia de figuras geométricas planas muy particular: *las cónicas*. La definición a partir de la cual hemos deducido sus propiedades, que hemos llamado *geométrica*, así como la definición que hemos llamado *del cordón* (de la cual hemos encomendado como ejercicio al lector la prueba de la equivalencia con la anterior), no dan cuenta del nombre usual que reciben estas figuras geométricas.

Definiremos de inmediato una familia de figuras geométricas un poco más amplia, que denominaremos *secciones cónicas*, entre las cuales se encuentran todas las figuras geométricas que hemos estudiado en los capítulos anteriores (rectas, círculos y cónicas), y a partir de la cual podemos comprender el origen del nombre de estas últimas: por razones históricas, llamaremos *clásica* a esta definición de las cónicas⟨1⟩. Como su definición formal requiere del conocimiento de la Geometría del espacio, que está fuera del alcance de este texto, haremos una descripción de tales figuras geométricas desde un punto de vista “ingenuo”, apelando a la imaginación del lector.

Para este capítulo, en aras de la consistencia del léxico que utilizaremos, extenderemos la noción de figura geométrica hasta incluir al conjunto vacío como un subconjunto más del plano.

§ 8.1 Definición clásica de las cónicas: las secciones cónicas

Considere las siguientes figuras geométricas (ver la figura 8.1⟨2⟩): un plano cualquiera en el espacio; en ese plano, un círculo C de centro Q; la recta l perpendicular a dicho plano en el punto Q; un punto V en la recta l distinto de Q; un punto P en el círculo C; y, finalmente, la recta $\overleftrightarrow{VP}$. Imagínese ahora que “se hace mover” el punto P a lo largo de todo el círculo C, produciendo una rotación de la recta $\overleftrightarrow{VP}$ a lo largo del círculo con el punto V fijo (esto equivale, formalmente, a la consideración del conjunto de todos los puntos que se encuentran sobre alguna recta $\overleftrightarrow{VP}$, con P en el círculo C). La superficie generada por la rotación de esa recta es llamada *un cono circular recto*.

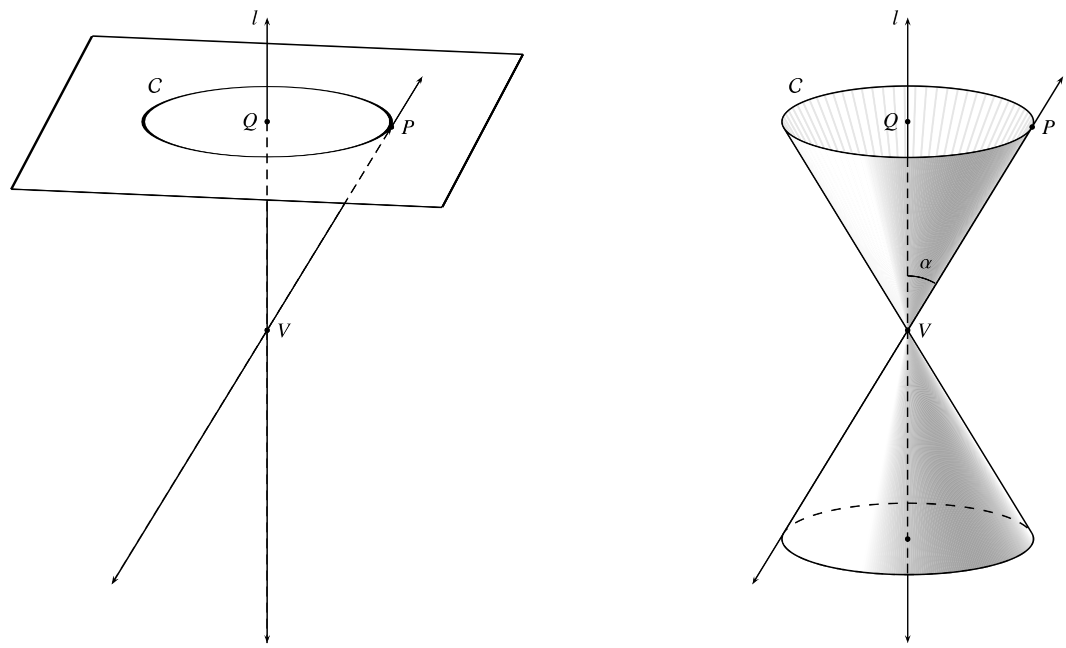


FIGURA 8.1 Cono circular recto

Considerando un cono como el que acabamos de describir, se le llama: a la recta l, *el eje del cono*; al punto V, *el vértice del cono* o también *la cúspide del cono*; a cada recta $\overleftrightarrow{VP}$, *una generatriz del cono*; y a la medida α de los ángulos agudos que determina la recta l con cualquiera de las generatrices $\overleftrightarrow{VP}$, *la abertura del cono*.

Llamaremos ***sección cónica*** al conjunto de los puntos que se encuentran en la intersección de un cono circular recto y un plano⟨3⟩.

Fijemos un cono circular recto de vértice V, eje l y abertura α, y consideremos un plano Π cualquiera en el espacio; denotemos por β la medida del ángulo no obtuso que forman l y Π, que es el ángulo entre l y su proyección ortogonal l' sobre Π (y que consideraremos nulo en caso de que l y Π sean paralelos, o que Π contenga a l).

Si el plano Π no pasa por el vértice V del cono, tendremos que la sección cónica es:

- un ***círculo*** (ver la figura 8.2), si $\beta = 90$ (es decir, si el plano Π es perpendicular al eje del cono; en cuyo caso, el plano corta todas las generatrices del cono).
- una ***parábola*** (ver la figura 8.2), si $\beta = \alpha$ (es decir, si el plano Π es paralelo a una generatriz del cono).
- una ***elipse*** (ver la figura 8.3), si $\alpha < \beta < 90$ (es decir, si el plano Π forma un ángulo con el eje del cono cuya medida está estrictamente comprendida entre la abertura del cono y 90; en cuyo caso, el plano corta todas las generatrices del cono).
- una ***hipérbola*** (ver la figura 8.3), si $0 \leqslant \beta < \alpha$ (es decir, si el plano Π forma un ángulo con el eje del cono cuya medida es mayor o igual que 0 y menor que la abertura del cono; en cuyo caso, el plano es paralelo a dos generatrices del cono).

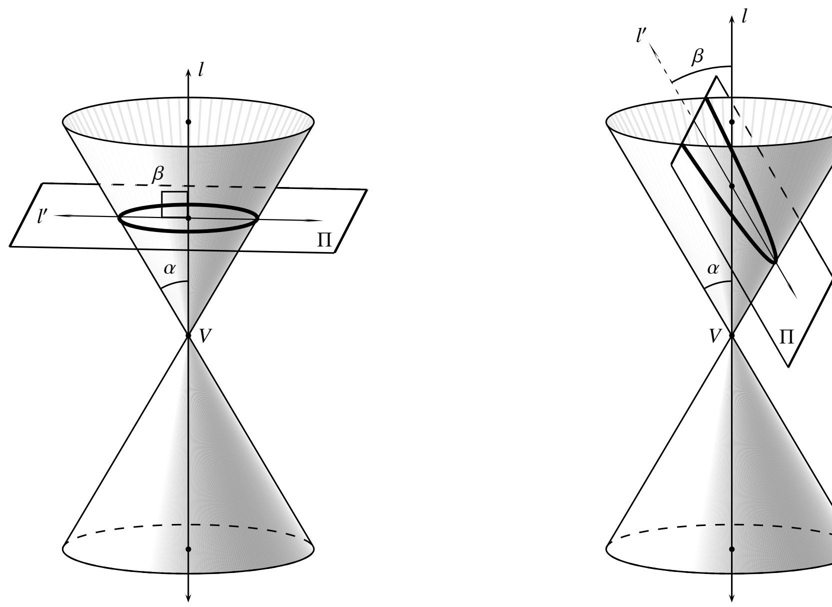


FIGURA 8.2 Círculo (β = 90) y parábola ($\beta = \alpha$)

Si el plano Π pasa por el vértice V del cono (ver la figura 8.4), tendremos que la sección cónica es:

- una ***recta*** que es generatriz (en verdad, dos generatrices coincidentes), si $\beta = \alpha$ (es decir, si el plano Π es tangente al cono en una de sus generatrices).
- un ***punto*** (técnicamente, dos generatrices imaginarias concurrentes en el vértice⟨4⟩), si $\alpha < \beta \leqslant 90$ (es decir, si el plano Π corta al cono sólo en el vértice V o, como podría decirse, el plano es exterior al cono).
- dos ***rectas concurrentes*** en el vértice, que son generatrices, si $0 \leqslant \beta < \alpha$ (es decir, si el plano Π es secante al cono en dos generatrices distintas).

Si consideramos un cilindro circular recto como un tipo especial de cono (un cono degenerado con el vértice en el infinito) tendremos, al cortarlo con un plano Π paralelo a su eje (ver la figura 8.5),

- ***el conjunto vacío***, si el plano Π es externo al cilindro.
- una ***recta*** que es generatriz (en verdad, dos generatrices coincidentes), si el plano Π es tangente al cilindro.
- dos ***rectas paralelas***, si el plano Π es secante al cilindro.

Llamaremos ***secciones cónicas propias*** a una cónica (parábola, elipse o hipérbola) o a un círculo (que, en este contexto, lo consideraremos como un caso especial de una elipse para la que los radios mayor y menor coinciden, o de excentricidad cero).

Llamaremos ***secciones cónicas impropias*** (***degeneradas*** o ***límites***) a dos rectas, distintas o coincidentes (una recta, considerada como dos rectas coincidentes, o dos rectas paralelas, de las que diremos que son ***tipo parábola***; un punto, considerado como dos rectas imaginarias concurrentes en un punto real, de las que diremos que son ***tipo elipse***; dos rectas concurrentes, de las que diremos que son ***tipo hipérbola***), o al conjunto vacío.

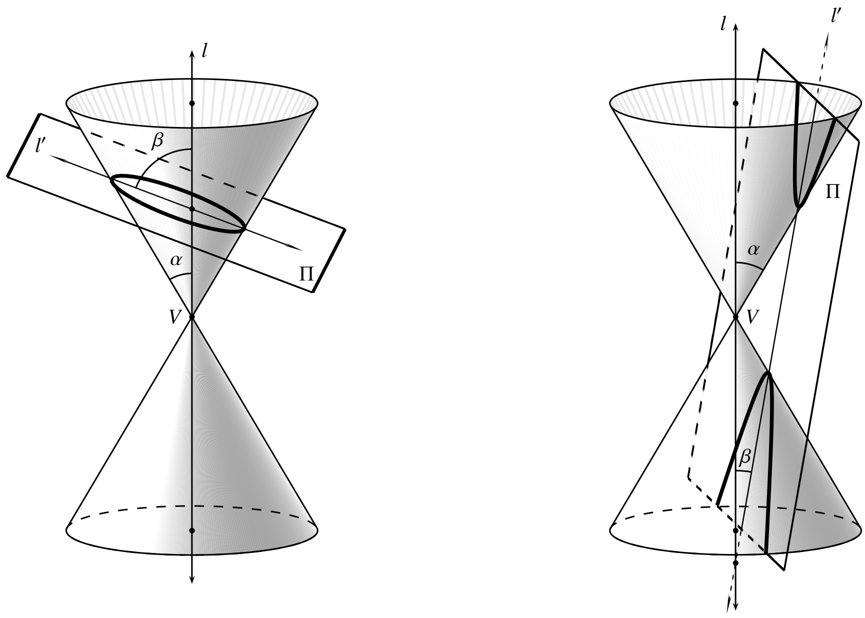


FIGURA 8.3 Elipse ($\alpha < \beta < 90$) e hipérbola ($0 \leqslant \beta < \alpha$)

§ 8.2 Definición analítica de las cónicas: las ecuaciones cuadráticas

Veremos ahora que también se puede ofrecer una definición analítica de todas las secciones cónicas a la vez.

Consideremos las relaciones g que asocian, a pares ordenados de números reales, un número real, cuyas reglas de asociación son polinomios de segundo grado en dos variables no degenerados, es decir, las relaciones de la forma

$$g(x, y) := \mathsf{A}x^2 + \mathsf{B}xy + \mathsf{C}y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F}$$
$$(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}, \mathsf{E} \text{ y } \mathsf{F} \text{ números reales tales que } \mathsf{A} \neq 0, \text{ o } \mathsf{B} \neq 0, \text{ o } \mathsf{C} \neq 0).$$

Recordemos (ver la sección 4.4 en el Capítulo 4) que la ecuación

$$\mathsf{A}x^2 + \mathsf{B}xy + \mathsf{C}y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0 \tag{8.1}$$

puede ser expresada en forma matricial mediante

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{D} \\ \mathsf{B} & 2\mathsf{C} & \mathsf{E} \\ \mathsf{D} & \mathsf{E} & 2\mathsf{F} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

en la que la matriz

$$\mathcal{M} := \begin{pmatrix} 2\mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{D} \\ \mathsf{B} & 2\mathsf{C} & \mathsf{E} \\ \mathsf{D} & \mathsf{E} & 2\mathsf{F} \end{pmatrix}$$

es llamada la matriz de los coeficientes de esa ecuación.

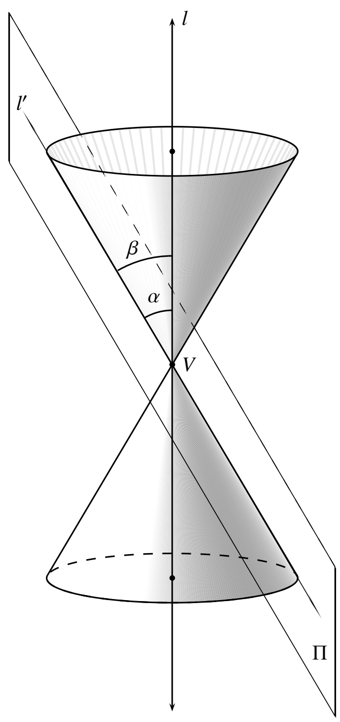


FIGURA 8.4 Secciones degeneradas del cono

Recordemos también la definición de los siguientes números, íntimamente relacionados con la matriz $\mathcal{M}$, y de los cuales ya hemos probado que son invariantes por transformación de coordenadas:

$\Delta_1 := \mathsf{A} + \mathsf{C}$	el ***discriminante lineal*** de la ecuación (8.1) (la mitad de la traza de la matriz menor $\mathcal{M}_{33}$);
$\Delta_2 := \mathsf{B}^2 - 4\mathsf{AC}$	el ***discriminante cuadrático*** de la ecuación (8.1) (el opuesto del determinante de $\mathcal{M}_{33}$);
$\Delta_3 := 8\mathsf{ACF} + 2\mathsf{BDE} - 2\mathsf{CD}^2 - 2\mathsf{AE}^2 - 2\mathsf{FB}^2$	el ***discriminante cúbico*** de la ecuación (8.1) (el determinante de la matriz $\mathcal{M}$).

El objetivo central de esta parte del capítulo es verificar que, dada una figura geométrica $\mathcal{G}$ cualquiera, se tiene lo afirmado en el siguiente Teorema que puede ser considerado como la definición analítica de las secciones cónicas.

TEOREMA 26 (REPRESENTACIÓN ANALÍTICA DE UNA SECCIÓN CÓNICA)
$\mathcal{G}$ es una sección cónica si, y sólo si, $\mathcal{G}$ se puede representar por una ecuación cuadrática en dos variables de la forma

$$\mathsf{A}x^2 + \mathsf{B}xy + \mathsf{C}y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0 \qquad (8.2)$$
$$(\mathsf{A} \neq 0,\ \mathsf{B} \neq 0,\ o\ \mathsf{C} \neq 0).$$

Verificado esto, la ecuación (8.2) será llamada ***la ecuación general***, o simplemente ***la ecuación***, de la sección cónica $\mathcal{G}$.

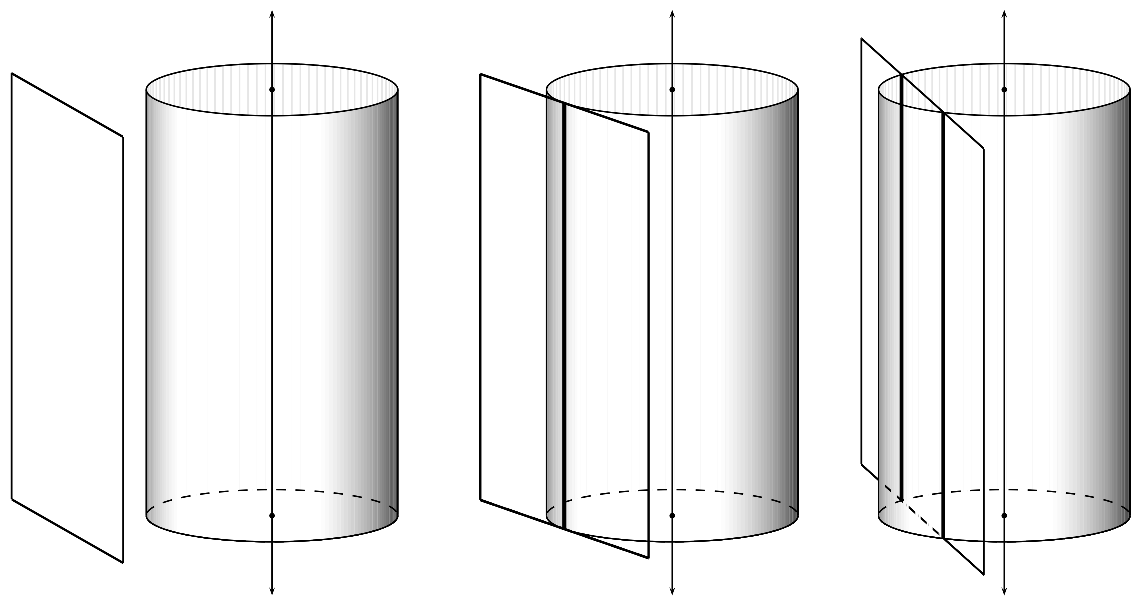


FIGURA 8.5 Secciones degeneradas del cono degenerado (cilindro)

Para verificar este teorema, necesitaremos el apoyo de los siguientes dos resultados. Consideremos la figura geométrica $\mathcal{S}$ representada por la ecuación (8.2), y llamemos Δ_1, Δ_2 y Δ_3 a los discriminantes lineal, cuadrático y cúbico de dicha ecuación, respectivamente. Cada uno de dichos resultados establece un criterio que permite decidir cuándo $\mathcal{S}$ es una sección cónica impropia o propia, y de qué tipo; para no recargar demasiado la exposición, exponemos sus pruebas en la sección A.4 del Apéndice A, a la que referimos al lector interesado.

TEOREMA 27 (CRITERIO DE CLASIFICACIÓN DE LAS SECCIONES CÓNICAS IMPROPIAS)
$\mathcal{S}$ es una sección cónica impropia y distinta del conjunto vacío si, y sólo si, $\Delta_3 = 0$.
Además, en caso de que $\Delta_3 = 0$, tendremos que:

(a) *Si $\Delta_2 = 0$, entonces $\mathcal{S}$ es del tipo **parábola** (es decir, dos rectas paralelas o coincidentes).*

(b) *Si $\Delta_2 < 0$, entonces $\mathcal{S}$ es del tipo **elipse** (es decir, un punto o, lo que es lo mismo, dos rectas imaginarias concurrentes en un punto real).*

(c) *Si $\Delta_2 > 0$, entonces $\mathcal{S}$ es del tipo **hipérbola** (es decir, dos rectas concurrentes).*

TEOREMA 28 (CRITERIO DE CLASIFICACIÓN DE LAS SECCIONES CÓNICAS PROPIAS)
$\mathcal{S}$ es una sección cónica propia o es el conjunto vacío si, y sólo si, $\Delta_3 \neq 0$.
Además, en caso de que $\Delta_3 \neq 0$, tendremos que:

(a) *Si $\Delta_2 = 0$, entonces $\mathcal{S}$ es una **parábola**.*

(b) *Si $\Delta_2 < 0$ y $\Delta_1\Delta_3 < 0$, entonces $\mathcal{S}$ es una **elipse**.*

(c) *Si $\Delta_2 < 0$ y $\Delta_1\Delta_3 > 0$, entonces $\mathcal{S}$ es el **conjunto vacío**.*

(d) *Si $\Delta_2 > 0$, entonces $\mathcal{S}$ es una **hipérbola**.*

De este modo, toda figura geométrica representada por una ecuación como la (8.2) es una sección cónica. Además, es claro que toda sección cónica se puede representar por una ecuación como la (8.2), pues: de los círculos y las cónicas, por lo visto en los capítulos 3, 5, 6 y 7; de dos rectas cualesquiera, por lo visto en el capítulo 1 al multiplicar sus ecuaciones; de un punto, digamos (u, v), podemos ofrecer $(x-u)^2+(y-v)^2=0$; y del conjunto vacío podemos ofrecer $x^2+y^2+1=0$.

➤ EJEMPLO 8.1

Veamos qué sección cónica representa cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas en dos variables.

$$\begin{aligned}
&4x^2+12xy+9y^2+2x+3y-2=0\\
&x^2-2xy+y^2+4x-4y+4=0\\
&10x^2-3xy-4y^2-32x+36y-32=0\\
&5x^2+2xy+10y^2-12x-22y+17=0\\
&3x^2-2xy+3y^2+2\sqrt{2}x-6\sqrt{2}y+2=0\\
&8x^2+8xy-7y^2-35=0\\
&x^2+2xy+y^2+8x-8y+16=0
\end{aligned}$$

(a) $4x^2+12xy+9y^2+2x+3y-2=0$ *(ver la figura 8.6)*

Como $\Delta_3=\begin{vmatrix}8&12&2\\12&18&3\\2&3&-4\end{vmatrix}=0$ *y* $\Delta_2=12^2-4\cdot4\cdot9=0$, *tendremos que esta ecuación representa una sección cónica impropia tipo parábola. El procedimiento para hallar las ecuaciones de las rectas correspondientes está descrito en la prueba del Teorema 27, y consiste en factorizar la ecuación dada en producto de dos lineales.*

Consideramos la ecuación dada como una ecuación de segundo grado en la variable x

$$4x^2+(12y+2)x+9y^2+3y-2=0$$

y calculamos sus raíces

$$\frac{-(12y+2)\pm\sqrt{(12y+2)^2-16(9y^2+3y-2)}}{8}.$$

Así, después de sacar las cuentas, la ecuación dada es equivalente a la ecuación

$$4\left(x-\frac{-3y+1}{2}\right)\left(x-\frac{-3y-2}{2}\right)=0;$$

de donde la sección cónica representada por la ecuación dada consiste del par de rectas paralelas

$$2x+3y-1=0 \qquad y \qquad 2x+3y+2=0.$$

(b) $x^2-2xy+y^2+4x-4y+4=0$ *(ver la figura 8.6)*

Como $\Delta_3=\begin{vmatrix}2&-2&4\\-2&2&-4\\4&-4&8\end{vmatrix}=0$ *y* $\Delta_2=(-2)^2-4\cdot1\cdot1=0$, *tendremos que esta ecuación representa una sección cónica impropia tipo parábola. Para hallar las ecuaciones de las rectas correspondientes, consideramos la ecuación dada como una ecuación de segundo grado en la variable x*

$$x^2-2(y-2)x+y^2-4y+4=0$$

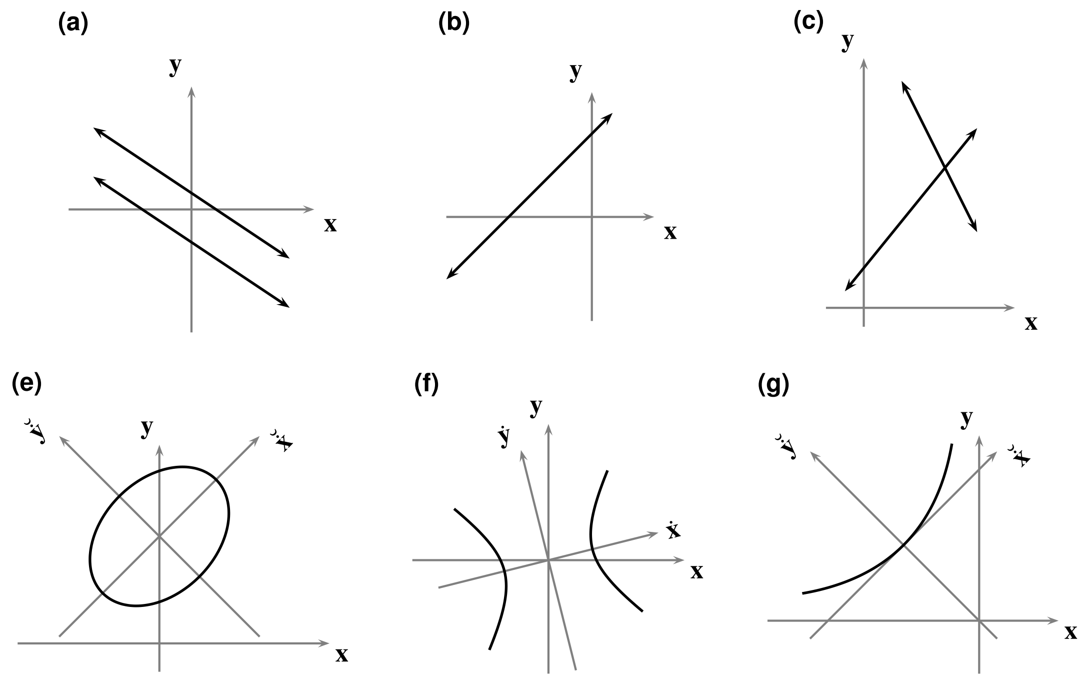


FIGURA 8.6 Secciones cónicas del ejemplo 8.1

y calculamos sus raíces

$$\frac{2(y-2) \pm \sqrt{4(y-2)^2 - 4(y^2-4y+4)}}{2}.$$

Así, después de sacar las cuentas, la sección cónica representada por la ecuación dada consiste del par de rectas coincidentes

$$x - y + 2 = 0 \qquad y \qquad x - y + 2 = 0.$$

(c) $10x^2 - 3xy - 4y^2 - 32x + 36y - 32 = 0$ *(ver la figura 8.6)*

Como $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 20 & -3 & -32 \\ -3 & -8 & 36 \\ -32 & 36 & -64 \end{vmatrix} = 0$ *y* $\Delta_2 = (-3)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-4) = 169 > 0$, *tendremos que esta ecuación representa una sección cónica impropia tipo hipérbola. Para hallar las ecuaciones de las rectas correspondientes, consideramos la ecuación dada como una ecuación de segundo grado en la variable x*

$$10x^2 - (3y+32)x - 4y^2 + 36y - 32 = 0$$

y calculamos sus raíces

$$\frac{(3y+32) \pm \sqrt{(3y+32)^2 - 40(-4y^2+36y-32)}}{20}.$$

Así, después de sacar las cuentas, la sección cónica representada por la ecuación dada consiste del par de rectas concurrentes

$$5x - 4y + 4 = 0 \qquad y \qquad 2x + y - 8 = 0.$$

(d) $5x^2 + 2xy + 10y^2 - 12x - 22y + 17 = 0$

Como $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 10 & 2 & -12 \\ 2 & 20 & -22 \\ -12 & -22 & 34 \end{vmatrix} = 0$ *y* $\Delta_2 = 2^2 - 4 \cdot 5 \cdot 10 = -196 < 0$*, tendremos que esta ecuación representa una sección cónica impropia tipo elipse. Para encontrar las coordenadas del punto resultante, aplicamos las fórmulas para hallar el punto al que debemos trasladar el sistema de coordenadas para eliminar los términos lineales de la ecuación dada, es decir*

$$h = \frac{2\mathrm{CD} - \mathrm{BE}}{\Delta_2} = 1 \qquad y \qquad k = \frac{2\mathrm{AE} - \mathrm{BD}}{\Delta_2} = 1.$$

Así, la sección cónica representada por la ecuación dada consiste en el punto $(1, 1)$.

(e) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y + 2 = 0$ *(ver la figura 8.6)*

Como $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 2\sqrt{2} \\ -2 & 6 & -6\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -6\sqrt{2} & 4 \end{vmatrix} = -256 < 0$, $\Delta_2 = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = -32 < 0$ *y* $\Delta_1 = 3 + 3 = 6 > 0$*, tendremos que esta ecuación representa una sección cónica propia y, más específicamente, una elipse. Al trasladar los ejes de coordenadas al punto* $(0, \sqrt{2})$ *y rotarlos por un ángulo* $\theta = 45$*, tendremos que su ecuación canónica es*

$$\frac{\breve{x}^2}{2} + \frac{\breve{y}^2}{1} = 1$$

que corresponde a una elipse con centro $(0, \sqrt{2})$ *y eje focal perpendicular al eje* $\breve{\mathbf{y}}$.

(f) $8x^2 + 8xy - 7y^2 - 35 = 0$ *(ver la figura 8.6)*

Como $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 16 & 8 & 0 \\ 8 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -70 \end{vmatrix} = 20160 \neq 0$ *y* $\Delta_2 = 8^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-7) = 288 > 0$*, tendremos que esta ecuación representa una sección cónica propia y, más específicamente, una hipérbola. Al rotar los ejes de coordenadas por un ángulo* $\theta = \frac{1}{2}\arctan(\frac{8}{15}) \approx 14.036$*, tendremos que su ecuación canónica es*

$$\frac{\dot{x}^2}{\frac{35}{9}} - \frac{\dot{y}^2}{\frac{35}{8}} = 1$$

que corresponde a una hipérbola con centro $(0, 0)$ *y eje focal perpendicular al eje* $\dot{\mathbf{y}}$.

(g) $x^2 + 2xy + y^2 + 8x - 8y + 16 = 0$ *(ver la figura 8.6)*

Como $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & -8 \\ 8 & -8 & 32 \end{vmatrix} = -512 \neq 0$ *y* $\Delta_2 = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$*, tendremos que esta ecuación representa una sección cónica propia y, más específicamente, una parábola. Al rotar los ejes de coordenadas por un ángulo* $\theta = 45$ *y trasladarlos al punto* $(0, \sqrt{2})$*, tendremos que su ecuación canónica es*

$$\breve{x}^2 - 4\sqrt{2}\breve{y} = 0$$

que corresponde a una parábola con vértice en $(0, \sqrt{2})$ *(respecto a los ejes rotados) y eje focal perpendicular al eje* $\breve{\mathbf{x}}$.

QEE ➤

OBSERVACIÓN 8.1 (SECCIÓN CÓNICA PROPIA QUE PASA POR CINCO PUNTOS NO COLINEALES TRES A TRES)
Se puede verificar⟨5⟩ *que, si los puntos* $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$, $P_4 = (x_4, y_4)$ *y* $P_5 = (x_5, y_5)$ *son no colineales tres a tres, entonces existe una sección cónica propia que los contiene y ésta se puede representar por la ecuación*

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{8.3}$$

Por tanto, ***existe al menos una*** *sección cónica propia que contiene a los cinco puntos dados: la que tiene por ecuación*

$$\mathsf{A}x^2 + \mathsf{B}xy + \mathsf{C}y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0 \tag{8.4}$$

para la que A, B, C, D, E *y* F *son los menores complementarios de los términos de la primera fila, respectivamente, con la alternancia de signo correspondiente.*

Por otro lado, si

$$\mathsf{A}_0x^2 + \mathsf{B}_0xy + \mathsf{C}_0y^2 + \mathsf{D}_0x + \mathsf{E}_0y + \mathsf{F}_0 = 0 \tag{8.5}$$

es la ecuación de una sección cónica propia que pase por esos cinco puntos tendríamos, para cualquier punto (x, y) *de ella, que*

$$\begin{cases} \mathsf{A}_0x^2 + \mathsf{B}_0xy + \mathsf{C}_0y^2 + \mathsf{D}_0x + \mathsf{E}_0y + \mathsf{F}_0 = 0 \\ \mathsf{A}_0x_1^2 + \mathsf{B}_0x_1y_1 + \mathsf{C}_0y_1^2 + \mathsf{D}_0x_1 + \mathsf{E}_0y_1 + \mathsf{F}_0 = 0 \\ \mathsf{A}_0x_2^2 + \mathsf{B}_0x_2y_2 + \mathsf{C}_0y_2^2 + \mathsf{D}_0x_2 + \mathsf{E}_0y_2 + \mathsf{F}_0 = 0 \\ \mathsf{A}_0x_3^2 + \mathsf{B}_0x_3y_3 + \mathsf{C}_0y_3^2 + \mathsf{D}_0x_3 + \mathsf{E}_0y_3 + \mathsf{F}_0 = 0 \\ \mathsf{A}_0x_4^2 + \mathsf{B}_0x_4y_4 + \mathsf{C}_0y_4^2 + \mathsf{D}_0x_4 + \mathsf{E}_0y_4 + \mathsf{F}_0 = 0 \\ \mathsf{A}_0x_5^2 + \mathsf{B}_0x_5y_5 + \mathsf{C}_0y_5^2 + \mathsf{D}_0x_5 + \mathsf{E}_0y_5 + \mathsf{F}_0 = 0 \end{cases}$$

Así las cosas, los coeficientes A_0, B_0, C_0, D_0, E_0 *y* F_0 *serían una solución no trivial de ese sistema homogéneo de seis ecuaciones lineales con seis incógnitas; y sabemos que la condición necesaria y suficiente para que tal solución exista es que se satisfaga la ecuación* (8.3).

Pero además, y esto es lo crucial, sabemos que existe un número real λ *no nulo tal que*

$$\mathsf{A}_0 = \lambda\mathsf{A}, \quad \mathsf{B}_0 = \lambda\mathsf{B}, \quad \mathsf{C}_0 = \lambda\mathsf{C}, \quad \mathsf{D}_0 = \lambda\mathsf{D}, \quad \mathsf{E}_0 = \lambda\mathsf{E} \quad Y \quad \mathsf{F}_0 = \lambda\mathsf{F}.$$

Luego, la ecuación (8.5) *es equivalente a la ecuación* (8.4) *y, en consecuencia, ambas representan la misma figura geométrica.*

Por tanto, ***sólo hay una*** *sección cónica propia que contiene a los cinco puntos dados.*

➤ **EJEMPLO 8.2**
Encontremos la ecuación de una sección cónica propia que pase por los puntos $(-5, 0)$, $(-2, 2)$, $(0, 1)$, $(1, -2)$ *y* $(2, -1)$.

La ecuación de la cónica buscada es

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 25 & 0 & 0 & -5 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 4 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 29x^2 + 71xy + 96y^2 + 107x + 94y - 190 = 0,$$

que corresponde a una elipse. **QEE ◄**

§ 8.3 Recta tangente a una sección cónica en uno de sus puntos

Consideremos una sección cónica $\mathcal{S}$ de ecuación

$$\mathsf{A}x^2 + \mathsf{B}xy + \mathsf{C}y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0 \qquad (8.6)$$
$$(\mathsf{A} \neq 0, \mathsf{B} \neq 0, \text{ o } \mathsf{C} \neq 0)$$

y uno de sus puntos $P = (u, v)$.

Nos preguntamos si existe alguna recta l, tangente a $\mathcal{S}$, que no sea perpendicular al eje $\mathbf{x}$ y que pase por P.

Ahora, al pasar l por P y no ser perpendicular al eje $\mathbf{x}$, tendremos que l se puede representar por una ecuación de la forma

$$y - v = m(x - u).$$

El problema se transforma entonces en saber si existe m tal que l sea tangente a $\mathcal{S}$.

Para resolver este problema, despejamos y en la ecuación anterior,

$$y = m(x - u) + v,$$

y sustituimos el lado derecho por y en la ecuación (8.6), obteniendo la siguiente ecuación en la variable x

$$\mathsf{A}x^2 + \mathsf{B}x(m(x-u)+v) + \mathsf{C}(m(x-u)+v)^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}(m(x-u)+v) + \mathsf{F} = 0.$$

Por otro lado, como P está en $\mathcal{S}$, tendremos que

$$\mathsf{A}u^2 + \mathsf{B}uv + \mathsf{C}v^2 + \mathsf{D}u + \mathsf{E}v + \mathsf{F} = 0.$$

Restando estas dos últimas ecuaciones tendremos que

$$\mathsf{A}(x^2 - u^2) + \mathsf{B}(x-u)(mx+v) + \mathsf{C}((m(x-u)+v)^2 - v^2) + \mathsf{D}(x-u) + \mathsf{E}m(x-u) = 0,$$

lo cual, después de factorizar adecuadamente, se transforma en

$$(x-u)(\mathsf{A}(x+u) + \mathsf{B}(mx+v) + \mathsf{C}m(m(x-u)+2v) + \mathsf{D} + \mathsf{E}m = 0.$$

Ahora, para que l sea tangente a $\mathcal{S}$, esta ecuación debe tener dos soluciones iguales en la variable x, es decir

$$(\mathsf{C}m^2 + \mathsf{B}m + \mathsf{A})u = (\mathsf{C}m^2 - \mathsf{A})u - (\mathsf{B} + 2\mathsf{C}m)v - \mathsf{D} - \mathsf{E}m;$$

de donde, después de sacar las cuentas, tenemos que

$$m = -\frac{2\mathsf{A}u + \mathsf{B}v + \mathsf{D}}{\mathsf{B}u + 2\mathsf{C}v + \mathsf{E}}.$$

En consecuencia, existirá una recta tangente a $\mathcal{S}$, no perpendicular al eje **x**, en el punto P siempre y cuando $\mathsf{B}u + 2\mathsf{C}v + \mathsf{E} \neq 0$; en cuyo caso, la ecuación de dicha recta es

$$\mathsf{A}ux + \mathsf{B}\left(\frac{uy + vx}{2}\right) + \mathsf{C}vy + \mathsf{D}\left(\frac{x + u}{2}\right) + \mathsf{E}\left(\frac{y + v}{2}\right) + \mathsf{F} = 0.$$

En caso de que $\mathsf{B}u + 2\mathsf{C}v + \mathsf{E} = 0$, la Geometría analítica no nos brinda las herramientas suficientes para encontrar una recta tangente a $\mathcal{S}$ por el punto P: en algunos casos tenemos una recta tangente a $\mathcal{S}$ en el punto P, pero perpendicular al eje **x** (en los vértices de una elipse con eje focal perpendicular al eje **y**, por ejemplo), y en otros casos no obtenemos ninguna recta tangente (en el caso de algunas secciones cónicas impropias, por ejemplo). Este problema se resuelve definitivamente con las herramientas del Cálculo diferencial.

➤ EJEMPLO 8.3

Encontremos la ecuación de la recta tangente a la sección cónica

$$3x^2 + 4xy + 2y^2 + 3x + y - 5 = 0$$

en el punto $(-1, -1)$ *(ver la figura 8.7).*

En primer lugar, evaluamos la coordenadas del punto en el lado izquierdo de la ecuación dada, obteniendo

$$3(-1)^2 + 4(-1)(-1) + 2(-1)^2 + 3(-1) + (-1) - 5 = 0;$$

con lo que el punto dado está sobre la sección cónica.

Así, la ecuación de la recta buscada será

$$3(-1)x + 4\left(\frac{(-1)y + (-1)x}{2}\right) + 2(-1)y + 3\left(\frac{x + (-1)}{2}\right) + \left(\frac{y + (-1)}{2}\right) - 5 = 0,$$

es decir, $x + y + 2 = 0$.

Como

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -10 \end{vmatrix} = -98 < 0,$$

$$\Delta_2 = (4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -8 < 0$$

y

$$\Delta_1 = 3 + 2 = 5 > 0,$$

tendremos que esta ecuación representa una sección cónica propia y, más específicamente, una elipse.

Al trasladar los ejes de coordenadas al punto $(-1, \frac{3}{4})$ *y rotarlos por un ángulo* $\theta = \frac{1}{2}\arctan(4) \approx 37.98$*, tendremos que su ecuación canónica es*

$$\frac{\dot{\check{x}}^2}{\frac{49}{4(5+\sqrt{17})}} + \frac{\dot{\check{y}}^2}{\frac{49}{4(5-\sqrt{17})}} = 1$$

que corresponde a una elipse con centro $(-1, \frac{3}{4})$ *y eje focal perpendicular al eje* $\dot{\check{\mathbf{x}}}$.

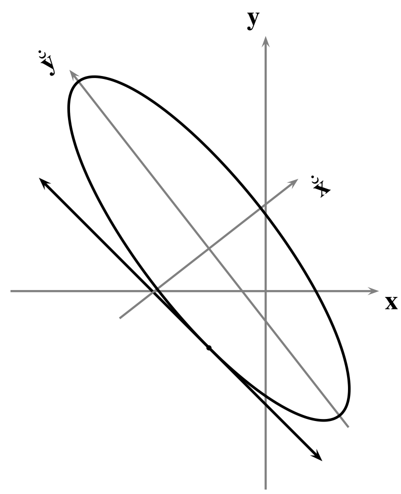


FIGURA 8.7 Sección cónica del ejemplo 8.3

QEE ➤

Problemas

8.1 Determine si las siguientes ecuaciones cuadráticas en dos variables representan alguna sección cónica propia o impropia, especifique su tipo y represéntela gráficamente.

(a) $4x^2 - 24xy + 11y^2 + 56x - 58y + 95 = 0.$

(b) $4x^2 - 20xy + 25y^2 + 4x - 10y + 1 = 0.$

(c) $2x^2 - 12xy + 18y^2 + x - 3y - 6 = 0.$

(d) $x^2 + 3xy - 8y^2 + 5x + 13 = 0.$

(e) $2x^2 - 3xy + 5y^2 + 4y = 0.$

(f) $16x^2 + 12xy + 3y^2 + x - y + 1 = 0.$

(g) $4x^2 - 13xy + 2y^2 + 3x - 4y + 5 = 0.$

(h) $46x^2 + 48xy + 32y^2 + 5x + 12y - 7 = 0.$

(i) $9x^2 - 6xy + y^2 + 12x + 6y + 4 = 0.$

(j) $xy + 2y^2 + 31 = 0.$

(k) $x^2 - 5xy + 16 = 0.$

(l) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4 = 0.$

(m) $3x^2 + xy + 3y^2 - 27 = 0.$

(n) $2x^2 + 3xy + 4y^2 + 2x - 3y + 5 = 0.$

(ñ) $8x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x - 16y - 16 = 0.$

(o) $9x^2 + 30xy + 25y^2 - 170x + 102y = 0.$

(p) $x^2 - 2xy + y^2 + 8x + 8y = 0.$

(q) $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 40x + 30y - 80 = 0.$

(r) $5x^2 + 2xy + 10y^2 - 12x - 22y + 17 = 0.$

(s) $x^2 + 8xy + 16y^2 - 4x - 16y + 7 = 0.$

(t) $x^2 + 5y^2 + 2x - 20y + 25 = 0.$

8.2 Encuentre la ecuación de la sección cónica que contiene cada uno de los conjuntos de puntos dados.

(a) $(-1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 1)$ y $(-5, 4)$.

(b) $(1, 1)$, $(2, 0)$,$(1, -1)$, $(0, 0)$ y $(2, -1)$.

(c) $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(0, 4)$, $(-1, 1)$ y $(-1, -1)$.

(d) $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(2, 4)$, $(-3, 9)$ y $(3, 9)$.

(e) $(4, 2)$, $(6, 3)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(-1, 2)$.

8.3 Encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal, y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, de las secciones cónicas dadas en el punto dado.

(a) $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - y - 3 = 0$; $(1, 2)$.

(b) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0$; $(1, 1)$.

(c) $x^2 - 4xy - 2y^2 + 4x - 2y + 31 = 0$; $(1, 3)$.

(d) $x^2 - xy + y^2 + x - 3y + 2 = 0$; $(0, 1)$.

(e) $xy + 2x - 4y - 2 = 0$; $(2, 1)$.

8.4 Verifique que, para la ecuación cuadrática en dos variables $\mathsf{A}x^2 + \mathsf{B}xy + \mathsf{C}y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0$, si $\mathsf{AC} < 0$, entonces la ecuación representa una sección cónica del tipo hipérbola.

8.5 Verifique que, para la ecuación cuadrática en dos variables $\mathsf{A}x^2 + \mathsf{B}xy + \mathsf{C}y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0$, si $\mathsf{B} \neq 0$, y $\mathsf{AC} = 0$, entonces la ecuación representa una sección cónica del tipo hipérbola.

8.6 Si $f(x, y) = 0$ y $g(x, y) = 0$ son dos ecuaciones cuadráticas en dos variables que representan a sendas secciones cónicas que se cortan, entonces $f(x, y) + \lambda g(x, y) = 0$ representa una familia de secciones cónicas que contienen la intersección de las secciones cónicas que determinan la familia.

8.7 Dada la ecuación cuadrática en dos variables $\mathsf{A}x^2 + \mathsf{B}xy + \mathsf{C}y^2 + \mathsf{F} = 0$, verifique que

(a) la ecuación $\lambda^2 - \Delta_1\lambda + \Delta_2 = 0$ tiene raíces λ_1 y λ_2 reales.

(b) $\lambda_1 = \lambda_2$ si, y sólo si, $\mathsf{A} = \mathsf{C}$ y $\mathsf{B} = 0$.

8.8 Si la ecuación cuadrática en dos variables $\mathsf{A}x^2+\mathsf{B}xy+\mathsf{C}y^2-1 = 0$ se transforma en $\dot{\mathsf{A}}\dot{x}^2+\dot{\mathsf{C}}\dot{y}^2-1 = 0$ por una rotación y, además, $\Delta_2 \neq 0$, verifique que

(a) $\frac{1}{\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{C}}} = \frac{4}{\Delta_2}$.

(b) $\frac{1}{\dot{\mathsf{A}}} + \frac{1}{\dot{\mathsf{C}}} = \frac{4}{\Delta_2}(\mathsf{A} + \mathsf{C})$.

(c) $\frac{1}{\dot{\mathsf{A}}}$ y $\frac{1}{\dot{\mathsf{C}}}$ son los dos valores de la expresión $\frac{2}{\Delta}(\mathsf{A} + \mathsf{C} \pm \sqrt{(\mathsf{A} - \mathsf{C})^2 + \mathsf{B}^2})$.

8.9 Si $\Delta_1 > 0$ y $\Delta_2 < 0$ para la ecuación cuadrática en dos variables $\mathsf{A}x^2 + \mathsf{B}xy + \mathsf{C}y^2 - 1 = 0$, verifique que dicha ecuación representa una elipse.

8.10 Encuentre los valores de B para los que la ecuación cuadrática en dos variables $\mathsf{B}xy + \mathsf{C}y^2 - 1 = 0$ representa:

(a) un círculo.

(b) una elipse.

(c) una hipérbola.

(d) dos rectas paralelas.

Comentarios

⟨1⟩ No está al alcance de este estudio mostrar los detalles de la equivalencia entre esa definición y las dos anteriores.

Como información podemos decir que una de las maneras de probar esa equivalencia se debe al matemático belga ***Germinal Pierre Dandelin*** (Le Bourget, 12/04/1794 – Bruselas, 15/02/1847), quien la enunció en 1822 de la siguiente manera: *si un cono es intersectado por un plano en una cónica, entonces los focos de la cónica son los puntos donde ese plano es tocado por las esferas inscritas en el cono*.

El lector interesado puede ver un desarrollo del comúnmente llamado *método de las esferas de Dandelin* en Lehmann Ch. H., *Geometría analítica*, Limusa, S. A., 27^a reimpresión, 1999, pp. 233-236. Algunas referencias electrónicas sobre dicho método pueden encontrarse en:

http://hypo.ge-dip.etat-ge.ch/www/math/html/node86.html

http://xavier.hubaut.info/coursmath/2de/belges.htm

http://www.dovepresent.com/Articles %20word/Dandelin %20Spheres

Otra manera de probar dicha equivalencia puede verse en Medicci Héctor J. y Cabrera Emanuel S., *Geometría analítica*, Librería del Colegio, 1956, pp. 389-397.

⟨2⟩ Las ilustraciones 8.1 – 8.5, que presentamos a continuación, pudimos realizarlas gracias a la experiencia en el manejo del lenguaje PostScript, la generosidad, y la buena disposición que nos prestó el profesor de Física francés ***Manuel Luque***, animador de la sección PSTricks del sitio http://melusine.eu.org/syracuse/mluque.

⟨3⟩ Todos parecen estar de acuerdo en que el descubrimiento de las cónicas se debe al matemático griego Menaijmos, c. 375-325 a. C. (discípulo de Platón y de Eudoxos), al tratar de resolver el problema de ***la duplicación del cubo*** o ***problema deliano*** (de Delos, oráculo del dios Apolo): él encontró la solución a dicho problema a través de la intersección de dos parábolas. El matemático griego Apolonio de Perga (*El Gran Geómetra*), 262-190 a. C., estudió en detalle las secciones cónicas y escribió sus resultados en ocho libros llamados *Cónicas*, expuestos en 487 proposiciones, cerrando prácticamente este estudio para todos los futuros matemáticos; él fue el primero que las describió como intersecciones de planos con un cono circular recto (u oblicuo), y fue también él quien les dio el nombre a la elipse, la parábola y la hipérbola, allanando el camino a muchos otros para el desarrollo de ideas basadas en secciones cónicas (*v. g.* Kepler, Newton, Galileo, etc.).

Hacemos notar que el estudio de las cónicas a través de ecuaciones algebraicas, del cual ninguno de los geómetras griegos tuvo noción, no apareció en la escena de la Geometría hasta el siglo XVII. El tratamiento de las cónicas por parte de los griegos estaba más bien relacionado con el problema de "*adaptación de áreas*", ya perfilada en los Elementos de Euclides: ***elipse***, o adaptación por defecto, por insuficiencia, por omisión, por incompletitud (con el mismo origen que el término gramatical *elipsis*, que consiste en omitir en una oración una o más palabras que la recta construcción gramatical exige, pero no la claridad del sentido de lo expresado); ***parábola***, o adaptación exacta o justa (con el mismo origen que el término gramatical *parábola*, que consiste en presentar una idea metafóricamente, alegóricamente, por semejanza, comparación, acercamiento, paralelismo o similitud); e ***hipérbola***, o adaptación por exceso (con el mismo origen que el término gramatical *hipérbole*, que consiste en aumentar o disminuir excesivamente aquello de que se habla, exageración de una circunstancia, relato o noticia). Estas mismas relaciones que originan sus nombres pueden notarse en la excentricidad de cada una de ellas (que puede pensarse como un índice que mide cuánto se desvían de un círculo), es decir, en la razón entre la distancia de un punto al foco y su distancia a la directriz: cuando la primera es menor, tenemos una elipse; cuando ambas son iguales, tenemos una parábola; y cuando la primera excede a la segunda, una hipérbola. También se puede establecer una relación análoga comparando la abertura del cono y el ángulo de inclinación del plano con el que es cortado, con respecto al eje del cono, tal como veremos de inmediato en el desarrollo de la teoría de este capítulo.

La Geometría proyectiva, iniciada por Desargues, La Hire y Pascal, tiene actualmente a las cónicas como las figuras geométricas fundamentales, tal como lo son los círculos en la Geometría euclidiana.

⟨4⟩ Para poder ser concisos en el desarrollo posterior, tenemos que permitir que una ecuación lineal en dos variables pueda tener coeficientes complejos.

⟨5⟩ La prueba de la siguiente afirmación se escapa de los alcances de nuestro texto, ya que se requiere de las herramientas elementales de la llamada *Geometría proyectiva* o del *Álgebra geométrica*; el lector interesado puede encontrar dicha prueba en el texto *Geometry Revisited*. Coxeter, H. S. M. and Greitzer, S. L. The Mathematical Association of America. 1967.

C A P Í T U L O

9

Coordenadas polares

El sistema de coordenadas cartesianas rectangulares (introducido por los franceses *Pierre Fermat* y *Rene Descartes*), que hizo posible el **Cálculo** y fundamentó la **Geometría analítica**, permite representar, en referencia a un sistema de ejes ortogonales, cada punto del plano por un par ordenado de números reales que indican, correspondientemente, las coordenadas de sus proyecciones sobre esos ejes.

Otra manera de representar los puntos del plano por pares ordenados de números reales (introducida por el inglés *Isaac Newton*[1]) es a través del llamado *sistema de coordenadas polares*, el cual permite describir el movimiento de los cuerpos de una manera más natural y que estudiaremos a continuación.

Como veremos, hay figuras geométricas para cuyo estudio analítico, la introducción de este nuevo sistema de coordenadas presenta enormes ventajas.

Notará el lector que algunos de los procedimientos expuestos para la manipulación de ecuaciones, en referencia a este nuevo sistema, tienen características *sui generis* que no aparecieron en el trabajo que hemos desarrollado en referencia a un sistema de coordenadas cartesianas.

§ 9.1 Sistema de coordenadas polares en el plano

Un ***sistema de coordenadas polares*** está constituido por el rayo $\overrightarrow{\mathrm{O}U}$ de un eje O**p** con unidad U cualquiera (es decir, el origen del eje y el sentido positivo respecto al origen en dicho eje); de este sistema, al punto O lo llamaremos ***el polo*** y al rayo mismo, que denotaremos mediante O**p** (tal como denotamos al eje completo), lo llamaremos ***el eje polar***[2].

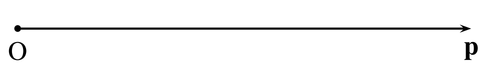


Figura 9.1 Sistema de coordenadas polares

Tal como hemos convenido en la observación 1.2.(b), en las representaciones gráficas del eje polar no destacaremos la unidad U.

La fijación de un sistema de coordenadas polares O**p** cualquiera en el plano siempre da lugar, de manera natural y esencialmente dependiente de ella, a una correspondencia biunívoca entre el plano ($\mathfrak{P}$) y, ya no todo el conjunto $\mathbb{R}^2$, sino el conjunto

$$\mathcal{F} := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \ u > 0 \text{ y } 0 \leqslant v < 2\pi\} \cup \{(0, 0)\}^{\langle 3 \rangle}.$$

Dado que su uso es casi universal en el **Cálculo**, en este capítulo utilizaremos el radián como unidad de medida de los ángulos, expresando la medida de un ángulo con un número real sin ninguna indicación de unidad, y entendiendo por ***un radián*** la medida del ángulo central que inscribe un arco de un círculo cuya longitud coincide con la de su radio⟨4⟩.

Dicha correspondencia se puede definir como sigue. Al polo O le hacemos corresponder el par ordenado $(0, 0)$; y a cada punto P del plano, distinto del polo O, le hacemos corresponder el par ordenado de números reales (r, θ), con $r > 0$ y $0 \leqslant \theta < 2\pi$, definido de la siguiente manera (ver la figura 9.2):

- r es el radio del círculo con centro O y que pasa por P (es decir, r es la distancia OP);
- θ es la medida principal⟨5⟩ del ángulo orientado cuyo lado inicial es el eje polar y cuyo lado final es el rayo $\overrightarrow{\mathrm{O}P}$.

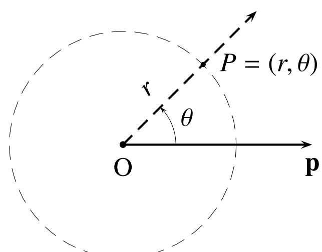


FIGURA 9.2 Coordenadas polares

Esta correspondencia es biunívoca porque la correspondencia siguiente es su inversa. Al par $(0, 0)$ le hacemos corresponder el polo O; y a cada elemento (r, θ) del conjunto

$$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \ u > 0 \text{ y } 0 \leqslant v < 2\pi\}$$

le hacemos corresponder el punto P del plano que resulta del corte entre:

- el círculo con centro O y radio r, y
- el rayo s con origen en O y tal que el ángulo de lado inicial en el eje polar y lado final en s tenga medida principal θ⟨6⟩.

Los números reales r y θ serán llamados ***las coordenadas polares principales*** del punto P, ***respecto al sistema*** O**p**: r es el ***radio polar*** del punto P, y θ es el ***ángulo polar*** del punto P⟨7⟩.

De esa correspondencia que hemos descrito, esencialmente vinculada al sistema de coordenadas polares que se fije en el plano, diremos que *identifica* al plano ($\mathfrak{P}$) con el conjunto $\mathcal{F}$, y a cada punto del plano con un único par ordenado de números reales (sus coordenadas polares principales); en virtud de esa *identificación*, abusaremos del signo de igualdad y escribiremos

$$P = (r, \theta)$$

para indicar que las componentes del par ordenado (r, θ) son las coordenadas polares principales del punto P (es decir, que el punto P y el par ordenado (r, θ) son correspondientes bajo esa identificación).

> Con el propósito de evitar confusiones en la ***notación*** que usaremos en el resto de este capítulo, insistimos en que cada vez que escojamos una letra latina mayúscula para identificar algún punto del plano, digamos Q, y escribamos $Q = (s, \varphi)$, con el signo de igualdad, entenderemos que (s, φ) son las coordenadas polares principales del punto Q.

En la siguiente observación precisamos qué coordenadas polares principales corresponden a los puntos del sistema mismo de coordenadas polares.

OBSERVACIÓN 9.1 (COORDENADAS POLARES PRINCIPALES DE LOS PUNTOS DE LA RECTA $\mathbf{p}$ MENOS EL POLO)

(a) *Un punto C, distinto del polo, está en el eje polar* $\mathrm{O}\mathbf{p}$ *si, y sólo si, su ángulo polar es* 0.
La justificación de esta afirmación estriba en el Principio E.6 y en el hecho de que la medida principal de un ángulo orientado es 0 *si, y sólo si, los lados coinciden.*

(b) *Un punto C, distinto del polo, está en el rayo opuesto al eje polar* $\mathrm{O}\mathbf{p}$ *si, y sólo si, su ángulo polar es* π.
La justificación de esta afirmación estriba en el Principio E.6 y en el hecho de que la medida principal de un ángulo orientado es π *si, y sólo si, los lados son rayos opuestos.*

Con argumentos similares, en la siguiente observación precisamos qué coordenadas polares principales corresponden a los puntos de una semirrecta con origen en el polo, y de su opuesta.

OBSERVACIÓN 9.2

Consideremos un punto $P = (r, \theta)$*, distinto del polo; de donde* $r > 0$ *y* $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

(a) *Un punto Q, distinto del polo, está en el rayo* $\overrightarrow{\mathrm{O}P}$ *si, y sólo si, su ángulo polar es* θ.
(Por el Principio E.6 y el hecho de que la medida principal de dos ángulos orientados que tienen un lado común coincide si, y sólo si, los otros dos lados coinciden).

(b) *Un punto Q, distinto del polo, está en el rayo opuesto al rayo* $\overrightarrow{\mathrm{O}P}$ *si, y sólo si, su ángulo polar es:* $\theta + \pi$*, en caso de que* $0 \leqslant \theta < \pi$*;* $\theta - \pi$*, en caso de que* $\pi \leqslant \theta < 2\pi$.
(Por el Principio E.6 y el hecho de que dos ángulos orientados que tienen un lado común forman un par lineal si, y sólo si, la diferencia entre sus medidas principales es π*).*

Coordenadas polares en general

Con lo que hemos desarrollado hasta aquí surge un primer problema: bajo la asignación de coordenadas polares principales a los puntos del plano anteriormente descrita, no todo par ordenado de números reales (r, θ) corresponde a un punto del plano, *v. g.*, el par $(-1, -\pi)$; pero además, y esto lo crucial, se presentarán situaciones para las que no encontraríamos solución, a pesar de que sabemos de antemano que la hay, si sólo consideramos las coordenadas polares principales de los puntos del plano.

Este problema se puede resolver extendiendo la asignación de pares ordenados de números reales a puntos del plano de la manera que vamos a describir en lo que sigue; para tal fin, debemos hacer uso del siguiente resultado cuya prueba, para no recargar la exposición, exponemos en la sección A.5 del Apéndice A, a la que referimos al lector interesado.

LEMA 9.1

Dado cualquier número real a, existe un único par de números reales b y n tales que $0 \leqslant b < 2\pi$, *n es un número entero, y*

$$a = b + 2n\pi.$$

Al número real b lo llamaremos el ***representante canónico*** *de a.*

OBSERVACIÓN 9.3

(a) *El procedimiento para calcular el representante canónico, b, de un número real a, y el correspondiente número entero n, está descrito en la prueba del lema 9.1 y se puede sintetizar como sigue:*

$$n \text{ es la parte entera}^{\langle 8 \rangle} \text{del cociente } \frac{a}{2\pi} \quad \text{y} \quad b = a - 2n\pi.$$

(b) *Dado cualquier número real a, es fácil verificar que* $0 \leqslant a < 2\pi$ *si, y sólo si, el representante canónico de a es el mismo a.*

(c) *Es fácil verificar*[⟨9⟩] *que dos números reales tienen el mismo representante canónico si, y sólo si, la diferencia entre ellos es un múltiplo de* 2π.

(d) *En particular, dado cualquier número real a, el representante canónico de* $a + \pi$ *coincide con el de* $a - \pi$.

Asociaremos un punto del plano a cada elemento del conjunto $\mathbb{R}^2$ mediante el siguiente procedimiento:

(1) a los pares de la forma $(0, v)$ se les hace corresponder el polo O;

(2) al par (u, v) con $u > 0$, se le hace corresponder el punto del plano de coordenadas polares principales (u, α), donde α es el representante canónico de v;

(3) al par $(-u, v)$ con $u > 0$, se le hace corresponder el punto del plano de coordenadas polares principales (u, α), donde α es el representante canónico de $v + \pi$.

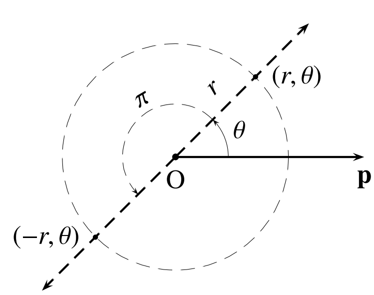


FIGURA 9.3 Primera componente negativa

OBSERVACIÓN 9.4

(a) *Note que al par* (r, θ), *con* $r > 0$, *le corresponde el punto que está a distancia r del polo sobre el rayo que forma, con el eje polar, un ángulo cuya medida es el representante canónico de* θ.

(b) *Note que al par* $(-r, \theta)$, *con* $r > 0$ *(ver la figura 9.3), le corresponde el punto que está a distancia r del polo, pero en el rayo opuesto de aquel que corresponde al punto* (r, θ).

Fijado un punto P, y un sistema de coordenadas polares O**p**, cualquier par ordenado de números reales (u, v) que podamos asociar a P, mediante el procedimiento descrito, será llamado ***un par de coordenadas polares*** de P (***respecto al sistema*** O**p**).

OBSERVACIÓN 9.5 (COORDENADAS POLARES PRINCIPALES Y REPRESENTANTES CANÓNICOS)

(a) *Gracias a la observación 9.3.(c) tendremos, para un punto P distinto del polo, que* (r, θ) *y* (r, θ_0) *(con la misma primera componente) son coordenadas polares de P si, y sólo si,* $\theta - \theta_0 = 2k\pi$ *para algún número entero k.*

(b) *Gracias a la parte anterior tendremos, para un punto P distinto del polo, que* (r, θ) *y* $(-r, \theta_0)$ *(con primeras componentes opuestas) son coordenadas polares de P si, y sólo si,* $\theta - \theta_0 = (2k+1)\pi$ *para algún número entero k.*

(c) *En particular, si* (r, θ_0) *son las coordenadas polares principales de un punto P del plano, distinto del polo, y* (r, θ) *es un par de coordenadas polares de P, entonces* θ_0 *es el representante canónico de* θ *(es decir, existe un número entero k tal que* $\theta = \theta_0 + 2k\pi$*).*

En el siguiente ejemplo aplicaremos el procedimiento descrito para encontrar las coordenadas polares principales de un punto del plano a partir de cualquier par de coordenadas polares del mismo.

➤ EJEMPLO 9.1

Fijado un sistema de coordenadas polares O**p**, *encontremos las coordenadas polares principales de los puntos que tienen coordenadas polares*

$$(3, \tfrac{93\pi}{7}), \quad (5, 310), \quad (\sqrt{2}, -\tfrac{\pi}{4}), \quad (-2\sqrt{3}, \tfrac{\pi}{6}) \quad y \quad (-5, \tfrac{6\pi}{5}).$$

(a) $(3, \frac{93\pi}{7})$
Primero, chequeamos el signo de la primera componente: como $3 \geqslant 0$, *el radio polar es 3.*
Luego, chequeamos si la segunda componente está en el intervalo $[0, 2\pi)$; *como* $\frac{93\pi}{7} > 2\pi$, *calculamos el representante canónico* α *de* $\frac{93\pi}{7}$ *por el procedimiento descrito en la observación 9.3.(a).*
La parte entera del cociente $\frac{\frac{93\pi}{7}}{2\pi}$ *es* 6 *y, en consecuencia,* $\alpha = \frac{93\pi}{7} - 2(6)\pi = \frac{9\pi}{7}$.
Por tanto, las coordenadas polares principales buscadas son

$$(3, \tfrac{9\pi}{7}).$$

(b) $(5, 310)$
Primero, chequeamos el signo de la primera componente: como $5 \geqslant 0$, *el radio polar es* 5.
Luego, chequeamos si la segunda componente está en el intervalo $[0, 2\pi)$; *como* $310 > 2\pi$, *calculamos el representante canónico* α *de* 310 *por el procedimiento descrito en la observación 9.3.(a).*
La parte entera del cociente $\frac{310}{2\pi}$ *es* 49 *y, en consecuencia,* $\alpha = 310 - 2(49)\pi = 2.1239199$.
Por tanto, las coordenadas polares principales buscadas son

$$(5, 2.1239199).$$

(c) $(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$

Primero, chequeamos el signo de la primera componente: como $\sqrt{2} \geqslant 0$*, el radio polar es* $\sqrt{2}$*.*
Luego, chequeamos si la segunda componente está en el intervalo $[0, 2\pi)$*; como* $-\frac{\pi}{4} < 0$*, calculamos el representante canónico* α *de* $-\frac{\pi}{4}$ *por el procedimiento descrito en la observación 9.3.(a).*
La parte entera del cociente $\frac{-\frac{\pi}{4}}{2\pi}$ *es* -1 *y, en consecuencia* $\alpha = -\frac{\pi}{4} - 2(-1)\pi = \frac{7\pi}{4}$*.*
Por tanto, las coordenadas polares principales buscadas son

$$(\sqrt{2}, \tfrac{7\pi}{4}).$$

(d) $(-2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$

Primero, chequeamos el signo de la primera componente: como $-2\sqrt{3} < 0$*, procedemos a transformar el par de coordenadas original, cambiando el signo a la primera componente y sumando* π *a la segunda:* $(2\sqrt{3}, \frac{7\pi}{6})$*.*
Como $2\sqrt{3} \geqslant 0$*, el radio polar es* $2\sqrt{3}$*.*
Luego, chequeamos si la segunda componente está en el intervalo $[0, 2\pi)$*; como sí lo está, el ángulo polar es* $\frac{7\pi}{6}$*.*
Por tanto, las coordenadas polares principales buscadas son

$$(2\sqrt{3}, \tfrac{7\pi}{6}).$$

(e) $(-5, \frac{6\pi}{5})$

Primero, chequeamos el signo de la primera componente: como $-5 < 0$*, procedemos a transformar el par de coordenadas original, cambiando el signo a la primera componente y sumando* π *a la segunda:* $(5, \frac{11\pi}{5})$*.*
Como $5 \geqslant 0$*, el radio polar es* 5*.*
Luego, chequeamos si la segunda componente está en el intervalo $[0, 2\pi)$*; como* $\frac{11\pi}{5} > 2\pi$*, calculamos el representante canónico* α *de* $\frac{11\pi}{5}$ *por el procedimiento descrito en la observación 9.3.(a).*
La parte entera del cociente $\frac{\frac{11\pi}{5}}{2\pi}$ *es* 1 *y, en consecuencia,* $\alpha = \frac{11\pi}{5} - 2(1)\pi = \frac{\pi}{5}$*.*
Por tanto, las coordenadas polares principales buscadas son

$$(5, \tfrac{\pi}{5}).$$

QEE ➤

Ahora bien, la solución que hemos dado al primer problema que planteamos, hace surgir un segundo problema con el que tendremos que convivir: ciertamente, a todo par ordenado de números reales (r, θ) le corresponde un único punto del plano (en referencia al sistema $\mathbf{Op}$); pero no es cierto que a un punto P del plano le corresponda un único par de números reales pues, haciendo uso del procedimiento anteriormente descrito y de la observación 9.3, para calcular las coordenadas polares principales del punto P, se puede verificar que los infinitos pares ordenados

(9.1) $$(r, \theta); \quad (r, \theta + 2n\pi) \text{ con } n \in \mathbb{Z}; \quad \text{y} \quad (-r, \theta + (2k+1)\pi) \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

son coordenadas polares del mismo punto P que tiene coordenadas polares (r, θ).

Para encontrar otras coordenadas polares del punto con coordenadas polares (r, θ), procedemos de la siguiente manera: si tenemos que conservar el signo de r, sumamos a θ cualquier múltiplo par de π; si tenemos que cambiar el signo de r, sumamos a θ cualquier múltiplo impar de π.

En el siguiente ejemplo aplicaremos el procedimiento que acabamos de describir para encontrar otras coordenadas polares de un mismo punto, bajo condiciones de signo de la primera componente.

➤ Ejemplo 9.2

Calculemos otros cuatro pares de coordenadas polares del punto que tiene coordenadas polares $(1, 1)$, *dos con primera componente positiva, y dos con primera componente negativa.*

(a) *Conservando el signo de la primera componente, sumamos a la segunda cualquier múltiplo par de* π, *por ejemplo,* 2π *y* 4π.
Así, $(1, 1 + 2\pi)$ *y* $(1, 1 + 4\pi)$ *son otros dos pares de coordenadas polares, con primera componente positiva, del punto que tiene coordenadas polares* $(1, 1)$.

(b) *Cambiando el signo de la primera componente, sumamos a la segunda cualquier múltiplo impar de* π, *por ejemplo,* 3π *y* 5π.
Así, $(-1, 1+3\pi)$ *y* $(-1, 1+5\pi)$ *son otros dos pares de coordenadas polares, con primera componente negativa, del punto que tiene coordenadas polares* $(1, 1)$.

QEE ⮜

La representación gráfica de puntos de un plano respecto a un sistema de coordenadas polares se facilita considerablemente, si:

- calculamos las coordenadas polares principales que les corresponden.
- utilizamos una ***malla polar*** como la de la figura 9.4, compuesta por círculos concéntricos con centro común en el polo y radio un número natural, y rectas concurrentes en el polo con inclinaciones, respecto al eje polar, que van incrementándose en una fracción prefijada de π (en la de la figura, la fracción es $\frac{1}{12}\pi$) a partir del eje polar.

En la figura 9.4 puede observarse la representación gráfica de los puntos considerados en el ejemplo 9.1.

Observación 9.6

Consideremos un punto $P_0 = (r_0, \theta_0)$, *distinto del polo; de donde* $r_0 > 0$ *y* $0 \leqslant \theta_0 < 2\pi$. *Gracias a la observación 9.5, tendremos lo siguiente.*

(a) *Un punto P de coordenadas polares* (r, θ), *con* $r > 0$, *está en el rayo* $\overrightarrow{OP_0}$ *si, y sólo si,* $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ *para algún número entero k.*

(b) *Un punto P de coordenadas polares* (r, θ), *con* $r > 0$, *está en el rayo opuesto al rayo* $\overrightarrow{OP_0}$ *si, y sólo si,* $\theta = \theta_0 + (2k + 1)\pi$ *para algún número entero k.*

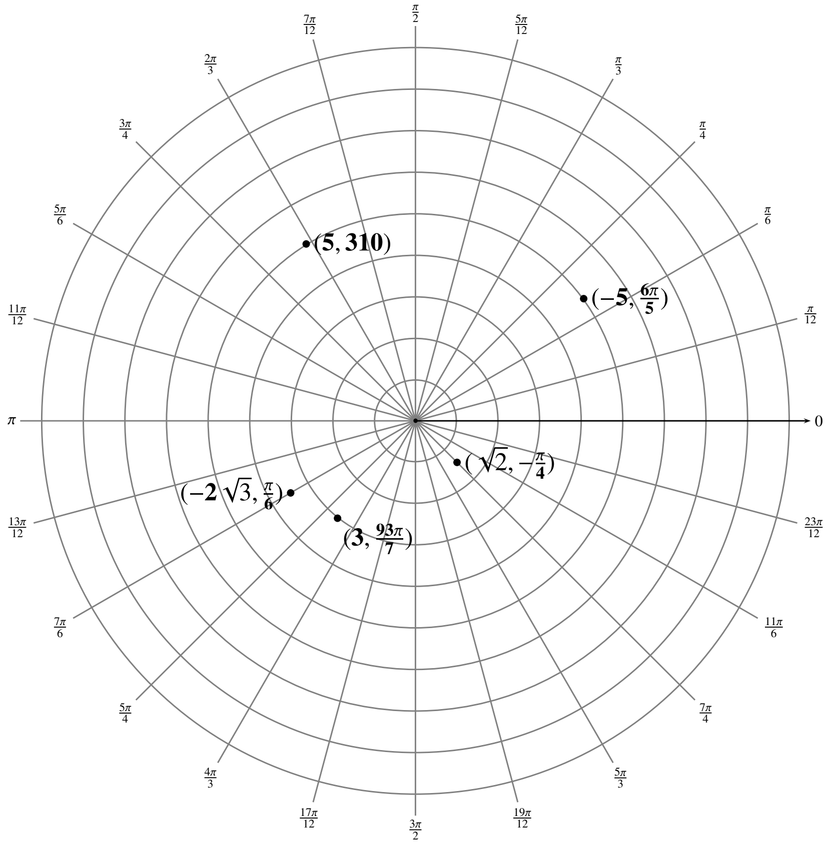


FIGURA 9.4 Puntos del ejemplo 9.1

Como tendremos ocasión de constatar en repetidas ocasiones, esta falta de univocidad en el sistema polar trae como consecuencia que algunos procedimientos difieran de los que ya hemos establecido usando un sistema de coordenadas rectangulares.

Presentamos de inmediato las dos primeras situaciones que ocasiona la multiplicidad de coordenadas polares de un mismo punto con relación al estudio de las ecuaciones en coordenadas polares, que no se presenta en el de las ecuaciones cartesianas.

Diremos que la ecuación $f(u,v) = 0$ es: una ***ecuación cartesiana***, si consideramos que (u,v) representa las coordenadas de un punto del plano en referencia a algún sistema de coordenadas cartesianas prefijado; una ***ecuación polar***, si consideramos que (u,v) representa las coordenadas de un punto del plano en referencia a algún sistema de coordenadas polares prefijado.

Consecuentes con lo que ya hemos establecido en el Capítulo 1 (ver la página 8), diremos que una figura geométrica $\mathcal{G}$ ***está representada por la ecuación cartesiana*** $f(u,v) = 0$, si $\mathcal{G}$ coincide con el conjunto de los puntos cuyas coordenadas cartesianas están en su gráfico, es decir, cuyas coordenadas cartesianas satisfacen dicha ecuación.

Ahora, el par de coordenadas polares principales $(2, \frac{\pi}{2})$ de un punto del plano está en el gráfico de la ecuación polar $r = \frac{2}{1-\cos\theta}$, porque sus componentes satisfacen esa ecuación; pero, sin embargo, el par de coordenadas polares $(-2, \frac{3\pi}{2})$ que representa al mismo punto no está en dicho gráfico, porque sus componentes no la satisfacen.

Del mismo modo, el par de coordenadas polares principales $(\frac{9\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ de un punto del plano no está en el gráfico de la ecuación polar $r = \theta$, porque sus componentes no satisfacen esa ecuación; pero, sin embargo, el par de coordenadas polares $(\frac{9\pi}{4}, \frac{9\pi}{4})$ que representa al mismo punto está en dicho gráfico, porque sus componentes la satisfacen.

Por esta razón debemos replantear la noción de *representación de una figura geométrica por una ecuación polar*.

> Diremos que una figura geométrica $\mathcal{G}$ ***está representada por la ecuación polar*** $f(u, v) = 0$, si $\mathcal{G}$ coincide con el conjunto de los puntos que tienen ***al menos un par*** de coordenadas polares (no necesariamente las principales) en su gráfico, es decir, un par de coordenadas polares que satisfacen dicha ecuación.

Consideremos ahora dos ecuaciones cartesianas $f(u, v) = 0$ y $g(u, v) = 0$.

Consecuentes con lo que ya hemos establecido en el Capítulo 2 (ver la página 35), diremos que dos ***ecuaciones cartesianas son equivalentes***, si sus gráficos coinciden, es decir, si cada par ordenado del gráfico de una de ellas está en el gráfico de la otra: por esta razón hemos dicho que dos ecuaciones cartesianas equivalentes representan la misma figura geométrica.

Ahora, el par ordenado $(0, 0)$ está en el gráfico de la ecuación polar $r = \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})$, pero no lo está en el de $r = \cos(\frac{\theta}{2})$. Sin embargo, el par ordenado $(0, \pi)$, que es un par de coordenadas polares del mismo punto de coordenadas polares $(0, 0)$, sí está en el gráfico de la segunda ecuación.

De hecho, para cualquier par ordenado (a, t) que esté en el gráfico de la primera ecuación, existe un par ordenado (r, θ) en el gráfico de la segunda que es par de coordenadas polares del mismo punto que (a, t): basta tomar $r = -a$ y $\theta = t + \pi$. Y viceversa, para cualquier par ordenado (a, t) que esté en el gráfico de la segunda ecuación, existe un par ordenado (r, θ) en el gráfico de la primera que es par de coordenadas polares del mismo punto que (a, t): basta tomar $r = -a$ y $\theta = t - \pi$. En consecuencia, esas dos ecuaciones representarían la misma figura geométrica.

Por esta razón debemos replantear la noción de *ecuaciones polares equivalentes*.

> Diremos que dos ***ecuaciones polares son equivalentes***, si cada par ordenado del gráfico de una de ellas es un par de coordenadas polares de ***al menos un punto*** que tiene un par de coordenadas polares en el gráfico de la otra.

Ahora, si se tenía una ecuación cartesiana que representaba una figura geométrica, encontrar una ecuación cartesiana equivalente se reducía, por lo general, a una simple manipulación algebraica (operar con el mismo operando en ambos lados de la igualdad, por ejemplo); pero, encontrar ecuaciones polares equivalentes a una dada no se reduce exclusivamente a ese tipo de manipulaciones, sino que está íntimamente ligado a las definiciones de las razones trigonométricas. La clave para realizar esta tarea está en (9.1): se puede verificar que

$$(9.2) \qquad f(r, \theta) = 0; \quad f(r, \theta + 2n\pi) = 0 \text{ con } n \in \mathbb{Z}; \quad \text{y} \quad f(-r, \theta + (2k + 1)\pi) = 0 \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

son ecuaciones polares equivalentes.

> Para encontrar otras ecuaciones polares equivalentes a la ecuación polar $f(r,\theta) = 0$, procedemos de la siguiente manera: si conviene conservar el signo de r, sustituimos a θ por θ más cualquier múltiplo par de π; si conviene cambiar el signo de r, sustituimos a θ por θ más cualquier múltiplo impar de π.

En el siguiente ejemplo aplicaremos el procedimiento que acabamos de describir para encontrar otras ecuaciones polares equivalentes a una ecuación polar dada.

➤ Ejemplo 9.3

Calculemos otras ecuaciones polares equivalentes, y distintas⟨10⟩*, a las ecuaciones polares*

$$r = 2, \quad r = \operatorname{sen}\theta \quad y \quad r = \cos(\tfrac{\theta}{2}).$$

(a) $r = 2$

Consideremos la relación polar $f(r,\theta) = r - 2$.

Como, para todo número entero n, la ecuación $f(r,\theta) = 0$ *coincide con la ecuación* $f(r,\theta+2n\pi) = 0$, *tendremos que por esta vía no obtenemos una ecuación equivalente a la original y distinta de ella.*

Como, para todo número entero k, la ecuación $f(-r,\theta + (2k+1)\pi) = 0$ *resulta* $-r = 2$ *o, lo que es lo mismo,* $r = -2$, *tendremos que por esta vía* $r = -2$ *es la única ecuación equivalente a la original y distinta de ella.*

(b) $r = \operatorname{sen}\theta$

Consideremos la relación polar $f(r,\theta) = r - \operatorname{sen}\theta$.

Como, para todo número entero n, la ecuación $f(r,\theta) = 0$ *coincide con la ecuación* $f(r,\theta+2n\pi) = 0$, *tendremos que por esta vía no obtenemos una ecuación equivalente a la original y distinta de ella.*

Como, para todo número entero k, la ecuación $f(r,\theta) = 0$ *coincide con la ecuación* $f(r,\theta + (2k+1)\pi) = 0$, *tendremos que por esta vía no obtenemos una ecuación equivalente a la original y distinta de ella.*

(c) $r = \cos(\frac{\theta}{2})$

Consideremos la relación polar $f(r,\theta) = r - \cos(\frac{\theta}{2})$.

Como, para todo número entero n par, la ecuación $f(r,\theta) = 0$ *coincide con la ecuación* $f(r,\theta + 2n\pi) = 0$ *y, para cualquier número entero n impar, la ecuación* $f(r,\theta+2n\pi) = 0$ *resulta* $r = -\cos(\frac{\theta}{2})$, *tendremos que por esta vía* $r = -\cos(\frac{\theta}{2})$ *es la una única ecuación equivalente a la original y distinta de ella.*

Como, para todo número entero k par, la ecuación $f(r,\theta + (2k+1)\pi) = 0$ *resulta* $r = \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})$ *y, para para cualquier número entero k impar, la ecuación* $f(r,\theta + (2k+1)\pi) = 0$ *resulta* $r = -\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})$, *tendremos que por esta vía* $r = \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})$ *y* $r = -\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})$ *son las únicas dos ecuaciones equivalentes a la original y distintas de ella.*

QEE ➤

Observación 9.7

Puede suceder, como veremos más adelante que, si $f(r,\theta) = f_1(r,\theta)f_2(r,\theta)$ *tengamos, al plantear la ecuación* $f(r,\theta) = 0$, *que todos los pares que satisfacen la ecuación polar* $f_2(r,\theta) = 0$ *también satisfacen la ecuación polar* $f_1(r,\theta) = 0$; *en consecuencia, la ecuación polar* $f(r,\theta) = 0$ *es equivalente a la ecuación polar* $f_1(r,\theta) = 0$.

§ 9.2 Coordenadas polares y cartesianas

Puede suceder que el estudio de una misma figura geométrica resulte más fácil al representarla por una ecuación polar, que por una ecuación cartesiana, o viceversa. Por esta razón es conveniente saber cómo transformar las coordenadas de un punto, o la forma de una ecuación, de un sistema al otro, y escoger el sistema que más convenga.

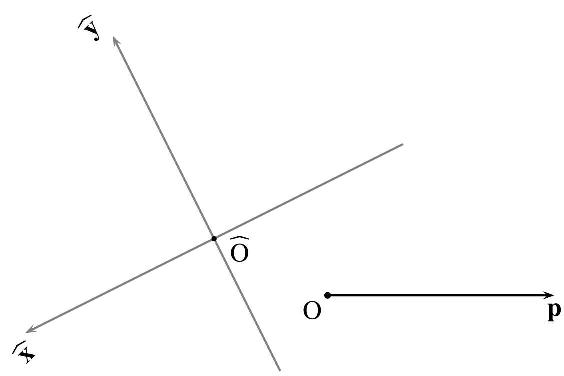


FIGURA 9.5 Sistemas de coordenadas polares y de cartesianas rectangulares simultáneos

El problema general se puede plantear de la siguiente manera: si tenemos fijados en el plano un sistema de coordenadas polares O**p** y un sistema de coordenadas cartesianas $\widehat{\mathbf{x}O\mathbf{y}}$ (ver la figura 9.5), ¿habrá algún procedimiento que permita obtener las coordenadas de un punto respecto a uno cualquiera de los sistemas, si se tienen sus coordenadas respecto al otro sistema?

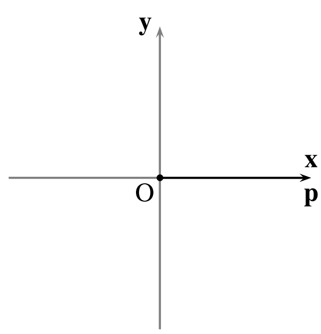


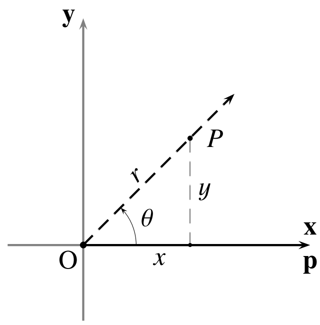
FIGURA 9.6 Sistema **x**O**y** de ejes rectangulares asociado al sistema O**p**

Este problema general se resuelve utilizando un sistema de ejes rectangulares **x**O**y** íntimamente ligado al sistema de coordenadas polares O**p**, y que se construye de la siguiente manera: el origen coincide con el polo; el rayo $\overrightarrow{O\mathbf{x}}$ coincide con el eje polar; y el eje **y** coincide con la recta perpendicular al eje polar por el polo (que, por su relevancia en el estudio de coordenadas polares, llamaremos ***la recta normal al sistema*** O**p**, y que denotaremos por **n**), orientado de tal manera que el rayo $\overrightarrow{O\mathbf{y}}$ determina, junto con el eje polar como lado inicial, un ángulo de medida $\frac{\pi}{2}$ (ver la figura 9.6). Este sistema de ejes rectangulares que hemos construido será llamado ***el sistema de ejes rectangulares asociado al sistema*** O**p**.

En el cuadro 9.1 se expone un procedimiento que permite obtener las coordenadas de un punto respecto a uno cualquiera de esos sistemas, si se tienen sus coordenadas respecto al otro sistema; es de notar que la fórmula para calcular el ángulo polar, a partir de las coordenadas cartesianas de un punto, está expresada de tal manera que $\arctan(\frac{y}{x})$ se calcula en la rama principal de la tangente (es decir, en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$), tal como se obtiene en las calculadoras.

Polares a cartesianas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$



Cartesianas a polares

$$\begin{cases} r = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}, & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\sqrt{x^2+y^2}, & \text{si } x < 0 \end{cases} \\ \theta = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}), & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } x = 0 \text{ y } y > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \text{ y } y = 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{si } x = 0 \text{ y } y < 0 \end{cases} \end{cases}$$

CUADRO 9.1 Transformación de coordenadas entre O**p** y **x**O**y**

Por esta vía se resuelve el problema general planteado, porque ya sabemos cómo transformar las coordenadas entre el sistema $\widehat{\mathbf{x}\mathrm{O}\mathbf{y}}$ y el sistema **x**O**y**.

> Desde este punto en adelante, cada vez que hablemos de coordenadas cartesianas de un punto, nos estaremos refiriendo a sus coordenadas respecto al sistema de ejes rectangulares asociado al sistema O**p**.

Note que la descripción del procedimiento para calcular las coordenadas polares de un punto, a partir de sus coordenadas cartesianas, se presenta imbricada; sin embargo, la dificultad de su aplicación se reduce a chequear nulidad o signo, de la abscisa o la ordenada del punto. Otra manera muy usual de hacer este cálculo, un tanto empírica a nuestro parecer, consiste en tomar siempre $r = \sqrt{x^2+y^2}$ (la raíz cuadrada positiva) y luego, al calcular $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$, ubicar θ en el cuadrante adecuado como para que la abscisa y la ordenada del punto satisfagan $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$, o ubicar θ en el cuadrante adecuado como para que $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Por otro lado, en el procedimiento descrito, no obtenemos necesariamente las coordenadas polares principales de un punto, si tenemos sus coordenadas cartesianas (sólo se obtendrían para el polo y los puntos que están ubicados en el primer cuadrante); en caso de no obtenerlas y necesitarlas, ya hemos descrito en el ejemplo 9.1 cómo obtener las coordenadas polares principales de dicho punto, a partir de uno cualquiera de sus pares de coordenadas polares.

En el siguiente ejemplo aplicaremos el procedimiento descrito para encontrar un par de coordenadas polares de un punto, a partir de sus coordenadas cartesianas.

➤ Ejemplo 9.4

Encontremos las coordenadas polares principales de los puntos con coordenadas cartesianas

$$(\sqrt{2}, \sqrt{6}), \quad (-1, 1), \quad (3, -\sqrt{3}), \quad (-3, -\sqrt{3}), \quad (e, 0), \quad (0, \tfrac{\pi}{2}), \quad (-\pi, 0) \quad y \quad (0, -\tfrac{\pi}{2})$$

(a) $(\sqrt{2}, \sqrt{6})$

Para encontrar el radio polar, calculamos primero $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2+6} = 2\sqrt{2}$.

Como $\sqrt{2} \geqslant 0$, *tendremos que* $r = 2\sqrt{2}$.

Para encontrar el ángulo polar, observamos que $\sqrt{2} \neq 0$ *y, en consecuencia,* $\theta = \arctan(\frac{y}{x}) = \arctan(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.

Como, para los valores encontrados, $r \geqslant 0$ *y* $0 \leqslant \theta < 2\pi$, *tendremos que las coordenadas polares principales del punto* $(\sqrt{2}, \sqrt{6})$ *son*

$$(2\sqrt{2}, \tfrac{\pi}{3}).$$

(b) $(-1, 1)$

Para encontrar el radio polar, calculamos primero $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

Como $-1 < 0$, *tendremos que* $r = -\sqrt{2}$.

Para encontrar el ángulo polar, observamos que $-1 \neq 0$ *y, en consecuencia,* $\theta = \arctan(\frac{y}{x}) = \arctan(\frac{1}{-1}) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ *(enfatizamos que debe ser calculado en el intervalo* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, *pues podría uno tomar, equivocadamente,* $\frac{3\pi}{4}$*).*

Observamos ahora que, para los valores encontrados, $r < 0$ *y* $\theta < 0$, *y, en consecuencia,* $(-\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$ *no son las coordenadas polares principales buscadas; para encontrarlas procedemos como en el ejemplo 9.1, obteniendo que las coordenadas polares principales del punto* $(-1, 1)$ *son*

$$(\sqrt{2}, \tfrac{3\pi}{4}).$$

(c) $(3, -\sqrt{3})$

Para encontrar el radio polar, calculamos primero $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$.

Como $3 > 0$, *tendremos que* $r = 2\sqrt{3}$.

Para encontrar el ángulo polar, observamos que $3 \neq 0$ *y, en consecuencia,* $\theta = \arctan(\frac{y}{x}) = \arctan(\frac{-\sqrt{3}}{3}) = -\frac{\pi}{6}$.

Observamos ahora que, para los valores encontrados, $\theta < 0$ *y, en consecuencia,* $(2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{6})$ *no son las coordenadas polares principales buscadas; para encontrarlas procedemos como en el ejemplo 9.1, obteniendo que las coordenadas polares principales del punto* $(3, -\sqrt{3})$ *son*

$$(2\sqrt{3}, \tfrac{11\pi}{6}).$$

(d) $(-3, -\sqrt{3})$

Para encontrar el radio polar, calculamos primero $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$.

Como $-3 < 0$, *tendremos que* $r = -2\sqrt{3}$.

Para encontrar el ángulo polar, observamos que $-3 \neq 0$ *y, en consecuencia,* $\theta = \arctan(\frac{y}{x}) = \arctan(\frac{-\sqrt{3}}{-3}) = \arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{\pi}{6}$.

Observamos ahora que, para los valores encontrados, $r < 0$ *y, en consecuencia,* $(-2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$ *no son las coordenadas polares principales buscadas; para encontrarlas procedemos como en el ejemplo 9.1, obteniendo que las coordenadas polares principales del punto* $(-3, -\sqrt{3})$ *son*

$$(2\sqrt{3}, \tfrac{7\pi}{6}).$$

(e) $(e, 0)$
Para encontrar el radio polar, calculamos primero $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{e^2} = e$.
Como $e > 0$*, tendremos que* $r = e$.
Para encontrar el ángulo polar, observamos que $e \neq 0$ *y, en consecuencia,* $\theta = \arctan(\frac{y}{x}) = \arctan(\frac{0}{e}) = \arctan(0) = 0$.
Como, para los valores encontrados, $r \geqslant 0$ *y* $0 \leqslant \theta < 2\pi$*, tendremos que las coordenadas polares principales del punto* $(e, 0)$ *son*

$$(e, 0).$$

(f) $(0, \frac{\pi}{2})$
Para encontrar el radio polar, calculamos primero $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{\pi}{2}$.
Como la abscisa del punto es 0*, tendremos que* $r = \frac{\pi}{2}$.
Para encontrar el ángulo polar, observamos que la abscisa del punto es 0 *y que* $\frac{\pi}{2} > 0$*; en consecuencia,* $\theta = \frac{\pi}{2}$.
Como, para los valores encontrados, $r \geqslant 0$ *y* $0 \leqslant \theta < 2\pi$*, tendremos que las coordenadas polares principales del punto* $(0, \frac{\pi}{2})$ *son*

$$(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}).$$

(g) $(-\pi, 0)$
Para encontrar el radio polar, calculamos primero $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\pi^2} = \pi$.
Como $-\pi < 0$*, tendremos que* $r = -\pi$.
Para encontrar el ángulo polar, observamos que $-\pi \neq 0$ *y, en consecuencia,* $\theta = \arctan(\frac{y}{x}) = \arctan(\frac{0}{-\pi}) = \arctan(0) = 0$.
Observamos ahora que, para los valores encontrados, $r < 0$ *y, en consecuencia,* $(-\pi, 0)$ *no son las coordenadas polares principales buscadas; para encontrarlas procedemos como en el ejemplo 9.1, obteniendo que las coordenadas polares principales del punto* $(-\pi, 0)$ *son*

$$(\pi, \pi).$$

(h) $(0, -\frac{\pi}{2})$
Para encontrar el radio polar, calculamos primero $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{\pi}{2}$.
Como la abscisa del punto es 0*, tendremos que* $r = \frac{\pi}{2}$.
Para encontrar el ángulo polar, observamos que la abscisa del punto es 0 *y que* $-\frac{\pi}{2} < 0$*; en consecuencia,* $\theta = \frac{3\pi}{2}$.
Como, para los valores encontrados, $r \geqslant 0$ *y* $0 \leqslant \theta < 2\pi$*, tendremos que las coordenadas polares principales del punto* $(0, -\frac{\pi}{2})$ *son*

$$(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}).$$

QEE ➤

Estamos interesados, ahora, en saber cómo encontrar una ecuación polar que represente una figura geométrica $\mathcal{G}$, si tenemos una ecuación cartesiana que la represente, y viceversa. A este respecto sólo ofreceremos los siguientes lineamientos generales de carácter heurístico.

- Si $f(x, y) = 0$ es una ecuación cartesiana de la figura geométrica $\mathcal{G}$, podemos encontrar una ecuación polar que represente a $\mathcal{G}$ aplicando las transformaciones de coordenadas polares a coordenadas

cartesianas expuestas en el cuadro 9.1: más específicamente, dondequiera que aparezca x en la ecuación $f(x, y) = 0$, la sustituimos por $r\cos\theta$; y, dondequiera que aparezca y en la ecuación $f(x, y) = 0$, la sustituimos por $r\,\mathrm{sen}\,\theta$.
Cuando aparecen múltiplos de $x^2 + y^2$ en la ecuación $f(x, y) = 0$, se puede simplificar el trabajo anterior utilizando la relación $x^2 + y^2 = r^2$.

- Si $f(r, \theta) = 0$ es una ecuación polar de la figura geométrica $\mathcal{G}$, podemos tratar de encontrar una ecuación cartesiana que represente a $\mathcal{G}$ aplicando las transformaciones de coordenadas cartesianas a coordenadas polares expuestas en el cuadro 9.1: más específicamente, dondequiera que aparezca r en la ecuación $f(r, \theta) = 0$, la sustituimos por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$; y, dondequiera que aparezca θ en la ecuación $f(r, \theta) = 0$, la sustituimos por $\arctan(\frac{y}{x})$.
  Cuando aparecen múltiplos de $\mathrm{sen}\,\theta$, $\cos\theta$, $\sec\theta$ o $\mathrm{cosec}\,\theta$ en la ecuación $f(r, \theta) = 0$, se puede simplificar el trabajo anterior utilizando las relaciones $\mathrm{sen}\,\theta = \pm\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y $\cos\theta = \pm\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
  Es claro que por este medio, la ambigüedad de signos y las restricciones sobre los valores posibles de x y y pueden acarrear el problema de que no resulte una única ecuación cartesiana que represente a la figura geométrica $\mathcal{G}$, o que la ecuación resultante no represente la totalidad de $\mathcal{G}$, sino una parte. Por otro lado, en el cálculo de la ecuación cartesiana se tiene la tendencia a multiplicar o dividir por r a ambos lados de la igualdad resultante; este proceder acarrea el problema de que se puede añadir o eliminar el polo de $\mathcal{G}$, ya que r puede tomar eventualmente el valor 0 para algún valor de θ. En consecuencia, debemos estar seguros de que, al multiplicar por r, si el polo ya estaba en $\mathcal{G}$, lo siga estando y, si no estaba, no lo esté después; lo mismo al dividir por r.

En los siguientes dos ejemplos aplicaremos los lineamientos generales que acabamos de describir para transformar las ecuaciones que representan una figura geométrica.

➤ EJEMPLO 9.5

Encontremos una ecuación polar que represente a las figuras geométricas representadas por las ecuaciones cartesianas

$$x^2 + y^2 = 4, \quad 2x - 2y + 5 = 0 \quad y \quad xy = 2.$$

(a) $x^2 + y^2 = 4$
Es claro que $r^2 - 4 = 0$ *es una ecuación polar que representa a la figura geométrica representada por la ecuación cartesiana* $x^2 + y^2 = 4$*; pero también lo son* $r - 2 = 0$ *y* $r + 2 = 0$.

(b) $2x - 2y + 5 = 0$
Es claro que $2r(\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta) + 5 = 0$ *es una ecuación polar que representa a la figura geométrica representada por la ecuación cartesiana* $2x-2y+5 = 0$*; pero, como veremos más adelante, también lo es* $r\cos(\theta - \frac{3\pi}{4}) - \frac{5\sqrt{2}}{4} = 0$.

(c) $xy = 2$
Es claro que $r^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - 2 = 0$ *es una ecuación polar que representa a la figura geométrica representada por la ecuación cartesiana* $xy = 2$*; pero también lo es* $r^2\,\mathrm{sen}(2\theta) - 4 = 0$.

QEE ◄

➤ EJEMPLO 9.6

Encontremos una ecuación cartesiana que represente a las figuras geométricas representadas por las *ecuaciones polares*

$$r\cos\theta - 2 = 0, \quad r = 9\operatorname{sen}\theta, \quad r^2 = \operatorname{sen}(2\theta), \quad r = 2\cos\theta \quad y \quad r = \frac{2}{1-2\cos\theta}.$$

(a) $r\cos\theta - 2 = 0$
Es claro que $x - 2 = 0$ *es una ecuación cartesiana que representa a la figura geométrica representada por la ecuación polar* $r\cos\theta - 2 = 0$.

(b) $r = 9\operatorname{sen}\theta$
Una manera usual de resolver este problema consiste en multiplicar por r ambos lados de la igualdad, puesto que de esta manera obtenemos $r^2 = 9r\operatorname{sen}\theta$ *que se transforma en* $x^2 + y^2 - 9y = 0$*; pero, al proceder de esta manera, sólo debemos cuidar que el polo ya estaba en la figura geométrica representada por la ecuación polar* $r = 9\operatorname{sen}\theta$.
Es claro, en este caso, que las coordenadas polares principales del polo, $(0, 0)$*, satisfacen la ecuación* $r = 9\operatorname{sen}\theta$ *y, en consecuencia,* $x^2 + y^2 - 9y = 0$ *es una ecuación cartesiana que representa a la figura geométrica representada por la ecuación polar* $r = 9\operatorname{sen}\theta$.

(c) $r^2 = \operatorname{sen}(2\theta)$
Es claro que esta ecuación es equivalente a la ecuación $r^2 = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$.
Una manera usual de resolver este problema consiste en multiplicar por r^2 *ambos lados de la igualdad, puesto que de esta manera obtenemos* $r^4 = 2(r\operatorname{sen}\theta)(r\cos\theta)$ *que se transforma en* $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$*; pero, al proceder de esta manera, sólo debemos cuidar que el polo ya estaba en la figura geométrica representada por la ecuación polar* $r^2 = \operatorname{sen}(2\theta)$.
Es claro, en este caso, que las coordenadas polares principales del polo, $(0, 0)$*, satisfacen la ecuación* $r^2 = \operatorname{sen}(2\theta)$ *y, en consecuencia,* $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ *es una ecuación cartesiana que representa a la figura geométrica representada por la ecuación polar* $r^2 = \operatorname{sen}(2\theta)$.

(d) $r = 2\cos\theta$
Una manera usual de resolver este problema consiste en multiplicar por r ambos lados de la igualdad, puesto que de esta manera obtenemos $r^2 = 2r\cos\theta$ *que se transforma en* $x^2 + y^2 - 2x = 0$*; pero, al proceder de esta manera, sólo debemos cuidar que el polo ya estaba en la figura geométrica representada por la ecuación polar* $r = 2\cos\theta$.
Es claro, en este caso, que las coordenadas polares del polo $(0, \frac{\pi}{2})$*, satisfacen la ecuación* $r = 2\cos\theta$ *y, en consecuencia,* $x^2+y^2-2x = 0$ *es una ecuación cartesiana que representa a la figura geométrica representada por la ecuación polar* $r = 2\cos\theta$.

(e) $r = \dfrac{2}{1-2\cos\theta}$
Una manera usual de resolver este problema consiste en transformarla, con las restricciones del caso, en la ecuación equivalente $r(1 - 2\cos\theta) = 2$*, y luego, con las restricciones de signo en las abscisas, en las dos ecuaciones* $\pm\sqrt{x^2 + y^2} - 2x - 2 = 0$.
Manipulando algebraicamente esta ecuación obtenemos que $3x^2 - y^2 + 8x + 4 = 0$ *es una ecuación cartesiana que representa a la figura geométrica representada por la ecuación polar* $r = \dfrac{2}{1-2\cos\theta}$*, y que justificaremos formalmente más adelante.*

QEE ◄

En las siguientes observaciones presentamos, sumariamente, algunos conceptos ya tratados en el estudio de las coordenadas cartesianas, y que son relevantes en el estudio de las coordenadas polares.

OBSERVACIÓN 9.8 (DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN COORDENADAS POLARES)
Consideremos dos puntos P_1 y P_2 de coordenadas polares (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2), respectivamente.

Para calcular la distancia entre los puntos P_1 y P_2, podríamos encontrar sus coordenadas cartesianas y luego aplicar la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos en términos de dichas coordenadas.

Sin embargo, para calcularla en términos de sus coordenadas polares, podemos aplicar la fórmula

$$P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)},$$

que se puede deducir, salvo casos especiales relativamente sencillos, a partir de una simple aplicación del Teorema del coseno (ver la figura 9.7).

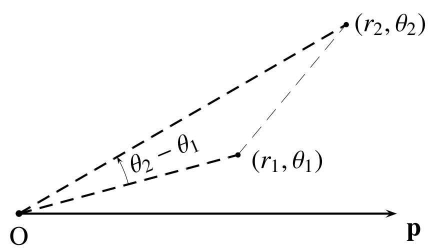


FIGURA 9.7 Distancia entre dos puntos en coordenadas polares

OBSERVACIÓN 9.9 (CRITERIO DE COLINEALIDAD EN COORDENADAS POLARES)
Consideremos tres puntos distintos P_1, P_2 y P_3 de coordenadas polares (r_1, θ_1), (r_2, θ_2) y (r_3, θ_3), respectivamente.

Para averiguar si los P_1, P_2 y P_3 puntos son colineales, encontramos sus coordenadas cartesianas $(r_1\cos\theta_1, r_1\operatorname{sen}\theta_1)$, $(r_2\cos\theta_2, r_2\operatorname{sen}\theta_2)$, $(r_3\cos\theta_3, r_3\operatorname{sen}\theta_3)$, y verificamos si se cumple

$$\begin{vmatrix} r_1\cos\theta_1 & r_1\operatorname{sen}\theta_1 & 1 \\ r_2\cos\theta_2 & r_2\operatorname{sen}\theta_2 & 1 \\ r_3\cos\theta_3 & r_3\operatorname{sen}\theta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

lo cual resulta en verificar si se cumple

$$r_1r_2\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) + r_2r_3\operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2) + r_3r_1\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_3) = 0.$$

OBSERVACIÓN 9.10 (ROTACIÓN EN TORNO AL POLO EN COORDENADAS POLARES)
Consideremos un número real θ_0. Entenderemos por ***rotación*** *(en torno al polo) del sistema de coordenadas polares* $\mathrm{O}\mathbf{p}$ ***por el ángulo*** θ_0*, un nuevo sistema de coordenadas polares* $\mathrm{O}\dot{\mathbf{p}}$ *(ver la figura 9.8) con las siguientes características:*

(R1) *el polo es el mismo* O.

(R2) *el eje* $\mathrm{O}\dot{\mathbf{p}}$ *coincide con el rayo que forma con* $\mathrm{O}\mathbf{p}$ *un ángulo de medida θ_0.*

Es fácil verificar que:

$$\begin{cases} \dot{r} = r \\ \dot{\theta} = \theta - \theta_0 \end{cases} \tag{9.3}$$

y, en consecuencia, que

$$(9.4)\qquad \begin{cases} r = \dot{r} \\ \theta = \dot{\theta} + \theta_0 \end{cases} .$$

Llamaremos a estas relaciones, las ***fórmulas de rotación de coordenadas*** *(en torno al polo)* ***por el ángulo*** θ_0*: a las establecidas en* (9.3)*,* ***de*** O**p** ***a*** O$\dot{\mathbf{p}}$*; y a las establecidas en* (9.4)*,* ***de*** O$\dot{\mathbf{p}}$ ***a*** O**p**.

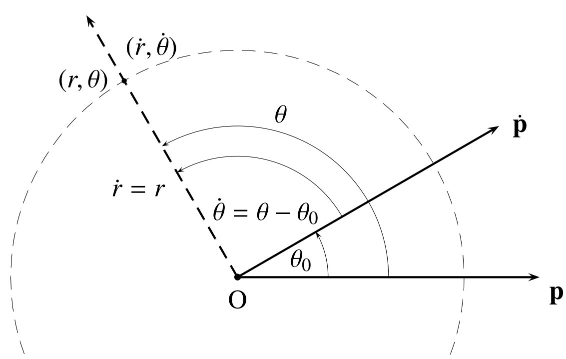


FIGURA 9.8 Rotación en torno al polo en coordenadas polares

La siguiente observación nos ayudará a identificar algunas figuras geométricas a partir de sus ecuaciones polares.

OBSERVACIÓN 9.11 (TRANSFORMACIÓN DE UNA ECUACIÓN POLAR POR ROTACIÓN)
Consideremos una figura geométrica $\mathcal{G}$ representada por una ecuación polar $f(r,\theta) = 0$.

(a) *La ecuación polar $f(r, \theta - \theta_0) = 0$ representa a la misma figura geométrica $\mathcal{G}$, pero rotada por un ángulo θ_0 en torno al polo.*
En otras palabras, al sustituir θ por $\theta - \theta_0$ en la ecuación polar $f(r,\theta) = 0$, se obtiene una ecuación que representa a la misma figura geométrica $\mathcal{G}$, pero rotada por un ángulo θ_0 en torno al polo.

(b) *Si la ecuación polar $f(r,\theta) = 0$ contiene a θ sólo en la forma $\cos\theta$ (es decir, como argumento del coseno), entonces la ecuación polar que se obtiene al sustituir $\cos\theta$ por $\operatorname{sen}\theta$, $-\cos\theta$ o $-\operatorname{sen}\theta$, representa a la misma figura geométrica $\mathcal{G}$, pero rotada por un ángulo $\frac{\pi}{2}$, π o $\frac{3\pi}{2}$ en torno al polo, respectivamente*
(por el hecho de que $\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}\theta$, $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$ y $\cos(\theta - \frac{3\pi}{2}) = -\operatorname{sen}\theta$).

(c) *Consideremos un número racional q.*
Si la ecuación polar $f(r,\theta) = 0$ contiene a θ sólo en la forma $\cos(q\theta)$ (es decir, como argumento del coseno, pero multiplicado por un número racional q), entonces la ecuación polar que se obtiene al sustituir $\cos(q\theta)$ por $\operatorname{sen}(q\theta)$, $-\cos(q\theta)$ o $-\operatorname{sen}(q\theta)$, representa a la misma figura geométrica $\mathcal{G}$, pero rotada por un ángulo $\frac{\pi}{2q}$, $\frac{\pi}{q}$ o $\frac{3\pi}{2q}$ en torno al polo, respectivamente
(pues $\cos(q(\theta - \frac{\pi}{2q})) = \operatorname{sen}(q\theta)$, $\cos(q(\theta - \frac{\pi}{q})) = -\cos(q\theta)$ y $\cos(q(\theta - \frac{3\pi}{2q})) = -\operatorname{sen}(q\theta)$).

Fijemos, de ahora en adelante, un sistema de coordenadas polares O**p** en el plano.

§ 9.3 Rectas, círculos y cónicas en coordenadas polares

En esta sección estudiaremos de nuevo las figuras geométricas que ya hemos estudiado en coordenadas cartesianas, pero en referencia a un sistema de coordenadas polares en el plano.

Rectas

Consideremos una recta l cualquiera.

Si l corta a la recta **p** en el punto C, entenderemos por ***ángulo de inclinación*** de la recta l, el ángulo que tiene vértice en C, lado inicial el sentido positivo de C en **p**, lado final en l, y medida en el intervalo $[0, \pi)$. Llamaremos ***inclinación*** de l al número real α que representa la medida de su ángulo de inclinación; si l es paralela a la recta **p**, diremos que su inclinación es 0.

Como toda recta queda determinada por su distancia al polo y la inclinación de cualquiera de sus perpendiculares, consideremos la distancia d de la recta l al polo, y la inclinación ω de cualquier perpendicular a l.

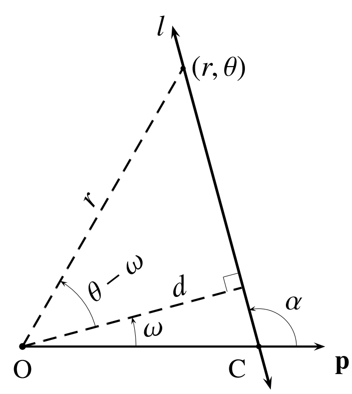


FIGURA 9.9 Ecuación normal de una recta

Consideremos un punto P de coordenadas polares (r, θ) en l. Aplicando la definición del coseno en las diferentes configuraciones, tendremos que l se puede representar por la ecuación polar

$$r = \frac{d}{\cos(\theta - \omega)} \tag{9.5}$$

que llamaremos ***ecuación normal*** de la recta l.

OBSERVACIÓN 9.12

(a) *Como la inclinación, α, de la recta l satisface $\alpha = \omega + \frac{\pi}{2}$, tendremos que la ecuación* (9.5) *se puede expresar, en términos de α, mediante $r \operatorname{sen}(\theta - \alpha) = d$.*

(b) **(Rectas que pasan por el polo)**
Por la parte anterior, si la recta l pasa por el polo tendremos, por la observación 9.7 al tomar $d = 0$, que l se puede representar por la ecuación polar $\operatorname{sen}(\theta - \alpha) = 0$; pero, como es fácil comprobar,

esta ecuación es equivalente a la ecuación polar

$$\theta = \alpha.$$

Así, cada recta que pasa por el polo coincide con el conjunto de los puntos (r, θ) *para los que* θ *es constante e igual a* α *(conjunto que, si consideramos a* (r, θ) *como coordenadas cartesianas, corresponde a una recta perpendicular al eje* $\mathbf{y}$*).*

(c) *De acuerdo con la observación 9.11, las ecuaciones polares*

$$r = \frac{d}{\operatorname{sen}(\theta - \omega)}, \quad r = \frac{-d}{\cos(\theta - \omega)} \quad y \quad r = \frac{-d}{\operatorname{sen}(\theta - \omega)}$$

representan a la misma recta l, pero rotada $\frac{\pi}{2}$, π *o* $\frac{3\pi}{2}$, *respectivamente.*

(d) *Con* $\omega = 0$, *las ecuaciones*

$$r = \frac{d}{\cos\theta}, \quad r = \frac{d}{\operatorname{sen}\theta}, \quad r = \frac{-d}{\cos\theta} \quad y \quad r = \frac{-d}{\operatorname{sen}\theta}$$

representan, respectivamente, una recta perpendicular al eje polar, una recta perpendicular a la recta normal cuyos puntos tienen ángulos polares entre 0 *y* π, *una perpendicular al rayo opuesto al eje polar, y una recta perpendicular a la recta normal cuyos puntos tienen ángulos polares entre* π *y* 2π.

(e) *Note que la ecuación normal de una recta, así como sus transformadas de la parte (a), se pueden expresar en términos de la secante y la cosecante, tal como pueden aparecer en lo que sigue.*

OBSERVACIÓN 9.13 (DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA EN COORDENADAS POLARES)
Consideremos una recta l de ecuación normal $r = \frac{d}{\cos(\theta - \omega)}$, *y un punto* P_1 *de coordenadas polares* (r_1, θ_1).

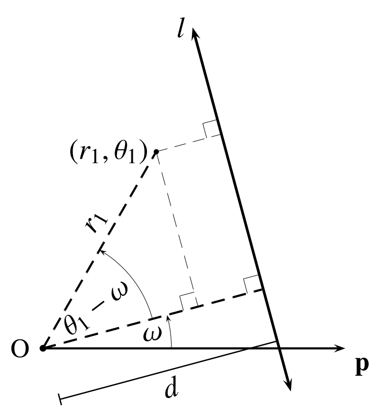


FIGURA 9.10 Distancia de un punto a una recta

Para calcular la distancia del punto P_1 *a la recta l, podríamos encontrar la ecuación cartesiana de l y las coordenadas cartesianas de* P_1, *y luego aplicar la fórmula para calcular la distancia en términos de dichas coordenadas.*

Sin embargo, para calcularla en términos de sus coordenadas polares, podemos aplicar la fórmula

$$\boxed{\mathbf{d}(P_1, l) = |d - r_1 \cos(\theta_1 - \omega)|}$$

que resulta, salvo casos especiales relativamente sencillos (ver la figura 9.10), de una simple aplicación de la definición del coseno.

Círculos

Consideremos un círculo C con centro en el punto K de coordenadas polares (r_0, θ_0), y de radio a.

Por una simple aplicación del Teorema del coseno en las diferentes configuraciones, salvo casos especiales relativamente sencillos (ver la figura 9.11), se tiene que C se puede representar por la ecuación polar

(9.6) $$r^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 = a^2.$$

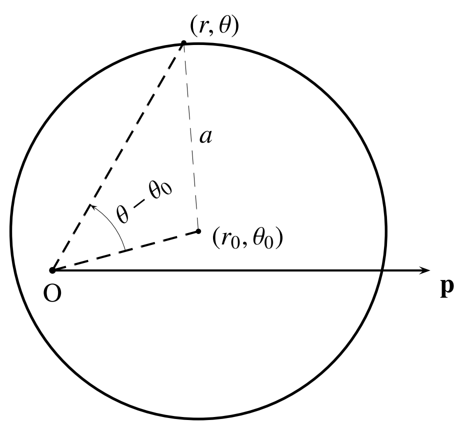


FIGURA 9.11 Círculo con centro (r_0, θ_0) y radio a

En particular, si *el centro es el polo* tendremos, al tomar $r_0 = 0$, que C se puede representar por la ecuación polar $r^2 - a^2 = 0$; pero, como es fácil comprobar, esta ecuación es equivalente a la ecuación polar

(9.7) $$r = a.$$

Así, cada círculo con centro en el polo coincide con el conjunto de los puntos (r, θ) para los que r es constante e igual a a (conjunto que, si consideramos a (r, θ) como coordenadas cartesianas, corresponde a una recta perpendicular al eje $\mathbf{x}$).

También en particular, si *pasa por el polo* tendremos, al tener que $r_0 = a$, que C se puede representar por la ecuación polar

(9.8) $$r = 2a \cos(\theta - \theta_0).$$

OBSERVACIÓN 9.14

(a) *De acuerdo con la observación 9.11, las ecuaciones polares*

$$r = 2a\,\mathrm{sen}(\theta - \theta_0), \quad r = -2a\cos(\theta - \theta_0) \quad y \quad r = -2a\,\mathrm{sen}(\theta - \theta_0)$$

representan al mismo círculo C*, pero rotado* $\frac{\pi}{2}$*,* π *o* $\frac{3\pi}{2}$*, respectivamente.*

(b) *Con* $\theta_0 = 0$*, las ecuaciones*

$$r = 2a\cos\theta, \quad r = 2a\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad r = -2a\cos\theta \quad y \quad r = -2a\,\mathrm{sen}\,\theta$$

representan, respectivamente, un círculo con centro sobre el eje polar, sobre la recta normal cuyos puntos tienen ángulos polares entre 0 *y* π*, sobre el rayo opuesto al eje polar, y sobre la recta normal cuyos puntos tienen ángulos polares entre* π *y* 2π*.*

OBSERVACIÓN 9.15 (CRITERIO PARA DETERMINAR SI SON CONCÍCLICOS EN COORDENADAS POLARES)
Consideremos cuatro puntos P_1*,* P_2*,* P_3 *y* P_4 *de coordenadas polares* (r_1, θ_1)*,* (r_2, θ_2)*,* (r_3, θ_3) *y* (r_4, θ_4)*, respectivamente.*

Para averiguar si los puntos P_1*,* P_2*,* P_3 *y* P_4 *son concíclicos, encontramos sus coordenadas cartesianas* $(r_1\cos\theta_1, r_1\,\mathrm{sen}\,\theta_1)$*,* $(r_2\cos\theta_2, r_2\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$*,* $(r_3\cos\theta_3, r_3\,\mathrm{sen}\,\theta_3)$ *y* $(r_4\cos\theta_4, r_4\,\mathrm{sen}\,\theta_4)$*, y luego verificamos si se cumple*

$$\begin{vmatrix} r_1^2 & r_1\cos\theta_1 & r_1\,\mathrm{sen}\,\theta_1 & 1 \\ r_2^2 & r_2\cos\theta_2 & r_2\,\mathrm{sen}\,\theta_2 & 1 \\ r_3^2 & r_3\cos\theta_3 & r_3\,\mathrm{sen}\,\theta_3 & 1 \\ r_4^2 & r_4\cos\theta_4 & r_4\,\mathrm{sen}\,\theta_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En virtud de la observación 9.15 tendremos que el círculo que pasa por el polo, corta al eje polar en $(\rho, 0)$ y a la recta normal en $(\sigma, \frac{\pi}{2})$, se puede representar por la ecuación polar

$$r = \rho\cos\theta + \sigma\,\mathrm{sen}\,\theta \quad (\rho\sigma \neq 0). \tag{9.9}$$

Cónicas

En virtud de la definición de una cónica y, salvo casos especiales relativamente sencillos, gracias a la definición del coseno (ver la figura 9.12), es fácil verificar que una cónica $\mathcal{G}$ de excentricidad e, foco en el polo, y directriz de ecuación normal $r = \frac{d}{\cos(\theta-\omega)}$, se puede representar por la ecuación polar

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos(\theta - \omega)}. \tag{9.10}$$

OBSERVACIÓN 9.16

(a) *De acuerdo con la observación 9.11, las ecuaciones polares*

$$r = \frac{ed}{1 + e\,\mathrm{sen}(\theta - \omega)}, \quad r = \frac{ed}{1 - e\cos(\theta - \omega)} \quad y \quad r = \frac{ed}{1 - e\,\mathrm{sen}(\theta - \omega)}$$

representan a la misma cónica $\mathcal{G}$*, pero rotada* $\frac{\pi}{2}$*,* π *o* $\frac{3\pi}{2}$*, respectivamente.*

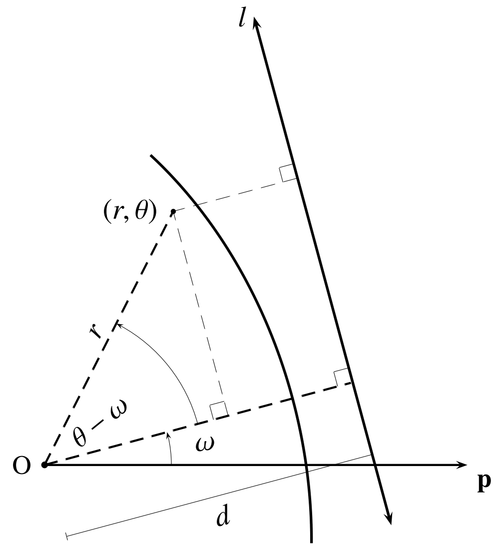


FIGURA 9.12 Cónicas

(b) *Con $\omega = 0$, las ecuaciones*

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}, \quad r = \frac{ed}{1 + e\operatorname{sen}\theta}, \quad r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta} \quad y \quad r = \frac{ed}{1 - e\operatorname{sen}\theta}$$

representan, respectivamente, una cónica con directriz perpendicular al eje polar, perpendicular a la recta normal cuyos puntos tienen ángulos polares entre 0 y π, perpendicular al rayo opuesto al eje polar, y perpendicular a la recta normal cuyos puntos tienen ángulos polares entre π y 2π.

§ 9.4 Representación gráfica de una ecuación polar

Así como hasta ahora hemos tratado con la representación gráfica de una figura geométrica, a partir de una ecuación cartesiana que la represente, sólo en referencia al sistema de coordenadas rectangulares que dio origen a dicha ecuación, del mismo modo estamos interesados ahora en la representación gráfica de una figura geométrica, a partir de una ecuación polar que la represente, sólo en referencia al sistema de coordenadas polares que dio origen a dicha ecuación⟨11⟩.

No ofreceremos ningún método cuya aplicación permita realizar el trazado de una figura geométrica a partir de una ecuación polar que la represente; somos del parecer de que la habilidad para realizar esa tarea requiere, aparte de la indispensable familiaridad con las funciones trigonométricas, de mucha experiencia y observación.

Sólo ofreceremos, en esta oportunidad, el siguiente procedimiento como apoyo para realizar el trazado de una figura geométrica $\mathcal{G}$ de ecuación polar $f(r, \theta) = 0$, y sólo lo aplicaremos a algunas familias de ecuaciones consideradas típicas o estándar, que proveerán al lector de la experiencia necesaria para lidiar con otras ecuaciones; lejos estamos de pretender que este procedimiento resulte suficiente en todos los casos.

(1) *Determinar si el polo está en $\mathcal{G}$.*
Planteamos la ecuación $f(0,\theta) = 0$ (es decir, la ecuación que resulta al sustituir r por 0): el polo estará en $\mathcal{G}$, si dicha ecuación tiene al menos una solución en θ.

(2) *Determinar las intersecciones de $\mathcal{G}$ con la recta* **p**.
Planteamos la ecuación $f(r, n\pi) = 0$ con $n \in \mathbb{Z}$ (es decir, la ecuación que resulta al sustituir θ por $n\pi$): $\mathcal{G}$ cortará a la recta **p** en todos los puntos $(r_k, k\pi)$ distintos que son solución de dicha ecuación.

(3) *Determinar las intersecciones de $\mathcal{G}$ con la recta* **n**.
Planteamos la ecuación $f(r, \frac{(2n+1)\pi}{2}) = 0$ con $n \in \mathbb{Z}$ (es decir, la ecuación que resulta al sustituir θ por $\frac{(2n+1)\pi}{2}$): $\mathcal{G}$ cortará a la recta **n** en todos los puntos $(r_k, \frac{(2k+1)\pi}{2})$ distintos que son solución de dicha ecuación.

(4) *Determinar si $\mathcal{G}$ es simétrica respecto a la recta* **p**.
Planteamos la ecuación $f(r, -\theta) = 0$, o la ecuación $f(-r, \pi-\theta) = 0$: $\mathcal{G}$ será simétrica respecto a la recta **p**, si alguna de estas ecuaciones es equivalente a la ecuación $f(r,\theta) = 0$.
Saber que $\mathcal{G}$ es simétrica con respecto a la recta **p** nos permite restringir los valores de θ a los que están entre 0 y π, pues el trazado para los valores entre π y 2π estará formado por los puntos simétricos respecto a la recta **p** de los puntos del trazado entre 0 y π.

(5) *Determinar si $\mathcal{G}$ es simétrica respecto a la recta* **n**.
Planteamos la ecuación $f(r, \pi-\theta) = 0$, o la ecuación $f(-r, -\theta) = 0$: $\mathcal{G}$ será simétrica respecto a la recta **n**, si alguna de estas ecuaciones es equivalente a la ecuación $f(r,\theta) = 0$.
Saber que $\mathcal{G}$ es simétrica con respecto a la recta **n** nos permite restringir los valores de θ a los que están entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, pues el trazado para los valores entre $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$ estará formado por los puntos simétricos respecto a la recta **n** de los puntos del trazado entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$.

(6) *Determinar si $\mathcal{G}$ es simétrica respecto al polo.*
Planteamos la ecuación $f(-r, \theta) = 0$, o la ecuación $f(r, \pi+\theta) = 0$: $\mathcal{G}$ será simétrica respecto al polo, si alguna de estas ecuaciones es equivalente a la ecuación $f(r,\theta) = 0$.
Saber que $\mathcal{G}$ es simétrica con respecto al polo nos permite restringir los valores de θ a los que están entre $-\frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$, pues el trazado para los valores entre $\frac{3\pi}{4}$ y $\frac{7\pi}{4}$ estará formado por los puntos simétricos respecto al polo de los puntos del trazado entre $-\frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$.

(7) *Determinar los valores admisibles de θ.*
Encontramos el conjunto de los valores de θ para los cuales r es un número real.

(8) *Hacer una tabla asignando valores arbitrarios a θ, pero cónsonos con la información previamente obtenida, y calculando los respectivos valores de r.*

(9) *Trazar una curva suave*⟨12⟩ *por los puntos encontrados.*

En la siguiente observación presentamos algunos resultados que simplifican la labor en el trazado de una figura geométrica.

OBSERVACIÓN 9.17

(a) *Note que en el análisis de los puntos de intersección de $\mathcal{G}$ con la recta* **p** *y con la recta* **n**, *puede suceder que $\mathcal{G}$ las corte a ambas en el polo, y éste no aparezca como solución de las ecuaciones correspondientes, pues los criterios* **(2)** *y* **(3)** *propuestos son condiciones suficientes, pero no necesarias.*
Ahora bien, si el polo está en $\mathcal{G}$, éste sería uno de los puntos de corte de $\mathcal{G}$ con dichas rectas.

(b) *Note que si $f(r, \theta) = 0$ contiene a θ solamente en la forma $\cos(a\theta)$ (a número real), $\mathcal{G}$ es simétrica respecto a la recta* **p**
(como $\cos(-a\theta) = \cos(a\theta)$, la ecuación $f(r, -\theta) = 0$ es equivalente a la ecuación original).

(c) *Note que si $f(r, \theta) = 0$ contiene a r solamente en potencias pares, $\mathcal{G}$ es simétrica respecto al polo (como $(-r)^{2k} = r^{2k}$ (k entero), la ecuación $f(-r, \theta) = 0$ es equivalente a la ecuación original).*

(d) *Note que la multiplicidad de coordenadas polares de un mismo punto puede ocasionar que $\mathcal{G}$ tenga simetrías no discriminables por medio de los criterios* **(4)**, **(5)** *y* **(6)**, *pues éstos son condiciones suficientes para la simetría correspondiente, pero no necesarias; por la misma razón anterior, los intervalos a los que se podrían restringir los valores de θ, como consecuencia de las simetrías, pueden contener más valores que los estrictamente necesarios para completar el trazado de $\mathcal{G}$.*

(e) *Note que si $\mathcal{G}$ tiene dos de las tres simetrías estudiadas, también tiene la tercera; en consecuencia, si no tiene una de esas tres simetrías, deja de tener alguna de las otras dos.*

(f) *Si obtenemos algún punto de corte de $\mathcal{G}$ con la recta* **n**, *cuyo simétrico respecto al polo no es punto de corte de $\mathcal{G}$ con* **n**, *podemos asegurar que $\mathcal{G}$ no es simétrica respecto a la recta* **p**.

(g) *Si obtenemos algún punto de corte de $\mathcal{G}$ con la recta* **p**, *cuyo simétrico respecto al polo no es punto de corte de $\mathcal{G}$ con* **p**, *podemos asegurar que $\mathcal{G}$ no es simétrica respecto a la recta* **n**.

A continuación ofrecemos algunos ejemplos en los que aplicaremos el procedimiento descrito, y que proveerán de alguna experiencia al lector en la tarea de trazar una figura geométrica representada por una ecuación polar.

➤ EJEMPLO 9.7

Tracemos la figura geométrica $\mathcal{G}$ representada por la ecuación polar $r^2 = 3\cos(2\theta)$.

Consideremos la relación polar $f(r, \theta) = r^2 - 3\cos(2\theta)$.

Planteemos la ecuación $f(0, \theta) = 0$, es decir, $3\cos(2\theta) = 0$. Esta ecuación tiene infinitas soluciones, a saber: $2\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ o, lo que es lo mismo, $\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$. En consecuencia, tomando una cualquiera de esas infinitas soluciones, digamos $\theta = \frac{\pi}{4}$, concluimos que $\mathcal{G}$ contiene al polo.

Planteemos la ecuación $f(r, n\pi) = 0$, es decir, $r^2 = 3\cos(2n\pi)$ $(n \in \mathbb{Z})$. Cualquiera sea el número entero n, la ecuación correspondiente tiene dos soluciones, a saber: $r = -\sqrt{3}$ y $r = \sqrt{3}$. En consecuencia, $\mathcal{G}$ corta a la recta **p** *en los puntos $(\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, \pi)$.*

Planteemos la ecuación $f(r, \frac{(2n+1)\pi}{2}) = 0$, es decir, $r^2 = 3\cos((2n+1)\pi)$ $(n \in \mathbb{Z})$. Cualquiera sea el número entero n, esta ecuación no tiene solución. Sin embargo, por la observación 9.17.(a), $\mathcal{G}$ corta sólo en el polo a la recta **n**.

Por la observación 9.17.(b), $\mathcal{G}$ es simétrica respecto a la recta **p**. *Así, podríamos restringir los valores de θ a los que están entre 0 y π.*

Por la observación 9.17.(c), $\mathcal{G}$ es simétrica respecto al polo. Así, podríamos restringir los valores de θ a los que están entre $-\frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$.

Por la observación 9.17.(e), $\mathcal{G}$ es también simétrica respecto a la recta **n**. *Así, podríamos restringir los valores de θ a los que están entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$.*

Dadas las simetrías de $\mathcal{G}$, podríamos restringir los valores de θ a los que están entre 0 y $\frac{\pi}{2}$.

Ahora, para que r sea un número real debe cumplirse $\cos(2\theta) \geqslant 0$ y, en consecuencia, construiremos una tabla asignándole valores a θ entre 0 y $\frac{\pi}{4}$, con $r > 0$ (ver la figura 9.13). **QEE ◄**

θ	0	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{36}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{36}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{\pi}{4}$
r	≈ 1.73	≈ 1.71	≈ 1.67	≈ 1.61	≈ 1.51	≈ 1.38	≈ 1.22	≈ 1.01	≈ 0.72	0

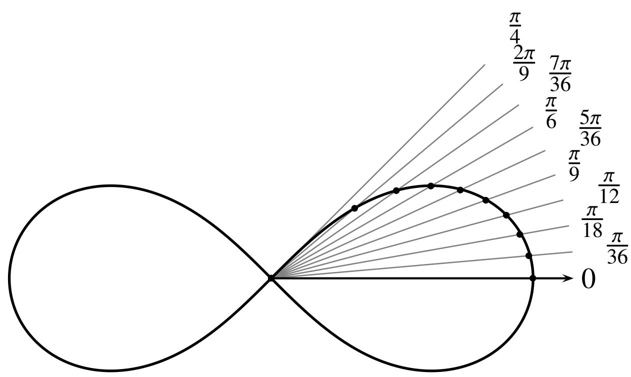


FIGURA 9.13 Tabla y representación gráfica correspondiente al ejemplo 9.7

En general, y tomando en cuenta la observación 9.11, las figuras geométricas representadas por una ecuación polar de la forma

$$r^2 = \pm a\cos(2\theta) \qquad \text{o} \qquad r^2 = \pm a\,\mathrm{sen}(2\theta) \qquad (a > 0),$$

son llamadas ***lemniscatas***⟨13⟩.

➤ EJEMPLO 9.8

Tracemos la figura geométrica $\mathcal{G}$ representada por la ecuación polar $r = 3 + 2\cos\theta$.

Consideremos la relación polar $f(r,\theta) = r - 3 - 2\cos\theta$.

Planteemos la ecuación $f(0,\theta) = 0$, es decir, $3 + 2\cos\theta = 0$. Esta ecuación no tiene soluciones, pues $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$. En consecuencia, $\mathcal{G}$ no contiene al polo.

Planteemos la ecuación $f(r, n\pi) = 0$, es decir, $r = 3 + 2\cos(n\pi)$ ($n \in \mathbb{Z}$). Para cada número entero n par, la ecuación correspondiente tiene como solución $r = 5$, y para cada número entero n impar, la ecuación correspondiente tiene como solución $r = 1$. Así, $\mathcal{G}$ corta a la recta **p** *en los puntos $(5, 0)$ y $(1, \pi)$.*

Planteemos la ecuación $f(r, \frac{(2n+1)\pi}{2}) = 0$, es decir, $r = 3 + 2\cos(\frac{(2n+1)\pi}{2})$ ($n \in \mathbb{Z}$). Cualquiera sea el número entero n, esta ecuación tiene como solución $r = 3$. En consecuencia, $\mathcal{G}$ corta a la recta **n** *en los puntos $(3, \frac{\pi}{2})$ y $(3, \frac{3\pi}{2})$.*

Por la observación 9.17.(b), $\mathcal{G}$ es simétrica respecto a la recta **p**. *Así, podríamos restringir los valores de θ a los que están entre 0 y π.*

Por la observación 9.17.(g), y el hecho de que $\mathcal{G}$ corta a la recta **p** *en el punto $(5, 0)$, y no la corta en su simétrico $(5, \pi)$ respecto al polo, podemos asegurar que $\mathcal{G}$ no es simétrica respecto a la recta* **n**; *además, por la observación 9.17.(e), podemos asegurar que $\mathcal{G}$ no es simétrica respecto al polo.*

Ahora, como r es un número real para cualquier valor de θ, construiremos una tabla asignándole valores a θ entre 0 y π, con $r > 0$ (ver la figura 9.14). QEE ◄

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	5	≈ 4.73	4	3	2	≈ 1.26	1

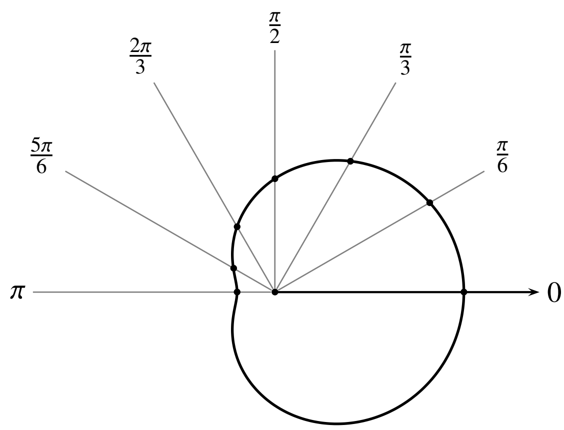


FIGURA 9.14 Tabla y representación gráfica correspondiente al ejemplo 9.8

➤ EJEMPLO 9.9

Tracemos la figura geométrica $\mathcal{G}$ representada por la ecuación polar $r = 3 + 3\cos\theta$.

Consideremos la relación polar $f(r,\theta) = r - 3 - 3\cos\theta$.

Planteemos la ecuación $f(0,\theta) = 0$, es decir, $3 + 3\cos\theta = 0$. Esta ecuación tiene infinitas soluciones, a saber: $\theta = (2k+1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. En consecuencia, tomando una cualquiera de esas infinitas soluciones, digamos $\theta = \pi$, concluimos que $\mathcal{G}$ contiene al polo.

*Planteemos la ecuación $f(r,n\pi) = 0$, es decir, $r = 3 + 3\cos(n\pi)$ ($n \in \mathbb{Z}$). Para cada número entero n par, la ecuación correspondiente tiene como solución $r = 6$, y para cada número entero n impar, la ecuación correspondiente tiene como solución $r = 0$. En consecuencia, $\mathcal{G}$ corta a la recta **p** en los puntos $(6,0)$ y $(0,\pi)$ (que es el polo).*

*Planteemos la ecuación $f(r,\frac{(2n+1)\pi}{2}) = 0$, es decir, $r = 3 + 3\cos(\frac{(2n+1)\pi}{2})$ ($n \in \mathbb{Z}$). Cualquiera sea el número entero n, la ecuación correspondiente tiene como solución $r = 3$. En consecuencia, $\mathcal{G}$ corta a la recta **n** en los puntos $(3,\frac{\pi}{2})$ y $(3,\frac{3\pi}{2})$; además, por la observación 9.17.(a), $\mathcal{G}$ corta en el polo a la recta **n**.*

*Por la observación 9.17.(b), $\mathcal{G}$ es simétrica respecto a la recta **p**. Así, podríamos restringir los valores de θ a los que están entre 0 y π.*

*Por la observación 9.17.(g), y el hecho de que $\mathcal{G}$ corta a la recta **p** en el punto $(6,0)$, y no la corta en su simétrico $(6,\pi)$ respecto al polo, podemos asegurar que $\mathcal{G}$ no es simétrica respecto a la recta **n**; además, por la observación 9.17.(e), podemos asegurar que $\mathcal{G}$ no es simétrica respecto al polo.*

Ahora, como r es un número real para cualquier valor de θ, construiremos una tabla asignándole valores a θ entre 0 y π, con $r > 0$ (ver la figura 9.15). QEE ➤

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	6	≈ 5.59	4.50	3	1.50	≈ 0.40	0

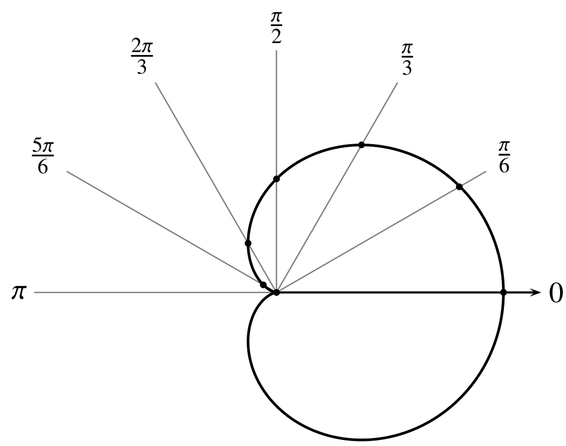


FIGURA 9.15 Tabla y representación gráfica correspondiente al ejemplo 9.9

➤ EJEMPLO 9.10

Tracemos la figura geométrica $\mathcal{G}$ representada por la ecuación polar $r = 2 - 4\cos\theta$.

Consideremos la relación polar $f(r, \theta) = r - 2 + 4\cos\theta$.

Planteemos la ecuación $f(0, \theta) = 0$, es decir, $2 - 4\cos\theta = 0$. Esta ecuación tiene infinitas soluciones, a saber: $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ o $\theta = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. En consecuencia, tomando una cualquiera de esas infinitas soluciones, digamos $\theta = \frac{\pi}{3}$, concluimos que $\mathcal{G}$ contiene al polo.

Planteemos la ecuación $f(r, n\pi) = 0$, es decir, $r = 2 - 4\cos(n\pi)$ ($n \in \mathbb{Z}$). Para cada número entero n par, la ecuación correspondiente tiene como solución $r = -2$, y para cada número entero n impar, la ecuación correspondiente tiene como solución $r = 6$. En consecuencia, $\mathcal{G}$ corta a la recta **p** *en los puntos $(2, \pi)$ y $(6, \pi)$.*

Planteemos la ecuación $f(r, \frac{(2n+1)\pi}{2}) = 0$, es decir, $r = 2 - 4\cos(\frac{(2n+1)\pi}{2})$ ($n \in \mathbb{Z}$). Cualquiera sea el número entero n, la ecuación correspondiente tiene como solución $r = 2$. Así, $\mathcal{G}$ corta a la recta **n** *en los puntos $(2, \frac{\pi}{2})$ y $(2, \frac{3\pi}{2})$; además, por la observación 9.17.(a), $\mathcal{G}$ corta en el polo a la recta* **n**.

Por la observación 9.17.(b), $\mathcal{G}$ es simétrica respecto a la recta **p**. *Así, podríamos restringir los valores de θ a los que están entre 0 y π.*

Por la observación 9.17.(g), y el hecho de que $\mathcal{G}$ corta a la recta **p** *en el punto $(6, \pi)$, y no la corta en su simétrico $(6, 0)$ respecto al polo, podemos asegurar que $\mathcal{G}$ no es simétrica respecto a la recta* **n**; *además, por la observación 9.17.(e), podemos asegurar que $\mathcal{G}$ no es simétrica respecto al polo.*

Ahora, como r es un número real para cualquier valor de θ, construiremos una tabla asignándole valores a θ entre 0 y π (ver la figura 9.16). QEE ◀

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	-2	≈ -1.46	≈ -0.82	0	≈ 0.96	2	4	≈ 5.46	6

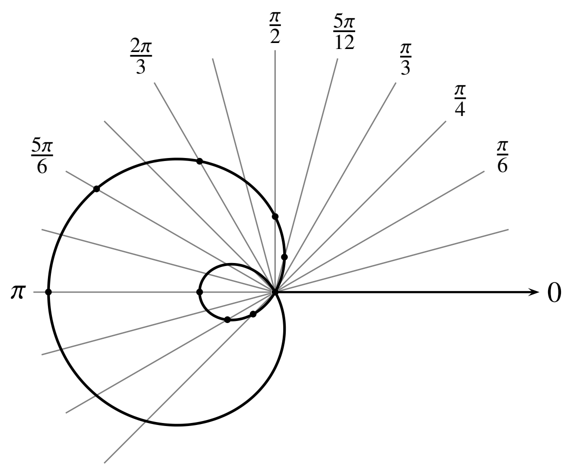


FIGURA 9.16 Tabla y representación gráfica correspondiente al ejemplo 9.10

En general, y tomando en cuenta la observación 9.11, las figuras geométricas representadas por una ecuación polar de la forma

$$r = a \pm b\cos\theta \qquad \text{o} \qquad r = a \pm b\,\text{sen}\,\theta \qquad (a > 0 \text{ y } b > 0),$$

son llamadas ***caracoles***⟨14⟩: si $a > b$, tenemos un ***caracol*** (si $a < 2b$, ***con hendidura***; y si $a \geqslant 2b$, ***convexo***); si $a = b$, una ***cardioide***; y si $a < b$, una ***trisectrix*** o ***caracol con un lazo***.

➤ **EJEMPLO 9.11**

Tracemos la figura geométrica $\mathcal{G}$ representada por la ecuación polar $r = 5\cos(3\theta)$.

Consideremos la relación polar $f(r,\theta) = r - 5\cos(3\theta)$.

Planteemos la ecuación $f(0,\theta) = 0$, es decir, $5\cos(3\theta) = 0$. Esta ecuación tiene infinitas soluciones, a saber: $\theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$ con $k \in \mathbb{Z}$. En consecuencia, tomando una cualquiera de esas infinitas soluciones, digamos $\theta = \frac{\pi}{6}$, concluimos que $\mathcal{G}$ contiene al polo.

Planteemos la ecuación $f(r,n\pi) = 0$, es decir, $r = 5\cos(3n\pi)$ ($n \in \mathbb{Z}$). Para cada número entero n par, la ecuación correspondiente tiene como solución $r = 5$, y para cada número entero n impar, la ecuación correspondiente tiene como solución $r = -5$. En consecuencia, $\mathcal{G}$ corta a la recta $\mathbf{p}$ sólo en el punto $(5,0)$ (pues $(-5,\pi)$ representa el mismo punto).

Planteemos la ecuación $f(r,\frac{(2n+1)\pi}{2}) = 0$, es decir, $r = 5\cos(3\frac{(2n+1)\pi}{2})$ ($n \in \mathbb{Z}$). Cualquiera sea el número entero n, la ecuación correspondiente tiene como solución $r = 0$. En consecuencia, $\mathcal{G}$ corta sólo en el polo a la recta $\mathbf{n}$.

Por la observación 9.17.(b), $\mathcal{G}$ es simétrica respecto a la recta **p**. *Así, podríamos restringir los valores de θ a los que están entre 0 y π.*

Por la observación 9.17.(g), y el hecho de que $\mathcal{G}$ corta a la recta **p** *en el punto $(5,0)$, y no la corta en su simétrico $(5,\pi)$ respecto al polo, podemos asegurar que $\mathcal{G}$ no es simétrica respecto a la recta* **n**; *además, por la observación 9.17.(e), $\mathcal{G}$ no es simétrica respecto al polo.*

Ahora, como r es un número real para cualquier valor de θ, construiremos una tabla asignándole valores a θ entre 0 y π (ver la figura 9.17).

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
r	5	≈ 3.53	0	≈ -3.53	-5	≈ -3.53	0	≈ 3.53	5	≈ 3.53	0	≈ -3.53	-5

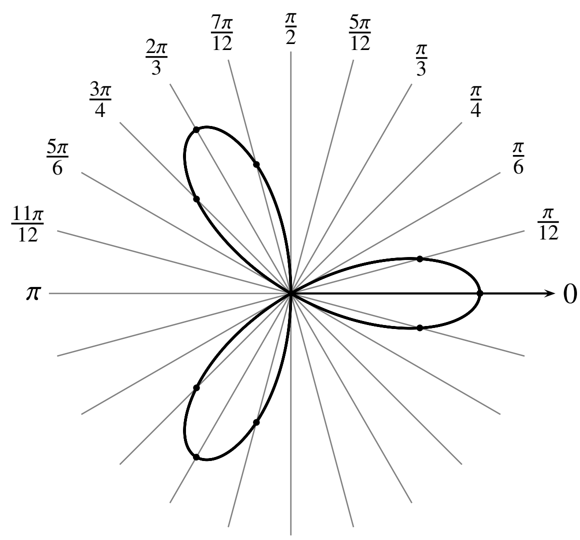


FIGURA 9.17 Tabla y representación gráfica correspondiente al ejemplo 9.11

Ahora es evidente que hubiera bastado asignar valores a θ entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. **QEE** ◄

➤ EJEMPLO 9.12

Tracemos la figura geométrica $\mathcal{G}$ representada por la ecuación polar $r = 5\cos(2\theta)$.

Consideremos la relación polar $f(r,\theta) = r - 5\cos(2\theta)$.

Planteemos la ecuación $f(0,\theta) = 0$, es decir, $5\cos(2\theta) = 0$. Esta ecuación tiene infinitas soluciones, a saber: $\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$. En consecuencia, tomando una cualquiera de esas infinitas soluciones, digamos $\theta = \frac{\pi}{4}$, concluimos que $\mathcal{G}$ contiene al polo.

Planteemos la ecuación $f(r,n\pi) = 0$, es decir, $r = 5\cos(2n\pi)$ ($n \in \mathbb{Z}$). Cualquiera sea el número entero n, la ecuación correspondiente tiene como solución $r = 5$. En consecuencia, $\mathcal{G}$ corta a la recta **p** *en los puntos $(5,0)$ y $(5,\pi)$.*

Planteemos la ecuación $f(r, \frac{(2n+1)\pi}{2}) = 0$, *es decir,* $r = 5\cos((2n+1)\pi)$ $(n \in \mathbb{Z})$. *Cualquiera sea el número entero n, la ecuación correspondiente tiene como solución* $r = -5$. *En consecuencia,* $\mathcal{G}$ *corta a la recta* **n** *en los puntos* $(5, \frac{\pi}{2})$ *y* $(5, \frac{3\pi}{2})$.

Por la observación 9.17.(b), $\mathcal{G}$ *es simétrica respecto a la recta* **p**. *Así, podríamos restringir los valores de* θ *a los que están entre* 0 *y* π.

Planteemos la ecuación $f(r, \pi - \theta) = 0$, *es decir,* $r = 5\cos(2\pi - 2\theta)$. *Como* $\cos(2\pi - 2\theta) = \cos(2\theta)$, *tenemos que esta ecuación es equivalente a la original. En consecuencia,* $\mathcal{G}$ *es simétrica respecto a la recta* **n**. *Así, podríamos restringir los valores de* θ *a los que están entre* $-\frac{\pi}{2}$ *y* $\frac{\pi}{2}$.

Por la observación 9.17.(e), $\mathcal{G}$ *es también simétrica respecto al polo. Así, podríamos restringir los valores de* θ *a los que están entre* $-\frac{\pi}{4}$ *y* $\frac{3\pi}{4}$.

Dadas las simetrías de $\mathcal{G}$, *podríamos restringir los valores de* θ *a los que están entre* 0 *y* $\frac{\pi}{2}$.

Ahora, como r es un número real para cualquier valor de θ, *construiremos una tabla asignándole valores a* θ *entre* 0 *y* $\frac{\pi}{2}$ *(ver la figura 9.18).* **QEE** ➤

θ	0	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{24}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{24}$
r	5	≈ 4.8	≈ 4.3	≈ 3.5	2.5	≈ 1.3	0	≈ -1.3

θ	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{24}$	$\frac{\pi}{2}$
r	-2.5	≈ -3.5	≈ -4.3	≈ -4.8	-5

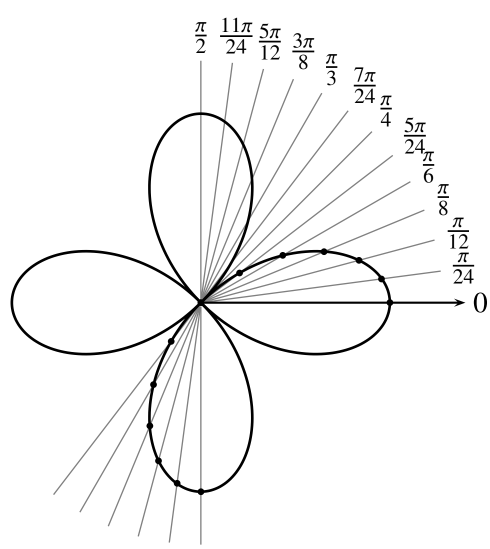


FIGURA 9.18 Tabla y representación gráfica correspondiente al ejemplo 9.12

En general, y tomando en cuenta la observación 9.11, las figuras geométricas representadas por una ecuación polar de la forma

$$r = \pm a\cos(k\theta) \qquad \text{o} \qquad r = \pm a\,\mathrm{sen}(k\theta) \qquad (a > 0 \text{ y } k > 1 \in \mathbb{N}),$$

son llamadas ***rosas***; si k es impar, tiene k pétalos; si k es par, tiene $2k$ pétalos.

➤ Ejemplo 9.13

Tracemos la figura geométrica $\mathcal{G}$ representada por la ecuación polar $r = e^{\frac{\theta}{100\pi}}$.

Consideremos la relación polar $f(r,\theta) = r - e^{\frac{\theta}{100\pi}}$.

Planteemos la ecuación $f(0,\theta) = 0$, es decir, $e^{\frac{\theta}{100\pi}} = 0$. Esta ecuación no tiene soluciones, pues $e \neq 0$. En consecuencia, $\mathcal{G}$ no contiene al polo.

Planteemos la ecuación $f(r,n\pi) = 0$, es decir, $r = e^{\frac{n}{100}}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Cualquiera sea el número entero n, la ecuación correspondiente tiene como solución $r = e^{\frac{n}{100}}$. En consecuencia, $\mathcal{G}$ corta a la recta **p** *en los puntos $(e^{\frac{k}{100}}, 0)$ para k entero par, y $(e^{\frac{k}{100}}, \pi)$ para k entero impar.*

Planteemos la ecuación $f(r, \frac{(2n+1)\pi}{2}) = 0$, es decir, $r = e^{\frac{2n+1}{200}}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Cualquiera sea el número entero n, la ecuación correspondiente tiene como solución $r = e^{\frac{2n+1}{200}}$. En consecuencia, $\mathcal{G}$ corta a la recta **n** *en los puntos $(e^{\frac{2k+1}{200}}, \frac{\pi}{2})$ para k entero par, y $(e^{\frac{2k+1}{200}}, \frac{3\pi}{2})$ para k entero impar.*

Por la observación 9.17.(f), y el hecho de que $\mathcal{G}$ corta a la recta **n** *en el punto $(e^{\frac{1}{200}}, \frac{\pi}{2})$, y no la corta en su simétrico $(e^{\frac{1}{200}}, \frac{3\pi}{2})$ respecto al polo, $\mathcal{G}$ no es simétrica respecto a la recta* **p**.

Por la observación 9.17.(g), y el hecho de que $\mathcal{G}$ corta a la recta **p** *en el punto $(1,0)$, y no la corta en su simétrico $(1,\pi)$ respecto al polo, $\mathcal{G}$ no es simétrica respecto a la recta* **n**.

Cualquiera de los dos argumentos anteriores permite asegurar que $\mathcal{G}$ no es simétrica respecto al polo.

Ahora, como r es un número real para cualquier valor de θ, construiremos una tabla asignándole valores a θ entre $-\pi$ y 2π. (ver la figura 9.19). **QEE ◄**

La figura geométrica que acabamos de trazar es un caso particular de las representadas por una ecuación polar de la forma

$$r = ae^{b\theta} \qquad (a \neq 0 \text{ y } b \neq 0), \qquad (\textbf{\textit{espiral exponencial}} \text{ o } \textbf{\textit{logarítmica}}).$$

Otras espirales que aparecen frecuentemente son las siguientes.

$$\begin{array}{lll} r = a\theta & (a \neq 0) & (\textbf{\textit{espiral arquimediana}}) \\ r^2 = a^2\theta & (a \neq 0) & (\textbf{\textit{espiral parabólica}}) \\ r = \dfrac{a}{\theta} & (a \neq 0) & (\textbf{\textit{espiral hiperbólica}}). \end{array}$$

θ	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
r	≈ 0.4	≈ 0.5	≈ 0.6	≈ 0.8	1	≈ 1.3	≈ 1.6	≈ 2.1

θ	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
r	≈ 2.7	≈ 3.5	≈ 4.5	≈ 5.8	≈ 7.4

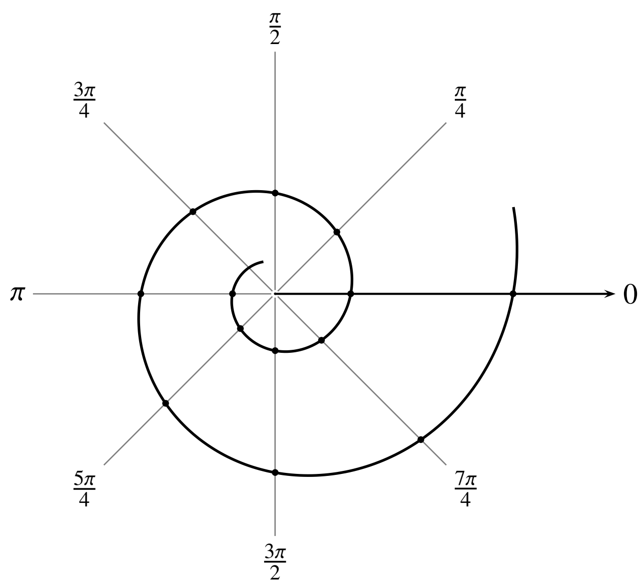


FIGURA 9.19 Tabla y representación gráfica correspondiente al ejemplo 9.13

§ 9.5 Incidencia en coordenadas polares

Describiendo las figuras geométricas por sus ecuaciones cartesianas, el estudio de la ***incidencia*** entre las figuras geométricas $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ de ecuaciones cartesianas $f_1(x, y) = 0$ y $f_2(x, y) = 0$, respectivamente (entendiendo por incidencia la consideración de los siguientes dos asuntos: si se intersectan o no dos figuras geométricas; y, en caso de que lo hagan, cuál es su intersección), equivale a la consideración de la existencia de pares ordenados (x, y) de números reales que satisfagan, simultáneamente, las siguientes dos condiciones

$$f_1(x, y) = 0 \quad \text{y} \quad f_2(x, y) = 0$$

o, lo que es lo mismo, a la consideración de la ***existencia de soluciones*** del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

(entendiendo por solución de este sistema, un par (x, y) para el que las igualdades que lo conforman son satisfechas).

Hacemos mención expresa de dos situaciones que se presentan en el estudio de las ecuaciones polares, y que no se presentan en el de las ecuaciones cartesianas.

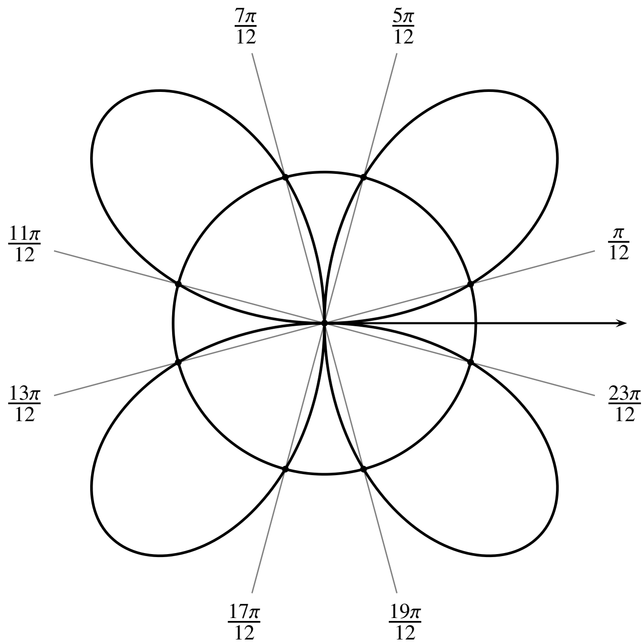


FIGURA 9.20 Puntos de corte entre una rosa y un círculo

Consideremos las figuras geométricas $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ representadas, respectivamente, por las ecuaciones $r = 4\operatorname{sen}(2\theta)$ (una rosa de cuatro pétalos) y $r = 2$ (un círculo de centro en el polo y radio 2), y el sistema de ecuaciones polares

$$\left\{ \begin{array}{l} r = 4\operatorname{sen}(2\theta) \\ r = 2 \end{array} \right. . \tag{9.11}$$

Al sustituir el lado derecho de la segunda ecuación en el lado izquierdo de la primera, obtenemos la ecuación $2 = 4\operatorname{sen}(2\theta)$ o, equivalentemente, $\operatorname{sen}(2\theta) = \frac{1}{2}$, es decir, $\theta = \frac{\pi}{12} + k\pi$ o $\theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Así, de acuerdo con el sistema (9.11), $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ se intersectarían sólo en cuatro puntos distintos de coordenadas polares: $(2, \frac{\pi}{12})$, $(2, \frac{5\pi}{12})$, $(2, \frac{13\pi}{12})$ y $(2, \frac{17\pi}{12})$.

Sin embargo, tal como puede observarse en la figura 9.20, son ocho los puntos de corte entre $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$: ¿cómo obtenemos los otros cuatro puntos que no son solución del sistema planteado? Tenemos, de hecho, que $\mathcal{G}_2$ puede representarse también por la ecuación $r = -2$. Planteando el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} r = 4\operatorname{sen}(2\theta) \\ r = -2 \end{array} \right. \tag{9.12}$$

y haciendo la misma sustitución anterior, obtenemos que $\theta = \frac{7\pi}{12} + k\pi$ o $\theta = \frac{11\pi}{12} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$); con lo que, de acuerdo con el sistema (9.12), $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ se intersectarían sólo en cuatro puntos distintos de coordenadas polares: $(2, \frac{7\pi}{12})$, $(2, \frac{11\pi}{12})$, $(2, \frac{19\pi}{12})$ y $(2, \frac{23\pi}{12})$.

Sólo considerando el conjunto de todas las soluciones de los sistemas (9.11) y (9.12), obtenemos realmente todos los puntos de corte entre $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$.

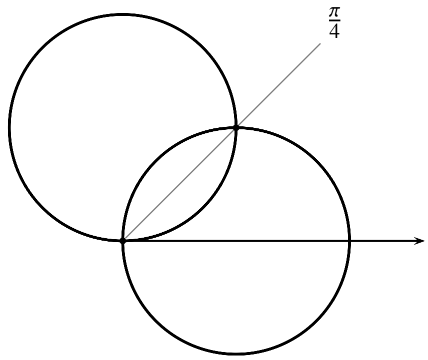


FIGURA 9.21 Puntos de corte entre dos círculos que pasan por el polo

Por otro lado, consideremos las figuras geométricas $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ representadas, respectivamente, por las ecuaciones $r = \cos\theta$ (un círculo que pasa por el polo y tiene el centro sobre el eje polar) y $r = \operatorname{sen}\theta$ (un círculo que pasa por el polo y tiene el centro sobre la recta **n**), y el sistema de ecuaciones polares

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \cos\theta \\ r = \operatorname{sen}\theta \end{array} \right. . \tag{9.13}$$

Al sustituir el lado derecho de la segunda ecuación en el lado izquierdo de la primera, obtenemos la ecuación $\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$, es decir, $\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Así, de acuerdo con el sistema (9.13), $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ se intersectarían sólo en el punto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$.

Sin embargo, tal como puede observarse en la figura 9.21, son dos los puntos de corte entre $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$: ¿cómo obtenemos el otro punto que no es solución del sistema (9.13)?

Intentando aplicar el mismo procedimiento del caso que acabamos de estudiar, no obtenemos nuevos puntos de corte entre $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$, pues no tenemos ecuaciones que representen a esas figuras geométricas distintas de las ya ofrecidas.

Ahora, como al calcular $r = 0$ en cada una de las ecuaciones del sistema (9.13) se tiene como solución $\theta = k\pi$ y $\theta = k\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$), respectivamente, tenemos que el polo está en $\mathcal{G}_1$ y en $\mathcal{G}_2$ y, en consecuencia, está en su intersección.

Por esta razón debemos replantear la noción de *incidencia entre dos figuras geométricas en coordenadas polares*. Ofreceremos, en esta oportunidad, el siguiente procedimiento general para encontrar todos los puntos de intersección entre dos figuras geométricas $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ representadas por las ecuaciones polares $f_1(r,\theta) = 0$ y $f_2(r,\theta) = 0$, respectivamente.

(1) *Determinar si el polo está en $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$.*
Planteamos las ecuaciones $f_1(0,\theta) = 0$ y $f_2(0,\theta) = 0$: el polo estará en la intersección de $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$, si cada una de esas ecuaciones tiene al menos una solución en θ (no necesariamente la misma).

(2) *Determinar las intersecciones ordinarias de $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$.*
Planteamos el sistema de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{l} f_1(r,\theta) = 0 \\ f_2(r,\theta) = 0 \end{array} \right.$: $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ se intersectarán en todos los puntos (r_k, θ_k) distintos que son solución de dicho sistema.

(3) *Determinar las intersecciones extraordinarias de $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$.*
Sólo si se tiene la sospecha de que aún quedan algunos puntos de intersección por determinar (por haber observado las representaciones gráficas de $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$, por ejemplo), planteamos el sistema de ecuaciones que se obtiene al reemplazar alguna de las dos ecuaciones del sistema $\begin{cases} f_1(r,\theta) = 0 \\ f_1(r,\theta) = 0 \end{cases}$ por una ecuación equivalente, y procedemos como en el paso anterior.

Los elementos del conjunto formado por las soluciones obtenidas en los pasos **(1)**, **(2)** y **(3)** del procedimiento descrito serán todos los puntos de corte entre las figuras geométricas $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$.

A continuación ofrecemos algunos ejemplos en los que aplicaremos el procedimiento descrito, y que proveerán de alguna experiencia al lector en la tarea de encontrar los puntos de corte entre dos figuras geométricas representadas por sendas ecuaciones polares.

➤ EJEMPLO 9.14

Calculemos los puntos de corte entre las figuras geométricas representadas por las ecuaciones polares $r = 2\cos(\frac{\theta}{2})$ y $r = 1$.

Como $r \neq 0$ para todos los pares que satisfacen la segunda ecuación, tendremos que el polo no está en la figura geométrica representada por dicha ecuación y, en consecuencia, las figuras geométricas en cuestión no se cortan en el polo.

Planteemos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} r = 2\cos(\frac{\theta}{2}) \\ r = 1 \end{cases}$, es decir, la ecuación $2\cos(\frac{\theta}{2}) = 1$ o, equivalentemente, $\cos(\frac{\theta}{2}) = \frac{1}{2}$. Esta ecuación tiene infinitas soluciones, a saber: $\theta = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi$ o $\theta = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Así, las intersecciones ordinarias de las figuras geométricas que estamos estudiando son $(1, \frac{2\pi}{3})$ y $(1, \frac{4\pi}{3})$.

Pero, al observar la representación gráfica de esas figuras geométricas en la figura 9.22, tenemos que ellas se cortan en cuatro puntos.

Planteemos entonces el sistema de ecuaciones $\begin{cases} r = 2\cos(\frac{\theta}{2}) \\ r = -1 \end{cases}$, es decir, la ecuación $2\cos(\frac{\theta}{2}) = -1$ o, equivalentemente, $\cos(\frac{\theta}{2}) = -\frac{1}{2}$. Esta ecuación tiene infinitas soluciones, a saber: $\theta = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi$ o $\theta = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Así, las intersecciones extraordinarias de las figuras geométricas que estamos estudiando son $(-1, \frac{2\pi}{3})$ y $(-1, \frac{4\pi}{3})$ o, lo que es lo mismo, $(1, \frac{\pi}{3})$ y $(1, \frac{5\pi}{3})$

(dicho sea de paso, estos últimos dos puntos se obtienen también como soluciones del sistema $\begin{cases} r = 2\,\mathrm{sen}(\frac{\theta}{2}) \\ r = 1 \end{cases}$, al sustituir la ecuación $r = 2\cos(\frac{\theta}{2})$ por $-r = 2\cos(\frac{(\theta+\pi)}{2})$).

Por tanto, los puntos corte buscados son $(1, \frac{\pi}{3})$, $(1, \frac{2\pi}{3})$, $(1, \frac{4\pi}{3})$ y $(1, \frac{5\pi}{3})$.

QEE ➤

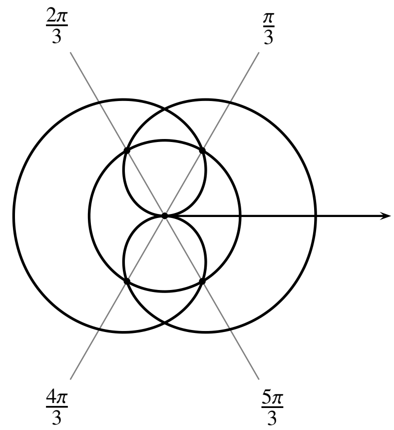


FIGURA 9.22 Representación gráfica correspondiente al ejemplo 9.14

➤ EJEMPLO 9.15

Calculemos los puntos de corte entre la espiral arquimediana $r = \theta$ y la recta $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Consideremos las relaciones polares $f_1(r,\theta) = r - \theta$ y $f_2(r,\theta) = \theta - \frac{\pi}{4}$.

Como $f_1(0,\theta) = 0$ tiene como solución $\theta = 0$, y $f_2(0,\theta) = 0$ tiene infinitas soluciones, en particular $\theta = \frac{\pi}{4}$, tenemos que las figuras geométricas en cuestión se cortan en el polo.

Como el sistema $\begin{cases} r = \theta \\ \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ equivale a $r = \frac{\pi}{4}$, la única intersección ordinaria es $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

La representación gráfica de dichas figuras (figura 9.23) muestra que se cortan en infinitos puntos.

Como todas las soluciones de los sistemas $\begin{cases} r = \theta \\ \theta + 2n\pi = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ y $\begin{cases} r = \theta \\ \theta + (2n+1)\pi = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ $(n \in \mathbb{Z})$ se obtienen como soluciones del sistema $\begin{cases} r = \theta \\ \theta - k\pi = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$, resolvamos entonces este último sistema de ecuaciones polares, es decir, la ecuación $r = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Así, las intersecciones extraordinarias de las figuras geométricas que estamos estudiando son los infinitos puntos $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Además, en la figura 9.23 (la línea pespuntada corresponde a los valores negativos de θ), observamos que $(0,0)$ y $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$ son todos los puntos de corte buscados. QEE ➤

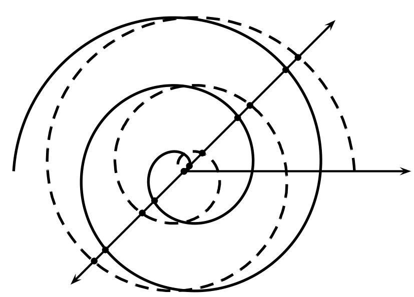


FIGURA 9.23 Representación gráfica correspondiente al ejemplo 9.15

Problemas

9.1 Encuentre las coordenadas polares principales de los puntos que tienen las siguientes coordenadas polares, y represéntelos gráficamente.

(a) $(3, \frac{\pi}{4})$
(b) $(0, \frac{2\pi}{3})$
(c) $(2, \frac{-\pi}{6})$
(d) $(-3, \frac{\pi}{3})$
(e) $(-2, -\frac{3\pi}{2})$
(f) $(2, \frac{\pi}{2})$
(g) $(\sqrt{5}, 0)$
(h) $(\sqrt{3}, \frac{-\pi}{9})$
(i) $(-\sqrt{2}, 0)$
(j) (π, π)
(k) $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
(l) $(2, 2)$
(m) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
(n) $(1, \frac{5\pi}{4})$
(ñ) $(2, 3\pi)$
(o) $(2, \frac{-2\pi}{3})$
(p) $(-3, -\frac{3\pi}{4})$

9.2 Si un cuadrado de lado $2a$ tiene su centro en el polo y dos de sus lados son paralelos al eje polar, encuentre el par de coordenadas polares principales de cada uno de sus cuatro vértices.

9.3 Si dos de los vértices de un triángulo equilátero son $(0, \frac{\pi}{3})$ y $(1, \pi)$, encuentre el par de coordenadas polares principales del tercer vértice.

9.4 Un hexágono regular tiene su centro en el polo y dos lados paralelos al eje polar. Si la longitud de un lado es igual a dos unidades, encuentre el par de coordenadas polares principales de cada uno de sus seis vértices.

9.5 Para cada uno de los puntos del ejercicio 9.1, encuentre:

(a) otros cuatro pares de coordenadas polares, dos con radio positivo y dos con radio negativo.

(b) sus coordenadas cartesianas.

9.6 Encuentre las coordenadas polares principales de los puntos que tienen las siguientes coordenadas cartesianas.

(a) $(-2\sqrt{3}, -2)$
(b) $(1, \sqrt{3})$
(c) $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
(d) $(0, 0)$
(e) $(0, -4)$
(f) $(5, -12)$
(g) $(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
(h) $(\frac{-7\sqrt{3}}{2}, \frac{7}{2})$
(i) $(1, -1)$
(j) $(-1, 1)$
(k) $(2\sqrt{3}, -2)$
(l) $(-1, -\sqrt{3})$
(m) $(3, 4)$

9.7 Represente gráficamente, respecto a un sistema de coordenadas polares, la figura geométrica representada por:

(a) $r > 1$
(b) $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}$
(c) $0 \leqslant r \leqslant 2$ y $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi$
(d) $1 \leqslant r < 3$ y $\frac{-\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$
(e) $3 < r < 4$ y $\frac{-\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi$
(f) $-1 \leqslant r \leqslant 1$ y $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$

9.8 Verifique si los puntos representados por las coordenadas polares dadas están en la figura geométrica representada por la ecuación correspondiente.

(a) $r^2 = \operatorname{sen}\theta$; $(1, \frac{3\pi}{2})$, $(-1, \pi)$.

(b) $r^2 = \cos\theta$; $(1, \pi)$, $(-1, \pi)$, $(1, \frac{\pi}{2})$.

(c) $r = \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})$; $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\pi}{2})$, $(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\pi}{2})$.

(d) $r = \frac{\theta}{\pi}$; $(\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{2})$

9.9 Para cada una de las ecuaciones cartesianas siguientes, encuentre una ecuación polar que represente la figura geométrica correspondiente.

(a) $x - 4y + 2 = 0$

(b) $x = 0$

(c) $y = -5$

(d) $x + y = 0$

(e) $x^2 + y^2 = 16$

(f) $y^2 = 4px$

(g) $y = x + 1$

(h) $x^2 + y^2 = 25$

(i) $x^2 - y^2 = 1$

9.10 Para cada una de las ecuaciones polares siguientes, encuentre una ecuación cartesiana que represente la figura geométrica correspondiente.

(a) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

(b) $r = 2$

(c) $r\cos\theta + 6 = 0$

(d) $r - 6\cos\theta = 0$

(e) $r\operatorname{sen}\theta - 4 = 0$

(f) $r = \csc\theta$

(g) $r^2 - 6r(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) + 9 = 0$

(h) $r^2\cos(2\theta) = 9$

(i) $r^2 - 8r\cos\theta - 4r\operatorname{sen}\theta + 11 = 0$

9.11 Encuentre la distancia entre cada uno de los pares de puntos cuyas coordenadas polares son:

(a) $(2, \pi)$ y $(1, 3 - \pi)$.

(b) $(3, 2\pi)$ y $(-1, 0)$.

(c) $(5, 3\frac{\pi}{2})$ y $(-1, \pi)$.

(d) $(2, \pi)$ y $(1, 3 - \pi)$.

(e) $(3, 2\pi)$ y $(-1, 2\pi)$.

(f) $(5, 2)$ y $(-1, \frac{\pi}{3})$.

9.12 **(Punto que divide un segmento en una razón en coordenadas polares)**
Consideremos dos puntos distintos P_1 y P_2 de coordenadas polares (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2), respectivamente. Para calcular el punto que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón $\frac{a}{b}$, podríamos encontrar sus coordenadas cartesianas y luego aplicar la fórmula para calcular ese punto en términos de dichas coordenadas.

Verifique que, para calcularlo en términos de sus coordenadas polares, podemos aplicar la fórmula

$$\left(\frac{\sqrt{b^2r_1^2 + a^2r_2^2 + 2abr_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}}{a+b}, \arctan\left(\frac{br_1\operatorname{sen}\theta_1 + ar_2\operatorname{sen}\theta_2}{br_1\cos\theta_1 + ar_2\cos\theta_2}\right)\right).$$

9.13 **(Punto medio de un segmento en coordenadas polares)**
Consideremos dos puntos distintos P_1 y P_2 de coordenadas polares (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2), respectivamente. Para calcular el punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$, podríamos encontrar sus coordenadas cartesianas y luego aplicar la fórmula para calcular ese punto en términos de dichas coordenadas.

Verifique que, para calcularlo en términos de sus coordenadas polares, podemos aplicar la fórmula

$$\left(\frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}}{2}, \arctan\left(\frac{r_1\operatorname{sen}\theta_1 + r_2\operatorname{sen}\theta_2}{r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2}\right)\right).$$

9.14 Encuentre el punto medio del segmento determinado por cada uno de los pares de puntos del ejercicio 9.11.

9.15 **(Punto simétrico de un punto respecto al polo en coordenadas polares)**
Si (r, θ) es un par de coordenadas polares de un punto P del plano, verifique que el punto P', simétrico de P respecto al polo, tiene coordenadas polares $(r, \theta + \pi)$ y, también, $(-r, \theta)$.

9.16 Encuentre el punto simétrico de cada uno de los puntos del ejercicio 9.1.

9.17 Verifique si son colineales cada una de las ternas de puntos siguientes.

(a) $(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{2})$, $(2\sqrt{2}, 0)$ y $(\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{5\pi}{12})$.

(b) $(10, \frac{\pi}{6})$, $(\frac{10\sqrt{3}}{3}, \frac{\pi}{3})$ y $(-5, -\frac{\pi}{2})$.

(c) $(2, \frac{\pi}{2})$, $(5\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ y $(-10, -\frac{\pi}{6})$.

(d) $(0, \frac{\pi}{5})$, $(\frac{\sqrt{e}}{\pi}, \frac{6\pi}{5})$ y $(-\frac{19\pi}{5}, -\frac{19\pi}{5})$.

9.18 Encuentre el ángulo por el que hay que rotar el sistema de coordenadas polares para que las ecuaciones polares dadas se transformen en la ecuación polar requerida.

(a) $r = 4 - 2\cos\theta$, $r = 4 + 2\operatorname{sen}\theta$ y $r = 4 - 2\operatorname{sen}\theta$ se transformen en $r = 4 + 2\cos\theta$

(b) $r^2 = -4\cos(2\theta)$, $r^2 = 4sen(2\theta)$ y $r^2 = -4\operatorname{sen}(2\theta)$ se transformen en $r^2 = 4\cos(2\theta)$.

(c) $r = -\cos(3\theta)$, $r = \operatorname{sen}(3\theta)$ y $r = -\operatorname{sen}(3\theta)$ se transformen en $r = \cos(3\theta)$.

(d) $r = -\cos(6\theta)$, $r = \operatorname{sen}(6\theta)$ y $r = -\operatorname{sen}(6\theta)$ se transformen en $r = \cos(6\theta)$.

9.19 **(Ecuación punto-punto de una recta)**
Verifique que la recta l determinada por los puntos distintos P_0 y P_1 de coordenadas polares (r_0, θ_0) y (r_1, θ_1), respectivamente, se puede representar por la ecuación

$$r(r_0\operatorname{sen}(\theta - \theta_0) - r_1\operatorname{sen}(\theta - \theta_1)) = r_1 r_0\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_0)$$

llamada ***ecuación punto-punto*** de la recta l.

9.20 **(Ecuación punto-corte de una recta)**
Verifique que la recta l que pasa por el punto P_0 de coordenadas polares (r_0, θ_0) y corta a la recta **p** en un punto de coordenadas $(\rho, 0)$ se puede representar por la ecuación

$$r = \frac{\rho r_0\operatorname{sen}\theta_0}{\rho\operatorname{sen}\theta - r_0\operatorname{sen}(\theta - \theta_0)}$$

llamada ***ecuación punto-corte*** de la recta l.

9.21 **(Ecuación punto-inclinación de una recta)**
Verifique que la recta l que pasa por el punto P_0 de coordenadas polares (r_0, θ_0) y tiene inclinación α se puede representar por la ecuación

$$r\operatorname{sen}(\theta - \alpha) = r_0\operatorname{sen}(\theta_0 - \alpha)$$

llamada ***ecuación punto-inclinación*** de la recta l.

9.22 **(Ecuación corte-inclinación de una recta)**
Verifique que la recta l que corta a la recta **p** en un punto de coordenadas polares $(\rho, 0)$ y tiene inclinación α se puede representar por la ecuación

$$r = \frac{|\rho| \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha - \theta)}$$

llamada ***ecuación corte-inclinación*** de la recta l.

9.23 Verifique que la recta l que pasa por el punto P_0 de coordenadas polares (r_0, θ_0) y es *perpendicular a la recta* **n** se puede representar por la ecuación

$$r = \frac{r_0 \operatorname{sen} \theta_0}{\operatorname{sen} \theta}.$$

9.24 Verifique que la recta l que pasa por el punto P_0 de coordenadas polares (r_0, θ_0) y es *perpendicular a la recta* **p** se puede representar por la ecuación

$$r = \frac{r_0 \cos \theta_0}{\cos \theta}.$$

9.25 Encuentre una ecuación de la recta que verifica las respectivas condiciones.

- **(a)** pasa por los puntos $(\frac{10\sqrt{3}}{3}, \frac{\pi}{3})$ y $(-5, -\frac{\pi}{2})$.
- **(b)** pasa por el polo y el punto $(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{3})$.
- **(c)** pasa por el punto $(-\sqrt{2}, \frac{\pi}{2})$ y tiene inclinación $\frac{3\pi}{4}$.
- **(d)** es paralela al eje polar por el punto $(7, \frac{\pi}{3})$.
- **(e)** es perpendicular al eje polar por el punto $(7, \frac{\pi}{3})$.
- **(f)** dista 2 del polo y es perpendicular a la recta $\operatorname{sen}(\theta - \frac{7\pi}{6}) = 0$.

9.26 Verifique que el área de un triángulo cuyos vértices son el polo, y los puntos (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2), está dada por $\frac{1}{2}|r_1 r_2 sen(\theta_2 - \theta_1)|$.

9.27 Encuentre una ecuación polar del círculo que verifica las respectivas condiciones.

- **(a)** centro $(2, \pi)$ y radio 5.
- **(b)** centro $(0, \frac{\pi}{2})$ y radio 2.
- **(c)** pasa por el polo y tiene radio 3.
- **(d)** pasa por el polo y tiene centro $(4, \frac{\pi}{6})$.
- **(e)** centro $(2, \pi)$ y contiene a $(4, \frac{\pi}{6})$.
- **(f)** pasa por el polo, corta al eje polar en $(2, 0)$ y corta a la recta **n** en $(4, \frac{\pi}{2})$.

9.28 Encuentre una ecuación polar de la cónica que tiene foco en el polo y las correspondientes excentricidad y directriz.

(a) $e = 2$ y $r\cos\theta = -5$.

(b) $e = 1$ y $l: \ r\cos\theta = -4$.

(c) $e = \frac{1}{2}$ y $l: \ r\cos\theta = 2$.

(d) $e = \frac{1}{2}$ y $l: \ r\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = 1$.

(e) $e = 1$ y $l: \ r\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}$.

(f) $e = 2$ y $l: \ r\cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = 3$.

9.29 Realice el trazado de las figuras geométricas representadas por las siguientes ecuaciones polares.

(a) Rectas, círculos y cónicas.

(1) $r = \dfrac{3}{\cos(\theta - \frac{\pi}{4})}$

(2) $r = \dfrac{2}{\cos\theta}$

(3) $r = \dfrac{4}{\operatorname{sen}\theta}$

(4) $\theta = \dfrac{-\pi}{3}$

(5) $r = \dfrac{-3}{\cos(\theta - \frac{\pi}{4})}$

(6) $r = \dfrac{-2}{\cos\theta}$

(7) $r = \dfrac{-4}{\operatorname{sen}\theta}$

(8) $r = 3$

(9) $r = 4\cos(\theta - \frac{\pi}{4})$

(10) $r = 6\cos\theta$

(11) $r = 2\operatorname{sen}\theta$

(12) $r = -3$

(13) $r = -4\cos(\theta - \frac{\pi}{4})$

(14) $r = -6\cos\theta$

(15) $r = -2\operatorname{sen}\theta$

(16) $r = \dfrac{3e}{1 + e\cos(\theta - \frac{\pi}{4})}$

(17) $r = \dfrac{2e}{1 + e\cos\theta}$

(18) $r = \dfrac{4e}{1 + e\operatorname{sen}\theta}$

(19) $r = \dfrac{-3e}{1 + e\cos(\theta - \frac{\pi}{4})}$

(20) $r = \dfrac{-2e}{1 + e\cos\theta}$

(21) $r = \dfrac{-4e}{1 + e\operatorname{sen}\theta}$

(22) $r^2\cos(2\theta) = 9$

(b) Lemniscatas, caracoles, rosas y espirales

(1) $r^2 = 4\cos(2\theta)$

(2) $r^2 = 9\operatorname{sen}(2\theta)$

(3) $r^2 = -4\cos(2\theta)$

(4) $r^2 = -9\operatorname{sen}(2\theta)$

(5) $r = 4 + 2\cos\theta$

(6) $r = 4 - 2\cos\theta$

(7) $r = 2 + 4\cos\theta$

(8) $r = 2 - 4\cos\theta$

(9) $r = 2 + 2\cos\theta$

(10) $r = 2 - 2\cos\theta$

(11) $r = 4 + 2\operatorname{sen}\theta$

(12) $r = 4 - 2\operatorname{sen}\theta$

(13) $r = 2 + 4\operatorname{sen}\theta$

(14) $r = 2 - 4\operatorname{sen}\theta$

(15) $r = 2 + 2\operatorname{sen}\theta$

(16) $r = 2 - 2\operatorname{sen}\theta$

(17) $r = 2\cos(5\theta)$

(18) $r = 2\cos(4\theta)$

(19) $r = 2\operatorname{sen}(7\theta)$

(20) $r = 2\operatorname{sen}(2\theta)$

(21) $r = \theta$ con $\theta \geqslant 0$ (arquimediana)

(22) $r = \frac{1}{2}\theta$ con $\theta \geqslant 0$ (arquimediana)

(23) $r = e^{\theta}$ con $\theta \geqslant 0$ (logarítmica)

(24) $r = e^{\frac{\theta}{2}}$ con $\theta \geqslant 0$ (logarítmica)

(25) $r = \dfrac{2}{\theta}$ con $\theta > 0$ (hiperbólica)

(26) $r = \dfrac{-1}{\theta}$ con $\theta > 0$ (hiperbólica)

(c) Misceláneas

(1) $r = \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})$

(2) $r = -2\cos(\frac{\theta}{2})$

(3) $r^2 = \operatorname{sen}\theta$

(4) $r^2 = \cos\theta$

(5) $r^2 \operatorname{sen}(2\theta) = 1$

(6) $r = 1 - 2\operatorname{sen}(5\theta)$

(7) $r = 2 - 3\operatorname{sen}(5\theta)$

(8) $r = 2 - \operatorname{sen}(5\theta)$

(9) $r = 3 - 2\operatorname{sen}(5\theta)$

(10) $r = \cos(\frac{\theta}{4})$

(11) $r = 4 + 2\sec\theta$ (Concoide)

(12) $r = \operatorname{sen}\theta\tan\theta$ (Cisoide de Diocles)

(13) $r^2 = 2\cos\theta$

(14) $r = \sec\theta - 2\cos\theta$ (estrofoide)

(15) $r = \cos(\frac{8\theta}{5})$

(16) $\theta\cos\theta$

9.30 Encuentre los puntos de corte entre las figuras geométricas representadas por los pares de ecuaciones polares dadas.

(1) $2r = 5$; $r = \operatorname{sen}\theta$

(2) $r = \sqrt{3}$; $r = 2\cos\theta$

(3) $r = 4(1 + \operatorname{sen}\theta)$; $r\operatorname{sen}\theta = 3$

(4) $r = 2\operatorname{sen}\theta$; $r\cos\theta = -1$

(5) $r = 2(1 - \operatorname{sen}\theta)$; $r = 2(1 - \cos\theta)$

(6) $r = 1$; $r = \cos(2\theta)$

(7) $r\operatorname{sen}\theta = 1$; $r = 2 - \operatorname{sen}\theta$

(8) $r = 3\cos\theta$; $r = 1 + \cos\theta$

(9) $r = \operatorname{sen}\theta$; $r = \operatorname{sen}(2\theta)$

(10) $r = \operatorname{sen}(2\theta)$; $r = \frac{1}{2}$

(11) $r + \cos\theta = 0$; $4r + 3\sec\theta = 0$

(12) $r^2 = 2\cos\theta$; $r = 1$

(13) $r = \cos(2\theta)$; $r = \operatorname{sen}(2\theta)$

(14) $r^2 = 4\cos(2\theta)$; $r = 2\cos\theta$

(15) $r^2 = 9\cos(2\theta)$; $r = 3\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta$

(16) $r^2 = 4\operatorname{sen}(2\theta)$; $r = 2\sqrt{2}\cos\theta$

(17) $r = \frac{3}{2-\cos\theta}$; $r\cos\theta = 1$

(18) $r = \csc^2(\frac{\theta}{2})$; $3r = 8(1 + \cos\theta)$

(19) $r - 2r\cos\theta = 1$; $r = \operatorname{sen}\theta$

(20) $r^2 = 4\cos(2\theta)$; $r^2 = -4\operatorname{sen}(2\theta)$

(21) $r = \frac{4}{1+2\operatorname{sen}\theta}$; $r = 4\operatorname{sen}\theta$

(22) $r = \frac{4\theta}{\pi}$; $r = 5$

(23) $r\theta = \pi$; $r = \frac{\pi}{6}$

9.31 Encuentre los puntos en los que la figura geométrica representada por la ecuación polar dada se corta a sí misma.

(1) $r = 2\cos(\frac{\theta}{2})$ (2) $r = \operatorname{sen}(\frac{3}{2}\theta)$ (3) $r = 1 + 2\cos(2\theta)$ (4) $r = \theta$

9.32 **(Traslación en coordenadas polares)**
Consideremos un punto T de coordenadas polares (r_0, θ_0) respecto al sistema de coordenadas polares $\mathrm{O}\mathbf{p}$, distinto del polo. Entenderemos por ***traslación*** del sistema de coordenadas polares $\mathrm{O}\mathbf{p}$ ***al punto*** T, un nuevo sistema de coordenadas polares $\breve{\mathrm{O}}\breve{\mathbf{p}}$ con las siguientes características:

(T1) el polo Ŏ es el punto T.

(T2) el eje Ŏ**p̆** es paralelo al eje O**p**.

(T3) el sentido positivo del eje Ŏ**p̆** coincide con el del eje O**p**.

(T4) la escala del eje Ŏ**p̆** es la misma que la del eje O**p**.

Verifique que se cumplen las siguientes relaciones

$$\begin{cases} \breve{r} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0)} \\ \breve{\theta} = \arctan\left(\frac{r\operatorname{sen}\theta - r_0\operatorname{sen}\theta_0}{r\cos\theta - r_0\cos\theta_0}\right) \end{cases}$$

y, en consecuencia, que

$$\begin{cases} r = \sqrt{\breve{r}^2 + r_0^2 + 2\breve{r}r_0\cos(\breve{\theta} - \theta_0)} \\ \theta = \arctan\left(\frac{\breve{r}\operatorname{sen}\breve{\theta} + r_0\operatorname{sen}\theta_0}{\breve{r}\cos\breve{\theta} + r_0\cos\theta_0}\right) \end{cases},$$

llamadas las ***fórmulas de traslación de coordenadas al punto de coordenadas polares*** (r_0, θ_0).

Comentarios

⟨1⟩ Paladín de los físicos modernos, que presentó el conjunto de los conocimientos de la Física a la manera Cartesiana de la Geometría, en su obra *Principia* (Principios), reconocida como el más grande libro científico jamás escrito.

Sir Isaac Newton, quien se entusiasmó por el estudio profundo de las Matemáticas gracias a las lecturas de las exposiciones de la Geometría hechas por Euclides y por Descartes, estudio que realizó tratando de entender la óptica y la astronomía; de esos estudios trajo a la luz sus fundamentos del Cálculo diferencial e integral, para calcular áreas, rectas tangentes, longitudes de arcos de curvas, y máximos y mínimos de funciones. Sus más contundentes aportes pertenecieron al área de la Física, particularmente en sus descubrimientos sobre la naturaleza de la luz y el color, y en mecánica celeste, que culminó en su Teoría de la gravitación.

Sir Isaac Newton
(04/06/1643 Woolsthorpe - 31/03/1727 Londres)

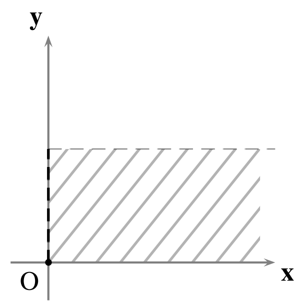
⟨2⟩ Como observará el lector, en esta ocasión estamos abusando de la palabra *eje*, al usarla para denominar un rayo y no una recta.

Para diferenciarlos, algunos autores prefieren llamar a esta figura geométrica un ***semieje***, pero es casi universal llamar a $\overrightarrow{O\mathbf{p}}$ eje polar, y no semieje polar.

⟨3⟩ Note que el conjunto $\mathcal{F}$ coincide con el conjunto

$$((0, +\infty) \times [0, 2\pi)) \cup \{(0, 0)\}.$$

Para reconocerlo mejor, pudiéramos representarlo cartesianamente mediante el siguiente diagrama.



⟨4⟩ La medida en ***grados*** de un ángulo, que corresponde a la división de un círculo en 360 arcos congruentes, es completamente circunstancial; para ser más precisos, su origen está ligado, exclusivamente, a circunstancias de carácter histórico: al hecho de que los antiguos babilonios manejaban un sistema de numeración sexagesimal (de base 60).

Por el contrario, la medida en ***radianes*** de un ángulo, que corresponde a la división de un círculo en 2π (aproximadamente 6.2831854) arcos congruentes, aunque parezca un poco extravagante, es más esencial y de uso casi universal en el *Cálculo*.

La palabra **radián** es una manera abreviada de decir "*unidades radio*", en el que se toma como unidad de medida de longitud para medir un arco de un círculo, el radio mismo del círculo: indica el número de unidades radio contenidos en un arco del círculo.

Precisemos un poco más. Cuando se dice que un círculo tiene radio r, este número (siempre positivo) está expresado en función de una unidad de medida de longitud previamente fijada: indica que la razón entre el radio en cuestión y la unidad de medida es r. Igualmente, cuando se dice que un arco de un círculo mide s, este número (siempre positivo) está expresado en función de una unidad de medida de longitud previamente fijada (por lo general, la misma que se fijó para medir el radio): indica que la razón entre la longitud del arco en cuestión y la unidad de medida es s.

Por otro lado, se sabe que la longitud de un arco de un círculo es proporcional al radio, y se sabe también que la razón de proporcionalidad es la medida del ángulo central que inscribe ese arco. Es natural pedir, entonces, que la medida del ángulo se exprese en una unidad que no dependa de la unidad de medida con la que se midió el radio y el arco, sino que sea intrínseca del círculo, que dependa sólo del arco y del radio.

Para tal fin se propone que se tome como unidad de medida de longitud al radio, y que se mida el arco con dicha unidad, pues esto trae como consecuencia que la razón de proporcionalidad entre ellas, que es la medida del ángulo central que inscribe ese arco, se puede medir sin recurrir a nada más: el número que indica la medida del ángulo coincide con el número que indica la longitud del arco.

En conclusión: **un radián** corresponde a la medida del ángulo central que inscribe un arco de un círculo cuya longitud coincide con la de su radio, es decir, cuando ese arco mide una "*unidad radio*".

Convendremos en que una cierta cantidad de radianes negativa corresponde a un arco cuya longitud es el valor absoluto de esa cantidad, sólo que medido en el sentido horario.

De esta manera tendremos que:

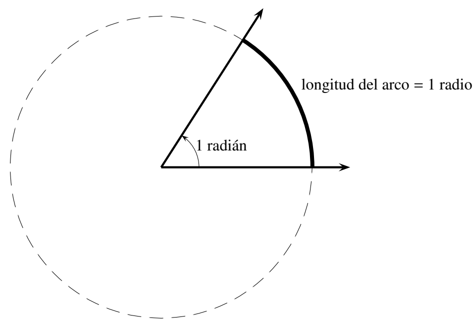
$$\text{longitud de un círculo} = 2\pi \text{ radianes (aproximadamente 6.2831854 radianes)} = 360 \text{ grados;}$$

de donde

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados (aproximadamente 57.2957787 grados)}$$

y

$$1 \text{ grado} = \frac{1}{180}\pi \text{ radianes (aproximadamente 0.0174453 radianes).}$$



Por lo general se expresa la medida de los ángulos en radianes como múltiplos de π; convención que resulta natural, ya que el radián surge de una división del círculo en 2π arcos congruentes y, al multiplicar por π nos quedaríamos con el factor que lo acompaña.

⟨5⟩ En este texto, entendemos por *medida principal* aquella en la que se considera positivo el sentido antihorario, y que es mayor o igual que 0 y menor que 2π.

⟨6⟩ Para garantizar la existencia de este rayo tendríamos que apoyarnos en el Principio E.25 del Apéndice E, realizando los ajustes necesarios para medir los ángulos en radianes y concebirlos como en la Trigonometría.

⟨7⟩ En algunos textos, los números reales r y θ son llamados las ***coordenadas polares elementales***; r es llamado ***radio vector***, o ***intensidad***; y θ es llamado ***ángulo vectorial***, ***argumento***, ***anomalía***, ***acimut*** o ***azimut***.

⟨8⟩ Es decir, el mayor entero menor o igual que el número dado.

⟨9⟩ Como ayuda al lector acucioso recordamos que: la parte entera de la suma de un número real x y un número entero n es igual a la suma de la parte entera de x y n; y, si la diferencia de un número real x menos un número real y es 1, entonces la diferencia de la parte entera de x menos la parte entera de y es 1.

⟨10⟩ Como observará el lector, usaremos este término de manera laxa; al decir "distintas" queremos significar que una de ellas no es un múltiplo de la otra, ni que se obtiene de la otra por operaciones algebraicas o sustituyendo, por ejemplo, $\tan\theta$ por $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$.

⟨11⟩ Hacemos esta aclaratoria porque hemos tenido la ocasión de ver que algunos autores han tenido interés en la representación cartesiana de la ecuación polar de una figura geométrica, denominando adecuadamente los ejes del sistema de coordenadas rectangulares involucrado.

⟨12⟩ Cuando decimos ***suave***, queremos significar que haremos el trazo continuo, pero no poligonal. Técnicamente hablando, este término se refiere a una curva para la cual existe la primera derivada en todos sus puntos, y ésta es continua.

⟨13⟩ Esta palabra es de origen latino, proveniente del adjetivo calificativo femenino *lemniscata*, que deriva a su vez del sustantivo *lemniscus*, y se usaba para identificar una faja o cinta que adornaba las coronas de los vencedores en alguna batalla, o los convidados a ciertos banquetes.

⟨14⟩ Este nombre proviene de la palabra francesa *limaçon*, cuyo origen es la palabra latina *limax*, que se traduce al español como *caracol*, y que fue el nombre que le dio el geómetra francés *Gilles-Personne Roverbal* en 1650 a estas curvas que fueron descubiertas por *Etienne Pascal* al tratar de ejemplificar su método para graficar rectas tangentes a una curva.

Orientación para resolver los problemas del Capítulo 9

A continuación ofrecemos ***ayudas*** para algunos de los problemas.

9.19: Use la observación 9.9 con un punto P de coordenadas polares (r,θ) genérico en l.

9.21: Use el Teorema del seno en las diferentes configuraciones.

APÉNDICE

A

Pruebas de algunas afirmaciones

§ A.1 Correspondientes al Capítulo 1

Probaremos a continuación los tres criterios de colinealidad que hemos ofrecido en el Capítulo 1.

Teorema 2 (Primer criterio de colinealidad)
Tres puntos distintos son colineales si, y sólo si, se cumple una de las siguientes condiciones:

(a) *los tres puntos tienen la misma abscisa.*

(b) *los tres puntos tienen abscisas distintas entre sí y, al ordenar sus abscisas de menor a mayor, la suma de las distancias entre los dos pares de puntos con abscisas consecutivas es igual a la distancia entre los dos puntos de abscisas extremas; en otras palabras, si el ordenamiento de las abscisas de los tres puntos es $x_1 < x_2 < x_3$, y A es el punto de abscisa x_1, B el de abscisa x_2 y C el de abscisa x_3, se tiene que $AB + BC = AC$.*

■ **PRUEBA**
Consideremos tres puntos P, Q y R distintos.
($\Rightarrow$) Supongamos que P, Q y R son colineales.
Si P, Q y R no tienen la misma abscisa, entonces las abscisas de cualesquiera dos de ellos son distintas (si acaso dos de ellos, digamos P y Q, tuvieran la misma abscisa, digamos h, tendríamos, por la observación 1.4.(d), que la única recta que los contiene, digamos l, sería perpendicular al eje $\mathbf{x}$. Así, por la observación 1.3.(a) y el hecho de que R debe estar en l, tendríamos que la abscisa de R es también h, contrario a lo supuesto).
Consideremos el conjunto formado por las abscisas de P, Q y R, y llamemos x_1 al menor de los elementos de dicho conjunto. Consideramos ahora el conjunto formado por las abscisas de P, Q y R distintas de x_1, y llamemos x_2 al menor de los elementos de dicho conjunto. Así, $x_1 < x_2 < x_3$.

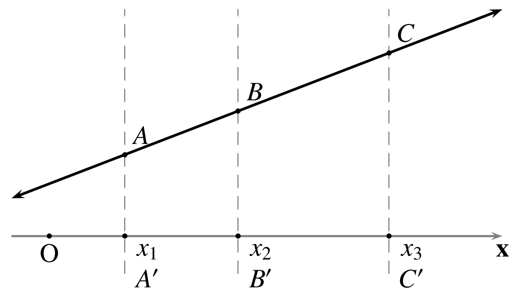


FIGURA A.1 Proyecciones de puntos colineales sobre el eje O**x**

De los tres puntos considerados, llamemos A al de abscisa x_1, B al de abscisa x_2 y C al de abscisa x_3, y llamemos A', B' y C' a las proyecciones de A, B y C sobre el eje **x**, respectivamente (ver la figura A.1). Como $A'B' = x_2 - x_1$, $B'C' = x_3 - x_2$, $A'C' = x_3 - x_1$, y $A'B' + B'C' = A'C'$ tendremos, por la definición de interposición de puntos de una recta, que B' está entre A' y C' en el eje **x**. Así, como las rectas perpendiculares al eje **x** por los puntos A, B y C son paralelas entre sí, tendremos que B está entre A y C en la recta que los contiene (ver el Principio E.18 en el Apéndice E). Por tanto, $AB + BC = AC$.

($\Leftarrow$) Si se cumple (a) tendremos, por la observación 1.4.(d), que los tres puntos están sobre una recta perpendicular al eje **x** y, por tanto, son colineales.

Si se cumple (b) es claro, por la Desigualdad del triángulo (ver el Principio E.22 en el Apéndice E), que los tres puntos son colineales.

QEP ■

TEOREMA 3 (SEGUNDO CRITERIO DE COLINEALIDAD)
Tres puntos distintos son colineales si, y sólo si, se cumple una de las siguientes condiciones:

(a) *los tres puntos tienen la misma abscisa.*

(b) *los tres puntos tienen la misma ordenada.*

(c) *los tres puntos tienen abscisas, así como ordenadas, distintas entre sí, y son proporcionales las diferencias entre las coordenadas de uno de esos puntos y las coordenadas homónimas de los otros dos; en otras palabras, si las coordenadas de los tres puntos son* (x_1, y_1), (x_2, y_2) *y* (x_3, y_3), *se tiene, para uno de ellos, digamos el de coordenadas* (x_3, y_3), *que*

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2}.$$

■ **PRUEBA**

Consideremos tres puntos $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ y $R = (x_3, y_3)$ distintos.

($\Rightarrow$) Supongamos que P, Q y R son colineales.

Por el mismo argumento que desarrollamos en la primera parte de la prueba del Teorema 2, si P, Q y R no tienen la misma abscisa, entonces las abscisas de cualesquiera dos de ellos son distintas; y, si no tienen la misma ordenada, entonces las ordenadas de cualesquiera dos de ellos son distintas.

Supongamos, sin perder generalidad, que, $x_1 < x_2 < x_3$. Consideremos las rectas perpendiculares al eje **x** por los puntos P, Q y R (que, a la sazón, son paralelas entre sí) y las rectas perpendiculares al eje **y** por

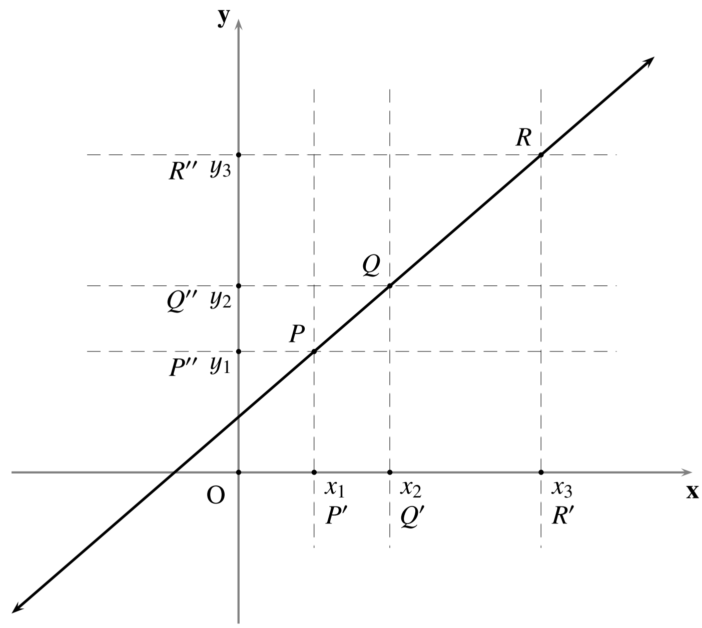


FIGURA A.2 Proyecciones de puntos colineales sobre los ejes

los puntos P, Q y R (que también, a la sazón, son paralelas entre sí). Llamemos P', Q' y R', y P'', Q'' y R'', las proyecciones de los puntos P, Q y R sobre los ejes **x** y **y**, respectivamente (ver la figura A.2).
Por una doble aplicación del Teorema de Thales tenemos que

$$\frac{PR}{QR} = \frac{P'R'}{Q'R'} \quad \text{y} \quad \frac{PR}{QR} = \frac{P''R''}{Q''R''};$$

de donde

$$\frac{P'R'}{Q'R'} = \frac{P''R''}{Q''R''},$$

es decir

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{|y_3 - y_1|}{|y_3 - y_2|}.$$

Por el mismo argumento que desarrollamos en la primera parte de la prueba del Teorema 2 tendremos, por el hecho de que Q' está entre P' y R', que Q está entre P y R, y Q'' está entre P'' y R''. Así tendremos que $y_1 < y_2 < y_3$, o $y_3 < y_2 < y_1$, y, en cualquiera de los dos casos, que

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2}.$$

($\Leftarrow$) Si se cumple (a) tendremos, por la observación 1.4.(d), que los tres puntos están sobre una recta perpendicular al eje **x** y, por tanto, son colineales.
Si se cumple (b) tendremos, por la observación 1.4.(e), que los tres puntos están sobre una recta perpendicular al eje **y** y, por tanto, son colineales.

Si se cumple (c) podemos suponer, sin perder generalidad, que $x_1 < x_2 < x_3$. Al convenir en que $k = \frac{x_3-x_1}{x_3-x_2} = \frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}$ tendremos, por el hecho de que los puntos son distintos, que $k > 1$ y que

$$x_3 = \frac{kx_2 - x_1}{k-1} \quad \text{y} \quad y_3 = \frac{ky_2 - y_1}{k-1}.$$

Por la fórmula del cálculo de la distancia entre dos puntos, tendremos que

$$QR = \sqrt{\left(\frac{kx_2 - x_1}{k-1} - x_2\right)^2 + \left(\frac{ky_2 - y_1}{k-1} - y_2\right)^2} = \frac{1}{k-1}PQ$$

y

$$PR = \sqrt{\left(\frac{kx_2 - x_1}{k-1} - x_1\right)^2 + \left(\frac{ky_2 - y_1}{k-1} - y_1\right)^2} = \frac{k}{k-1}PQ.$$

Así, como $PQ + QR = PR$ tendremos, por el Teorema 2, que P, Q y R son colineales.

QEP ■

Teorema 4 (Tercer criterio de colinealidad)
Tres puntos distintos son colineales si, y sólo si, es nulo el determinante de la matriz que tiene la primera columna formada por las abscisas de esos puntos, la segunda columna formada por las ordenadas correspondientes, y la tercera por números uno (1); en otras palabras, si las coordenadas de los tres puntos son (x_1, y_1), (x_2, y_2) *y* (x_3, y_3)*, se tiene que*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

■ **PRUEBA**
Consideremos tres puntos $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ y $R = (x_3, y_3)$ distintos. Hacemos notar, en primer lugar, que

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \tag{A.1}$$

(al desarrollar el determinante por la tercera columna)

$$\begin{aligned} &= (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3) + (x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= -x_3y_2 - x_1y_3 + x_1y_2 - (-x_3y_1 - x_2y_3 + x_2y_1) + x_3y_3 - x_3y_3 \end{aligned}$$

(al distribuir, reagrupar, sumar y restar x_3y_3)

$$= (x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (y_3 - y_1)(x_3 - x_2). \tag{A.2}$$

($\Rightarrow$) Supongamos que P, Q y R son colineales. Así tendremos que se cumple (a), (b) o (c) del Teorema 3. Si se cumple (a) o (b), es claro que el determinante (A.1) es nulo.

Si se cumple (c), tendremos que $\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2} = \frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}$ es equivalente a

$$(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (y_3 - y_1)(x_3 - x_2) = 0.$$

Así en este caso también, por (A.2), el determinante (A.1) es nulo.
($\Leftarrow$) Supongamos ahora que el determinante (A.1) es nulo.
Si $x_2 = x_3$ tendremos, por el hecho de que $Q \neq R$, que $y_2 \neq y_3$. Como, por (A.2), $(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) = 0$ y $y_3 - y_2 \neq 0$, tendremos que $x_1 = x_3$. Así, en este caso, $x_1 = x_2 = x_3$. Por la observación 1.4.(d), los tres puntos están sobre una recta perpendicular al eje **x** y, por tanto, son colineales.
Si $x_2 \neq x_3$, tendremos dos casos más que estudiar: $y_2 = y_3$ y $y_2 \neq y_3$.
Si $y_2 = y_3$ tendremos, por (A.2), que $(y_3-y_1)(x_3-x_2) = 0$. Como $x_2-x_3 \neq 0$, tendremos que $y_1 = y_3$. Así, en este caso, $y_1 = y_2 = y_3$. Por la observación 1.4.(e), los tres puntos están sobre una recta perpendicular al eje **y** y, por tanto, son colineales.
Si $y_2 \neq y_3$ tendremos, por (A.2), que $\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2} = \frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}$. Así, por la parte (c) del Teorema 3 y el hecho de que los tres puntos tienen abscisas, así como ordenadas, distintas entre sí, también en este caso los tres puntos son colineales.

QEP ■

§ A.2 Correspondientes al Capítulo 2

Deduciremos a continuación la fórmula para obtener la tangente de la medida del ángulo entre dos rectas l_1 y l_2, con ángulos de inclinación α_1 y α_2, respectivamente, especificado en cada caso, y bajo los supuestos (1), (2) y (3) indicados en la sección 2.3.5.

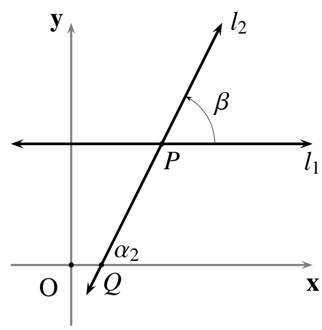
TEOREMA 11 (ÁNGULOS ENTRE DOS RECTAS)
Cualquiera de los dos ángulos β determinados por las rectas l_1 y l_2 que tienen lado inicial en la recta l_1, lado final en la recta l_2, y medida no negativa entre 0 y 180 (que en las condiciones establecidas $\beta \neq 0$ y $\beta \neq 90$), es tal que

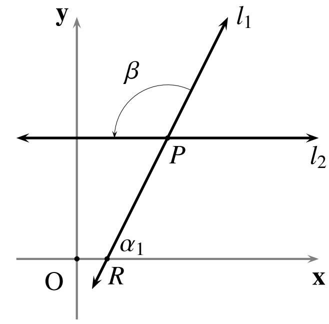
(A.3) $$\tan\beta = \frac{\begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 \\ \mathsf{A}_2 & \mathsf{B}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 \\ -\mathsf{B}_2 & \mathsf{A}_2 \end{vmatrix}}.$$

■ **PRUEBA**
Como $\tan\alpha_1 = -\frac{\mathsf{A}_1}{\mathsf{B}_1}$ y $\tan\alpha_2 = -\frac{\mathsf{A}_2}{\mathsf{B}_2}$, bastará verificar que

(A.4) $$\tan\beta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Consideraremos primero el caso en que alguna de ellas es perpendicular al eje **y**.
Supongamos que l_1 es perpendicular al eje **y**; de donde $\alpha_1 = 0$. Como l_2 corta a l_1 (en P), y l_1 coincide con, o es paralela a, el eje **x**, tenemos que l_2 debe cortar al eje **x**, digamos en el punto Q. Así, el ángulo en P correspondiente al ángulo de inclinación de l_2, en el corte de l_1 y el eje **x** por la secante l_2, mide $\beta = \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_1$, obteniendo así el resultado deseado.

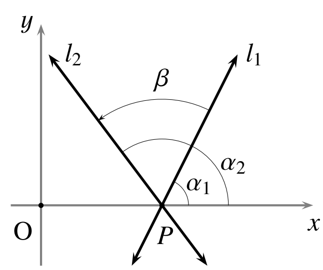


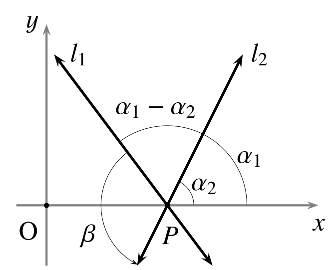


Supongamos ahora que l_2 es perpendicular al eje **y**; de donde $\alpha_2 = 0$. Como l_1 corta a l_2 (en P), y l_2 coincide con, o es paralela a, el eje **x**, tenemos que l_1 debe cortar al eje **x**, digamos en el punto R. Así, el ángulo externo en P, que es la pareja lineal externa del correspondiente al ángulo de inclinación de l_1, en el corte de l_2 y el eje **x** por la secante l_1, mide $\beta = 180 - \alpha_1$; como $\tan\beta = \tan(180 - \alpha_1) = -\tan\alpha_1 = \tan(-\alpha_1) = \tan(\alpha_2 - \alpha_1)$, tenemos el resultado deseado.

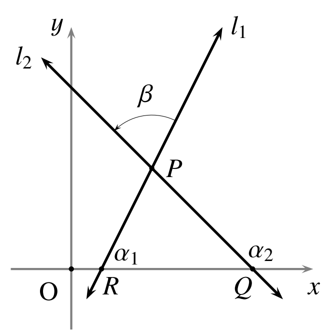
Consideraremos ahora el caso en que ninguna de las rectas es perpendicular al eje **y**; de donde las rectas l_1 y l_2 cortan al eje **x**, digamos en los puntos R y Q, respectivamente.

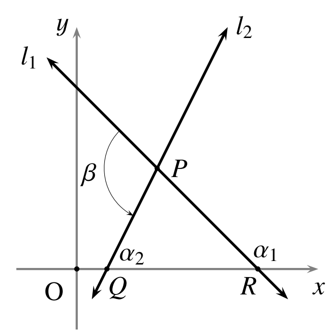
Si $R = Q$, entonces P coincide con el punto de corte de ambas rectas con el eje **x**. Así, el ángulo formado por los puntos que están sobre las rectas, y tienen ordenada positiva, mide $|\alpha_2 - \alpha_1|$; en caso de que $\alpha_2 > \alpha_1$, tomamos como β a dicho ángulo, obteniendo el resultado deseado; en caso de que $\alpha_2 < \alpha_1$, tomamos como β a la pareja lineal externa de dicho ángulo que conserva los puntos de l_1 con ordenada positiva: como $\tan\beta = \tan(180-(\alpha_1-\alpha_2)) = -\tan(\alpha_1-\alpha_2) = \tan(\alpha_2-\alpha_1)$, tenemos el resultado deseado.





Si $R \neq Q$ y Q está delante de R, entonces el opuesto por el vértice del ángulo $\angle RPQ$ mide $\beta = \alpha_2 - \alpha_1$, obteniendo el resultado deseado.





Si $R \neq Q$ y R está delante de Q, entonces el interno alterno del ángulo α_2, en el corte de l_1 y el eje **x** por la secante l_2, mide, por ser ángulo externo del triángulo $\triangle RPQ$ en el vértice P, $\beta = 180 + (\alpha_2 - \alpha_1)$; como $\tan(180 + (\alpha_2 - \alpha_1)) = \tan(\alpha_2 - \alpha_1)$, tenemos el resultado deseado.

QEP ■

Probaremos a continuación el resultado que nos ofrece la representación analítica de los semiplanos determinados por una recta.

Consideremos una recta

$$l: \ \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$$
$$(\mathsf{A}, \mathsf{B} \text{ y } \mathsf{C} \text{ números reales con } \mathsf{A}^2 + \mathsf{B}^2 \neq 0);$$

el gráfico de la inecuación $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} > 0$, es decir, el conjunto

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} > 0\};$$

el gráfico de la inecuación $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} < 0$, es decir, el conjunto

$$H' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} < 0\};$$

y la recta $\overleftrightarrow{ON}$ cuyas características están especificadas en el ejercicio 2.43.

Por otro lado, consideremos un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ fuera de l, y la recta l_0 paralela a l por P_0 (ver la figura A.3); por la observación 2.21, l_0 puede ser representada por la ecuación

$$\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{D}_0 = 0$$
$$(\mathsf{D}_0 = -\mathsf{A}x_0 - \mathsf{B}y_0).$$

LEMA A.1

(a) *El punto P_0 está en H si, y sólo si,* $\mathsf{D}_0 < \mathsf{C}$.

(b) *El punto P_0 está en H' si, y sólo si,* $\mathsf{D}_0 > \mathsf{C}$.

■ **PRUEBA**

(a) Como $\mathsf{A}x_0 + \mathsf{B}y_0 + \mathsf{C} > 0$ si, y sólo si, $-\mathsf{D}_0 + \mathsf{C} > 0$ y esto sucede si, y sólo si, $\mathsf{D}_0 < \mathsf{C}$, tenemos que P_0 está en H si, y sólo si, $\mathsf{D}_0 < \mathsf{C}$.

(b) Este resultado se prueba de manera análoga al de la parte anterior.

QEP ■

OBSERVACIÓN A.1

(a) *Note que H coincide con la unión de todas las rectas l_{D} de ecuación* $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{D} = 0$ *con* $\mathsf{D} < \mathsf{C}$.

(b) *Note que, todas las rectas l_{D}, con* $\mathsf{D} \neq \mathsf{C}$, *son paralelas a la recta l y perpendiculares a la recta $\overleftrightarrow{ON}$.*

Llamemos Q y Q_0 a los puntos de corte de las rectas l y l_0 con la recta $\overleftrightarrow{ON}$, respectivamente (ver la figura A.3). Por el ejercicio 2.43.(c), tenemos que

$$Q = \left(\tfrac{-\mathsf{C}}{\mathsf{A}^2+\mathsf{B}^2}\mathsf{A}, \tfrac{-\mathsf{C}}{\mathsf{A}^2+\mathsf{B}^2}\mathsf{B}\right) \quad \text{y} \quad Q_0 = \left(\tfrac{-\mathsf{D}_0}{\mathsf{A}^2+\mathsf{B}^2}\mathsf{A}, \tfrac{-\mathsf{D}_0}{\mathsf{A}^2+\mathsf{B}^2}\mathsf{B}\right).$$

LEMA A.2

(a) *El punto P_0 está en H si, y sólo si, el punto Q_0 está en H.*

(b) *El punto P_0 está en H' si, y sólo si, el punto Q_0 está en H'.*

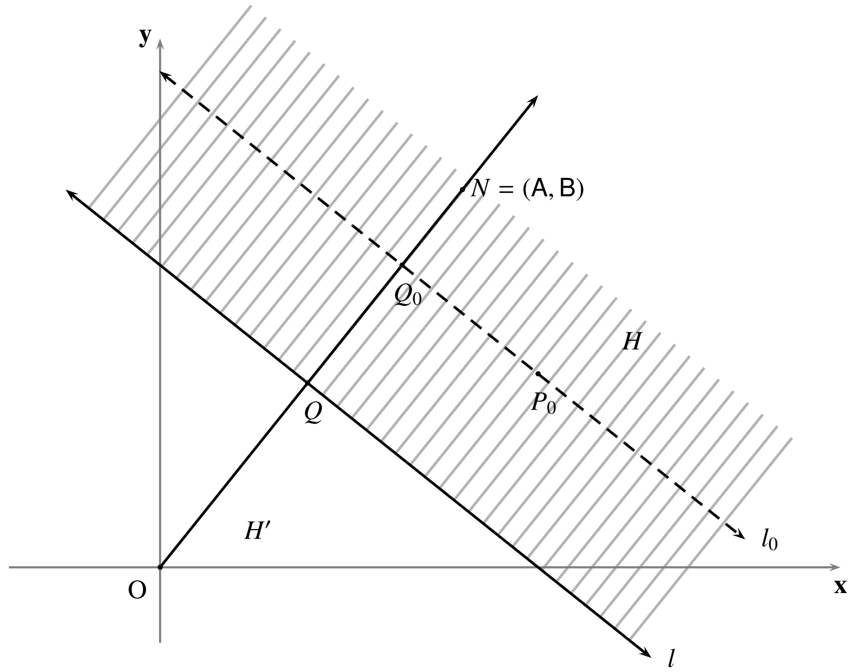


FIGURA A.3 Orientación positiva del eje ON

■ **PRUEBA**

(a) Como $\mathsf{A}\frac{-\mathsf{D}_0}{\mathsf{A}^2+\mathsf{B}^2}\mathsf{A} + \mathsf{B}\frac{-\mathsf{D}_0}{\mathsf{A}^2+\mathsf{B}^2}\mathsf{B} + \mathsf{C} > 0$ si, y sólo si, $-\mathsf{D}_0 + \mathsf{C} > 0$ y esto sucede si, y sólo si, $\mathsf{D}_0 < \mathsf{C}$, tendremos, por el lema A.1, que P_0 está en H si, y sólo si, el punto Q_0 está en H.

(b) Este resultado se prueba de manera análoga al de la parte anterior.

QEP ■

LEMA A.3

(a) *El punto P_0 está en H si, y sólo si, Q_0 está delante de Q en el eje* ON.

(b) *El punto P_0 está en H' si, y sólo si, Q_0 está detrás de Q en el eje* ON.

■ **PRUEBA**

(a) Como, por el lema A.1, $\frac{-\mathsf{D}_0}{\mathsf{A}^2+\mathsf{B}^2} > \frac{-\mathsf{C}}{\mathsf{A}^2+\mathsf{B}^2}$, tendremos que este resultado es consecuencia directa del lema A.2.(a) y el ejercicio 2.43.(f).

(b) Este resultado se prueba de manera análoga al de la parte anterior.

QEP ■

LEMA A.4

(a) *H es convexo.*

(b) *H' es convexo.*

■ **PRUEBA**

(a) Consideremos dos puntos distintos P_1 y P_2 en H, y un punto P_3 que está entre P_1 y P_2.

Por la definición de conjunto convexo, verificar que H es convexo equivale a verificar que P_3 está en H; verifiquemos entonces que P_3 está en H.

Consideremos las rectas l_1 y l_2 paralelas a l y que pasan por los puntos P_1 y P_2, respectivamente (ver la figura A.4).

Consideremos Q_1 y Q_2 los puntos de corte con $\overleftrightarrow{\mathrm{O}N}$ de l_1 y l_2, respectivamente.

Por el lema A.3.(a), Q_1 y Q_2 están delante de Q en el eje ON.

Si $Q_1 = Q_2$ tendremos, por el Postulado de las paralelas, que $l_1 = l_2$. Como P_1, P_2 y P_3 son colineales tendremos, en este caso, que P_3 está en l_1 (o l_2); de donde, por el lema A.3.(a), tendremos que P_3 está en H.

Supongamos, ahora, que $Q_1 \neq Q_2$ y, sin perder generalidad, que Q_1 está entre Q y Q_2.

Consideremos la recta l_3 paralela a l y que pasa por P_3, y el punto Q_3 de corte entre l_3 y $\overleftrightarrow{\mathrm{O}N}$.

Como l_1, l_2 y l_3 son paralelas, y l_3 corta a la secante $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ en el punto P_3 que está entre P_1 y P_2, tendremos, por el Principio E.18 en el Apéndice E, que Q_3 está entre Q_1 y Q_2.

Así, Q_3 está delante de Q en el eje ON y, por el lema A.3.(a), P_3 está en H.

(b) Este resultado se prueba de manera análoga al de la parte anterior.

QEP ■

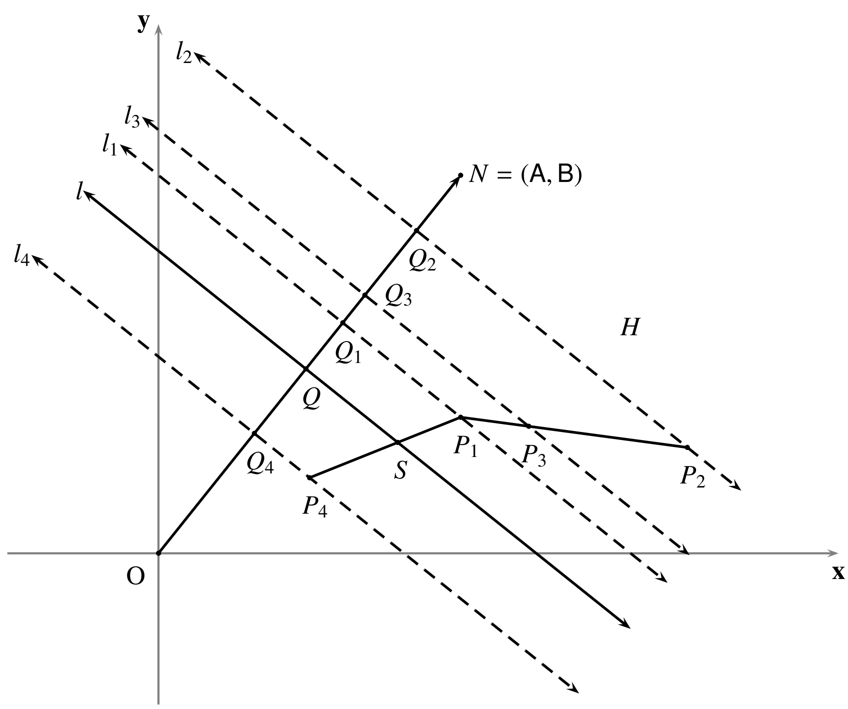


FIGURA A.4 Convexidad de H

LEMA A.5

Si un punto está en H y otro está en H', el segmento determinado por ellos corta a l en un punto que está entre ellos.

■ **PRUEBA**

Por comodidad consideraremos en H al mismo punto P_1 de la prueba anterior, y un punto cualquiera de H', digamos P_4.

Debemos probar que $\overleftrightarrow{P_1P_4}$ corta a l en un punto que está entre P_1 y P_4.

Consideremos la recta l_4 paralela a l y que pasa por P_4.

Consideremos el punto Q_4 de corte entre l_4 y $\overleftrightarrow{ON}$.

Por el lema A.3.(b), Q está delante de Q_4 y, en consecuencia Q está entre Q_1 y Q_4.

Como l_1, l y l_4 son paralelas, y l corta a la secante $\overleftrightarrow{ON}$ en el punto Q que está entre Q_1 y Q_4, tendremos, por el Principio E.18 en el Apéndice E, que l debe cortar $\overleftrightarrow{P_1P_4}$ en un punto S que está entre P_1 y P_4.

QEP ■

TEOREMA 12 (REPRESENTACIÓN ANALÍTICA DE LOS SEMIPLANOS DETERMINADOS POR UNA RECTA)
Si la ecuación general de la recta l es $\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} = 0$ $(\mathsf{A}^2 + \mathsf{B}^2 \neq 0)$*, entonces los conjuntos*

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} > 0\}$$
$$H' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{C} < 0\}$$

coinciden con los semiplanos determinados por la recta l.

Además, la orientación $\overrightarrow{ON}$, donde $N = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$, indica geométricamente cuál es el semiplano H.

■ **PRUEBA**

Es claro, por la tricotomía del orden de los números reales, que el conjunto de los puntos que no están en l se puede representar como la unión de H y H'.

Por el lema A.4, H y H' son convexos.

Por el lema A.5, si el punto R está en H y el punto T está en H', entonces $\overleftrightarrow{RT}$ corta a l en un punto que está entre R y T.

Así, por el Principio E.15, H y H' son los semiplanos determinados por l.

El resto del Teorema es consecuencia directa del lema A.3.

QEP ■

§ A.3 Correspondientes al Capítulo 4

Verifiquemos lo afirmado en la parte (f) de la observación 4.4.

$$\begin{aligned}
\breve{\Delta}_3 &= 8\breve{\mathsf{A}}\breve{\mathsf{C}}\breve{\mathsf{F}} + 2\breve{\mathsf{B}}\breve{\mathsf{D}}\breve{\mathsf{E}} - 2\breve{\mathsf{C}}\breve{\mathsf{D}}^2 - 2\breve{\mathsf{A}}\breve{\mathsf{E}}^2 - 2\breve{\mathsf{F}}\breve{\mathsf{B}}^{\,2} \\
&= 8\mathsf{AC}(\mathsf{A}h^2 + \mathsf{B}hk + \mathsf{C}k^2 + \mathsf{D}h + \mathsf{E}k + \mathsf{F}) \\
&\qquad + 2\mathsf{B}(2\mathsf{A}h + \mathsf{B}k + \mathsf{D})(\mathsf{B}h + 2\mathsf{C}k + \mathsf{E}) \\
&\qquad - 2\mathsf{C}(2\mathsf{A}h + \mathsf{B}k + \mathsf{D})^2 - 2\mathsf{A}(\mathsf{B}h + 2\mathsf{C}k + \mathsf{E})^2 \\
&\qquad - 2(\mathsf{A}h^2 + \mathsf{B}hk + \mathsf{C}k^2 + \mathsf{D}h + \mathsf{E}k + \mathsf{F})\mathsf{B}^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= h^2(8\mathsf{A}^2\mathsf{C} - 2\mathsf{B}^2\mathsf{A} - 8\mathsf{C}\mathsf{A}^2 - 2\mathsf{A}\mathsf{B}^2 + 4\mathsf{A}\mathsf{B}^2)\\
&\qquad + k^2(8\mathsf{A}\mathsf{C}^2 + 4\mathsf{B}^2\mathsf{C} - 2\mathsf{C}\mathsf{B}^2 - 8\mathsf{A}\mathsf{C}^2 - 2\mathsf{B}^2\mathsf{C})\\
&\qquad + hk(8\mathsf{ABC} + 8\mathsf{ABC} + 2\mathsf{B}^3 - 8\mathsf{ABC} - 8\mathsf{ABC} - 2\mathsf{B}^3)\\
&\qquad + h(8\mathsf{ACD} + 4\mathsf{ABE} + 2\mathsf{DB}^2 - 8\mathsf{ADC} - 2\mathsf{B}^2\mathsf{D} - 4\mathsf{ABE})\\
&\qquad + k(8\mathsf{ACE} + 2\mathsf{EB}^2 + 4\mathsf{BCD} - 4\mathsf{DBC} - 2\mathsf{B}^2\mathsf{E} - 8\mathsf{ACE})\\
&\qquad + 8\mathsf{ACF} + 2\mathsf{BDE} - 2\mathsf{CD}^2 - 2\mathsf{AE}^2 - 2\mathsf{FB}^2\\
&= \Delta_3.
\end{aligned}
$$

Verifiquemos que, en el sistema (4.27), $\dot{\mathsf{A}} \neq 0$ o $\dot{\mathsf{C}} \neq 0$.

En caso de que $\mathsf{A} = \mathsf{C}$ tendremos que $\theta = 45$ y, en consecuencia, $\dot{\mathsf{A}} = \frac{1}{2}(\mathsf{A} + \mathsf{B} + \mathsf{C}) = \mathsf{A} + \frac{1}{2}\mathsf{B}$ y $\dot{\mathsf{C}} = \frac{1}{2}(\mathsf{A} - \mathsf{B} + \mathsf{C}) = \mathsf{A} - \frac{1}{2}\mathsf{B}$; pero como $\mathsf{B} \neq 0$, concluimos que, si $\dot{\mathsf{A}} = 0$, entonces $\dot{\mathsf{C}} \neq 0$. Por tanto, $\dot{\mathsf{A}} \neq 0$ o $\dot{\mathsf{C}} \neq 0$.

En caso de que $\mathsf{A} \neq \mathsf{C}$ tendremos que $\tan(2\theta) = \frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}-\mathsf{C}}$ y, en consecuencia: $2\theta \neq 90$; y $\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}-\mathsf{C}}$, es decir, $\mathsf{B}\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{\mathsf{B}^2}{2(\mathsf{A}-\mathsf{C})}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$. Sustituyendo en el sistema (4.27), tendremos que

$$
\dot{\mathsf{A}} = \frac{2\mathsf{A}^2 - 2\mathsf{AC} + \mathsf{B}^2}{2(\mathsf{A} - \mathsf{C})}\cos^2\theta - \frac{2\mathsf{C}^2 - 2\mathsf{AC} + \mathsf{B}^2}{2(\mathsf{A} - \mathsf{C})}\operatorname{sen}^2\theta
$$

y

$$
\dot{\mathsf{C}} = -\frac{2\mathsf{C}^2 - 2\mathsf{AC} + \mathsf{B}^2}{2(\mathsf{A} - \mathsf{C})}\cos^2\theta + \frac{2\mathsf{A}^2 - 2\mathsf{AC} + \mathsf{B}^2}{2(\mathsf{A} - \mathsf{C})}\operatorname{sen}^2\theta
$$

Si acaso $\dot{\mathsf{A}} = 0$ y $\dot{\mathsf{C}} = 0$, tendremos que $\dot{\mathsf{A}} - \dot{\mathsf{C}} = 0$; con lo que

$$
\left(\frac{2\mathsf{A}^2 - 2\mathsf{AC} + \mathsf{B}^2}{2(\mathsf{A} - \mathsf{C})} - \frac{2\mathsf{C}^2 - 2\mathsf{AC} + \mathsf{B}^2}{2(\mathsf{A} - \mathsf{C})}\right)\cos(2\theta) = 0,
$$

es decir,

$$
\frac{(\mathsf{A} - \mathsf{C})^2 + \mathsf{B}^2}{(\mathsf{A} - \mathsf{C})} = 0.
$$

Pero esto contradice el hecho de que $\frac{(\mathsf{A}-\mathsf{C})^2+\mathsf{B}^2}{(\mathsf{A}-\mathsf{C})} \neq 0$ (pues $(\mathsf{A} - \mathsf{C})^2 + \mathsf{B}^2 = 0$ si, y sólo si, $\mathsf{A} = \mathsf{C}$ y $\mathsf{B} = 0$). Por tanto, también en este caso, $\dot{\mathsf{A}} \neq 0$ o $\dot{\mathsf{C}} \neq 0$.

Verifiquemos lo afirmado en la observación 4.5.

Supongamos que $\dot{\mathsf{B}} = 0$, y veamos que (4.29) es cierta.

Si $\mathsf{A} = \mathsf{C}$, tendremos: por un lado, que $\pm\frac{|\mathsf{A}-\mathsf{C}|}{\sqrt{(\mathsf{A}-\mathsf{C})^2+\mathsf{B}^2}} = 0$; y, por (4.25), que $\cos(2\theta) = \cos(2 \cdot 45) = \cos 90 = 0$. Por tanto, en este caso, (4.29) es cierta.

Si $\mathsf{A} \neq \mathsf{C}$ tendremos, por (4.25), que $\tan(2\theta) = \frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}-\mathsf{C}}$. Así, $\cos(2\theta) = \frac{1}{\sec(2\theta)} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(2\theta)}} = \pm\frac{|\mathsf{A}-\mathsf{C}|}{\sqrt{(\mathsf{A}-\mathsf{C})^2+\mathsf{B}^2}}$. Ahora, como $0 < 2\theta \leqslant 180$ y, así, $\operatorname{sen}(2\theta) \geqslant 0$, tendremos que $\tan(2\theta)$ y $\cos(2\theta)$ deben tener el mismo signo. Pero, como $\frac{|\mathsf{A}-\mathsf{C}|}{\sqrt{(\mathsf{A}-\mathsf{C})^2+\mathsf{B}^2}} > 0$, tendremos que $\cos(2\theta) = \frac{|\mathsf{A}-\mathsf{C}|}{\sqrt{(\mathsf{A}-\mathsf{C})^2+\mathsf{B}^2}}$ si y sólo si,

$\tan(2\theta) = \frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}-\mathsf{C}} > 0$, y $\cos(2\theta) = -\frac{|\mathsf{A}-\mathsf{C}|}{\sqrt{(\mathsf{A}-\mathsf{C})^2+\mathsf{B}^2}}$ si y sólo si, $\tan(2\theta) = \frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}-\mathsf{C}} < 0$. Por tanto, también en este caso, (4.29) es cierta.

Supongamos ahora que (4.29) es cierta, y veamos que $\dot{\mathsf{B}} = 0$.

Si $\mathsf{A} = \mathsf{C}$, tendremos que $\dot{\mathsf{B}} = (\mathsf{C} - \mathsf{A})\,\mathrm{sen}(2\theta) \pm \mathsf{B}\frac{|\mathsf{A}-\mathsf{C}|}{\sqrt{(\mathsf{A}-\mathsf{C})^2+\mathsf{B}^2}} = 0$.

Si $\mathsf{A} \neq \mathsf{C}$, tendremos que $\mathrm{sen}(2\theta) = \sqrt{1 - \cos^2(2\theta)}$ (pues, para $0 < 2\theta \leqslant 180$, $\mathrm{sen}(2\theta) \geqslant 0$). Después de sustituir el término del lado derecho de (4.29) en esta última igualdad, y efectuar las simplificaciones de rigor, tendremos que $\mathrm{sen}(2\theta) = \frac{|\mathsf{B}|}{\sqrt{(\mathsf{A}-\mathsf{C})^2+\mathsf{B}^2}}$. Ahora, la condición $\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}-\mathsf{C}} > 0$ equivale a decir que B y $\mathsf{A} - \mathsf{C}$ tienen el mismo signo, es decir, que: $|\mathsf{B}| = \mathsf{B}$ si, y sólo si, $|\mathsf{A} - \mathsf{C}| = \mathsf{A} - \mathsf{C}$; y que $|\mathsf{B}| = -\mathsf{B}$ si, y sólo si, $|\mathsf{A} - \mathsf{C}| = \mathsf{C} - \mathsf{A}$. Del mismo modo, la condición $\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}-\mathsf{C}} < 0$ equivale a decir que B y $\mathsf{A} - \mathsf{C}$ tienen signos opuestos, es decir, que: $|\mathsf{B}| = \mathsf{B}$ si, y sólo si, $|\mathsf{A} - \mathsf{C}| = \mathsf{C} - \mathsf{A}$; y que $|\mathsf{B}| = -\mathsf{B}$ si, y sólo si, $|\mathsf{A} - \mathsf{C}| = \mathsf{A} - \mathsf{C}$. Con estas observaciones es fácil verificar que se cumple (4.28).

Así, al poner $f = \pm\frac{|\mathsf{A}-\mathsf{C}|}{\sqrt{(\mathsf{A}-\mathsf{C})^2+\mathsf{B}^2}}$ (+, si $\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}-\mathsf{C}} > 0$; −, en cualquier otro caso), $d = \sqrt{\frac{1+f}{2}}$ y $e = \sqrt{\frac{1-f}{2}}$ tendremos, por el hecho de que $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}}$ y $\mathrm{sen}\,\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}}$ para $0 \leqslant \alpha \leqslant 90$ en general, que, *una rotación del sistema* **xOy** *por un ángulo* θ*, con* $0 < \theta \leqslant 90$*, es tal que* $\dot{\mathsf{B}} = 0$ *si, y sólo si,*

$$\begin{cases} x = d\dot{x} - e\dot{y} \\ y = e\dot{x} + d\dot{y} \end{cases}$$

son las fórmulas de rotación de coordenadas (4.4) correspondientes a dicho ángulo.

Verifiquemos lo afirmado en la parte (d) de la observación 4.6.

El lector puede verificar fácilmente que, para tres números reales a, b y c cualesquiera, es cierta la siguiente igualdad

$$a^2 - 4bc = a^2 + (b - c)^2 - (b + c)^2;$$

y así,

$$\Delta_2 = \mathsf{B}^2 + (\mathsf{A} - \mathsf{C})^2 - (\mathsf{A} + \mathsf{C})^2 \quad \text{y} \quad \dot{\Delta}_2 = \dot{\mathsf{B}}^2 + (\dot{\mathsf{A}} - \dot{\mathsf{C}})^2 - (\dot{\mathsf{A}} + \dot{\mathsf{C}})^2.$$

Por comodidad escribiremos

$$m = \cos\theta, \quad n = \mathrm{sen}\,\theta, \quad p = \cos(2\theta) \quad \text{y} \quad q = \mathrm{sen}(2\theta);$$

de donde $m^2 + n^2 = 1$, $p^2 + q^2 = 1$, $m^2 - n^2 = p$, $mn = \frac{1}{2}q$ y, además,

$$\begin{aligned} \dot{\mathsf{B}}^2 &= (\mathsf{C} - \mathsf{A})^2q^2 + 2(\mathsf{C} - \mathsf{A})\mathsf{B}pq + \mathsf{B}^2p^2 \\ (\dot{\mathsf{A}} - \dot{\mathsf{C}})^2 &= (\mathsf{A} - \mathsf{C})^2p^2 + 2(\mathsf{A} - \mathsf{C})\mathsf{B}pq + \mathsf{B}^2q^2 \\ (\dot{\mathsf{A}} + \dot{\mathsf{C}})^2 &= (\mathsf{A} + \mathsf{C})^2 \quad \text{(por la invariancia del discriminante lineal)} \end{aligned}$$

Ahora es fácil ver que

$$\dot{\Delta}_2 = \dot{\mathsf{B}}^2 + (\dot{\mathsf{A}} - \dot{\mathsf{C}})^2 - (\dot{\mathsf{A}} + \dot{\mathsf{C}})^2 = \mathsf{B}^2 + (\mathsf{A} - \mathsf{C})^2 - (\mathsf{A} + \mathsf{C})^2 = \Delta_2.$$

Verifiquemos lo afirmado en la parte (e) de la observación 4.6.

El lector puede verificar fácilmente que, para seis números reales a, b, c, d, e y f cualesquiera, es cierta la siguiente igualdad

$$8acf + 2bde - 2cd^2 - 2ae^2 - 2fb^2 = -2f(b^2 - 4ac) - (a + c)(d^2 + e^2) + 2bde + (a - c)(d^2 - e^2);$$

y así,

$$\Delta_3 = -2\mathsf{F}(\mathsf{B}^2 - 4\mathsf{AC}) - (\mathsf{A} + \mathsf{C})(\mathsf{D}^2 + \mathsf{E}^2) + 2\mathsf{BDE} + (\mathsf{A} - \mathsf{C})(\mathsf{D}^2 - \mathsf{E}^2)$$

y

$$\dot{\Delta}_3 = -2\dot{\mathsf{F}}(\dot{\mathsf{B}}^2 - 4\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{C}}) - (\dot{\mathsf{A}} + \dot{\mathsf{C}})(\dot{\mathsf{D}}^2 + \dot{\mathsf{E}}^2) + 2\dot{\mathsf{B}}\dot{\mathsf{D}}\dot{\mathsf{E}} + (\dot{\mathsf{A}} - \dot{\mathsf{C}})(\dot{\mathsf{D}}^2 - \dot{\mathsf{E}}^2)$$

Como $\dot{\mathsf{D}}^2 + \dot{\mathsf{E}}^2 = \mathsf{D}^2 + \mathsf{E}^2$ tendremos, por la invariancia de los discriminantes lineal y cuadrático, que

$$-2\dot{\mathsf{F}}(\dot{\mathsf{B}}^2 - 4\dot{\mathsf{A}}\dot{\mathsf{C}}) - (\dot{\mathsf{A}} + \dot{\mathsf{C}})(\dot{\mathsf{D}}^2 + \dot{\mathsf{E}}^2) = -2\mathsf{F}(\mathsf{B}^2 - 4\mathsf{AC}) - (\mathsf{A} + \mathsf{C})(\mathsf{D}^2 + \mathsf{E}^2).$$

Adoptando la misma convención sobre m, n, p y q de la parte anterior, tendremos que

$$\begin{aligned}
&2\dot{\mathsf{B}}\dot{\mathsf{D}}\dot{\mathsf{E}} = 2\mathsf{DE}(\mathsf{C} - \mathsf{A})pq - (\mathsf{C} - \mathsf{A})(\mathsf{D}^2 - \mathsf{E}^2)q^2 + 2\mathsf{BDE}p^2 - \mathsf{B}(\mathsf{D}^2 - \mathsf{E}^2)pq\\
&\dot{\mathsf{A}} - \dot{\mathsf{C}} = (\mathsf{A} - \mathsf{C})p + \mathsf{B}q\\
&\dot{\mathsf{D}}^2 - \dot{\mathsf{E}}^2 = (\mathsf{D}^2 - \mathsf{E}^2)p + 2\mathsf{DE}q
\end{aligned}$$

Ahora es fácil ver que

$$2\dot{\mathsf{B}}\dot{\mathsf{D}}\dot{\mathsf{E}} + (\dot{\mathsf{A}} - \dot{\mathsf{C}})(\dot{\mathsf{D}}^2 - \dot{\mathsf{E}}^2) = 2\mathsf{BDE} + (\mathsf{A} - \mathsf{C})(\mathsf{D}^2 - \mathsf{E}^2).$$

Por tanto, $\dot{\Delta}_3 = \Delta_3$.

§ A.4 Correspondientes al Capítulo 8

Verifiquemos lo afirmado en el Teorema 27.

TEOREMA 27 (CRITERIO DE CLASIFICACIÓN DE LAS SECCIONES CÓNICAS IMPROPIAS)
$\mathcal{S}$ es una sección cónica impropia y distinta del conjunto vacío si, y sólo si, $\Delta_3 = 0$.

Además, en caso de que $\Delta_3 = 0$, tendremos que:

(a) *Si $\Delta_2 = 0$, entonces $\mathcal{S}$ es del tipo **parábola** (es decir, dos rectas paralelas o coincidentes).*

(b) *Si $\Delta_2 < 0$, entonces $\mathcal{S}$ es del tipo **elipse** (es decir, un punto o, lo que es lo mismo, dos rectas imaginarias concurrentes en un punto real).*

(c) *Si $\Delta_2 > 0$, entonces $\mathcal{S}$ es del tipo **hipérbola** (es decir, dos rectas concurrentes).*

■ **PRUEBA**
Consideremos la ecuación cuadrática en dos variables

$$\mathsf{A}x^2 + \mathsf{B}xy + \mathsf{C}y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0 \qquad (\mathsf{A} \neq 0, \text{ o } \mathsf{B} \neq 0, \text{ o } \mathsf{C} \neq 0) \tag{A.5}$$

y la figura geométrica $\mathcal{S}$ representada por ella, y llamemos Δ_2 y Δ_3 a los discriminantes cuadrático y cúbico de dicha ecuación, respectivamente.

Realizaremos la prueba considerando tres casos, que cubren todas las posibilidades: $\mathsf{A} \neq 0$; $\mathsf{A} = 0$ y $\mathsf{C} \neq 0$; $\mathsf{A} = 0$ y $\mathsf{C} = 0$.

Caso I: supongamos que $\mathsf{A} \neq 0$.

Por simple manipulación algebraica, la ecuación (A.5) resulta equivalente a la ecuación

$$\mathsf{A}x^2 + (\mathsf{B}y + \mathsf{D})x + \mathsf{C}y^2 + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0. \tag{A.6}$$

Factorizando esta ecuación en términos de la variable x tendremos, por el hecho de que $\mathsf{A} \neq 0$, que la ecuación (A.5) resulta equivalente a la ecuación

$$\mathsf{A}\left(x + \frac{\mathsf{B}y + \mathsf{D} - \sqrt{\Delta}}{2\mathsf{A}}\right)\left(x + \frac{\mathsf{B}y + \mathsf{D} + \sqrt{\Delta}}{2\mathsf{A}}\right) = 0, \tag{A.7}$$

donde

$$\Delta = (\mathsf{B}^2 - 4\mathsf{AC})y^2 + 2(\mathsf{BD} - 2\mathsf{AE})y + (\mathsf{D}^2 - 4\mathsf{AF}). \tag{A.8}$$

Ahora, la ecuación (A.7) representará un par de rectas, distintas o coincidentes si, y sólo si, cada uno de sus factores es equivalente a una ecuación lineal en dos variables; y esto sucede si, y sólo si, Δ es un trinomio cuadrado perfecto; lo cual equivale, a su vez, a que su discriminante como ecuación en la variable y sea nulo, es decir, después de sacar las cuentas, a que

$$-2\mathsf{A}(8\mathsf{ACF} + 2\mathsf{BDE} - 2\mathsf{CD}^2 - 2\mathsf{AE}^2 - 2\mathsf{FB}^2) = 0.$$

Pero, como $\mathsf{A} \neq 0$, tendremos que $\mathcal{S}$ es una sección cónica impropia y distinta del conjunto vacío si, y sólo si, $\Delta_3 = 0$.

Además, si éste es el caso tendremos, por simple manipulación algebraica, que la ecuación (A.5) resulta equivalente

$$\mathsf{A}\left(x + \frac{\mathsf{B}y + \mathsf{D} - \sqrt{(\sqrt{\mathsf{B}^2 - 4\mathsf{AC}}\,y + \sqrt{\mathsf{D}^2 - 4\mathsf{AF}})^2}}{2\mathsf{A}}\right)\left(x + \frac{\mathsf{B}y + \mathsf{D} + \sqrt{(\sqrt{\mathsf{B}^2 - 4\mathsf{AC}}\,y + \sqrt{\mathsf{D}^2 - 4\mathsf{AF}})^2}}{2\mathsf{A}}\right) = 0, \tag{A.9}$$

o, lo que es lo mismo, a la unión de las rectas (posiblemente imaginarias)

$$\begin{aligned} 2\mathsf{A}x + (\mathsf{B} - \sqrt{\mathsf{B}^2 - 4\mathsf{AC}})y + \mathsf{D} - \sqrt{\mathsf{D}^2 - 4\mathsf{AF}} &= 0 \\ 2\mathsf{A}x + (\mathsf{B} + \sqrt{\mathsf{B}^2 - 4\mathsf{AC}})y + \mathsf{D} + \sqrt{\mathsf{D}^2 - 4\mathsf{AF}} &= 0. \end{aligned} \tag{A.10}$$

Caso II: supongamos que $\mathsf{A} = 0$ y $\mathsf{C} \neq 0$.

Después de tener un sistema de ejes rectangulares $\dot{\mathbf{x}}\mathbf{O}\tilde{\mathbf{y}}$, por reflexión del sistema $\dot{\mathbf{x}}\mathbf{O}\dot{\mathbf{y}}$ rotación del sistema $\mathbf{xOy}$ por el ángulo 90, y cambiar las coordenadas de los puntos del plano por medio de la fórmula de reflexión de coordenadas (4.15), las coordenadas de los puntos de $\mathcal{S}$ satisfarán la ecuación

$$\mathsf{A}\dot{y}^2 + \mathsf{B}\dot{y}\dot{x} + \mathsf{C}\dot{x}^2 + \mathsf{D}\dot{y} + \mathsf{E}\dot{x} + \mathsf{F} = 0$$

o, equivalentemente,

$$\mathsf{C}\dot{x}^2 + \mathsf{B}\dot{x}\dot{y} + \mathsf{A}\dot{y}^2 + \mathsf{E}\dot{x} + \mathsf{D}\dot{y} + \mathsf{F} = 0,$$

en la que se han permutado los lugares de las abscisas y las ordenadas de la ecuación (A.5).

Pero esta última ecuación se encuentra en las condiciones del Caso I y, en consecuencia, representará una cónica degenerada si, y sólo si, $\dot{\Delta}_3 = 0$ (donde $\dot{\Delta}_3$ es su discriminante cúbico). Ahora, como el discriminante cúbico de una ecuación cuadrática es invariante por transformación de coordenadas y, además, las figuras geométricas no cambian al transformar las coordenadas, tendremos probado el Teorema también en este caso.

Caso III: supongamos que $\mathsf{A} = 0$ y $\mathsf{C} = 0$; con lo que $\mathsf{B} \neq 0$.

Después de tener un sistema de ejes rectangulares $\dot{\mathbf{x}}\mathbf{O}\dot{\mathbf{y}}$, por rotación del sistema $\mathbf{xOy}$ por un ángulo θ, con $0 < \theta < 90$, cualquiera, y cambiar las coordenadas de los puntos del plano por medio de las fórmulas de rotación de coordenadas (4.4), las coordenadas de los elementos de $\mathcal{S}$ satisfarán la ecuación

$$\text{(A.11)} \qquad \dot{\mathsf{A}}\dot{x}^2 + \dot{\mathsf{B}}\dot{x}\dot{y} + \dot{\mathsf{C}}\dot{y}^2 + \dot{\mathsf{D}}\dot{x} + \dot{\mathsf{E}}\dot{y} + \dot{\mathsf{F}} = 0,$$

en la que, después de sacar las cuentas, se tiene que

$$\text{(A.12)} \qquad \dot{\mathsf{A}} = \mathsf{B}\operatorname{sen}\theta\cos\theta.$$

Pero, como $\mathsf{B} \neq 0$ y $0 < \theta < 90$, la ecuación (A.11) se encuentra en las condiciones del Caso I y, en consecuencia, representará una cónica degenerada si, y sólo si, $\dot{\Delta}_3 = 0$ (donde $\dot{\Delta}_3$ es su discriminante cúbico). Ahora, como el discriminante cúbico de una ecuación cuadrática es invariante por transformación de coordenadas y, además, las figuras geométricas no cambian al transformar las coordenadas, tendremos probado el Teorema también en este caso.

Probemos ahora la segunda parte del Teorema. Supongamos que $\Delta_3 = 0$.

Si $\Delta_2 = 0$ tendremos que las rectas representadas por las ecuaciones descritas en (A.10) se transforman en

$$2\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{D} - \sqrt{\mathsf{D}^2 - 4\mathsf{AF}} = 0$$
$$2\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \mathsf{D} + \sqrt{\mathsf{D}^2 - 4\mathsf{AF}} = 0,$$

que son, claramente, las ecuaciones de dos rectas paralelas o coincidentes; en cuyo caso la figura geométrica $\mathcal{S}$ es una sección cónica impropia del tipo parábola.

Si $\Delta_2 < 0$, la figura geométrica $\mathcal{S}$ se reduce al punto $\left(\frac{2\mathsf{CD}-\mathsf{BE}}{\mathsf{B}^2-4\mathsf{AC}}, \frac{2\mathsf{AE}-\mathsf{BD}}{\mathsf{B}^2-4\mathsf{AC}}\right)$; en cuyo caso la figura geométrica $\mathcal{S}$ es una sección cónica impropia del tipo elipse.

Si $\Delta_2 > 0$ tendremos, claramente, que las rectas representadas por las ecuaciones descritas en (A.10) son dos rectas concurrentes; en cuyo caso la figura geométrica $\mathcal{S}$ es una sección cónica impropia del tipo hipérbola.

QEP ■

Verifiquemos ahora lo afirmado en el Teorema 28.

TEOREMA 28 (CRITERIO DE CLASIFICACIÓN DE LAS SECCIONES CÓNICAS PROPIAS)

$\mathcal{S}$ es una sección cónica propia o es el conjunto vacío si, y sólo si, $\Delta_3 \neq 0$.

Además, en caso de que $\Delta_3 \neq 0$, tendremos que:

(a) *Si $\Delta_2 = 0$, entonces $\mathcal{S}$ es una* ***parábola****.*

(b) *Si* $\Delta_2 < 0$ *y* $\Delta_1\Delta_3 < 0$*, entonces* $\mathcal{S}$ *es una* ***elipse****.*

(c) *Si* $\Delta_2 < 0$ *y* $\Delta_1\Delta_3 > 0$*, entonces* $\mathcal{S}$ *es el* ***conjunto vacío****.*

(d) *Si* $\Delta_2 > 0$*, entonces* $\mathcal{S}$ *es una* ***hipérbola****.*

■ **PRUEBA**

Consideremos la ecuación cuadrática en dos variables

$$\text{(A.13)} \qquad \mathsf{A}x^2 + \mathsf{B}xy + \mathsf{C}y^2 + \mathsf{D}x + \mathsf{E}y + \mathsf{F} = 0$$
$$(\mathsf{A} \neq 0, \text{ o } \mathsf{B} \neq 0, \text{ o } \mathsf{C} \neq 0)$$

y la figura geométrica $\mathcal{S}$ representada por ella, y llamemos Δ_1, Δ_2 y Δ_3 a los discriminantes lineal, cuadrático y cúbico de dicha ecuación, respectivamente.

Como consecuencia inmediata del Teorema 27 tendremos que $\mathcal{S}$ es una sección cónica propia o es el conjunto vacío si, y sólo si, $\Delta_3 \neq 0$.

Probemos ahora la segunda parte del lema. Supongamos que $\Delta_3 \neq 0$.

Sabemos (ver el corolario 4.1) que, por transformación de coordenadas, la ecuación (A.13) es equivalente a una de la forma

$$\text{(A.14)} \qquad \dot{\breve{\mathsf{A}}}\dot{\breve{x}}^2 + \dot{\breve{\mathsf{E}}}\dot{\breve{y}} + \dot{\breve{\mathsf{F}}} = 0$$
$$(\dot{\breve{\mathsf{A}}} \neq 0),$$

si $\Delta_2 = 0$, o de la forma

$$\text{(A.15)} \qquad \breve{\mathsf{A}}\breve{x}^2 + \breve{\mathsf{C}}\breve{y}^2 + \breve{\mathsf{F}} = 0$$
$$(\breve{\mathsf{A}} \neq 0 \text{ y } \breve{\mathsf{C}} \neq 0),$$

si $\Delta_2 \neq 0$.

Como los discriminantes lineal, cuadrático y cúbico de las ecuaciones cuadráticas en dos variables son invariantes por transformación de coordenadas, tendremos que

$$\text{(A.16)} \qquad \Delta_1 = \mathsf{A} + \mathsf{C} = \dot{\breve{\mathsf{A}}}, \quad \Delta_2 = \mathsf{B}^2 - 4\mathsf{AC} = 0, \quad \text{y} \quad \Delta_3 = -2\dot{\breve{\mathsf{A}}}\dot{\breve{\mathsf{E}}}^2 \neq 0$$

para el primer caso, y

$$\text{(A.17)} \qquad \Delta_1 = \mathsf{A} + \mathsf{C} = \breve{\mathsf{A}} + \breve{\mathsf{C}} \quad \text{y,} \quad \Delta_2 = \mathsf{B}^2 - 4\mathsf{AC} = -4\breve{\mathsf{A}}\breve{\mathsf{C}}, \quad \Delta_3 = 8\breve{\mathsf{A}}\breve{\mathsf{C}}\breve{\mathsf{F}} \neq 0$$

para el segundo caso.

Si $\Delta_2 = 0$ tendremos, por el hecho de que $-2\dot{\breve{\mathsf{A}}}\dot{\breve{\mathsf{E}}}^2 \neq 0$ y $\dot{\breve{\mathsf{A}}} \neq 0$, que $\dot{\breve{\mathsf{E}}} \neq 0$ y, en consecuencia, la ecuación (A.14) (o, lo que es lo mismo, la ecuación (A.13)) representa una parábola.

Si $\Delta_2 < 0$ tendremos, por el hecho de que $-4\breve{\mathsf{A}}\breve{\mathsf{C}} < 0$, $\mathsf{A} + \mathsf{C} = \breve{\mathsf{A}} + \breve{\mathsf{C}}$ y $\Delta_3 = 8\breve{\mathsf{A}}\breve{\mathsf{C}}\breve{\mathsf{F}} \neq 0$, que las parejas formadas por $\breve{\mathsf{A}}$ y $\breve{\mathsf{C}}$, $\breve{\mathsf{A}}$ y Δ_1, y $\breve{\mathsf{F}}$ y Δ_3, tienen el mismo signo. Como, por simple manipulación algebraica, la ecuación (A.15) es equivalente a la ecuación

$$\text{(A.18)} \qquad \frac{\breve{x}^2}{\frac{-\breve{\mathsf{F}}}{\breve{\mathsf{A}}}} + \frac{\breve{y}^2}{\frac{-\breve{\mathsf{F}}}{\breve{\mathsf{C}}}} = 1$$

tendremos que la ecuación (A.18) (o, lo que es lo mismo, la ecuación (A.15) o la ecuación (A.13)) representa: una elipse, si $\Delta_1\Delta_3 < 0$; el conjunto vacío, si $\Delta_1\Delta_3 > 0$.

Si $\Delta_2 > 0$ tendremos, por el hecho de que $-4\breve{A}\breve{C} > 0$, que $\breve{A}$ y $\breve{C}$ tienen signos contrarios. Así, la ecuación (A.18) (o, lo que es lo mismo, la ecuación (A.15) o la ecuación (A.13)) representa una hipérbola.

QEP ■

§ A.5 Correspondientes al Capítulo 9

Verifiquemos ahora lo afirmado en el lema 9.1.

Aprovecharemos la tricotomía del orden de los números reales para realizar la prueba en dos casos: primero el caso $a \geqslant 0$, y luego el caso $a < 0$

Consideremos un número real $a \geqslant 0$. Por la propiedad arquimediana del orden de los números reales, sabemos que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \cdot (2\pi) > a$; esto garantiza que el conjunto

$$A := \{k \in \mathbb{N} : \ a < 2k\pi\}$$

es no vacío. Por el Principio del buen orden de los números naturales, sabemos que el conjunto A tiene mínimo; llamemos $m = \min A$.

Si $m = 1$, entonces $0 \leqslant a < 2\pi$ y, en consecuencia, con $b = a$ y $n = 0$ logramos lo que queríamos.

Supongamos ahora que $m > 1$, es decir, que $m - 1 \in \mathbb{N}$. Como $m \in A$, se tiene que $a < 2m\pi$; de donde $a - 2m\pi < 0$ y, en consecuencia, $a - 2m\pi + 2\pi < 2\pi$. Por tanto, $a - 2(m-1)\pi < 2\pi$. Por otro lado, si acaso $a - 2(m-1)\pi < 0$, tendríamos que $a < 2(m-1)\pi$, es decir, que $m - 1 \in A$ y $m - 1 < m$; contrario al hecho de que m es el mínimo de A. Así, con $b = a - 2(m-1)\pi$ y $n = m - 1$ logramos lo que queríamos.

Consideremos ahora un número real $a < 0$. Como $-a > 0$ tendremos, por lo que acabamos de probar, que existe un número real $\bar{b}$ con $0 \leqslant \bar{b} < 2\pi$, y un número entero $\bar{n} \geqslant 0$, tales que $-a = \bar{b} + 2\bar{n}\pi$; de donde $a = -\bar{b} - 2\bar{n}\pi$.

Si $\bar{b} = 0$, entonces $a = 2(-\bar{n})\pi$ y, así, con $b = 0$ y $n = -\bar{n}$ logramos lo que queríamos.

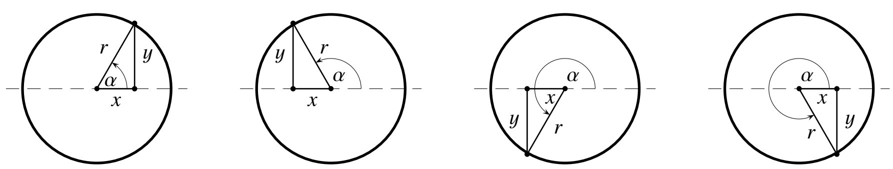
Si $\bar{b} \neq 0$, entonces $a = (2\pi - \bar{b}) + 2(-\bar{n} - 1)\pi$. Como $0 < \bar{b} < 2\pi$, tendremos que $-2\pi < -\bar{b} < 0$; de donde $0 < 2\pi - \bar{b} < 2\pi$. Así, con $b = 2\pi - \bar{b}$ y $n = -\bar{n} - 1$ logramos lo que queríamos.

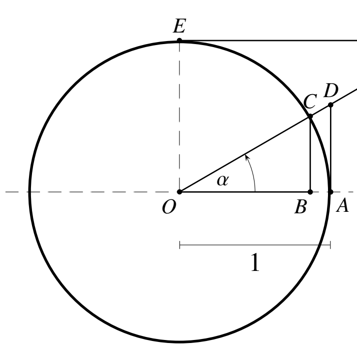
APÉNDICE

B

Trigonometría

Definición de las razones trigonométricas





(seno) $\operatorname{sen}(\alpha) = BC = \dfrac{y}{r}$

(coseno) $\cos(\alpha) = OB = \dfrac{x}{r}$

(tangente) $\tan(\alpha) = AD = \dfrac{y}{x}$

(cotangente) $\cot(\alpha) = EF = \dfrac{x}{y}$

(cosecante) $\csc(\alpha) = OD = \dfrac{r}{y}$

(secante) $\sec(\alpha) = OF = \dfrac{r}{x}$

Signo de las razones trigonométricas

	$0 < \alpha < 90$	$90 < \alpha < 180$	$180 < \alpha < 240$	$240 < \alpha < 360$
seno y cosecante	+	+	−	−
coseno y secante	+	−	−	+
tangente y cotangente	+	−	+	−

Identidades trigonométricas fundamentales

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} \qquad \csc(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \qquad \cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}$$

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \qquad 1 + \tan^2(\alpha) = \sec^2(\alpha) \qquad 1 + \cot^2(\alpha) = \csc^2(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}} \qquad \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\pm \tan(\alpha)}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}}$$

Identidades trigonométricas de reducción

$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$	$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
$\operatorname{sen}(90 \pm \alpha) = \cos(\alpha)$	$\cos(90 \pm \alpha) = \mp \operatorname{sen}(\alpha)$	$\tan(90 \pm \alpha) = \mp \cot(\alpha)$
$\operatorname{sen}(\alpha \pm 90) = -\cos(\alpha)$	$\cos(\alpha \pm 90) = \mp \operatorname{sen}(\alpha)$	$\tan(\alpha \pm 90) = \pm \cot(\alpha)$
$\operatorname{sen}(180 \pm \alpha) = \mp \operatorname{sen}(\alpha)$	$\cos(180 \pm \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\tan(180 \pm \alpha) = \pm \tan(\alpha)$
$\operatorname{sen}(\alpha \pm 180) = \pm \operatorname{sen}(\alpha)$	$\cos(\alpha \pm 180) = -\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha \pm 180) = \mp \tan(\alpha)$
$\operatorname{sen}(270 \pm \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\cos(270 \pm \alpha) = \pm \operatorname{sen}(\alpha)$	$\tan(270 \pm \alpha) = \mp \cot(\alpha)$
$\operatorname{sen}(\alpha \pm 270) = \cos(\alpha)$	$\cos(\alpha \pm 270) = \pm \operatorname{sen}(\alpha)$	$\tan(\alpha \pm 270) = \pm \cot(\alpha)$
$\operatorname{sen}(360 \pm \alpha) = \pm \operatorname{sen}(\alpha)$	$\cos(360 \pm \alpha) = \cos(\alpha)$	$\tan(360 \pm \alpha) = \tan(\alpha)$
$\operatorname{sen}(\alpha \pm 360) = \mp \operatorname{sen}(\alpha)$	$\cos(\alpha \pm 360) = \cos(\alpha)$	$\tan(\alpha \pm 360) = \mp \tan(\alpha)$

Razones trigonométricas de sumas y diferencias de ángulos

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Razones trigonométricas del doble de un ángulo

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

Razones trigonométricas de la mitad de un ángulo

$$\operatorname{sen}(\tfrac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$$

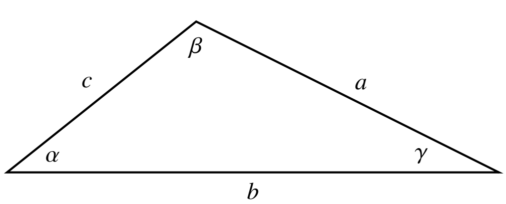
$$\cos(\tfrac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$$

$$\tan(\tfrac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} = \frac{1-\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}$$

Ecuaciones trigonométricas

Ecuación	Soluciones
$\cos\theta = 0$	$\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$
$\cos\theta = 1$	$\theta = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$
$\cos\theta = -1$	$\theta = (2k+1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$
$\cos\theta = \frac{1}{2}$	$\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ o $\theta = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$
$\cos\theta = -\frac{1}{2}$	$\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ o $\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{sen}\theta = 0$	$\theta = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{sen}\theta = 1$	$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{sen}\theta = -1$	$\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$	$\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ o $\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$	$\theta = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ o $\theta = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

Teorema del seno y Teorema del coseno



$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Valores de las razones trigonométricas para los ángulos notables

		seno	coseno	tangente	secante	cosecante	cotangente
0	0	0	1	0	1		
$\frac{\pi}{6}$	30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90	1	0			1	0
$\frac{2\pi}{3}$	120	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	-2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	135	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-1
$\frac{5\pi}{6}$	150	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$-\sqrt{3}$
π	180	0	-1	0	-1		
$\frac{7\pi}{6}$	210	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	$\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{4}$	225	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1
$\frac{4\pi}{3}$	240	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$	270	-1	0			-1	0
$\frac{5\pi}{3}$	300	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{7\pi}{4}$	315	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1
$\frac{7\pi}{6}$	330	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\sqrt{3}$

APÉNDICE

C

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO EN UNA VARIABLE

Las dos *soluciones* de la ecuación general de segundo grado en una variable y coeficientes reales

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a,\ b \text{ y } c \text{ números complejos con } a \neq 0)$$

son

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dichas soluciones reciben también el nombre de *raíces* del polinomio de segundo grado con coeficientes complejos

$$p(x) = ax^2 + bx + c,$$

el cual se puede factorizar mediante

$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Esas soluciones tienen la propiedad de que

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{y} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Del producto de las raíces resulta que, en caso de que el lado izquierdo de la ecuación sea un trinomio cuadrado perfecto, entonces $\frac{b^2}{4a^2} = \frac{c}{a}$.

Además, las soluciones son

$$\begin{array}{ll} \text{reales y distintas, si} & \Delta > 0 \\ \text{reales e iguales, si} & \Delta = 0 \\ \text{imaginarias, si} & \Delta < 0 \end{array}$$

donde $\Delta = b^2 - 4ac$, y es llamado el ***discriminante*** de la ecuación.

APÉNDICE D

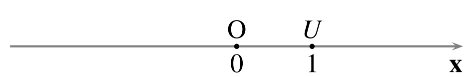
Construcción de un sistema de ejes rectangulares

En la literatura sobre Geometría analítica que hemos tenido ocasión de revisar (toda la cual se encuentra recopilada en la Bibliografía al final del libro), no se encuentra presentado explícitamente, ni por la vía de referencia, ningún método para construir un sistema de ejes rectangulares en el plano, sino que se parte de que éste está dado. Aunque pueda resultar chocante para algunos de nuestros lectores, preferimos exponer un método de construcción de dichos ejes, con el propósito de que se pueda tener al menos una referencia explícita de su construcción.

Para determinar los dos ejes de uno de esos pares de ejes rectangulares, basta con fijar dos puntos distintos cualesquiera del plano.

El procedimiento para construirlos se puede describir de la siguiente manera. Fijamos dos puntos distintos, O y U, cualesquiera del plano (ver el Principio E.1 en el Apéndice E), y:

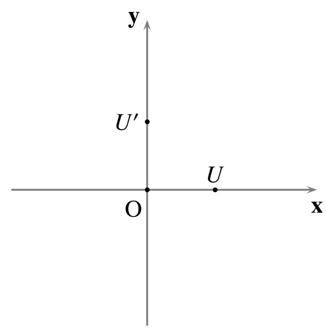
- consideramos la única recta que pasa por los puntos O y U (ver el Principio E.3 en el Apéndice E), a la que representaremos por **x**; y escogemos un sistema de coordenadas en la recta **x**, con la particularidad de que al punto O le corresponda el número real cero (0), y al punto U le corresponda el número real uno (1). Destacando, en la recta **x**, el punto O como indicador del origen, el punto U como indicador de la unidad, y el sistema de coordenadas que acabamos de mencionar, tenemos construido el primero de los ejes, que denominaremos ***el eje* x**.



- consideramos, ahora, la recta perpendicular al eje O**x** por el punto O (ver el Principio E.7 en el Apéndice E), a la que representaremos por **y**, y uno de los dos puntos U' de la recta **y** que satisfacen $OU' = OU$[1]; y escogemos un sistema de coordenadas en la recta **y**, con la particularidad de que al

[1]Hay varias maneras de justificar la existencia de dicho punto; la más sencilla, a nuestro parecer, es considerar el círculo con centro O y radio OU, y apoyarnos en el Principio E.12 del Apéndice E. Como la recta que estamos considerando contiene

punto O le corresponda el número real cero (0), y al punto U' le corresponda el número real uno (1). Destacando, en la recta **y**, el punto O como indicador del origen, el punto U' como indicador de la unidad, y el sistema de coordenadas que acabamos de mencionar, tenemos construido el segundo eje, que denominaremos ***el eje*** **y**.



El punto U, además de servirnos para determinar la dirección $\overleftrightarrow{OU}$ (es decir, la recta **x**) y, en ésta, indicar el sentido positivo respecto al origen, $\overset{\circ\!\longrightarrow}{OU}$, también fija la escala, o unidad de longitud, con la que mediremos las distancias sobre ambos ejes (y, por ende, determina también la unidad de medida de área, con la que mediremos las regiones del plano definidas respecto a dicho sistema de ejes rectangulares).

al centro del círculo, que está en su interior, dicha recta cortará al círculo en exactamente dos puntos y, además, cada uno de ellos está a distancia OU de O.

APÉNDICE

E

Principios elementales de la Geometría euclidiana

Principio E.1
El plano contiene al menos tres puntos no colineales.

Principio E.2
Toda recta tiene infinitos puntos distintos.

Principio E.3
Para cada par de puntos distintos, existe exactamente una recta que los contiene.

Principio E.4
Dos rectas son iguales si, y sólo si, coinciden en dos puntos distintos.

Principio E.5
Para dos rectas cualesquiera se tiene que se cumple una, y sólo una, de las siguientes posibilidades:

(a) *son iguales (coinciden);*

(b) *son paralelas;*

(c) *son concurrentes.*

Principio E.6
Dos rayos son iguales si, y sólo si, tienen el mismo origen y un punto interior en común.

Principio E.7
Dada una recta y un punto cualquiera, se tiene que existe una única recta perpendicular a la recta dada que pasa por el punto dado.

Principio E.8
La distancia de un punto P a una recta l es definida como la distancia desde P hasta su proyección sobre l, es decir, como el número PQ, donde Q es la proyección de P sobre l.

Principio E.9
Si dos rectas distintas son perpendiculares a una misma recta, entonces son paralelas.

Principio E.10
Dos rectas son paralelas si, y sólo si, son distintas y los puntos de una de ellas equidistan de la otra.

Principio E.11
Si una recta es perpendicular a una de dos rectas paralelas, entonces es perpendicular a la otra.

Principio E.12
Una recta es secante a un círculo si, y sólo si, tiene un punto de su interior.

Principio E.13
Fijado un sistema de coordenadas en la recta $\overleftrightarrow{AB}$ tal que al punto A le corresponde el cero (0) y al punto B le corresponde el uno (1), el rayo $\overrightarrow{AB}$, menos su origen (la semirrecta $\overset{\circ\!\!\longrightarrow}{AB}$), está compuesto por los puntos de la recta cuyas coordenadas son positivas, y el rayo opuesto a $\overrightarrow{AB}$, menos su origen, está compuesto por los puntos de la recta cuyas coordenadas son negativas.

Principio E.14 (Postulado de separación del plano)
Dada una recta m, el conjunto de los puntos que no están en m se puede representar como la unión de dos conjuntos $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ que tienen las siguientes propiedades:

(I) *$\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son convexos (entendiendo por **convexo**: que contiene los segmentos que unen a cualesquiera dos de sus puntos distintos), **y***

(II) *si A está en $\mathcal{H}_1$ y B está en $\mathcal{H}_2$, entonces $\overleftrightarrow{AB}$ corta a m en un punto que está entre A y B.*

*A $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ se les llama **lados** de (o **semiplanos** determinados por) m, y diremos que **uno es el opuesto del otro**, o simplemente que **son opuestos**; a m se le llama **borde** (**frontera** o **arista**) de cada uno de sus lados.*

Principio E.15
Los semiplanos determinados por una recta son únicos.

Principio E.16
Dado un rayo con origen en una recta, se tiene que uno de sus puntos está en uno de los lados de la recta si, y sólo si, todos sus puntos, excepto el origen, están en ese mismo lado de la recta.

Principio E.17
Dos rectas son paralelas si, y sólo si, una de ellas está contenida en uno solo de los semiplanos determinados por la otra.

PRINCIPIO E.18
Si $l_1 \parallel l_2$, t_1 secante a l_1 y l_2 en A y B, respectivamente, t_2 secante a l_1 y l_2 en C y D, respectivamente, y $l_3 \parallel l_1$ corta a t_1 en un punto E que está entre A y B, entonces l_3 corta t_2 en un punto F que está entre C y D.

PRINCIPIO E.19 (TEOREMA DE THALES)
Tres rectas paralelas determinan segmentos proporcionales en cualesquiera dos secantes.
En otras palabras: si $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$; t_1 y t_2 son secantes a l_1, l_2 y l_3 en los puntos A, B, C, y A′, B′, C′, respectivamente, entonces

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{BA}{B'A'}.$$

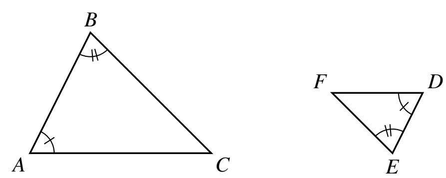
PRINCIPIO E.20 (TEOREMA DE PITÁGORAS)

(a) *Si un triángulo es rectángulo, entonces el cuadrado de su hipotenusa es la suma de los cuadrados de sus catetos.*

(b) *Si, en un triángulo, el cuadrado del lado opuesto a un ángulo es la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces el triángulo es rectángulo con dicho ángulo recto.*

PRINCIPIO E.21 (CRITERIO AA DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS)
Si existe una correspondencia biunívoca entre los vértices de dos triángulos con la propiedad de que dos pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia es una semejanza.

En otras palabras: si
$\angle A \cong \angle D$, y
$\angle B \cong \angle E$,
entonces
$\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



PRINCIPIO E.22
La longitud de un lado de un triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos, y mayor que su diferencia.

PRINCIPIO E.23
Dos rectas son concurrentes si, y sólo si, cada una de ellas contiene puntos en ambos lados de la otra.

PRINCIPIO E.24
Al cortar dos rectas paralelas por una secante, los ángulos correspondientes son congruentes.

PRINCIPIO E.25 (POSTULADO DEL TRANSPORTADOR)

(a) ***(Medida del ángulo)***

Cada ángulo tiene asociado un único número real comprendido estrictamente entre 0 y 180, al que llamaremos ***la medida del ángulo****.*
Si denotamos a un ángulo con el símbolo $\angle\alpha$, denotaremos su medida por $m\angle\alpha$.

(b) ***(Construcción de ángulos)***

Dado un rayo $\overrightarrow{AB}$ en el borde de un semiplano $\mathcal{H}$, y un número real r estrictamente comprendido entre 0 y 180, se tiene que existe exactamente un rayo $\overrightarrow{AC}$, con C en $\mathcal{H}$, tal que $m\angle CAB = r$.

(c) ***(Adición de ángulos)***

La suma de las medidas de dos ángulos adyacentes es la medida del ángulo abarcante.

(d) ***(Del par lineal)***

La suma de las medidas de los ángulos de un par lineal es 180.

Principio E.26
El rayo $\overrightarrow{AD}$ es bisector del ángulo $\angle BAC$ si, y sólo si, la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AD}$ por A contiene los bisectores de los adyacentes lineales de $\angle BAC$.

Principio E.27
Dado un punto D del triángulo $\triangle BAC$, se tiene que el rayo $\overrightarrow{AD}$ es bisector del ángulo $\angle A$ interior si, y sólo si, D está entre B y C, y $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$.

Principio E.28
Ningún círculo tiene tres puntos distintos y colineales.

Principio E.29
Todo círculo tiene infinitos puntos distintos.

Principio E.30
Dos círculos son iguales si, y sólo si, coinciden en tres puntos distintos.

Principio E.31
Dos círculos son iguales si, y sólo si, tienen el mismo centro y el mismo radio.

Principio E.32
Tres puntos no colineales determinan un único círculo.

Principio E.33
Una recta l y un círculo $\mathcal{C}$ son ***tangentes*** *si, y sólo si, l es perpendicular al radio de $\mathcal{C}$ con extremo exterior en el punto de corte*

Principio E.34
Una recta l y un círculo $\mathcal{C}$ son ***tangentes*** *si, y sólo si, la distancia del centro de $\mathcal{C}$ a l es igual al radio de $\mathcal{C}$.*

Principio E.35
Una recta l y un círculo $\mathcal{C}$ ***no se cortan*** *si, y sólo si, la distancia del centro de $\mathcal{C}$ a l es mayor que el radio de $\mathcal{C}$.*

Principio E.36
Una recta l y un círculo $\mathcal{C}$ son ***secantes*** *si, y sólo si, l tiene un punto en el interior de $\mathcal{C}$.*

PRINCIPIO E.37
Una recta l y un círculo C son ***secantes*** *si, y sólo si, la distancia del centro de C a l es menor que el radio de C.*

PRINCIPIO E.38
Dos círculos C_{K_1,r_1} y C_{K_2,r_2} son ***tangentes*** *si, y sólo si, la suma de dos de los números r_1, r_2 y K_1K_2 es igual al tercero: $r_1 + r_2 = K_1K_2$, tangentes exteriormente; $r_1 + K_1K_2 = r_2$, tangentes interiormente con C_1 dentro de C_2; y $r_2 + K_1K_2 = r_1$, tangentes interiormente con C_2 dentro de C_1.*

PRINCIPIO E.39
Dos círculos C_{K_1,r_1} y C_{K_2,r_2} ***no se cortan*** *si, y sólo si, la suma de dos de los números r_1, r_2 y K_1K_2 es menor que el tercero: $r_1 + r_2 < K_1K_2$, cada uno de ellos está en el exterior del otro; $r_1 + K_1K_2 < r_2$, C_1 dentro de C_2; $r_2 + K_1K_2 < r_1$, C_2 dentro de C_1.*

PRINCIPIO E.40
Dos círculos C_{K_1,r_1} y C_{K_2,r_2} son ***secantes*** *si, y sólo si, cada uno de los números r_1, r_2 y K_1K_2 es menor que la suma de los otros dos.*

APÉNDICE F

Alfabeto griego

minúscula	mayúscula	denominación	transliteración	sonido (al leerla en griego)
α	Α	alfa	a	***a*** larga o breve
β	Β	beta	b	***b***
γ	Γ	gamma	g/gu	***g*** suave (ga, gue...)
δ	Δ	delta	d	***d***
ε	Ε	épsilon	e	***e*** breve
ζ	Ζ	dseta/zeta	z	***ds*** (*z* italiana)
η	Η	eta	e	***e*** larga
θ/ϑ	Θ	theta	th	***z*** (za, ce, ci, zo, zu)
ι	Ι	iota	i	i
κ	Κ	kappa	k/c/qu	***k*** (ka/ca, ke/que ...)
λ	Λ	lambda	l	***l***
μ	Μ	mý	m	***m***
ν	Ν	ný	n	***n***
ξ	Ξ	xi	x	***x***
ο	Ο	ómicron	o	***o*** breve
π	Π	pi	p	***p***
ρ	Ρ	rho	r	***r***
σ/ς	Σ	sigma	s	***s***
τ	Τ	tau	t	***t***
υ	Υ/ϒ	ýpsilon	u/y	***u*** francesa o ***ü*** alemana
ϕ/φ	Φ	fi	f	***f***
χ	Χ	ji	ch/j	***j***
ψ	Ψ	psi	ps	***ps***
ω	Ω	omega	o	***o*** larga

Cometemos el abuso de escribir la letra ***y*** acentuada (***ý***) para indicar que este símbolo debe pronunciarse como la ***u*** francesa o la ***ü*** alemana.

Las dos formas de la *theta* minúscula, θ y ϑ, así como de la *fi* minúscula, ϕ y φ, se utilizan indistintamente.

De las dos formas de la *sigma* minúscula, σ y ς, ς se utiliza siempre al final de la palabra y σ en los demás casos; en ciencias se emplea preferentemente σ.

De las dos formas de la *ýpsilon* mayúscula, Y y Υ, se utiliza preferentemente Y.

Transliterar significa transcribir un texto haciendo uso de un sistema signos diferente del original. La transliteración no intenta ofrecer una interpretación fonética del texto (tal como sí lo haría una transcripción), sino reproducir el original signo por signo, de manera que se pueda reconstruir el texto en su grafía original al tener a mano los dos sistemas de signos.

No está demás advertir al lector de que la transliteración que hemos expuesto del alfabeto griego no necesariamente se ajustan a las normas técnicas que actualmente están en uso en los sistemas internacionales, especialmente en lo que se refiere a los cambios que ha sufrido el griego en la modernidad.

Bibliografía

[1] Ballou, Donald H. y Steen Frederick H., *Analytic geometry*, Xerox College Publishing, Lexington, 1974 (Inglés).

[2] Burdette, A. C., *Analytic geometry*, Academic Press, New York, 1971 (Inglés).

[3] Kindle, Joseph H., *Geometría analítica*, McGraw-Hill, México, 2001 (Español).

[4] Lehmann, Charles H., *Geometría analítica*, Limusa S. A., México, 1999 (Español).

[5] Leithold, Louis, *El Cálculo*, séptima ed., Oxford University Press, México, 1998 (Español).

[6] Lima, Elon Lages, *Coordenadas no Plano*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1992 (Portugués).

[7] Maxwell, E. A., *Elementary coordinate geometry*, Oxford, Glasgow, 1958 (Inglés).

[8] Medici, Héctor J. y Cabrera, Emanuel S., *Geometría analítica*, Librería del colegio, Buenos Aires, 1956 (Español).

[9] Protter, Murray H. y Morrey, Charles B., *Cálculo con Geometría analítica*, Fondo Educativo Interamericano S. A., Bogotá, 1980 (Español).

[10] Purcell, Edwin J., Rigdon, Steven E. y Varberg, Dale, *Cálculo*, octava ed., Pearson Educación, México, 2001 (Español).

ÍNDICE

I

L

M

N

O

P

R

S

T

U

V

Los autores

Juan M. Leal G.

Recibió el título de *Licenciado en Matemáticas* en la Universidad Simón Bolívar (USB) (1979), y el de *Magister Scientiae en Matemáticas* en la Universidad de Los Andes (ULA) (1987). Ha realizado estudios de griego clásico y latín en la ULA (1984-1994), y de Filosofía en el Postgrado de la USB (1976-79) y de la ULA (1993-1995). Actualmente es profesor asociado del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la ULA, donde labora desde el año 1979 dictando cursos diversos de Cálculo, Álgebra, Geometría, Lógica, Filosofía de la Ciencia y Filosofía Cartesiana. Es autor de los textos *Matemáticas Básicas* (Consejo de Publicaciones de la ULA, 1983) y *Geometría métrica plana* (CODEPRE, 2003). Sus áreas de interés son Geometría Algebraica, Geometría Diferencial, Lógica Matemática, Filosofía y la Etimología de las palabras. Desde hace algunos años se ha interesado en la Didáctica de las Matemáticas, participando activamente en el *Proyecto Palestra*, miembro y coordinador del *Comité de Apoyo a las Olimpiadas Matemáticas*, miembro de la Comisión curricular que gerenció el proceso de revisión curricular de la Licenciatura en Matemáticas de la ULA y que produjo el nuevo *Proyecto Académico de la Licenciatura en Matemáticas*. Ponente en el *I Congreso sobre la enseñanza de la Geometría* (1999), en las *III Jornadas Institucionales de Enseñanza de la Matemática* (1998) y en la *V Jornada Centro-Occidental de Educación Matemática* (1998). Desde hace algunos años lleva adelante, como proyecto personal, una traducción del griego al español de la obra los *Elementos* de Euclides.

Nelson G. Viloria A.

Recibió el título de *Licenciado en Matemáticas* en la Universidad de Los Andes (ULA) (1987), el de *Magister Scientiae en Matemáticas* en la ULA (1991), y el de *Doctor en Matemáticas* en la Universidad de São Paulo (1997). Actualmente es profesor agregado del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la ULA, donde labora desde el año 1985 dictando cursos diversos de Cálculo, Álgebra Lineal, Geometría, Ecuaciones Diferenciales, Ecuaciones Integrales y Cálculo en Espacios de Banach, y dirigiendo Tesis de pregrado y postgrado. Sus áreas de interés son Geometría, Análisis y Ecuaciones Integrales, y desde hace algunos años se ha interesado en la Didáctica de las Matemáticas, participando activamente como miembro *Comité de Apoyo a las Olimpiadas Matemáticas*, Coordinador de la Comisión curricular que gerenció el proceso de revisión curricular de la Licenciatura en Matemáticas de la ULA y que produjo el nuevo *Proyecto Académico de la Licenciatura en Matemáticas*. Participó activamente en el *I Taller de equivalencias en Carreras de Pregrado en Ciencias* (Mérida 1998) y en el *II Taller de equivalencias en Carreras de Pregrado en Ciencias* (Cuba 1999) en el marco del Convenio Andrés Bello. Fue Jefe del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la ULA (2002-2004). Actualmente desempeña el cargo de Director Académico de la Facultad de Ciencias de la ULA (2004).

La presente edición
de 500 ejemplares
se terminó de imprimir en
Editorial Venezolana C. A.
en el mes de Noviembre de 2005.
Mérida – Venezuela