

**Unidad 1: Cálculo en espacios euclidianos**

Temas	Objetivos específicos	Estrategias metodológicas
1.1 El espacio euclidiano.	(1) Entender las operaciones básicas de $\mathbb{R}^n$ , $n = 2, 3$ .	(a) Repasar las estructuras básicas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ : espacio vectorial, producto interno, norma de un vector, producto vectorial, producto triple. Repasar sus propiedades.
1.2 Vectores tangentes.	(1) Entender qué es un vector tangente y cuáles operaciones se pueden realizar entre ellos. (2) Entender cuál es la diferencia con los vectores "normales". (3) Entender que aunque se pueden "dibujar" en $\mathbb{R}^n$ ellos viven en $\mathbb{R}^{2n}$ .	(a) Definir vectores tangentes y el espacio tangente. (b) Explicar como dibujar vectores tangentes en $\mathbb{R}^{2,3}$ . (c) Definir las estructuras básicas en el espacio tangente en cada punto: espacio vectorial, producto interno, norma de un vector, producto vectorial.
1.3 Derivadas Direccionales.	Eliminado	
1.4 Isometrías.	(1) Entender las isometrías de $\mathbb{R}^n$ , $n = 2, 3$ como transformaciones que nos distorsionan la distancia y la forma. (2) Saber calcular la parte ortogonal y la parte traslacional de una isometría. (3) Saber demostrar si dos figuras ( triángulos, cónicas, etc. ) son congruentes (4) Saber calcular las simetrías de figuras.	(a) Definir Isometrías. (b) Demostrar el Teorema de caracterización: Isometría = transformación ortogonal seguida de traslación. (c) Mostrar los ejemplos básicos en el plano y el espacio: rotaciones, reflexiones, inversiones y combinaciones de éstas. (d) Demostrar el Teorema de clasificación de isometrías planas y enunciar el de isometrías espaciales. (e) Explicar lo que son figuras congruentes e ilustrar el concepto con triángulos y cónicas. Explicar que son invariantes geométricos.

## Unidad 1: Cálculo en espacios euclidianos

Temas	Objetivos específicos	Estrategias metodológicas
1.5 Orientación el el espacio euclidianos	<ol style="list-style-type: none"><li>(1) Saber cuándo dos bases de <math>\mathbb{R}^n</math> tienen la misma orientación.</li><li>(2) Entender cómo encajan las definiciones vistas en cursos anteriores con las dadas aquí.</li><li>(3) Saber cuándo una isometría invierte o no la orientación.</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>(a) Definir la relación de equivalencia "tener la misma orientación" en el conjunto de bases de <math>\mathbb{R}^n</math>.</li><li>(b) Definir la orientación de <math>\mathbb{R}^n</math> y decir cuando está positivamente orientado. Mostrar que esto es una convención y por tanto es arbitraria.</li><li>(c) Mostrar, en el caso de <math>\mathbb{R}^3</math>, como se relaciona la orientabilidad de una base con el producto vectorial y el producto triple.</li><li>(d) Definir la orientación de una isometría en términos del determinante de su parte ortogonal.</li></ol>

## Unidad 1: Cálculo en espacios euclidianos

### Estrategias de evaluación:

- ◆ La evaluación de estos temas será hecha con un examen escrito.
- ◆ Se evaluarán directamente la comprensión de las definiciones, teoremas ( lemas, corolarios, proposiciones ) dados en clase.
- ◆ La evaluación será el viernes de la semana siguiente a la semana en que se terminan las exposiciones de los temas.
- ◆ La evaluación valdrá el 8 % del total de la nota.

### Recursos:

- ◆ Pizarrón y tiza.
- ◆ Al menos tres ejemplares de los libros recomendados en la bibliografía.
- ◆ Acceso a internet.
- ◆ Licencias de los programas Mathematica y Maple, usados para graficar los objetos estudiados en este curso.

### Cronología:

Cuatro clases ( 2 semanas ).

## Unidad 2: Curvas

Temas	Objetivos específicos	Estrategias metodológicas
2.1 Curvas parametrizadas.	(1) Entender la noción de curva, como un conjunto el cual es descrito por un parámetro. (2) Entender las diferencias con objetos unidimensionales.	(a) Definir curvas parametrizadas (b) Presentar los siguientes ejemplos: punto, rectas, cónicas, hélices, cicloides, epicicloides, hipocicloides, tractrices.
2.2 Curvas regulares y longitud de arco.	(1) Entender la recta tangente a una curva. (2) Entender la noción de longitud de arco y que mide. (3) Saber decidir cuando una curva es reparametrización de otra. (4) Saber decidir si una curva tiene una reparametrización por longitud de arco.	(a) Definir curvas parametrizadas regulares. (b) Definir la recta tangente a un punto de una curva regular. Mostrar con un ejemplo por qué es necesaria la hipótesis de regularidad. (c) Definir la función longitud de arco. Motivar la definición usando el hecho que la imagen de la curva puede ser aproximada por curvas poligonales. (d) Definir reparametrización de una curva. Mostrar ejemplos de cuando una reparametrización preserva y cuando ésta invierte la orientación. (e) Demostrar que toda curva regular se puede reparametrizar por longitud de arco.
2.3 La teoría local de las curvas parametrizadas por longitud de arco (curvatura, torsión, el triedro de Frenet, ecuaciones de Frenet).	(1) Entender la forma local de una curva. (2) Saber calcular la curvatura y torsión de una curva y como éstos determinan la forma de ella. (3) Saber determinar cuándo dos curvas son congruentes.	(a) Definir la curvatura, la torsión, vector unitario, vector normal y el vector binormal. Calcular explícitamente un ejemplo: la hélice circular. (b) Mostrar su interpretación geométrica: curvatura cero = rectas, torsión cero = curva plana. (c) Mostrar el significado del signo en la torsión.

## Unidad 2: Curvas

Temas	Objetivos específicos	Estrategias metodológicas
		<p>(d) Explicar que la curvatura, la torsión y el triedro de Frenet son invariantes por congruencias. Demostrar el teorema fundamental de curvas.</p> <p>(e) Explicar como se traslada todo el aparatage anterior a curvas regulares no necesariamente parametrizadas por la longitud de arco. Demostrar las fórmulas para calcular curvatura, torsión, triedro de Frenet en este caso. Mostrar ejemplos: hélices</p>
<p>2.4 Propiedades Globales de las curvas planas.</p>	<p>(1) Entender la diferencia entre propiedad global y local de una curva.</p> <p>(2) Saber el significado geométrico del signo de la curvatura plana.</p>	<p>(a) Definir la curvatura plana signada, demostrar la caracterización de esta como la derivada del ángulo que hace la velocidad con una dirección fija.</p> <p>(b) Presentar fórmula de cálculo de la curvatura en términos de la velocidad y la aceleración.</p> <p>(c) Demostrar la desigualdad isoperimétrica.</p> <p>(d) Demostrar el teorema de los cuatro vértices.</p>

## Unidad 2: **Curvas**

### Estrategias de evaluación:

- ◆ La evaluación de estos temas será hecha con un examen escrito.
- ◆ Se evaluarán directamente la comprensión de las definiciones, teoremas ( lemas, corolarios, proposiciones ) dados en clase.
- ◆ La evaluación será el viernes de la semana siguiente a la semana en que se terminan las exposiciones de los temas.
- ◆ La evaluación valdrá el 8 % del total de la nota.

### Recursos:

- ◆ Pizarrón y tiza.
- ◆ Al menos tres ejemplares de los libros recomendados en la bibliografía.
- ◆ Acceso a internet.
- ◆ Licencias de los programas Mathematica y Maple, usados para graficar los objetos estudiados en este curso.

### Cronología:

5 clases (  $2\frac{1}{2}$  semanas ).

**Unidad 3: Superficies**

Temas	Objetivos específicos	Estrategias metodológicas
3.1 Superficies regulares.	(1) Saber decidir cuándo un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ es una superficie.	<ul style="list-style-type: none"> <li>(a) Definir parametrizaciones locales de una superficie. Definir una superficie.</li> <li>(b) Mostrar ejemplos básicos y construir parametrizaciones en cada caso: plano, esfera, cono truncado.</li> <li>(c) Usar el cono truncado y la superficie cilíndrica construida a partir de la curva <math>(x, \sin(\frac{1}{x}))</math>, para discutir dos conjuntos que no son superficies.</li> <li>(d) Demostrar que el conjunto de nivel de una función con gradiente no nulo es una superficie.</li> <li>(e) Como aplicación del ítem anterior mostrar algunas superficies cuádricas y verificar los ejemplos ya presentados anteriormente.</li> </ul>
3.2 Cambio de coordenadas; funciones diferenciables entre superficies..	<ul style="list-style-type: none"> <li>(1) Manejar el lenguaje de cambios de coordenadas.</li> <li>(2) Saber decidir cuándo una función, aplicación es diferenciable.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>(a) Demostrar el teorema de rectificación de superficies. Como consecuencia obtener una definición equivalente de superficie.</li> <li>(b) Definir cambios de coordenadas. Mostrar algunos ejemplos con las parametrizaciones de los ejemplos ya mencionados. Demostrar que los cambios de coordenadas son diferenciables</li> <li>(c) Definir funciones escalares diferenciables y funciones entre superficies diferenciables. Definir difeomorfismos. Mostrar ejemplos entre las superficies antes mencionadas (restricciones de funciones diferenciables de abiertos de <math>\mathbb{R}^3</math>, restricciones de funciones diferenciables entre abiertos de <math>\mathbb{R}^3</math>).</li> </ul>

**Unidad 3: Superficies**

Temas	Objetivos específicos	Estrategias metodológicas
<p>3.3 El plano tangente; la diferencial de una función diferenciable entre superficies.</p>	<p>(1) Saber qué es un vector tangente y su representación geométrica en <math>\mathbb{R}^3</math>. (2) Saber manejar el cálculo diferencial entre superficies: cálculo de vectores y espacios tangentes, calcular derivadas.</p>	<p>(a) Definir vector tangente como el vector velocidad de una curva adaptada en la superficie. Definir espacio tangente en un punto. Mostrar los ejemplos: el plano, la esfera, el conjunto de nivel de una función escalar con gradiente no nulo. (b) Demostrar las propiedades del espacio tangente: es un espacio vectorial de dimensión 2 y construir una base asociada a una parametrización dada. (c) Definir la diferencial de una función escalar y de una aplicación ( mapa, mapeo ) entre superficies. Mostrar ejemplos. (d) Mostrar como el teorema de los multiplicadores de Lagrange encaja en este lenguaje. Presentar una demostración con este lenguaje.</p>
<p>3.4 La primera forma fundamental, área de una superficie.</p>	<p>(1) Entender el concepto de área en superficies. (2) Saber calcular áreas de superficies.</p>	<p>(a) Repasar Integración Riemann en dos variables: en particular el teorema de cambio de variable. (b) Definir celdas en superficies y enunciar el teorema de descomposición en celdas ( sin demostración). Mostrar ejemplos en la esfera, el toro y en una superficie no compacta. (c) Definir el área de una superficie. Calcular directamente con la definición el área de una esfera y de un toro. Mostrar un ejemplo de una superficie no compacta con área finita y uno de una superficie no acotada con área finita.</p>

### Unidad 3: Superficies

Temas	Objetivos específicos	Estrategias metodológicas
3.5 Orientación de superficies.	(1) Entender qué es una orientación de una superficie. (2) Saber decidir cuándo una superficie es orientable.	(a) Definir campos vectoriales diferenciables. (b) Definir orientación en términos de campos vectoriales diferenciales normales. Mostrar ejemplos: el plano, la esfera. Mostrar que la Banda de Möbius no es orientable. Usar esto para mostrar que no toda superficie es el conjunto de ceros de una función diferenciable con gradiente no nulo. (c) Presentar la definición de orientabilidad de superficies en términos de cambios de coordenadas con determinante positivo.

## Unidad 3: Superficies

### Estrategias de evaluación:

- ◆ La evaluación de estos temas será hecha con un examen escrito.
- ◆ Se evaluarán directamente la comprensión de las definiciones, teoremas ( lemas, corolarios, proposiciones ) dados en clase.
- ◆ La evaluación será el viernes de la semana siguiente a la semana en que se terminan las exposiciones de los temas.
- ◆ La evaluación valdrá el 8 % del total de la nota.

### Recursos:

- ◆ Pizarrón y tiza.
- ◆ Al menos tres ejemplares de los libros recomendados en la bibliografía.
- ◆ Acceso a internet.
- ◆ Licencias de los programas Mathematica y Maple, usados para graficar los objetos estudiados en este curso.

### Cronología:

6 clases ( 3 semanas ).

### Unidad 4: Operadores de forma

Temas	Objetivos específicos	Estrategias metodológicas
4.1 El operador de forma de una superficie.	(1) Entender cómo se dobla o tuerce una superficie.	(a) Definir el operador de forma asociado a un campo vectorial normal. Mostrar los ejemplos: plano, esfera, cilindro. (b) Discutir las propiedades del operador de forma: linealidad, simetría. (c) Definir la Segunda Forma Fundamental de una superficie, discutir las diferencias entre el caso orientable y el no orientable.
4.2 Curvatura normal.	(1) Entender la relación entre la curvatura de una curva en una superficie y la manera cómo ésta se tuerce.	(a) Definir la curvatura normal de una curva en una superficie. Demostrar el teorema de Meusnier. Calcular la curvatura normal en los ejemplos del ítem anterior. (b) Definir las curvaturas principales y los vectores de curvatura principal.
4.3 Curvatura Gaussiana.	(1) Entender los diferentes invariantes asociados al operador de forma. (2) Entender cómo la curvatura gaussiana mide cuánto se dobla o tuerce una superficie. (3) Entender la forma local de una superficie.	(a) Definir la curvatura gaussiana como el determinante de un operador de forma. Calcularla en los ejemplos mencionados anteriormente. (b) Definir puntos elípticos, hiperbólicos y parabólicos de una superficie. Mostrar ejemplos de éstos en la esfera, el plano, el cilindro. Presentar la forma local de una superficie en términos de las curvaturas principales. (c) Demostrar que la curvatura gaussiana es un invariante por congruencias.

## Unidad 4: Operadores de forma

Temas	Objetivos específicos	Estrategias metodológicas
4.4 Técnicas de cálculo.	(1) Saber calcular los invariantes de una superficie: curvatura gaussiana, curvatura media.	(a) Presentar la fórmula para el cálculo de la curvatura en términos del operador de forma y una base del espacio tangente, como corolario obtener que la curvatura gaussiana es una función diferenciable. Usar esta fórmula para calcular los ejemplos del toro y el elipsoide. (b) Cálculo de la curvatura gaussiana dada una parametrización de la superficie. Obtener las formulas clásicas.
4.5 Curvas especiales en superficies.		(a) Presentar en la Unidad 5, tema 5.2 y 5.3

## Unidad 4: Operadores de forma

### Estrategias de evaluación:

- ◆ La evaluación de estos temas será hecha con un examen escrito.
- ◆ Se evaluarán directamente la comprensión de las definiciones, teoremas ( lemas, corolarios, proposiciones ) dados en clase.
- ◆ La evaluación será el viernes de la semana siguiente a la semana en que se terminan las exposiciones de los temas.
- ◆ La evaluación valdrá el 8 % del total de la nota.
- ◆ En la mitad de esta unidad se hará una evaluación integral con un peso del 30 % y que abarcará las unidades 1,2,3 y parte de ésta.

### Recursos:

- ◆ Pizarrón y tiza.
- ◆ Al menos tres ejemplares de los libros recomendados en la bibliografía.
- ◆ Acceso a internet.
- ◆ Licencias de los programas Mathematica y Maple, usados para graficar los objetos estudiados en este curso.

### Cronología:

4 clases ( 2 semanas ).

**Unidad 5: La Geometría intrínseca de una superficie**

Temas	Objetivos específicos	Estrategias metodológicas
5.1 El Teorema de Gauss	(1) Entender qué se entiende por geometría intrínseca. (2) Entender que la curvatura gaussiana es un invariante intrínseco.	(a) Definir la derivada covariante en $\mathbb{R}^n$ , mostrar ejemplos y demostrar sus propiedades. (b) Definir la derivada covariante intrínseca y hacer ver por qué no se puede definir como la definida en el ítem anterior; mostrar cómo se calcula en coordenadas y presentar sus propiedades ( sin demostración esto último, se deja como ejercicio ). (c) Definir los símbolos de Christoffel y presentar ejemplos: el plano, la esfera ( usar coordenadas esféricas ), el toro ( superficies de revolución ). (d) Demostrar que la derivada covariante es intrínseca y a partir de aquí demostrar el teorema Egregium de Gauss.
5.2 Transporte paralelo; geodésicas.	(1) Entender la derivación direccional de campos en superficies. (2) Entender la noción de paralelismo en una superficie y saber compararla con la noción de paralelismo en el plano. (3) Entender qué es una geodésica y saber calcularla en algunos ejemplos específicos.	(a) Definir campos en curvas. (b) Definir la derivada covariante de campos en curvas, presentar las propiedades básicas y dejarlas como ejercicios. (c) Definir campos paralelos y mostrar la ecuación diferencial lineal que los determina. Mostrar ejemplos en la esfera.

## Unidad 5: La Geometría intrínseca de una superficie

Temas	Objetivos específicos	Estrategias metodológicas
	<p>(4) Entender la diferencia entre propiedades intrínsecas y extrínsecas de una superficie.</p> <p>(5) Saber decidir cuándo dos superficies son congruentes.</p>	<p>(d) Definir geodésicas, presentar ejemplos: el plano, la esfera, el cilindro, superficies de revolución ( teorema de Clairaut ). Enfatizar que una geodésica tiene que estar parametrizada por longitud de arco. Presentar la ecuación diferencial que rige el comportamiento de las geodésicas. Demostrar la existencia y unicidad de una geodésica fijada un punto y la velocidad por éste. Propiedades.</p> <p>(e) Presentar el Teorema Fundamental de Superficies y su demostración.</p>
<p>5.3 Teorema de Gauss-Bonnet y sus aplicaciones.</p>	<p>(1) Entender cómo la curvatura gaussiana incide en la geometría local de una superficie.</p> <p>(2) Entender la relación que existe entre la curvatura gaussiana y la topología de una superficie.</p> <p>(3) Entender qué es un invariante topológico para las superficies, en particular cómo la característica de Euler clasifica las superficies compactas.</p>	<p>(a) Definir la curvatura geodésica de una curva, mostrar su relación con la curvatura de la curva.</p> <p>(b) Enunciar y demostrar la fórmula de Gauss-Bonnet para celdas triangulares.</p> <p>(c) Definir la característica de Euler de una superficie compacta, vía la triangulación de una superficie. Calcularla en la esfera y el Toro.</p> <p>(d) Demostrar la versión global de teorema de Gauss-Bonnet, usar este teorema para demostrar que la característica de Euler está bien definida ( no depende de la triangulación ).</p> <p>(e) Presentar algunas aplicaciones del Teorema de Gauss-Bonnet como la incidencia que tiene la curvatura en la suma de los ángulos internos de un triángulo y cómo incide la curvatura en la topología de la superficie.</p>

## Unidad 5: La Geometría intrínseca de una superficie

### Estrategias de evaluación:

- ◆ La evaluación de estos temas será hecha con un examen escrito.
- ◆ Se evaluarán directamente la comprensión de las definiciones, teoremas ( lemas, corolarios, proposiciones ) dados en clase.
- ◆ La evaluación será el viernes de la semana siguiente a la semana en que se terminan las exposiciones de los temas.
- ◆ La evaluación valdrá el 8 % del total de la nota.

### Recursos:

- ◆ Pizarrón y tiza.
- ◆ Al menos tres ejemplares de los libros recomendados en la bibliografía.
- ◆ Acceso a internet.
- ◆ Licencias de los programas Mathematica y Maple, usados para graficar los objetos estudiados en este curso.

### Cronología:

6 clases ( 3 semanas ).

## Unidad 6: Geometría Diferencial Global

Temas	Objetivos específicos	Estrategias metodológicas
6.1 La rigidez de la esfera	(1) Entender cómo en algunas superficies compactas su geometría intrínseca determina su forma como subconjunto de $\mathbb{R}^3$ .	(a) Definir superficies rígidas en $\mathbb{R}^3$ . (b) Caracterizar la esfera y el plano como las únicas superficies que tienen todos sus puntos umbílicos. (c) Demostrar el lema de Hilbert. (d) Demostrar que toda superficie compacta con curvatura constante positiva y de aquí deducir la rigidez de la esfera.
6.2 Superficies de Curvatura Gaussiana Cero.	(1) Saber decidir cuándo una superficie es desarrollable. (2) Saber que las únicas superficies con curvatura gaussiana nula son las superficies desarrollables y entender porqué ésto es así.	(a) Demostrar que no existen superficies compactas con curvatura gaussiana no-positiva. (b) Definir superficies desarrollables y presentar ejemplos. (c) Enunciar y discutir el teorema: las únicas superficies con curvatura gaussiana cero son las superficies desarrollables cerradas.
6.2 El teorema de Hilbert.	(1) Saber cuáles son las superficies con curvatura gaussiana constante positiva.	(a) Enunciar y discutir el teorema de Hilbert: una superficie cerrada con curvatura constante positiva es una esfera.

## Unidad 6: Geometría Diferencial Global

### Estrategias de evaluación:

- ◆ Este tema será evaluado en una evaluación integral con un peso del 30 % y que abarcará las unidades 4,5,6.

### Recursos:

- ◆ Pizarrón y tiza.
- ◆ Al menos tres ejemplares de los libros recomendados en la bibliografía.
- ◆ Acceso a internet.
- ◆ Licencias de los programas Mathematica y Maple, usados para graficar los objetos estudiados en este curso.

### Cronología:

3 clases (  $1\frac{1}{2}$  semanas ).