

Unidad 1: Funciones Analíticas

Temas	Objetivos específicos	Estrategias metodológicas
<p>1.1 Números complejos. El plano complejo. Proyección estereográfica y punto al infinito.</p>	<p>(1) Conocer la definición de número complejo, su representación en el plano, su forma polar y las funciones parte real y parte imaginaria.</p> <p>(2) Conocer las operaciones entre números complejos: suma, producto inverso, conjugado, módulo y sus representaciones geométricas en el plano.</p> <p>(3) Conocer la esfera de Riemann (la esfera S^2) y la biyección (proyección estereográfica) entre S^2 y el plano complejo completado $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.</p> <p>(4) Saber representar con ecuaciones en \mathbb{C} círculos y recta del plano complejo.</p>	<p>(a) Hacer una introducción histórica del surgimiento de \mathbb{C}, en particular la necesidad de completar algebraicamente a \mathbb{R}.</p> <p>(b) Un excelente ejercicio de reflexión y de conexión con otras materias especialmente el álgebra, es dejar que los estudiantes prueben que \mathbb{C} es la extensión de \mathbb{R} más pequeña de \mathbb{R} en la cual la ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene solución.</p> <p>(c) Es importante hacer un repaso rápido de las nociones topológicas de abiertos en el plano y de conexidad.</p>
<p>1.2 Funciones de una variable compleja. Diferenciabilidad. Polinomios analíticos. Series de potencia. Diferenciabilidad (analiticidad) de las series de potencia (Teorema de Abel).</p>	<p>(1) Conocer el concepto de función analítica en una región (diferenciable en una región).</p> <p>(2) Conocer algunas funciones elementales: polinomios y su analiticidad.</p> <p>(3) Conocer el criterio de Cauchy para convergencia de sucesiones en \mathbb{C} (notar que la completitud de \mathbb{R} nos da la completitud de \mathbb{C}).</p> <p>(4) Conocer las series de potencia y la noción de convergencia uniforme; los criterios de Cauchy y M de Weierstrass.</p> <p>(5) Probar y manejar el Teorema de Abel: las series de potencia son infinitamente diferenciables en su región de convergencia y su derivada se obtiene derivando término a término la serie.</p>	<p>(a) Recordar los conceptos de límite, continuidad y diferenciabilidad de funciones reales y traducirlos a funciones complejas.</p> <p>(b) Manejar esos conceptos con funciones elementales dadas. Dar ejemplos de funciones continuas no diferenciables.</p> <p>(c) Mostrar la fuerza y rigidez del concepto de diferenciabilidad de las funciones complejas mediante el Teorema del mapeo conforme.</p> <p>(d) Como ejemplo del Teorema de Abel debe introducirse la función exponencial y ver que ella es entera.</p> <p>(e) Insistir en el contenido analítico de la prueba del Teorema de Abel. Esas técnicas son paradigmáticas a la hora de hacer estimaciones.</p>

Unidad 1: Funciones Analíticas

Temas	Objetivos específicos	Estrategias metodológicas
<p>1.3 Las funciones e^z, $\text{sen}(z)$, $\text{cos}(z)$ logaritmo y potencia.</p>	<ol style="list-style-type: none"> (1) Conocer y usar las propiedades más significativas de la función exponencial. (2) Conocer y usar las relaciones entre la función exponencial y las funciones trigonométricas definidas en términos de la exponencial. Calcular sus series de potencia. (3) Establecer las conexiones entre las funciones exponencial, seno y coseno complejas y las reales. (4) Definir funciones a partir de funciones analíticas elementales conocidas y encontrar dominios máximos de analiticidad. (5) Definir las funciones logarítmicas y potenciales y sus ramas. 	<ol style="list-style-type: none"> (a) Usando el hecho que $(e^z)' = e^z$ (verificado usando el teorema de Abel) establecer todas las propiedades fundamentales de la exponencial. (b) Usar las propiedades de la exponencial para descubrir dónde ella es inyectiva. (c) Definir el logaritmo como $\log(z) = \log z + i \cdot \text{arg}(z)$ y comprobar que es la inversa de la exponencial en una rama dada. (d) Descubrir cómo son transformadas algunas regiones por estas funciones elementales. Para ello hay que efectuar buenos dibujos. (e) Hacer ejercicios donde se calcula el dominio de funciones definidas usando las funciones notables ayudan a comprender bien las definiciones básicas de esta funciones.
<p>1.4 Ecuaciones de Cauchy-Riemann.</p>	<ol style="list-style-type: none"> (1) Reconocer, comprender y poder utilizar el Teorema de Cauchy-Riemann que establece la conexión entre la diferenciabilidad de una función compleja con la diferenciabilidad de la función vista como una función de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 y ecuaciones que deben satisfacer las funciones coordenadas. 	<ol style="list-style-type: none"> (a) Mediante ejemplos de funciones que no son diferenciables, v.g. z verificar el teorema de Cauchy Riemann. (b) Mostrar como una aplicación muy útil del Teorema de Cauchy Riemann el teorema de la función inversa. Esto conecta el Teorema de la función inversa de \mathbb{R}^2 con las funciones analíticas definidas como inversa. Como corolario se pueden calcular las derivadas de las funciones logarítmicas, potenciales y en particular las de las raíces n-ésimas.

Unidad 1: Funciones Analíticas

Objetivos de la Unidad:

- ◆ Dar una visión histórica del desarrollo de los números complejos y de las funciones analíticas.
- ◆ Mostrar las diferencias de comportamiento entre diferenciabilidad compleja y real en \mathbb{R}^2 .

Estrategias de evaluación:

- ◆ "Quices" escritos semanales, realmente breves (5 minutos), de verificación de conceptos dados en clase. Por ejemplo: Escriba las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Esta actividad vale **15 %** de la nota de la unidad.
- ◆ Interrogatorios orales semanales breves (5 minutos) de verificación de conceptos dados en clase. Por ejemplo: Dé la interpretación geométrica del producto de dos números complejos. Esta actividad vale **5 %** de la nota de la unidad.
- ◆ Un trabajo escrito sobre toda la unidad. Este trabajo vale **20 %** de la nota de la unidad.
- ◆ Una evaluación escrita sobre toda la unidad de dos horas de duración al final de la misma. Esta evaluación valdrá un **60 %** de la nota de la unidad y se realizará durante la **semana 5** del período.

Recursos:

- ◆ Pizarrón.
- ◆ Tizas o marcadores de color.
- ◆ Libros recomendados.

Cronología: 10 sesiones de trabajo en aula, de las cuales 2 asistenciales (4 semanas).

Unidad 2: El Teorema de Cauchy

Temas	Objetivos específicos	Estrategias metodológicas
2.1 Integrales de contorno (línea).	(1) Conocer y manejar la definición integral de línea. (2) Establecer y manejar las propiedades de linealidad de la integral. (3) Establecer y manejar la desigualdad triangular generalizada para integrales. (4) Establecer y manejar el Teorema fundamental del cálculo para integrales de contorno. (5) Establecer y manejar condiciones que sean equivalentes al hecho que la integral sea independiente de la trayectoria.	(a) Es importante hacer un repaso rápido de las nociones de curva continua a trozos, longitud de una curva e integrales de contorno en \mathbb{R}^2 . (b) La introducción de las integrales de contorno se hará mediante las integrales de línea de las funciones parte real e imaginaria. La ventaja de este enfoque es apoyarse fuertemente en lo que ya se ha hecho en cálculo de una variable real. (c) Insistir en que las integrales de contorno son independientes de la parametrización de la curva. (d) Insistir en la importancia de la desigualdad $ \int_{\gamma} f \leq M\ell(\gamma)$ cuando $ f(z) \leq M$.
2.2 El Teorema de Cauchy. Versiones débiles y de Cauchy-Goursat.	(1) Conocer y ser capaz de probar la versión débil del Teorema de Cauchy mediante el Teorema de Green y las ecuaciones de Cauchy-Riemann (2) Conocer y ser capaz de probar el Teorema de Cauchy-Goursat para rectángulos y luego para discos. (3) Extender el teorema de Cauchy a funciones analíticas excepto un número finito de puntos pero continua en ellos. (4) Conocer y manejar la noción de homotopía y de conjunto simplemente conexo. (5) Conocer y ser capaz de probar el teorema de Cauchy en regiones simplemente conexas.	(a) Introducir todas las nociones de manera intuitiva en un primer abordaje. Si es posible hacer dibujos. Esto es particularmente pertinente con la noción de homotopía y conjunto simplemente conexo. (b) Ir gradualmente probando el Teorema de Cauchy. (c) Hacer énfasis en el método de bisección introducido por Edouard Goursat. Es una herramienta poderosa para hacer estimaciones. (d) Hacer hincapié en las hipótesis que se necesitan. (e) Dar ejemplos en los que no vale la conclusión del teorema y luego buscar cuáles son las hipótesis que fallan.

Unidad 2: El Teorema de Cauchy

Temas	Objetivos específicos	Estrategias metodológicas
<p>2.3 Fórmula integral de Cauchy. Teorema de Liouville y Teorema fundamental del álgebra.</p>	<ol style="list-style-type: none"> (1) Definir el índice de una curva. Entender su significado intuitivo. (2) Establecer con su prueba respectiva la fórmula integral de Cauchy. (3) Establecer con su prueba respectiva la fórmula integral de Cauchy para las derivadas. (4) Notar que una consecuencia importante es la existencia de las derivadas de todos los órdenes. (5) Establecer con su prueba respectiva el Teorema de Morera. (6) Establecer con su prueba respectiva el Teorema de Liouville. (7) Establecer con su prueba respectiva el Teorema fundamental del álgebra. 	<ol style="list-style-type: none"> (a) Hacer énfasis en la prueba de la fórmula integral de Cauchy para las derivadas. Prueba por inducción en la que la hipótesis de inducción es de una gran fuerza. (b) Es importante recordar resultados de topología del plano como el siguiente: la imagen de un compacto por una función continua es un compacto. Esto es particularmente útil a la hora de probar el Teorema fundamental del álgebra. También es un buen ejercicio probar "directamente" lo siguiente: Si $p(z)$ es un polinomio para cualquier $M > 0$ existe r tal que si $z > r$ entonces $f(z) > M$ (c) Hacer comentarios históricos acerca de la prueba del Teorema fundamental del álgebra. En particular acerca del trabajo pionero de Gauss.
<p>2.4 Propiedades de funciones Analíticas. Principio del módulo máximo y teorema del valor medio</p>	<ol style="list-style-type: none"> (1) Establecer con su prueba respectiva la versión local del Teorema del valor promedio (medio). (2) Establecer con su prueba respectiva la versión local del principio del módulo máximo. (3) Establecer con su prueba respectiva la versión global del principio del módulo máximo. (4) Establecer con su prueba respectiva el Lema de Schwarz. 	<ol style="list-style-type: none"> (a) Interpretar el teorema del módulo máximo y extraer información acerca del comportamiento de las funciones analíticas. (b) Comparar una vez más el comportamiento de las funciones reales con el de las funciones analíticas e insistir una vez más sus notables diferencias.

Unidad 2: El Teorema de Cauchy

Objetivos de la Unidad:

- ◆ Mostrar la importancia y las aplicaciones del Teorema de Cauchy. Hacer ver que es uno de los belvederes del análisis complejo en particular y de la matemática en general.
- ◆ Continuar mostrando las diferencias de comportamiento entre diferenciabilidad compleja y real en \mathbb{R}^2 , en particular el hecho de que las funciones complejas que son diferenciables (analíticas) son infinitamente diferenciables.

Estrategias de evaluación:

- ◆ "Quices" escritos semanales, realmente breves (5 minutos), de verificación de conceptos dados en clase. Por ejemplo: Calcular el valor de $\int_{\gamma} 1/z$, donde γ es el círculo unitario parametrizado por e^{it} con $t \in [0, 2\pi]$. Esta actividad vale **15 %** de la nota de la unidad.
- ◆ Interrogatorios orales semanales breves (5 minutos) de verificación de conceptos dados en clase. Por ejemplo: Enuncie el principio del módulo máximo. Esta actividad vale **5 %** de la nota de la unidad.
- ◆ Dos trabajos escritos: el primero sobre los primeros dos temas y el segundo sobre los dos últimos temas. Estos trabajos valen **10 %** cada uno de la nota de la unidad.
- ◆ Dos evaluaciones escritas ; la primera sobre los primeros dos temas y la segunda sobre los dos últimos temas. Cada una de dos horas de duración. Estas evaluaciones valdrán un **30 %** cada una de la nota de la unidad y se realizará durante las **semanas 7 y 10** del período.

Recursos:

- ◆ Pizarrón.
- ◆ Tizas o marcadores de color.
- ◆ Libros recomendados.

Cronología: 16 sesiones de trabajo en aula, de las cuales 4 asistenciales (6 semanas).

Unidad 3: Representación en Serie de Funciones analíticas

Temas	Objetivos específicos	Estrategias metodológicas
3.1 Series convergentes de funciones analíticas.	(1) Conocer, demostrar y saber utilizar el Teorema de convergencia analítica.	(a) Hacer un repaso con sus demostraciones de los criterios de convergencia para series. (b) Como aplicación del Teorema de convergencia analítica mostrar la analiticidad de la función ζ de Riemann.
3.2 El Teorema de Taylor	(1) Conocer, demostrar y saber utilizar el Teorema de Taylor. (2) Encontrar la serie de Taylor de las funciones analíticas así como su radio de convergencia.	(a) Motivar usando estos resultados para encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales. (b) Poner juntos el Teorema de Abel y el de Taylor para concluir que una función es analítica ssi se expresa como una serie de potencias en una vecindad adecuada.
3.3 Series de Laurent y clasificación de singularidades.	(1) Conocer, demostrar y saber utilizar el Teorema de expansión Laurent. (2) Calcular la expansión de Laurent de algunas funciones analíticas en ciertos discos. (3) Conocer la clasificación de singularidades y distinguirlas: singularidades removible, polo simple, polos de orden k , polos de orden ≥ 1 . (4) Conocer, demostrar y saber utilizar el Teorema de Cassorati-Wierstrass.	(a) Usar técnicas de cálculo para encontrar de manera global la expansión de Laurent de una función analítica en un disco.

Unidad 3: Representación en Serie de Funciones analíticas

Objetivos de la Unidad:

- ◆ Darle fundamento al nombre de funciones analíticas: son aquellas y solamente aquellas que se pueden definir mediante series de potencia.

Estrategias de evaluación:

- ◆ "Quices" escritos semanales, realmente breves (5 minutos), de verificación de conceptos dados en clase. Por ejemplo: Dé la expansion de Taylor de $4z[\sin(z) + \cos(z)]$. Esta actividad vale **15 %** de la nota de la unidad.
- ◆ Interrogatorios orales semanales breves (5 minutos) de verificación de conceptos dados en clase. Por ejemplo: Dé el concepto de singularidad esencial. Esta actividad vale **5 %** de la nota de la unidad.
- ◆ Un trabajo escrito sobre toda la unidad. Este trabajo vale **20 %** de la nota de la unidad.
- ◆ Una evaluación escrita sobre toda la unidad de dos horas de duración al final de la misma. Esta evaluación valdrá un **60 %** de la nota de la unidad y se realizará durante la **semana 12** del período.

Recursos:

- ◆ Pizarrón.
- ◆ Tizas o marcadores de color.
- ◆ Libros recomendados.

Cronología: 5 sesiones de trabajo en aula, de las cuales 1 asistencial (2 semanas).

Unidad 4: Cálculo de residuos

Temas	Objetivos específicos	Estrategias metodológicas
4.1 Cálculo de residuos	(1) Desarrollar técnicas para calcular residuos.	(a) Establecer una casuística para calcular los residuos de ciertas funciones con singularidades que son polos de orden ≤ 2 o polos de orden k .
4.2 El Teorema del residuo	(1) Conocer, demostrar y saber utilizar el Teorema del residuo.	(a) Ilustrar con dibujos la prueba del teorema del residuo y su generalizaciones (b) Motivar usando el teorema del residuo para calcular integrales de contorno.
4.3 Evaluación de integrales definidas.	(1) Calcular integrales definidas usando el Teorema de los residuos de los siguientes tipos: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$; transformada de Fourier; integrales trigonométricas; valor principal de Cauchy.	(a) Ilustrar las técnicas de prueba con integrales de contorno apropiadas.
4.4 Evaluación de series infinita y expansiones en fracciones parciales.	(1) Establecer, probar y saber utilizar el Teorema de la adición. (2) Establecer, probar y saber utilizar el Teorema del desarrollo en fracciones parciales.	(a) Motivar el uso de estas técnicas plantando problemas de cálculo de series, por ejemplo $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi/2$.

Unidad 4: Cálculo de residuos

Objetivos de la Unidad:

- ◆ Dar aplicaciones del análisis complejo al cálculo de integrales reales y de series

Estrategias de evaluación:

- ◆ "Quices" escritos semanales, realmente breves (5 minutos), de verificación de conceptos dados en clase. Por ejemplo: Calcule el residuo de $1/\operatorname{sen}(z)$ en $z = 0$. Esta actividad vale **15 %** de la nota de la unidad.
- ◆ Interrogatorios orales semanales breves (5 minutos) de verificación de conceptos dados en clase. Por ejemplo: Enuncie el Teorema del residuo. Esta actividad vale **5 %** de la nota de la unidad.
- ◆ Un trabajo escrito sobre toda la unidad. Este trabajo vale **20 %** de la nota de la unidad.
- ◆ Una evaluación escrita sobre toda la unidad de dos horas de duración al final de la misma. Esta evaluación valdrá un **60 %** de la nota de la unidad y se realizará durante la **semana 15** del período.

Recursos:

- ◆ Pizarrón.
- ◆ Tizas o marcadores de color.
- ◆ Libros recomendados.

Cronología: 5 sesiones de trabajo en aula, de las cuales 1 asistencial (2 semanas).