



Unidad 1: Topología de \mathbb{R}^n

Cronología: 14 horas ($2\frac{1}{2}$ semanas) en 7 sesiones de trabajo en aula, incluyendo tres en las horas asistenciales: dos de ejercicios y la de la evaluación escrita.

Recursos instruccionales especiales para esta unidad:

Temas	Objetivos específicos	Metodología
1.1 Espacio vectorial \mathbb{R}^n .	<p>Este tema deberá capacitar al estudiante para:</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) Definir la estructura de espacio vectorial en \mathbb{R}^n. (2) Definir el producto interno en \mathbb{R}^n. (3) Definir el producto vectorial en \mathbb{R}^3 (4) Definir la norma de un vector en \mathbb{R}^n. (5) Enunciar y demostrar las propiedades básicas de las operaciones mencionadas en los item anteriores. 	<p>Para que el estudiante logre alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades:</p> <ol style="list-style-type: none"> (a) Repasar las operaciones algebraicas patrones de \mathbb{R}^n: Suma de vectores y multiplicación de un vector por un escalar. (b) Repasar la operación de producto interno y presentar con demostración la desigualdad de Cauchy-Schwartz. (c) Repasar la definición de norma de un vector y presentar sus propiedades básicas con demostrando (se puede dejar alguna como ejercicio) : positividad, homogeneidad y desigualdad triangular (d) Repasar la operación de producto vectorial.
1.2 Conjuntos abiertos y cerrados.	<p>Este tema deberá capacitar al estudiante para:</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) Definir conjuntos abiertos y cerrados en \mathbb{R}^n. (2) Decidir, usando la definición, cuándo un conjunto dado es abierto o cerrado. (3) Enunciar y demostrar las propiedades básicas de conjuntos abiertos y cerrados. (4) Usar las propiedades básicas para decidir cuándo un conjunto dado es abierto o cerrado. 	<p>Para que el estudiante logre alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades:</p> <ol style="list-style-type: none"> (a) Definir conjuntos abiertos y cerrados. Presentar que el conjunto vacío y \mathbb{R}^n comparten esta propiedad. (b) Calcular algunos ejemplos: semiplanos, bolas, etc.

Unidad 1: Topología de \mathbb{R}^n

Temas	Objetivos específicos	Metodología
		<p>(c) Presentar y demostrar las propiedades básicas de los conjuntos abiertos: unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto, intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto. En este último caso presentar un contraejemplo para el caso de intersecciones infinitas.</p> <p>(d) Presentar y demostrar las propiedades básicas de los conjuntos cerrados: unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, intersección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado. En este último caso presentar un contraejemplo para el caso de uniones infinitas.</p> <p>(e) Presentar algunos ejemplos de conjuntos abiertos que se puedan descomponer como uniones de conjuntos abiertos, intersecciones finitas de conjuntos abiertos, de manera de decidir la abertura usando las propiedades de los conjuntos abiertos.</p>
<p>1.3 Puntos interiores, de acumulación y de frontera.</p>	<p>Este tema deberá capacitar al estudiante para:</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) Definir puntos interiores, puntos de acumulación y puntos de frontera e interpretar geoméricamente estas definiciones. (2) Decidir cuándo un punto dado de un conjunto es un punto interior, de acumulación o de frontera. (3) Ejemplificar las nociones anteriores. (4) Mostrar la relación que existe entre ser punto interior, de acumulación o de frontera de un conjunto y pertenecer a este conjunto. 	<p>Para que el estudiante logre alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades:</p> <ol style="list-style-type: none"> (a) Definir punto interior, de acumulación y de frontera. (b) Mostrar ejemplos de las nociones anteriores y pasar la idea geométrica de lo que representan estas nociones.

Unidad 1: Topología de \mathbb{R}^n

Temas	Objetivos específicos	Metodología
1.4 Interior, Clausura y Frontera de un conjunto.	<p>Este tema deberá capacitar al estudiante para:</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) Definir interior, clausura y frontera de un conjunto. Interpretar e ilustrar estos conceptos con ejemplos. (2) Enunciar y demostrar las propiedades básicas de estas operaciones. (3) Calcular el interior, la clausura y la frontera de un conjunto dado; ya bien sea, partiendo de las definiciones o usando las propiedades de estas operaciones. 	<ol style="list-style-type: none"> (a) Definir el interior, la clausura y la frontera de un conjunto. Presentar ejemplos que ilustren estos conceptos y que no choquen con la idea intuitiva que ellos representan. (b) Exponer ejemplos que muestren cómo chocan estos conceptos con la idea intuitiva que ellos representan: tratar el caso $\mathbb{Q}^2 \cap [0, 1]^2$. (c) Presentar y demostrar las propiedades básicas (dejando la demostración de algunas como ejercicio) de las operaciones interior, clausura y frontera de un conjunto. (d) Presentar algunas relaciones entre estas operaciones, por ejemplo: $\partial(A) = \overline{A} \setminus \text{int}(A)$.
1.5 Sucesiones en \mathbb{R}^n .	<p>Este tema deberá capacitar al estudiante para:</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) Definir sucesiones en \mathbb{R}^n. (2) Definir la convergencia de una sucesión. (3) Enunciar y demostrar las propiedades básicas las sucesiones. (4) Decidir cuándo una sucesión es convergente. 	<p>Para que el estudiante logre alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades:</p> <ol style="list-style-type: none"> (a) Definir sucesiones en \mathbb{R}^n, enfatizando que es una extensión natural de la definición se sucesiones reales. (b) Definir la convergencia de una sucesión, enfatizando que es una extensión natural de la definición se sucesiones reales. (c) Enunciar el criterio de convergencia de Cauchy y dejar la demostración para el estudiante, enfatizando que la demostración es la misma que el caso de sucesiones reales, con la modificaciones del caso. También demostrar el criterio: una sucesión converge sii sus sucesiones componentes convergen y de aquí deducir la completitud de \mathbb{R}^n a partir de la completitud de \mathbb{R}^n. (d) Enunciar las propiedades básicas de las sucesiones, dejando la demostración de éstas a los estudiantes.

Unidad 1: Topología de \mathbb{R}^n

Temas	Objetivos específicos	Metodología
1.5 Conjuntos Compactos.	<p>Este tema deberá capacitar al estudiante para:</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) Definir conjuntos compactos. (2) Enunciar y demostrar las propiedades básicas de conjuntos compactos. (3) Decidir cuándo un conjunto dado es compacto. (4) Enunciar y demostrar la equivalencia entre las diferentes definiciones de conjuntos compactos. 	<p>Para que el estudiante logre alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades:</p> <ol style="list-style-type: none"> (a) Definir en alguna de sus formulaciones equivalentes un conjunto compacto. (b) Presentar como ejemplos básicos el intervalo $[0, 1]$ y el conjunto $A = \{\frac{1}{n} : n > 0\} \cup \{0\}$. (c) Presentar las diferentes definiciones de conjuntos compactos y demostrar sus equivalencias (Teorema Heine-Borel, Teorema de Bolzano, etc.) (d) Presentar algunas propiedades de conjuntos compactos que ayuden a decidir cuándo un conjunto compacto es compacto, e.g. uniones finitas de compactos es compacto, etc.

Unidad 1: Topología de \mathbb{R}^n

Temas	Objetivos específicos	Metodología
1.6 Conjuntos Arco-conexos.	<p>Este tema deberá capacitar al estudiante para:</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) Definir conjunto arco-conexo. (2) Enunciar que todo abierto arco-conexo de \mathbb{R}^n se descompone como una unión disjunta de abiertos arco-conexos disjuntos dos a dos. (3) Decidir cuándo un conjunto es arco-conexo. 	<p>Para que el estudiante logre alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades:</p> <ol style="list-style-type: none"> (a) Definir conjuntos arco-conexos. (b) Demostrar que los únicos arco-conexos de \mathbb{R} son los intervalos. (c) Demostrar que todo conjunto abierto de \mathbb{R} se escribe como unión numerable disjunta de intervalos abiertos y que este resultado no se puede generalizar de esta manera a conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n con $n \geq 2$. (d) Enunciar y esbozar la demostración (dejando los detalles para el estudiante) de que todo conjunto abierto de \mathbb{R}^n se puede descomponer como una unión numerable disjunta de conjuntos abiertos arco-conexos.

Unidad 1: Topología de \mathbb{R}^n

Estrategias de evaluación

Para chequear que el estudiante ha logrado alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades:

- ◆ Una prueba escrita, diseñada sobre la base de un problemario oficial; esta prueba debe medir no sólo la capacidad del estudiante de realizar demostraciones sino la comprensión de las definiciones, proposiciones y teoremas presentados en esta unidad.
- ◆ La prueba escrita se aplicará en la semana siguiente a la semana en que se culmine la unidad.
- ◆ La prueba escrita aportará el 10 % de la calificación definitiva;

Unidad 2: Funciones Continuas

Cronología: 6 horas (1 semana) en 3 sesiones de trabajo en aula, incluyendo una en las horas asistenciales correspondiente a la evaluación escrita.

Recursos instruccionales especiales para esta unidad:

Temas	Objetivos específicos	Metodología
2.1 Límite de funciones.	<p>Este tema deberá capacitar al estudiante para:</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) Definir el límite de una función. (2) Enunciar y demostrar las propiedades básicas de la operación de tomar límite. (3) Calcular límites de funciones. 	<p>Para que el estudiante logre alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades:</p> <ol style="list-style-type: none"> (a) Repasar la definición de límite de una función de \mathbb{R} en si mismo. (b) Mostrar como extender la definición del item anterior al caso general. (c) Enunciar las propiedades básicas de la operación de tomar límite, demostrar sólo una y dejar el resto como ejercicio para el estudiante. (d) Mostrar y explicar por qué la existencia de límites parciales no implica la existencia de límite de una función. (e) Enunciar y demostrar que el cálculo de límites en el caso general se reduce al caso de funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}.
2.2 Funciones continuas.	<p>Este tema deberá capacitar al estudiante para:</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) Definir funciones continuas. (2) Decidir, usando la definición, cuándo una función dada es continua. (3) Enunciar y demostrar las propiedades básicas de funciones continuas. 	<p>Para que el estudiante logre alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades:</p> <ol style="list-style-type: none"> (a) Definir función continua en términos de $\epsilon - \delta$. (b) Mostrar ejemplos de cómo se usa la definición del item anterior.

Unidad 2: Funciones Continuas

Temas	Objetivos específicos	Metodología
	(4) Enunciar y demostrar las definiciones equivalentes de funciones continuas. (5) Decidir cuándo un conjunto dado es abierto o cerrado usando la continuidad de funciones.	(c) Enunciar las propiedades básicas de las funciones continuas. Demostrar una de las propiedades algebraicas (dejar el resto como ejercicio para los estudiantes) y presentar la demostración de que la composición de funciones continuas es continua. (d) Enunciar y demostrar que la verificación de que una función es continua se reduce al caso de verificar la continuidad de funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} .
2.3 Funciones uniformemente continuas.	Este tema deberá capacitar al estudiante para: (1) Definir continuidad uniforme de una función. (2) Decidir cuándo una función es uniformemente continua.	Para que el estudiante logre alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades: (a) Recordar la definición de continuidad uniforme de una función de \mathbb{R} en si mismo. (b) Mostrar cómo se extiende la definición del item anterior al caso general. (c) Enunciar y demostrar que una función continua definida en un conjunto compacto es uniformemente continua. Mostrar que no es una condición necesaria.

Unidad 2: Funciones Continuas

Estrategias de evaluación

Para chequear que el estudiante ha logrado alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades:

- ◆ Una prueba escrita, diseñada sobre la base de un problemario oficial; esta prueba debe medir no sólo la capacidad del estudiante de realizar demostraciones sino la comprensión de las definiciones, proposiciones y teoremas presentados en esta unidad.
- ◆ La prueba escrita se aplicará en la semana siguiente a la semana en que se culmine la presente unidad y la siguiente.
- ◆ La prueba escrita aportará el 20 % de la calificación definitiva;



Unidad 3: Funciones escalares diferenciables

Cronología: 18 horas (3 semanas) en 9 sesiones de trabajo en aula, incluyendo las horas asistenciales: dos sesiones de ejercicios y una para la evaluación escrita.

Recursos instruccionales especiales para esta unidad:

Temas	Objetivos específicos	Metodología
3.1 Diferenciabilidad.	Este tema deberá capacitar al estudiante para: (1) Definir la diferenciabilidad de una función escalar. (2) Enunciar y demostrar las propiedades básicas de la diferencial de una función escalar. (3) Calcular la diferencial de funciones escalares.	Para que el estudiante logre alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades: (a) Repasar la definición de la derivada de una función real. (b) Mostrar como extender la definición del item anterior al caso de una función de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} . (c) Enunciar y demostrar la unicidad de la diferencial de una función escalar. (d) Enunciar las propiedades algebraicas de la diferencial, y demostrar alguna de ellas. Haciendo énfasis en que las demostraciones siguen las mismas líneas de razonamiento que en el caso de funciones reales. (e) Enunciar y demostrar que una función diferenciable es continua. (f) Presentar ejemplos como $P \mapsto \ P\ $, etc.
3.2 Derivadas direccionales.	Este tema deberá capacitar al estudiante para: (1) Definir las derivadas direccionales de una función escalar. (2) Definir las derivadas parciales de una función escalar. (3) Explicar que la existencia de derivadas direccionales para una función dada no implica la diferenciabilidad de esta función.	Para que el estudiante logre alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades: (a) Definir las derivadas direccionales de una función escalar. (b) Mostrar ejemplos de cómo se calcula derivadas direccionales usando la definición del item anterior.

Unidad 3: Funciones escalares diferenciables

Temas	Objetivos específicos	Metodología
	<p>(4) Enunciar y explicar que la existencia de derivadas parciales de una función y su continuidad implican la diferenciabilidad de esta función.</p> <p>(5) Calcular la diferencial de una función en términos de las derivadas parciales.</p>	<p>(c) Definir las derivadas parciales de una función escalar, enfatizando que son un caso particular de las derivadas direccionales.</p> <p>(d) Mostrar cómo se calculan las derivadas direccionales cuándo la función es diferenciable.</p> <p>(e) Enunciar y demostrar que una función que tiene derivadas parciales y que si éstas son funciones continuas, entonces la función es diferenciable. Mostrar que el recíproco es falso.</p>
3.3 Derivadas de orden superior.	<p>Este tema deberá capacitar al estudiante para:</p> <p>(1) Definir las derivadas de orden superior de una función escalar.</p> <p>(2) Definir funciones de clase C^k con $k \geq 1$.</p> <p>(3) Explicar cuándo las derivadas cruzadas de una función son iguales.</p>	<p>Para que el estudiante logre alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades:</p> <p>(a) Definir las derivadas de orden superior a 1 de una función escalar.</p> <p>(b) Definir funciones de clase C^k con $k \geq 1$.</p> <p>(c) Mostrar que las inclusiones $C^k \subset C^l$ con $k > l$ son propias.</p> <p>(d) Enunciar y demostrar que si una función es de clase C^2, entonces las derivadas parciales cruzadas conmutan. Mostrar cómo se extiende el resultado anterior a derivadas cruzadas de orden superior a dos.</p> <p>(e) Mostrar un contraejemplo al teorema del ítem anterior.</p>

Unidad 3: Funciones escalares diferenciables

Temas	Objetivos específicos	Metodología
3.4 Fórmula de Taylor en una variable.	<p>Este tema deberá capacitar al estudiante para:</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) Definir el polinomio de Taylor de una función real. (2) Escribir una función real como la suma de su polinomio de Taylor más un resto. (3) Enunciar y demostrar el Teorema de Taylor. (4) Calcular el polinomio de Taylor usando las propiedades básicas del polinomio de Taylor. (5) Calcular el error que se comete cuando se reemplaza una función por su polinomio de Taylor. 	<ol style="list-style-type: none"> (a) Definir el polinomio de Taylor de una función real, presentar ejemplos como : e^x, $\cos(x)$, etc. (b) Enunciar y demostrar el teorema de Taylor, enfatizando el hecho de que él permite sustituir una función real por una polinomial en los cálculos con un error controlado. (c) Caracterizar el polinomio de Taylor de orden k de una función real como el único que la aproxima hasta orden k. (d) Mostrar como se usa la propiedad anterior para calcular polinomios de Taylor sin calcular las derivadas iteradas de la función.
3.5 Fórmula de Taylor en varias variables.	<p>Este tema deberá capacitar al estudiante para:</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) Definir el polinomio de Taylor de una función de varias variables. (2) Escribir una función real como la suma de su polinomio de Taylor más un resto. (3) Enunciar y demostrar el Teorema de Taylor. (4) Calcular el polinomio de Taylor usando las propiedades básicas del polinomio de Taylor. (5) Calcular el error que se comete cuando se reemplaza una función por su polinomio de Taylor. 	<p>Para que el estudiante logre alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades:</p> <ol style="list-style-type: none"> (a) Extender la definición de polinomio de Taylor a funciones de varias variables. Mostrar ejemplos como : e^{xy}, $\cos(x + y + z)$, etc. (b) Enunciar y demostrar el teorema de Taylor. (c) Caracterizar el polinomio de Taylor de orden k de una función real como el único que la aproxima hasta orden k. (d) Mostrar como se usa la propiedad anterior para calcular polinomios de Taylor sin calcular las derivadas iteradas de la función.

Unidad 3: Funciones escalares diferenciables

Temas	Objetivos específicos	Metodología
3.6 Puntos de máximo (mínimo).	<p>Este tema deberá capacitar al estudiante para:</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) Definir puntos de máximo (mínimo) de una función. (2) Explicar cuándo una función continua tiene puntos de máximo y de mínimo. (3) Calcular puntos de máximo(mínimo) local de una función diferenciable. (4) Decidir cuándo un punto es de máximo (mínimo) local en términos del polinomio de Taylor de la función. 	<p>Para que el estudiante logre alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades:</p> <ol style="list-style-type: none"> (a) Definir puntos de máximo (mínimo) global (local) de una función. (b) Enunciar y demostrar que una función continua definida en un compacto siempre tiene puntos de máximo y de mínimo. (c) Enunciar y demostrar que los puntos de máximo y mínimo local se encuentran en el conjunto de puntos críticos de una función. (d) Definir la matriz Hessiana de una función con existencia de derivadas de orden 2. (e) Recordar la definición de formas cuadráticas definidas positiva (negativa) y su formulación equivalente en términos de la matriz asociada. Mostrar ejemplos. (f) Enunciar el criterio de suficiencia para que un punto crítico sea máximo (mínimo) local en términos del signo de la matriz Hessiana de una función.

Unidad 3: Funciones escalares diferenciables

Estrategias de evaluación

Para chequear que el estudiante ha logrado alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades:

- ◆ Una prueba escrita, diseñada sobre la base de un problemario oficial; esta prueba debe medir no sólo la capacidad del estudiante de realizar demostraciones sino la comprensión de las definiciones, proposiciones y teoremas presentados en esta unidad.
- ◆ La prueba escrita se aplicará en la semana siguiente a la semana en que se culmine la presente unidad e incluye la unidad anterior.
- ◆ La prueba escrita aportará el 20 % de la calificación definitiva;



Unidad 4: Funciones vectoriales diferenciables

Cronología: 12 horas (2 semanas) en 6 sesiones de trabajo en aula, incluyendo las horas asistenciales: una sesión de ejercicios y otra para la evaluación escrita.

Recursos instruccionales especiales para esta unidad:

Temas	Objetivos específicos	Metodología
4.1 Diferenciabilidad.	<p>Este tema deberá capacitar al estudiante para:</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) Definir la diferenciabilidad de una función vectorial. (2) Definir y calcular la matriz Jacobiana de una función vectorial diferenciable. (3) Enunciar y demostrar las propiedades básicas de la diferencial de una función vectorial. 	<p>Para que el estudiante logre alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades:</p> <ol style="list-style-type: none"> (a) Definir la diferenciabilidad de una función vectorial en términos de la diferenciabilidad de sus funciones componentes. (b) Definir la matriz Jacobiana de una función vectorial diferenciable y demostrar que la transformación lineal que ella induce aproxima la función hasta primer orden, (definición equivalente de diferenciabilidad). (c) Enunciar las propiedades básicas y demostrar sólo la regla de la cadena y el teorema del valor medio, dejando la demostración de las otras propiedades como ejercicio para los estudiantes. (d) Presentar ejemplos de cómo se usa la regla de la cadena.
4.2 Teorema de la función inversa.	<p>Este tema deberá capacitar al estudiante para:</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) Enunciar y demostrar el teorema de punto fijo de Banach. (2) Enunciar y demostrar el teorema de la función inversa. (3) Decidir cuándo una función es un difeomorfismo local. 	<p>Para que el estudiante logre alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades:</p> <ol style="list-style-type: none"> (a) Definir funciones que contraen la distancia. Enunciar y demostrar el teorema del punto fijo de Banach en conjuntos cerrados de \mathbb{R}^n.

Unidad 4: Funciones vectoriales diferenciables

Temas	Objetivos específicos	Metodología
		<ul style="list-style-type: none"> (b) Definir difeomorfismo de clase C^k, dar como ejemplos: las transformaciones lineales biyectivas, las coordenadas polares, esféricas, etc. (c) Enunciar y demostrar el teorema de la función inversa. (d) Mostrar contraejemplos en el que las condiciones del teorema no se cumplen y enfatizar el carácter local del mismo.
4.3 Teorema de la función implícita.	<p>Este tema deberá capacitar al estudiante para:</p> <ul style="list-style-type: none"> (1) Explicar qué significa en una relación entre varias variables, despejar unas en términos de las otras. (2) Decidir cuándo se pueden en una ecuación despejar una variable en términos de las otras. (3) Enunciar y demostrar el Teorema de la función implícita. 	<p>Para que el estudiante logre alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades:</p> <ul style="list-style-type: none"> (a) Introducir el problema de despejar en una ecuación dada, unas variables en términos de las otras. Mostrar que en unos casos se puede hacer de forma explícita y en otros no. (b) Enunciar y demostrar el teorema de la función implícita. (c) Mostrar su significado geométrico: el conjunto de ceros de una función dada es localmente la gráfica de una función. (d) Mostrar el alcance del teorema, vía contraejemplos.

Unidad 4: Funciones vectoriales diferenciables

Temas	Objetivos específicos	Metodología
4.4 Multiplicadores de Lagrange.	Este tema deberá capacitar al estudiante para: (1) Explicar qué son los multiplicadores de Lagrange. (2) Calcular máximos y mínimos condicionados. (3) Calcular máximos y mínimos de funciones diferenciables definidas en conjuntos compactos con frontera diferenciable a trozos.	(a) Definir el problema de maximizar (minimizar) una función con extremos condicionados. (b) Definir multiplicadores de Lagrange y mostrar su significado geométrico. (c) Enunciar y demostrar el teorema de los multiplicadores de Lagrange. (d) Mostrar como se usa el teorema de multiplicadores de Lagrange, por ejemplo: demostración de desigualdades clásicas, cálculo de distancias entre conjuntos, etc.

Unidad 4: Funciones vectoriales diferenciables

Estrategias de evaluación

Para chequear que el estudiante ha logrado alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades:

- ◆ Una prueba escrita, diseñada sobre la base de un problemario oficial; esta prueba debe medir no sólo la capacidad del estudiante de realizar demostraciones sino la comprensión de las definiciones, proposiciones y teoremas presentados en esta unidad.
- ◆ La prueba escrita se aplicará en la semana siguiente a la semana en que se culmine la presente unidad e incluye la unidad anterior.
- ◆ La prueba escrita aportará el 20 % de la calificación definitiva;



Unidad 5: Integración de Riemann en \mathbb{R}^n

Cronología: 34 horas ($5\frac{1}{2}$ semanas) en 17 sesiones de trabajo en aula, incluyendo las asistenciales: 5 sesiones de ejercicios y una para la evaluación escrita.

Recursos instruccionales especiales para esta unidad:

Temas	Objetivos específicos	Metodología
5.1 Integral de Riemann en rectángulos.	Este tema deberá capacitar al estudiante para: (1) Definir la integral de Riemann de una función definida en un rectángulo. (2) Explicar cómo se calcula, usando la definición, la integral en ejemplos básicos.	Para que el estudiante logre alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades: (a) Definir particiones de rectángulos y la forma de medir su tamaño. (b) Definir sumas de Riemann asociadas con una partición. (c) Definir la integral de Riemann de una función definida en rectángulos. (d) Ejemplificar con las funciones: constantes, proyecciones.
5.2 Propiedades básicas.	Este tema deberá capacitar al estudiante para: (1) Enunciar y demostrar la propiedad de linealidad de la integral de Riemann. (2) Enunciar y demostrar que las funciones continuas son integrables Riemann. (3) Calcular la integral de Riemann de algunas funciones sencillas, usando las propiedades básicas.	Para que el estudiante logre alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades: (a) Enunciar y demostrar la propiedad de linealidad de la integral de Riemann.

Unidad 5: Integración de Riemann en \mathbb{R}^n

Temas	Objetivos específicos	Metodología
		<p>(b) Enunciar y demostrar el criterio de integrabilidad de Riemann (el análogo al criterio de convergencia de Cauchy para sucesiones).</p> <p>(c) Demostrar como aplicación del item anterior que las funciones continuas son integrables Riemann.</p> <p>(d) Enunciar y demostrar el lema y el teorema del valor medio para integrales.</p>
5.3 Teorema de Lebesgue.	<p>Este tema deberá capacitar al estudiante para:</p> <p>(1) Explicar cuándo un conjunto tiene medida cero.</p> <p>(2) Enunciar y demostrar el Teorema de Lebesgue.</p> <p>(3) Decidir cuándo una función dada es integrable Riemann.</p>	<p>Para que el estudiante logre alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades:</p> <p>(a) Definir conjuntos de medida cero. Ejemplificar con: los racionales, rectas en \mathbb{R}^2, planos en \mathbb{R}^2. Enunciar y demostrar las propiedades básicas que permitan decidir cuándo un conjunto dado tiene medida cero: subconjuntos de medida cero tienen medida cero, unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero.</p> <p>(b) Definir la oscilación de una función y explicar cómo ésta mide cuán discontinua es la función en un punto.</p> <p>(c) Enunciar y demostrar el teorema de Lebesgue.</p> <p>(d) Mostrar el alcance del teorema, vía contraejemplos.</p>

Unidad 5: Integración de Riemann en \mathbb{R}^n

Temas	Objetivos específicos	Metodología
5.4 Teorema de Fubini.	<p>Este tema deberá capacitar al estudiante para:</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) Enunciar y demostrar el teorema de Fubini. (2) Aplicar el teorema de Fubini para el cálculo de integrales. 	<p>Para que el estudiante logre alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades:</p> <ol style="list-style-type: none"> (a) Enunciar y demostrar el teorema de Fubini. (b) Mostrar los alcances del teorema vía contraejemplos. (c) Mostrar cómo se usa el teorema en el cálculo de integrales.
5.5 Integral de Riemann en dominios acotados.	<p>Este tema deberá capacitar al estudiante para:</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) Definir la integral de Riemann de una función definida en un dominio acotado. (2) Decidir cuándo una función en un dominio acotado es integrable Riemann. (3) Definir el volumen de un conjunto. (4) Calcular integrales de funciones en dominios no acotados. 	<p>Para que el estudiante logre alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades:</p> <ol style="list-style-type: none"> (a) Definir la integral en dominios acotados y demostrar que la definición no depende del rectángulo elegido que contiene al conjunto acotado. (b) Enunciar las propiedades básicas de la integral, dejando su demostración a los estudiantes. Presentar una demostración como guía. (c) Enunciar y demostrar el teorema de Lebesgue para integrales en dominios acotados. (d) Mostrar como se usa el teorema de Fubini para recuperar las fórmulas de cálculo de integrales en dominios elementales vista en los cursos de cálculo. (e) Definir cuándo un conjunto acotado tiene volumen y cuánto vale éste. Mostrar algún ejemplo de cálculo directo: área de la elipse, un triángulo, etc. (f) Enunciar y demostrar el principio de Cavalieri. Mostrar cómo se usa y enfatizar que es el mismo método de la secciones transversales visto en los cursos de cálculo.

Unidad 5: Integración de Riemann en \mathbb{R}^n

Temas	Objetivos específicos	Metodología
5.6 Teorema del cambio de variable.	<p>Este tema deberá capacitar al estudiante para:</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) Enunciar y demostrar el teorema en el caso lineal. (2) Enunciar el teorema en el caso lineal. (3) Explicar que diferencia existe entre el caso unidimensional y el caso de dimensión mayor que dos. (4) Calcular integrales usando el teorema del cambio de variable. 	<p>Para que el estudiante logre alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades:</p> <ol style="list-style-type: none"> (a) Recordar que una transformación lineal se descompone como un producto de transformaciones lineales del tipo: dilatación en una dirección o "shears" en una dirección. Explicar la geometría (cómo transforman los rectángulos estas transformaciones). (b) Enunciar y demostrar el teorema en el caso lineal. Explicar la interpretación geométrica del determinante cómo una medida de la distorsión del volumen. (c) Enunciar y demostrar el lema de distorsión no lineal. (d) Enunciar y demostrar el teorema del cambio de variable. (e) Recordar el caso de una variable y compararlo con el caso general. (f) Recordar como se aplica el teorema en el caso de las coordenadas polares, esféricas y cilíndricas visto en los cursos de cálculo. (g) Mostrar ejemplos diferentes a los del item anterior de cómo se usa el teorema para calcular integrales.

Unidad 5: Integración de Riemann en \mathbb{R}^n

Estrategias de evaluación

Para chequear que el estudiante ha logrado alcanzar los objetivos específicos propuestos, se recomienda realizar las siguientes actividades:

- ◆ Dos prueba escritas, diseñadas sobre la base de un problemario oficial; estas pruebas deben medir no sólo la capacidad del estudiante de realizar demostraciones sino la comprensión de las definiciones, proposiciones y teoremas presentados en esta unidad.
- ◆ La primera prueba escrita se aplicará en la semana siguiente a la semana en que se culmine el subtema 5.3 (Teorema de Lebesgue) y la segunda una semana después de haber terminado las clases.
- ◆ Las pruebas escritas, cada una, aportarán el 25 %, de la calificación definitiva;