Álgebra 3. Programa Analítico.

Objetivos generales

- Conocer los elementos básicos que intervienen en las estructuras de Grupo, Anillo y Cuerpo, en especial del grupo simétrico, el anillo de polinomios sobre un cuerpo y las nociones asociadas a extensiones algebraicas y trascendentes de cuerpos y su vinculación con las raíces de polinomios.
- Desarrollar destrezas para la manipulación simbólica en conjuntos abstractos, obedeciendo a ciertas leyes prefijadas.
- Conocer las motivaciones históricas para la génesis del concepto del Grupo y de las extensiones de cuerpos: las brillantes investigaciones de Galois y Abel sobre la resolubilidad por radicales de ecuaciones polinómicas de grado mayor que 4.
- Conocer las aplicaciones de la teoría de extensiones de cuerpos a las demostraciones de imposibilidad de ciertas construcciones geométricas con regla y compás.
- Adquirir una base conceptual sólida y una motivación para el estudio posterior de la Teoría de Galois y/o proseguir estudios de Álgebra más avanzada.

Justificación.

El conocimiento de las estructuras algebraicas de Grupo, Anillo y Cuerpo son utilizadas con frecuencia en diversos contextos matemáticos y de la Física, por lo que su conocimiento resulta esencial para un matemático. El conocimiento de las construcciones algebraicas más elementales que realizó Galois para demostrar la imposibilidad de la resolución por radicales de ecuaciones polinómicas de grado mayor que 4 y su contexto histórico es indispensable para lograr comprender y apreciar uno de los más asombrosos logros de la Matemática del siglo XIX, piedra angular del desarrollo del Álgebra moderna: la Teoría de Galois.

Por otra parte, el ejercicio intelectual que implica el estudio de estructuras algebraicas sobre conjuntos arbitrarios incide positivamente en el desarrollo del pensamiento abstracto en el estudiante.

Unidad I

Teoría de Grupos

Temas	Objetivos Específicos	Estrategias Metodológicas
1.1 Introducción histórica de la resolución de ecuaciones algebraicas por radicales. 1 clase teórica.	Obtener una visión histórica de la evolución de los métodos algebraicos para la resolución de ecuaciones polinómicas, desde la antigüedad (Babilonia, Grecia. India) pasando por los aportes árabes en la Edad Media y su difusión en Europa, las soluciones por radicales encontradas en la Italia del Renacimiento para ecuaciones cúbicas y cuárticas, hasta los intentos múltiples para resolver por radicales las ecuaciones de grado 5, que culminaron en los trabajos de Abel y Galois, en los que se demostró su imposibilidad.	Exposición de los elementos más resaltantes de la Historia de la resolución de ecuaciones algebraicas. Recomendación de lecturas sobre el tema.
1.2 El concepto de Grupo. Ejemplos. 2 clases teóricas.	Conocer las definiciones y propiedades básicas asociadas al concepto de Grupo. Percibir la creación del concepto de Grupo abstracto como producto histórico de la observación y manipulación de grupos particulares como el grupo de permutaciones y el grupo de transformaciones del plano que dejan invariantes a ciertas figuras geométricas.	Presentación de el grupo simétrico S_3, sus elementos y la operación de composición en S_3; Propiedades. Discusión participativa del ejemplo del grupo dihédrico. Exposición de la definición general de grupo. Construcción de tablas de multiplicación de grupos finitos abstractos (de orden 3, 4 y 5).

Temas	**Objetivos Específicos**	**Estrategias Metodológicas**
1.3 Subgrupos. Grupos cíclicos. Clases laterales. 2 clases teóricas. 1 clase asistencial.	Conocer la definición de subgrupo, y subgrupo generado por un subconjunto del grupo. Ser capaz de probar la equivalencia entre las 3 definiciones de subgrupo generado por un conjunto A. Conocer la definición de clase lateral y la relación de equivalencia asociada al conjunto de todas las clases laterales de un subgrupo. Ser capaz de determinar si ciertos subconjuntos de un grupo concreto son o no subgrupos.	Exposición de definiciones y demostración de propiedades fundamentales. Proposición de ejercicios para ser resueltos por los estudiantes y expuestos por ellos en las horas asistenciales. Discusión participativa de ejemplos de subgrupos de $\mathbb{Z}$, del grupo simétrico S_3, de grupos cíclicos finitos.
1.4 El teorema de Lagrange, el Teorema de Euler, el Teorema de Fermat. 1 clase teórica	Conocer y ser capaz de demostrar el Teorema de Lagrange y algunas de sus más importantes aplicaciones.	Exposición de las ideas centrales en la demostración del Teorema de Lagrange. Asignación del estudio individual de los Teoremas de Euler y Fermat, para su exposición a cargo de algunos estudiantes. Durante las exposiciones, el profesor debe hacer preguntas y fomentar la discusión participativa.
1.5 Homomorfismos y subgrupos normales. Grupos cocientes. Teoremas de isomorfismos.	Percibir los homomorfismos de grupos y ser capaz de utilizarlos como herramientas para conocer la estructura de ciertos grupos, a través del uso de los grupos cocientes y los teoremas de isomorfismos.	Exposición de definiciones, teoremas y ejemplos. Estudio, a traves de la discusión participativa con estudiantes, de los homomorfismos cuyo dominio es $\mathbb{Z}$; determinación de los grupos cocientes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, isomorfos a las imágenes homomórficas de $\mathbb{Z}$.

Temas	**Objetivos Específicos**	**Estrategias Metodológicas**
1.6 Automorfismos. El Teorema de Cayley. 1 clase asistencial	Conocer el Teorema de Cayley y ser capaz de demostrarlo. Ser capaz de demostrar que una función dada es un automorifsmo de un grupo.	Asignar la lectura del Teorema de Cayley por adelantado para su discusión en la clase asistencial. También se discutirán ejemplos de los automorfismos más comunes. Se evaluará la participación en la discusión.
1.7 Órbitas y ciclos asociados a una permutación de $\{1, \ldots, n\}$. Teorema de descomposición de una permutación en ciclos disjuntos. Orden de un ciclo. Orden de una permutación. 1 clase teórica, 1 clase asistencial.	Ser capaz de encontrar la órbita de un elemnto de $\{1, \ldots, n\}$ bajo una permutación σ de S_n. Ser capaz de descomponer una permutación dada en producto de ciclos disjuntos. Conocer el enunciado y la prueba del teorema de descomposición en ciclos disjuntos. Ser capaz de calcular el orden de una permutación y de justificar el algoritmo empleado.	Explorar con los alumnos los conceptos de órbita de un elemento y ciclo de una permutación a través de ejemplos concretos. Explorar varios ejemplos de ciclos y calcular su orden, para luego pedir a los estudiantes que formulen una conjetura al respecto y la prueben. Asignar ejercicios para su exposición en la clase asistencial.
1.8 Teorema de la descomposición de una permutación en producto de transposiciones. Permutaciones pares e impares. El grupo alternante. Permutaciones conjugadas. 1 clase teórica.	Conocer el enunciado y la prueba del teorema de descomposición en producto de transposiciones de cualquier permutación. Conocer las características principales del grupo alternante (normalidad, orden) y ser capaz de demostrarlas. Conocer la caracterización de la condición de ser conjugadas dos permutaciones en términos de sus descomposiciones en ciclos.	Exploración a través de ejemplos de la descomposición en transposiciones de cualquier permutación. Exposición de las características mencionadas del grupo alternante, su demostración. Exploración de la tabla de multiplicación de A_4, y construcción de un subgrupo normal no trivial de A_4. Exploración de la relación de conjugación en S_8, con el fin de detectar la vinculación con la descomposición en ciclos de permutaciones conjugadas.

Tiempo total de duración: 5 semanas
Evaluación:

- Prueba oral acerca de ejercicios propuestos sobre temas 1.1 - 1.3, para ser realizados individualmente. Peso: 5 %
- Prueba escrita al final de la cuarta semana, sobre temas 1.1 - 1.5. La prueba debe poner énfasis en la comprensión y adecuado manejo de los conceptos. Peso: 10 %
- Exposición de algunos temas complementarios como: El Teorema de Cauchy para los grupos abelianos, la ecuación de clase, el Teorema de Cauchy para grupos arbitrarios (hay al menos de dos pruebas diferentes al alcance, ver bibliografía). Peso: 5 %
- Prueba escrita al final de la quinta semana sobre toda la unidad. Peso: 15 %

Unidad II

Teoría de Anillos.

Temas	**Objetivos Específicos**	**Estrategias Metodológicas**
2.1 Definiciones y ejemplos de anillos, y dominios de integridad. 1 clase teórica	Conocer las difiniciones de anillos y familiarizarse con los ejemplos de anillos con distintas propiedades: conmutativos o no, con o sin divisores de cero, con o sin división, con o sin identidad. Conocer las propiedades básicas que se derivan de las propiedades que definen un anillo: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, $(-a) \cdot b = b \cdot (-a) = -(ab)$, etc.	Exploración con los alumnos de los distintos ejemplos: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$, el anillo de polinomios sobre $\mathbb{Q}$, etc., resaltando las propiedades que en cada caso se cumplen. Demostración en clase de algunas de las propiedades que se mencionan, y permitir a los estudiantes demostrar otras en clase.
2.2 Homomorfismos, Ideales y Anillos cociente. 1 clase teórica, 1 clase asistencial.	Conocer los teoremas de isomorfismos para anillos, la definición de ideal y de anillo cociente. Ser capaz de caracterizar a todos los ideales de $\mathbb{Z}$. Ser capaz de demostrar que los homomorfismos de cuerpos sólo tienen núcleos triviales. Ser capaz de demostrar que ciertos subconjuntos de anillos construidos a partir de ideales, son también ideales.	Exposición de las definiciones y teoremas relativos a ideales, homomorfismos e isomorfismos de anillos y anillos cociente. Establecer las analogías con los teoremas homólogos de la teoría de Grupos. Asignación de ejercicios para su exposición por parte de los alumnos en la clase asistencial.

Temas	**Objetivos Específicos**	**Estrategias Metodológicas**
2.3 Caracterización de un cuerpo en términos de los ideales que contiene. Ideales maximales. Cuerpo de fracciones de un dominio de integridad. 2 clases teóricas	Conocer y ser capaz de demostrar la caracterización de un cuerpo en términos de sus ideales. Caracterizar los ideales maximales en $\mathbb{Z}$ y en $\mathbb{Q}[x]$. Saber y ser capaz de demostrar que un ideal es maximal si y sólo si el cociente asociado es un cuerpo. Conocer la construcción del cuerpo de fracciones de un dominio de integridad.	Exposición de los teoremas que establecen las propiedades de los ideales maximales. Discusión y construcción participativa de la prueba de que $n\mathbb{Z}$ es un ideal maximal si y sólo si n es primo, y en consecuencia $\mathbb{Z}_n$ es un cuerpo si sólo si n es primo. Establecimiento de analogías con los ideales maximales en $\mathbb{Q}[x]$. Discusión y construcción participativa del cuerpo de fracciones de un dominio de integridad a partir del ejemplo de la construcción de $\mathbb{Q}$ como cuerpo de fracciones de $\mathbb{Z}$.
2.4 Anillos euclidianos. Propiedades. Teorema de factorización única para anillos euclidianos. 2 clases teóricas	Conocer las propiedades de los anillos euclidianos; apreciar las propiedades que comparten $\mathbb{Z}$ y el anillo $\mathbb{Q}[x]$, y que se derivan del hecho de poseer ambos anillos una "división euclidiana" asociada a un "grado" definido sobre los elementos no nulos.	Exposición de las definiciones y teoremas, con alusiones frecuentes a los casos particulares de $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}[x]$. Estimular la participación de los estudiantes en la construcción de ciertas pruebas.

Temas	**Objetivos Específicos**	**Estrategias Metodológicas**
2.5 El anillo de polinomios en una indeterminada sobre un cuerpo. 2 clases teóricas. 1 clase asistencial.	Identificar las propiedades de los anillos euclidianos en el anillo concreto $\mathbb{Q}[x]$. Ser capaz de encontrar (f, g) para dos polinomios f, g en $\mathbb{Q}[x]$ usando el algoritmo de Euclides. Conocer y ser capaz de aplicar el criterio de irreducibilidad de Eisenstein para un polinomio en $\mathbb{Q}[x]$. Conocer la forma general que tienen los elementos del cuerpo $\mathbb{Q}[x]$. Conocer la forma general que tienen los elementos del cuerpo $\mathbb{Q}[x]/(f)$, donde f es un polinomio irreducible sobre $\mathbb{Q}$, de grado n, y la conexión que estos cuerpos tienen con las ideas desarrolladas por Galois para la demostración de la imposibilidad de resolución por radicales de ecuaciones de grado mayor que 4.	Presentación, en la clase teórica, de los elementos necesarios para que los estudiantes sean capaces de realizar los ejercicios sobre irreducibilidad de polinomios en $\mathbb{Q}[x]$, determinación de (f, g), y operaciones en el cuerpo $\mathbb{Q}[x]/(f)$ donde f es irreducible sobre $\mathbb{Q}$. Realización de ejercicios sobre esos puntos en la clase asistencial, por parte de los estudiantes.

Duración total de la unidad: 4 semanas.
Evaluación:

- 1 prueba escrita al final de la novena semana. Peso: 20 %.
- 1 trabajo escrito de traducción del inglés al castellano de algún texto matemático o de Historia de la Matemática. Peso: 10 %

Unidad III

Extensiones de Cuerpos.

Temas	**Objetivos Específicos**	**Estrategias Metodológicas**
3.1 Cuerpos. Característica de un cuerpo. Subcuerpo primo. Extensiones de cuerpos. 1 clase teórica.	Conocer la definición de característica de un cuerpo, subcuerpo primo de un cuerpo. Conocer y ser capaz de demostrar el teorema que caracteriza a todos los subcuerpos primos. Conocer la definición y ejemplos de extensión de un cuerpo. Dada una extensión $F : K$, y $Y \subset F$, conocer la definición de $K(Y)$, y ejemplos.	Discusión de las definiciones y teoremas con los alumnos. Construcción participativa de la prueba del teorema de caracterización de los subcuerpos primos. Explorar ejemplos de extensiones de cuerpos de diversa naturaleza:$\mathbb{C} : \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ ó $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathbb{Q}(Y) : \mathbb{Q}$, con $Y \subset \mathbb{R}$.
3.2 Extensiones simples. Extensiones algebraicas y trascendentes. Extensiones finitas y raíces de polinomios. 2 clases teóricas	Conocer las condiciones que deben satisfacerse para que una extensión simple sea trascendente o algebraica. Conocer la definición de polinomio mínimo de un elemento α algebraico sobre un cuerpo K, y sus propiedades. Conocer la interpretación de $K(\alpha)$, con α algebraico sobre K, como $K[t]/p(t)$ donde p es el polinomio mínimo de α.	Exposición de los teoremas y definiciones. Exploración de ejemplos concretos por parte de los estudiantes.
3.3 Grado de una extensión. 1 clase teórica. 1 clase asistencial.	Reconocer la estructura de espacio vectorial de una extensión de un cuerpo $L : K$ sobre K. Ser capaz de calcular la dimensión de una extensión simple. Conocer y ser capaz de demostrar el teorema que establece: $[L : K] = [L : F][F : K]$ y sus principales consecuencias.	Asignar estos temas para ser expuestos por los alumnos. Algunos deberán exponer la teoría y otros la resolución de diversos ejercicios que se vinculan con la fórmula dada.

Temas	Objetivos Específicos	Estrategias Metodológicas
3.4 Aplicaciones de la teoría de extensiones de cuerpos a la resolución de problemas geométricos de constructibilidad con regla y compás. 2 clases teóricas. 1 clase asistencial.	Conocer, a grandes rasgos, la historia de los problemas de constructibilidad con regla y compás. Conocer y ser capaz de construir las demostraciones de la imposibilidad de trisecar un ángulo, duplicar el cubo y realizar la cuadratura del círculo con regla y compás, usando las herramientas de la teoría de extensiones de cuerpos.	Exponer los elementos históricos más relevantes sobre la evolución de los intentos por realizar ciertas construcciones con regla y compás, y discutir con los estudiantes el significado de una prueba de imposibilidad. Asignar a los estudiantes el estudio y la exposición de los teoremas de imposibilidad de realizar las construcciones mencionadas y sus demostraciones.
3.4 Esbozo de las ideas desarrolladas por Galois para demostrar la imposibilidad de resolver por radicales las ecuaciones algebraicas de grado mayor que 4.	Obtener una visión de la envergadura del trabajo original de Galois, y motivar su estudio posterior. Obtener una perspectiva del desarrollo del Álgebra después de Galois, y en general, de los caminos que han seguido los procesos de génesis de las teorías matemáticas.	Exposición de ideas centrales y discusión participativa con los estudiantes de las perspectivas presentadas. Comparación del proceso de consolidación del Álgebra moderna con el del Cálculo infinitesimal.

Duración total de la unidad: 4 semanas.
Evaluación:

- Prueba escrita al final de la semana 13, sobre toda la unidad. Peso: 15 %.
- Exposición. Peso: 5 %

Prueba integral final sobre las unidades I, II y III. Peso: 15 %.

Bibliografía:

- Stewart, I. (1987). Galois Theory. New York: Chapman and Hall.
- Maxfield, J., Maxfield, E. (1992). Abstract Algebra and Solution by Radicals. New York: Dover Publications.
- I.N. Herstein. (1974) Algebra Moderna. México. Edit. Trillas.