Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Grupo de Análisis Funcional

Teoría Espectral de Operadores en Espacios de Hilbert

Br. Yeni Y. Suárez G.

Requisito Especial de Grado
Para Optar al Titulo de
Licenciada en Matemáticas
Tutor: Dr. José Giménez

Mérida-Venezuela

Octubre-2005

Índice General

1 Preliminares **9**

1.1 Introducción 9
1.2 Espacios vectoriales. 9
1.2.1 Definiciones. 9
1.2.2 Subespacios. 10
1.2.3 Generadores. 11
1.2.4 Rango 11
1.2.5 Bases 11
1.2.6 Matrices 12
1.3 Aplicaciones lineales 12
1.3.1 Definiciones 12
1.3.2 Representación Matricial de una Aplicación Lineal 13
1.4 Espacios de Aplicaciones Lineales. 14
1.4.1 Espacio Dual de un Espacio Vectorial. 14
1.5 Endomorfismos de un Espacio Vectorial. 14
1.6 Rango de una Aplicación. 14
1.7 Espacios Normados y Espacios de Banach 14
1.8 Espacios de Hilbert 15
1.8.1 Definición 15
1.9 Operadores Acotados en Espacios de Hilbert 15
1.9.1 Forma Sesquilineal 15
1.9.2 Teorema de Representación de Riesz. 18

2 Teoría Espectral de Operadores en Espacios de Dimensión Finita. **19**

2.1 Introducción 19
2.2 Subespacios Invariantes 19
2.3 Matriz Triangular Superior 20
2.4 Diagonalización 21
2.5 Operadores en Espacios de Hilbert 22
2.6 Operadores en Espacios de Hilbert Complejos 22
2.6.1 Operadores Adjuntos 22
2.6.2 Representación Matricial del Operador Adjunto. 24
2.6.3 Operadores Normales y Autoadjuntos 25
2.6.4 Teorema Espectral para Operadores Normales. 27
2.6.5 Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos. 29

2.7 Proyectores Ortogonales 30

2.8 Operadores en Espacios de Hilbert Reales 33

2.8.1 El Operador Transpuesto 33

2.8.2 Representación Matricial del Operador Transpuesto 34

2.8.3 Operadores Normales, Autoadjuntos y Ortogonales 34

2.8.4 Teorema Espectral de Operadores Autoadjuntos 35

2.8.5 Descomposición Espectral de Operadores Autoadjunto 36

3 Teoría Espectral de Operadores Normales 39

3.1 Introducción 39

3.2 Transformaciones Espectrales 40

3.3 Espectro de un Operador Autoadjunto 41

3.4 Medidas Numéricas 43

3.4.1 Definición 43

3.5 Medidas Espectrales 44

3.5.1 Medida Positiva 44

3.6 Otras propiedades de las Medidas Espectrales 46

3.7 Integración de Funciones Acotadas 46

3.8 Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos 47

3.9 Teorema Espectral para Operadores Normales 49

4 Aplicaciones 51

4.1 Introducción 51

4.2 Raíz Cuadrada Positiva 51

4.3 Teorema de Descomposición Polar 52

Dedicatoria

A mi Padre ♡.

Agradecimientos

A Dios, toda la felicidad y todos los beneficios que he recibido en mi vida te los debo sin duda alguna a tí DIOS. No existe ocasión en la cual no estés conmigo.

A mi madre, a tí doy gracias por todos tus cuidados y porque siempre creíste en mi. Eres la mejor mujer que conozco. Te dedico este trabajo porque es algo que sin tus desvelos no hubiera podido ser.

A mi Padre, gracias por ser el gran poeta de mi vida, fuente de inspiración, apoyo, cariño, atención, compresión y sobre todo paciencia.

A mis sobrinas Stephany y Laura, han sido y seguirán siendo sinónimo de alegría y vida. Gracias por sus besos y abrazos que tanto me hacían falta en los momentos más duros.

A mis hermanos, gracias por enseñarme tanto de la vida.

A mi tías y tíos: Rosa, Mercedes, Gladis y Pepe, gracias por acompañarme en todos los momentos importantes.

A mis primas, Mayra Alejandra y María Auxiliadora, gracias por su cariño y apoyo incondicional.

A mi cuñada Anairelys, una hermana como tú nunca tendré en la vida, gracias por creer en mi.

A mis inseparables amigas: Nelyana, Naive, Elizabeth, Carol y Lis, me han regalado lo más hermoso de la vida, su sincera e incomparable ***Amistad***. Gracias por ponerme de pie cuando a mis alas se le han olvidado como volar. Nunca olvidaré todo lo que han hecho por mi.

A mis amigos: Wilmer, Elbis, Dairuve, Gregorio, Begui, Danillys, Armando, Juan Pablo, Alexander y Walter, siempre recordaré los gratos momentos, alegrias y locuras que compartimos juntos. Los quieros.

A mi querido amigo Freddy, un verdadero amigo es alguien que te conoce tal como eres, comprende donde haz estado, te acompaña en tus logros y tus fracasos, celebra tus alegrías, comparte tu dolor y jamás te juzga por tus errores, gracias por tanto años de amistad.

A Emilio, gracias por el apoyo y la confianza que siempre me haz brindado. Eres mi fortaleza y aliento, quien me dá ánimo para seguir siempre adelante. Te quiero.

Al prof. Marcos Lizana, a través de tus consejos me haz enseñado el valor del trabajo, la necesidad del esfuerzo y muchos cosas más de las cuales hoy no soy consciente. Contar con tu apoyo y amistad ha sido orgullo y garantía de seguridad para llegar a esta meta.

Al prof. Jesús Pérez Sánchez, gracias por demostrarme de la manera más divertida el mundo de las Matemáticas. Su permanente disposición y desinteresada ayuda tienen un valor incalculable para mi.

A mi Tutor, por su generosidad al brindarme la oportunidad de recurrir a su capacidad y experiencia científica en un marco de confianza, afecto y amistad, fundamentales para el logro de este trabajo.

A mis Jurados, por sus valiosas sugerencias y acertados aportes durante el desarrollo de este trabajo.

Al C.D.C.H.T, gracias por su apoyo ecónomico.

Introducción

Para el estudio de la Teoría Espectral en Dimensión Finita, no daremos el enfoque tradicional, usando determinantes, ya que está no es una noción intuitiva. La ruta para este estudio será dada por la noción de subespacio invariante, la cual motiva el estudio de autovalores y autovectores, rompiendo así el tradicional enfoque via determinante, lo que nos llevo a probar que cada operador lineal en un espacio vectorial complejo puede representarse por una matriz triangular superior [2].

El contenido de este trabajo, se divide en cuatro grandes temas dedicados al estudio de la Teoría Espectral de Operadores en Espacios de Dimensión Finita y la Teoría Espectral de Operadores Normales y se completará con algunas aplicaciones.

Capítulo I: Preliminares.

En éste capítulo nuestro objetivo es enunciar algunas definiciones, propiedades y resultados de la Teoría de Operadores en Espacios de Dimensión Finita e Infinita, los cuales servirán de base para los capítulos posteriores. [2],[3],[4] y [5]

Capítulo II: Teoría Espectral de Operadores en Espacios de Dimensión Finita.

En este capítulo nuestro objetivo es mostrar cómo descomponer el espacio vectorial X en suma directa de subespacios, de modo que el operador pueda expresarse a su vez en suma directa de operadores más sencillos y en términos matriciales, veremos que esto se traduce en hallar una base del espacio respecto a la cual la matriz asociada al operador, tiene una forma canónica. El objetivo principal de este tema es el estudio de los Teoremas Espectrales para Operadores Autoadjuntos y Normales en Espacios de Dimensión Finita.[2]

Capítulo III: Teoría Espectral de Operadores Normales.

Este capítulo se consagra la Teoría Espectral de Operadores Autoadjuntos y Normales (Acotados), a través de la noción de *proyecciones* (dimensión finita) y veremos que la expresión:

$$T = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_r P_r = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i$$

se generalizará al caso de dimensión infinita. Existirán dos caminos para llegar a cabo esta generalización y daremos un breve esbozo, el cual será particularmente importantes en las aplicaciones. Discutiremos algunas propiedades de los operadores Autoadjuntos Acotados y Normales Acotados, necesarios para establecer la *representación espectral* de estos operadores [6].

Capítulo IV: Aplicaciones.

En este capítulo daremos dos de las más conocidas aplicaciones del Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos. A manera de ilustrar las ventajas de las representaciones integrales espectrales.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introducción

En este capítulo daremos un breve resumen de la Teoría de Operadores; enunciaremos algunas definiciones, propiedades y resultados que nos serán de gran utilidad en el desarrollo de este trabajo.

Evidentemente, la mayoría de estos resultados fueron vistos en los cursos de Álgebra Lineal, Análisis Funcional y Teoría de la Medida, de la licenciatura, por lo cual la prueba de la mayor parte de ellos no será hecha acá y sólo se indicará la referencia bibliográfica.

En concreto, daremos una descripción de Espacios Vectoriales, Operadores Acotados en Espacios de Hilbert, Medidas Númericas, Medidas Espectrales y Resolución Espectral de Operadores; el cual será desarrollado en forma completa en los capítulos posteriores.

1.2 Espacios vectoriales.

1.2.1 Definiciones.

Definición 1.1. *Un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (los elementos de $\mathbb{K}$ se llaman escalares) es un conjunto X (cuyos elementos se llamarán vectores) dotado de dos operaciones. Una de ellas interna (suma):*

$$+ : X \times X \longrightarrow X$$

Respecto a la cual X es un grupo conmutativo, y una operación externa, el producto por escalares:

$$\cdot : X \times X \longrightarrow X$$

que verifica:

1. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,

2. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

3. $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu x)$,

4. $1x = x$, *donde* $x, y \in X$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *y 1 es la unidad en* $\mathbb{K}$.

La siguiente, es una herramienta fundamental en el estudio de los espacios vectoriales.

Definición 1.2. *Sea* $x_1, \dots, x_n$ *elementos de un espacio vectorial* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *escalares del cuerpo* $\mathbb{K}$. *Se llama* combinación lineal de los vectores $x_{1,\dots,x_n}$ *con coeficientes* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *al vector:*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$$

Obviamente, toda combinación lineal está contenida en el espacio. Téngase en cuenta que una combinaciíon es una suma finita con coeficientes en el cuerpo. La suma con infinitos sumandos, u otras con un número finito de coeficientes no nulos, aunque en cantidad variable, llevan a los conceptos más avanzados de álgebra (suma y productos directos con un número arbitrario de factores).

1.2.2 Subespacios.

Definición 1.3. *Sea* X *un espacio vectorial sobre un cuerpo* $\mathbb{K}$ *y sea* W *un subconjunto de* X *no vacío. Se dice que* W *es un subespacio vectorial de* X *si:*

1. $x - y \in W$, $\forall x, y \in W$,

2. $\lambda x \in W$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Proposición 1.1. *Si* W *es un subespacio vectorial de* X, *entonces el conjunto* W *con las operaciones* $+$ *y* $\cdot$, *inducida de la suma y el producto por escalares de* X, *es un espacio vectorial.*

Definición 1.4. *La suma de dos subespacios* W_1 *y* W_2 *de un espacio vectorial* X *se define como:*

$$W_1 \oplus W_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in W_1,\ x_2 \in W_2\}$$

Definición 1.5. *Se dice que la suma de dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial es directa, si cada elemento de la suma admite una única descomposición como suma de un elemento del primer subespacio más un elemento del segundo. Se escribe entonces:* $W_1 \oplus W_2$

En general, los elementos de una suma de subespacios se pueden descomponer de varias formas como suma de un vector de W_1 y un vector de W_2. Dicho de otra manera, la descomposición no es única.

Teorema 1.1. *Sean W_1 y W_2 dos subespacios de un espacio vectorial X. Entonces, la suma de W_1 y W_2 es directa si y sólo si $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.*

Los conceptos de suma y suma directa se pueden extender a más de dos subespacios, imponiendo la unicidad de la descomposición de cualquier vector de la suma en suma de elementos de cada uno de los subespacios.

1.2.3 Generadores.

Definición 1.6. *Sea S un subconjunto de un espacio vectorial X. Se llama* espacio vectorial generado *por S al menor de los subespacios de X que contiene a S.*

Está claro que dicho subespacio será la intersección de todos los subespacios que contiene a S: La intersección no puede ser vacía, pues S está en todos ellos y al menos existe un subespacio que contiene a S (el espacio X).

Teorema 1.2. *El subespacio generado por un subconjunto de un espacio vectorial X, es el conjunto de combinaciones lineales que se pueden forman con los elementos de S.*

Definición 1.7. *Se dice que el subconjunto S del espacio vectorial X es un sistema de generadores de X, si el espacio generado por S, es el espacio total X.*

1.2.4 Rango

Definición 1.8. *El rango de una familia de vectores es el número máximo de vectores linealmente independiente que se pueden encontrar en la familia.*

Estamos en condiciones de definir lo que es una base de un espacio vectorial.

1.2.5 Bases

Definición 1.9. *Se dice que la familia de vectores del espacio vectorial $X, \mathcal{B}$, es una* base *, si ella es un sistema de generadores de X y es linealmente independiente.*

Teorema 1.3. *Sea X un espacio vectorial. Todas las bases de X tienen el mismo cardinal.*

Este teorema es fundamental. Permite relacionar las bases de un espacio vectorial, y asignar a este espacio un número natural cuando el cardinal anterior es finito

Definición 1.10. *Se llama* dimensión *de un espacio vectorial X sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ al cardinal común de las bases de X.*

Teorema 1.4. *En un espacio de dimensión finita n no hay conjuntos de vectores linealmente independiente, con más de n vectores. Si un conjunto de n vectores es linealmente independiente, es una base.*

1.2.6 Matrices

Definición 1.11. *Una matriz es una colección de objetos dispuestos en forma rectangular en cierto número de filas y columnas.*

Los elementos de la matriz se designan por dos subíndices que indican la posición que ocupa: el primero la fila y el segundo la columna. Así la matriz $A = (a_{ij})$ es la formada por los elementos a_{ij} en las posiciones correspondientes.

Definición 1.12. *El conjunto de matrices $n \times m$ con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$, $M_{n\times m}(\mathbb{K})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión $n \times m$.*

Definición 1.13. *Sea $A \in M_{n\times m}(\mathbb{K}), conelementos (a_{ij})$. Se define la* matriz transpuesta *de A, A^t como la matriz en $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ con elementos (b_{ji}), tal que:*

$$b_{ij} = a_{ji},\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n$$

Es decir, se intercambian filas por columnas.

1.3 Aplicaciones lineales

Las aplicaciones más notables entre espacios vectoriales son aquellas que preservan su estructura. Tales aplicaciones se denominan lineales*; veamos algunas definiciones.*

1.3.1 Definiciones

Definición 1.14. *Una aplicacion $T : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios vectoriales se dira que es* lineal *si,*

1. $T(x + y) = T(x) + T(y),\ \forall x, y \in X$.
2. $T(\lambda x) = \lambda T(x)\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Si T es inyectiva diremos que es un monomorfismo de espacios vectoriales, si es suprayectiva, diremos que es un epimorfismo y si es biyectiva diremos que T es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Definición 1.15. *Llamaremos* Núcleo o Kernel *de la aplicación lineal* $T : X \longrightarrow Y$ *al subconjunto* $\ker T = \{x \in X : T(x) = 0\} = f^{-1}(0)$. *La imagen de T se denotará por $T(X)$.*

Proposición 1.2. *El kernel T y la imagen de T son subesapcios vectoriales.*

Proposición 1.3. *Una apliación lineal* $T : X \longrightarrow W$ *es un* monomorfismo *si y sólo si* $\ker T = 0$. *T es un* epimorfismo *si y sólo si* $T(X) = W$.

Proposición 1.4. *Si $T : W \longrightarrow X$ es un isomorfismo, y $\mathcal{B}$ es una base de X, entonces $T(\mathcal{B})$ es una base del espacio W.*

Proposición 1.5. *Una aplicación lineal $T : X \longrightarrow W$ es un isomorfismo si y sólo si para alguna base $\mathcal{B}$ de X, $T(\mathcal{B})$ es una base de W.*

1.3.2 Representación Matricial de una Aplicación Lineal

Sean X, Y espacios vectoriales y sea $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal, (ambos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$). Sea $\mathcal{B} = \{e_j\}_{j=1}^{n}$ una base de X $(\dim X = n)$ y $\mathcal{C} = \{b_i\}_{i=1}^{m}$ una base de Y $(\dim Y = m)$. La imagen del vector e_j por T, $T(e_j)$, será una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$, esto es:

$$T(e_j) = a_{1_j}b_1 + a_{2_j}b_2 + \ldots + a_{m_j}b_m,\ j = 1, \ldots, m$$

Los coeficientes a_{ij} $i = 1, \ldots, n$ $j = 1, \ldots, m$, pueden organizarse como una matriz mxn.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{24} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La primera columna está formada por los coeficientes de la imagen de e_1 en la base b_i, la j-esima columna está formada por las coordenadas del vector e_j en la base de b_j. Si los colocamos los vectores b_i, formada por una matriz 1xm, $(b_1, \ldots, b_m)$ podemos escribir

$$T(e_1, \ldots, e_n) = (b_1, \ldots, b_m).a$$

Llamaremos la matriz A la representación matricial de T *en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ y en ocasiones por motivos de presión en la notación escribiremos también $A(T, \mathcal{B}, \mathbb{C})$, con indicación expresa de las bases respecto a las cuales está definida.*

1.4 Espacios de Aplicaciones Lineales.

1.4.1 Espacio Dual de un Espacio Vectorial.

La composición de aplicaciones lineales es de nuevo una aplicacion lineal. Este hecho nos conduce a considerar como candidatos a nuevos espacios vectoriales, conjuntos cuyos elementos son aplicaciones lineales ya que podemos sumarlas y multiplicarla por escalares. En particular si consideremos $\mathbb{K}$ *como un espacio de dimensión 1 sobre el propio cuerpo* $\mathbb{K}$*, las aplicaciones lineales* $T : X \longrightarrow \mathbb{K}$ *se llaman* funcionales lineales *sobre* X *y forman un espacio vectorial.*

Proposición 1.6. *Sea* X *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$*. El conjunto de aplicaciones lineales* $T : X \longrightarrow \mathbb{K}$ *forman un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$*, denotado por* X^**, llamado el* espacio dual *de* X*. Además* $\dim X = \dim X^*$.

1.5 Endomorfismos de un Espacio Vectorial.

Una aplicación lineal T *de un espacio vectorial* X *en sí mismo se denominará un* endomorfismo *de* X*. El conjunto de las aplicaciones lineales de* X*, esto es, de endomorfismos de* X*, se denotará por* $\mathcal{L}(X)$.

Proposición 1.7. *El espacio de endomorfismos* $\mathcal{L}(X)$ *es un espacio vectorial de dimensión* $(\dim X)^2$.

1.6 Rango de una Aplicación.

Definición 1.16. *Si* $T : X \longrightarrow Y$ *es una aplicación lineal, llamaremos* Rango *de* T *a la dimensión de* $T(X)$*, o en otras palabras al números de vectores linealmente independientes en la imagen de una base cualquiera* X*. El* rango *de una aplicación se denotara por* $Rgo(T)$.

Proposición 1.8. *Si* A *es una representación matricial de* $T : X \longrightarrow Y$ *entonces:*

$$Rgo(T) = Rgo(A)$$

Definición 1.17. *Sea* $T : X \longrightarrow Y$ *es una aplicación lineal, llamaremos* aplicación transpuesta o dual *de* T *y se denotara por* T^* *a la aplicación* $T : Y^* \longrightarrow X^*$ *definida por*

$$(T^*\alpha)(x) = \alpha(T(x)), \qquad \forall \alpha \in Y^*,\ x \in X$$

1.7 Espacios Normados y Espacios de Banach

Definición 1.18. *Un espacio normado* X *es un espacio vectorial con una norma definida en él. Un espacio de Banach es un espacio normado completo (completo en la metrica definida por la norma).*

1.8 Espacios de Hilbert

1.8.1 Definición

Definición 1.19. *Un* Espacio de Hilbert *es un espacio de Banach complejo, cuyo norma es proviene de un producto interno, esto es, se define una función compleja* $\langle x, y\rangle$ *de vectores* x *y* y *tales que cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$.
2. $\overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle$.
3. $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$.

Es evidente, la siguiente relación

$$\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle$$

Esto es consecuencia directa de las propiedades 1. y 2.

1.9 Operadores Acotados en Espacios de Hilbert

1.9.1 Forma Sesquilineal

Definición 1.20. *Sea* X *un espacio vectorial complejo. Una* forma sesquilineal *es una aplicación:*

$$\phi : X \times X \to \mathbb{C}$$

que verifica:

1. $\phi(x, y) = \phi(\bar{y}, x), \quad x, y \in X$
2. $\phi(x, y + z) = \phi(x, y) + \phi(x, z), \quad x, y, z \in X$
3. $\phi(x, \lambda y) = \lambda\phi(x, y), \quad x, y, z \in X,\ \lambda \in \mathbb{C}$

En lo que sigue, la letra H*, denotará un espacio de Hilbert; el producto interno en este espacio será denotado por* $\langle\ ,\ \rangle$*. Con* $\mathcal{L}(H)$ *indicaremos a todos los operadores lineales acotados* T *sobre el espacio de Hilbert* $H \neq \{0\}$*, normado con*

$$\|T\| = \sup\{Tx : x \in H, \|x\| \leq 1\}$$

Teorema 1.5. *Si* $S \in \mathcal{L}(H)$*,* $T \in \mathcal{L}(H)$ *y si* $\langle Sx, x\rangle = \langle Tx, x\rangle$ *para todo* $x \in H$ *entonces* $S = T$*.*

Teorema 1.6. *Si* $T \in \mathcal{L}(H)$*, entonces la forma* B *definida por* $B(x, y) = \langle Tx, y\rangle$ *es una forma sesquilineal acotada con* $\|B\| = \|T\|$*. La forma sesquilineal* B *se le llama forma asociada al operador* T*. Recíprocamente, si* B *es una forma sesquilineal acotada, entonces existe un operador* $T \in \mathcal{L}(H)$*, tal que* $B(x, y) = \langle Tx, y\rangle$ *y* B *es la forma asociada a* T*.*

$T \in \mathcal{L}(H)$ *y sea* $B(x,y)$ *la forma sesquilineal asociada a* T*, es decir,* $B(x,y) = \langle Tx, y\rangle$ *para todo* $x, y \in H$.

Poniendo $B^*(x,y) = \overline{B(y,x)}$ *se ve enseguida que también* B *es una forma sesquilineal acotada, luego* B *es la forma asociada de un operador* $T^* \in \mathcal{L}(H))$*. Este operador se llama* adjunto de T *y se caracteriza por la propiedad* $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$*,* T *es el adjunto de* T *y* $\langle T^*\rangle^* = T$*. Más aún,* $\|T^*\| = \|T\|, (TS)^* = S^*T^*$.

Definición 1.21. *Un operador* $T \in \mathcal{L}(H)$ *se dice:*

(a) Normal cuando $TT^* = T^*T$

(b) Autoadjunto (o Hermitiano) si $T^* = T$

Teorema 1.7. *Sea* $T \in \mathcal{L}(H)$*. Las siguientes proposiciones son equivalentes.*

(a) $T = T^*$

(b) $\langle Tx, y\rangle \in \mathbb{R}$ *para todo* $x \in H$

(c) $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ *para todo* $x \in H$ *y* $\in H$

Definición 1.22. *El operador* T *se dice* no negativo*;* $T \geq 0$*, si* $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ *para todo* $x \in H$*. Se escribe* $T_1 \leq T_2$ *si* $T_2 - T_1 \geq 0$*. Es claro que si* $T \geq 0$ *entonces* T *es autoadjunto.*

Teorema 1.8. *Sea* $T \in \mathcal{L}(H)$ *entonces:*

(a) Si existe $T_1 \in \mathcal{L}(H)$ *tal que* $T = T_1T_1^*$ *entonces* $T \geq 0$.

(b) $T = T^*$ *entonces* $\|T\| \leq C$ *es equivalente a:*
$-CI \leq T \leq CI$.

(c) $T \geq 0$ *implica* $T^* \geq 0$ *y viceversa.*

(d) $T \geq 0$ *existe* $T_1 \geq$ *tal que* $T_1^2 = T$.

(e) Poniendo $A_1 = \frac{1}{2}(T+T^*)$*;* $A_2 = \frac{1}{2}i(T+T^*)$ *se tiene* A_1 *y* A_2 *son Autoadjuntos y* $T = A_1 + iA_2$*.* $A_1(A_2)$ *se llama parte real (imaginaria) de* T*, además* T *es normal si* A_1 *y* A_2 *conmutan. Recíprocamente si* A_1 *y* A_2 *son dos operadores autoadjuntos que conmutan entre sí, entonces* $N = A_1 + iA_2$ *es un operador normal.*

Teorema 1.9. *Si* $P \in \mathcal{L}(H)$*, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(a) P *es una proyección ortogonal.*

(b) P *es autoadjunto y* $P^2 = P$.

(c) $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$ *para todo* $x \in H$.

Teorema 1.10. *Sean $E_1, E_2, \dots$ subespacios cerrados de H; si escribimos $P_{E_n} = P_n$ se tiene:*

(a) Si $P_1 \leq P_2 \leq \dots \leq P_n \leq \dots$ entonces existe un proyector ortogonal P tal que $P_n x \longrightarrow P_x$ para todo $x \in H$.

(b) Si $P_n P_m = 0$ para $n \neq m$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ converge en todo x a $P_E(x)$, donde $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Teorema 1.11. *Si $U \in \mathcal{L}(H)$ son equivalentes:*

(a) U es unitario.

(b) Rgo $U = H$ y $(Ux, y) = (x, y)$ para cualquiera $x \in H$ e $y \in H$

(c) Rgo $U = H$ y $\|Ux\| = \|x\|$ para todo $x \in H$.

Definición 1.23. *Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert, $T : H_1 \longrightarrow H_2$ un operador lineal. T se dice una isometría si para todo $x \in H_1$ $\|Tx\|_{H_2} = \|x\|_{H_1}$. En particular un operador $U \in \mathcal{L}(H)$ es unitario si es una Isometría Sobreyectiva.*

Teorema 1.12. *Si $T \in \mathcal{L}(H)$ son equivalentes:*

(a) T es invertible y su inversa $T^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

(b) Existe una constante $c \geq 0$ tal que $\|Tx\| \geq 0$ para todo $x \in H$.

Definición 1.24. *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$,* el espectro de T *es el conjunto de todos los números complejos λ, tales que $T - \lambda I$ no es invertible. Este conjunto lo denotaremos por $\sigma(T)$.*

El complementario de $\sigma(T)$ es el conjunto resolvente de T *y lo denotaremos por $\rho(T)$.*

El radio espectral de T es el número:

$$r(T) = sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

Teorema 1.13. *Para todo $T \in \mathcal{L}(H)$ se tiene:*

(a) $\sigma(T)$ es compacto y no vacío.

(b) $r(T) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \| T^n|^{1/n} = \inf_{n \geq 1} \|T^n\|^{1/n}$.

Teorema 1.14. *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ entonces:*

(a) Si T es autoadjunto $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

(b) Si T es unitario $\sigma(T) \subset T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Teorema 1.15. *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ entonces:*

(a) *T es normal si, y solo si $\|Tx\| = \|\mathrm{T}^*x\|$ para todo $x \in H$.*

(b) *Si T es normal, entonces $N(T) = N(\mathrm{T}^*) = Rgo\ (T)^{\perp}$*
Aquí $N(T)$ denota el espacio nulo *de T y $Rgo\ (T)$ el recorrido de T.*

(c) *Si T es normal y $Tx = \lambda x$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ y algún $x \in H$, entonces $\mathrm{T}^*x = \overline{\lambda}x$.*

Definición 1.25. *Sea E un subespacio (cerrado) de H, $T \in \mathcal{L}(H)$. E se dice que es un subespacio* T-invariante, *o invariante por T si $TE \subset E$. Si E es T invariante llamado T_E la restricción de T en E, y tendremos que $T_E \in \mathcal{L}(H)$.*

Supondremos conocidas las nociones de función medible e integrable, las propiedades que las caracterizan y los principales teoremas asociados a tales conceptos. Tan solo recordaremos los enunciados de los teoremas de Lebesgue, Randon-Nikodyn y el teorema de representación de Riesz, a los cuales se aludirá especialmente en posteriores secciones.

Definición 1.26. *El soporte de una función compleja f sobre X es la adherencia del conjunto $\{x : f(x) \neq 0\}$.*

A la colección de todas las funciones complejas contínuas sobre X a soporte compacto se le designa mediante $C_c(X)$.

1.9.2 Teorema de Representación de Riesz.

Teorema 1.16. ***Teorema de Representación de Riesz.*** *A cada funcional lineal acotada ϕ sobre $C_c(X)$, le corresponde una única medida de Borel, compleja, regular μ tal que:*

$$\phi(f) = \int_X f\ d\mu \ \ (\ f \in C_c(X)\ ) \ \ con \ \ \|\mu\| = \|\phi\|.$$

Además si $\phi(f) \geq 0$ para todo $f \in C_c(X)$, entonces $\mu \geq 0$.

Capítulo 2

Teoría Espectral de Operadores en Espacios de Dimensión Finita.

2.1 Introducción

En este capítulo consideraremos a X como un espacio vectorial no nulo de dimensión finita n sobre un cuerpo de los números complejos. Si $\mathcal{B}$ es una base de X, supondremos siempre que $\mathcal{B}$ es una base ordenada*, es decir una base en la cual hemos elegido un orden para los elementos.*

Al espacio de las aplicaciones lineales de X en X lo denotaremos por $\mathcal{L}(X)$ y la aplicación lineal identidad por id o I. Al espacio de las matrices cuadradas de orden n respecto a una base $\mathcal{B}$ con coeficientes en $\mathbb{K}$ lo denotaremos por $M_n(T, \mathcal{B})$.

2.2 Subespacios Invariantes

Se dice que un espacio vectorial X es la suma directa *de sus subespacios $U_1, \ldots, U_n$, representado por*

$$X = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_n$$

si todo $x \in X$ puede escribirse de manera única en la forma

$$x = u_1 + \ldots + u_n \qquad \text{con } u_i \in U_i.$$

Se aplica el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Sean $U_1, \ldots, U_n$ subespacios de X y supongamos que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son bases de $U_1, \ldots, U_n$ respectivamente. Entonces X es la suma directa de los U_i si y sólo si la unión de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ es una base de X.*

Supongamos ahora que $T : X \longrightarrow X$ es lineal y X es la suma directa de los sub espacios $T-$invariantes (distintos de cero) $U_1, \ldots, U_n$:

$$X = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n \quad y \quad T(U_j) \subset U_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

Sea $T_{|U_j}$ la restrinción de T a U_j. Se dice entonces que T se descompone en los operadores $T_{|U_j}$ o que T es la suma directa de los $T_{|U_j}$ y se escribe $T = T_1 \oplus \ldots \oplus T_n$. También, se dice que los subespacios $U_1, \ldots, U_n$, reducen a T o que forman una descomposición de X en suma directa $T-$invariante.

En particular, si algún U_i tiene dimensión 1, la restrinción $T_{|U_i}$ será más sencillo de hallar. En efecto, existe un $x \neq 0$ tal que $U_j = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{C}\}$. Si $T : U_j \longrightarrow U_j$ entonces $Tx = \lambda_0 x$ para algún $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Notemos que en este caso, para todo $w = \lambda x \in U_j$ se tiene que:

$$T(w) = T(\lambda x) = \lambda T(x) = \lambda\lambda_0 x = \lambda_0(\lambda x) = \lambda_0 w \ \forall \in U_j$$

Por lo tanto, $T(w) = \lambda_0 w$.

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.1. *Sea X un espacio vectorial y $T \in \mathcal{L}(X)$, diremos que $\lambda \in \mathbb{C}$, es un* autovalor *de T si existe un $0 \neq x \in X$ tal que $T(x) = \lambda x$, el vector x se dice que es el* autovector *de T asociado a λ.*

Dada $A \in M(T, \mathcal{B})$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ se dice que λ es un autovalor *de A si existe $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$ tal que $Ax = \lambda x$, el vector x se dice que es el* autovector *de A asociado a λ. Es claro que los autovalores y los autovectores de la matriz A coinciden con los del operador T.*

2.3 Matriz Triangular Superior

Ahora conoceremos uno de los resultados centrales de los espacios vectoriales complejos.

Teorema 2.2. *Cualquier operador distinto de cero, en un espacio vectorial complejo tiene un autovalor.*

Demostración. *Supongamos que X es un espacio vectorial complejo con dimensión $n > 0$ y $T \in \mathcal{L}(X)$. Tomemos un vector distinto de cero x en X, entonces*

$$(x, Tx, T^2x, \ldots, T^n x)$$

no puede ser linealmente independiente porque X tiene dimensión n y tenemos $n+1$ vectores. Entonces existen números complejos $a_0, \ldots, a_n$ no todos cero, tales que:

$$a_0 x + a_1 Tx + \ldots + a_n T^n x = 0$$

Tomemos los $a's$ los coeficientes de un polinomio, que puede ser escrito en forma factorizada como

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = c(z - \lambda_1), \ldots, (z - \lambda_m)$$

donde c es un número complejo distinto de cero, $m \geq 1$, para cada $\lambda_j \in \mathbb{C}$, la ecuación anterior asegura que para todo $z \in \mathbb{C}$, se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= (a_0 I + a_1 T + \ldots + a_n T^n)x \\ &= c(T - \lambda_1 I), \ldots, (T - \lambda_m I)x, \end{aligned}$$

Se sigue $T - \lambda_j I$ no es inyectiva por lo menos para un j. En otras palabras T tiene un autovalor.

■

2.4 Diagonalización

Sea X un espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(X)$. Veremos que T tiene una representación matricial que nos ayudará a comprender de manera más clara la estructura del operador T, para ello tomaremos una base $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de X tal que:

$$\begin{array}{ll} T(x_1) & = \lambda_1 x_1 \\ T(x_2) & = \lambda_2 x_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\widehat{}\cdots\cdots \\ T(x_n) & = \lambda_n x_n \end{array}$$

esto es, tal que los vectores $x_1, \ldots, x_n$ son vectores propios de T correspondientes, respectivamente, a los autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Definición 2.2. *Una matriz $A \in M(T, \mathcal{B})$ es* diagonal *si se cumple que $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Es decir, todos los elementos fuera de la diagonal son 0.*

Definición 2.3. *Un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ se dice* diagonalizable *si para alguna base $\mathcal{B}$ el puede representarse mediante una matriz diagonal; en este caso, se dice que las base $\mathcal{B}$ diagonaliza a T y la denotaremos por $M(T, \mathcal{B})$.*

Definición 2.4. *Diremos que dos matrices $A, B \in M(T, \mathcal{B})$ son semejantes si existe una matriz $P \in M(T, \mathcal{B})$ invertible (no singular) tal que $A = P^{-1}BP$. en está situación escribiremos $A \simeq B$. En virtud de esto se tiene que:*

i.- Dos matrices semejantes representan el mismo operador lineal T en un espacio normado X de dimensión finita.

ii.- Matrices semejantes tienen los mismos autovalores.

Teorema 2.3. *Sea A una representación matricial de un operador lineal T. Entonces T es* diagonalizable *si y sólo si existe una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal.*

Demostración. *Sea $\mathcal{B}$ una base de X tal que $A = M(T, \mathcal{B})$. Si T es diagonalizable entonces existe una base $\mathcal{C}$ de X tal que $D = M(T, \mathcal{C})$, donde D es una matriz diagonal.*

$$M(T, \mathcal{C}) = PM(T, \mathcal{B})P^{-1} = PAP^{-1}$$

Así $A = M(T, \mathcal{B})$ es semejante a una matriz diagonal. Recíprocamente, si A es semejante a una matriz diagonal D entonces, existe una base $\mathcal{C}$ de X tal que D. Esto prueba que es diagonalizable.

Teorema 2.4. *Un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ puede representarse mediante una matriz diagonal B si y sólo si tiene una base formada por autovalores de T. En este, los elementos de la diagonal de B son los correspondientes autovalores.*

Demostración. *Si existe una base de autovectores $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, sus imágenes sobre T son $T(x_i) = \lambda_i x_i \;\; i = 1, \ldots, n$ por lo que la matriz asociada es:*

$$M(T, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Recíprocamente, si la matriz asociada es diagonal, los elementos de la diagonal son justamente los autovalores, y los vectores de la base los vectores correspondientes.

2.5 Operadores en Espacios de Hilbert

Al igual que cuando hablamos de diagonalización en endomorfismos, haremos aquí una distinción entre el caso real y complejo. Como veremos, el caso complejo es más simple que el real, y muchos de los resultados que obtendremos en este caso son aplicables en el real.

2.6 Operadores en Espacios de Hilbert Complejos

En toda está sección X será un espacio vectorial complejo de dimensión finita, dotado de un producto escalar.

2.6.1 Operadores Adjuntos

Definición 2.5. *Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador. El operador* adjunto o hermitiano *se define como un operador $T^* : X \longrightarrow X$ que verifica:*

$$\langle x, Ty \rangle = \langle T^* x, y \rangle, \forall x, y \in X$$

Veamos que tal operador *existe. Para $x \in X$, definimos la siguiente forma lineal:*

$$X \longrightarrow \mathbb{C}y \longrightarrow \langle x, Ty \rangle$$

Por el teorema de Riesz-Fréchet, existe un único vector $z \in X$ tal que:

$$\langle x, Ty \rangle = \langle z, y \rangle \ \forall y \in X$$

La correspondencia $x \mapsto z$ de X en X es lineal. Sean $x, x' \in X$ y consideremos la forma lineal:

$$y \mapsto \langle x + x', Ty \rangle = \langle x, Ty \rangle + \langle x', Ty \rangle$$

Existe un único $\tilde{z} \in X$ tal que:

$$\langle x + x', Ty \rangle = \langle \tilde{z}, y \rangle, \ \forall y \in X.$$

es decir:

$$\langle x, Ty \rangle = \langle x', Ty \rangle = \langle z, y \rangle + \langle \tilde{z}, y \rangle = \langle z + \tilde{z}, y \rangle$$

de donde:

$$\tilde{z} = z + z'$$

En cuanto al producto por escalares:

Sean $x \in X, \ \lambda \in \mathbb{C}$ y consideremos:

$$y \mapsto \langle \lambda x, Ty \rangle = \tilde{\lambda} \langle x, Ty \rangle$$

Existe un único $\tilde{z} \in X$ tal que:

$$\langle \lambda x, Ty \rangle = \langle \tilde{z}, y \rangle \ \forall y \in X.$$

Y por lo tanto

$$\tilde{\lambda} \langle x, Ty \rangle = \tilde{\lambda} \langle z, y \rangle = \langle \lambda z, y \rangle$$

de donde

$$\tilde{z} = \lambda z$$

La operación de tomar adjuntos (pasar de T a T^*) tienen las siguientes propiedades, que se pueden demostrar fácilmente:

Proposición 2.1. *Sean T, S operadores lineales sobre el espacio con producto interno X de dimensión finita. Entonces*

1. $(T^*)^*$.
2. $(T+S)^* = T^* + S^*$.
3. $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$.
4. $(TS)^* = S^* T^*$.

Demostración. *La propiedad 1. Sean $x, y \in X$. Entonces*

$$\langle x, Ty\rangle = \langle T^*x, y\rangle = \overline{\langle y, T^*x\rangle} = \overline{\langle (T^*)^*y, x\rangle} = \langle x, (T^*)^*y\rangle$$

relación que debe ser cierta $\forall x, y \in X$, lo que muestra 1.

Probemos 2. Sean $x, y \in X$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle (T+S)x, y\rangle &= \langle Tx + Sx, y\rangle \\
&= \langle Tx + y\rangle + \langle Sx, y\rangle \\
&= \langle x, T^*y\rangle + \langle x, S^*y\rangle \\
&= \langle x, T^*y + S^*y\rangle \\
&= \langle x, (T^* + S^*)y\rangle
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(T+S)^* = T^* + S^*$.

Probemos 3. Para todo $x, y \in X$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle (kT)(x), y)\rangle &= \langle (kT(x), y)\rangle \\
&= k\langle T(x), y)\rangle \\
&= k\langle x, T^*(y)\rangle \\
&= \langle u, \overline{k}T^*(y)\rangle \\
&= \langle u, (\overline{k}T^*)(y)\rangle
\end{aligned}$$

Probemos 4. Para todo $x, y \in X$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle (ST)x, y\rangle &= \langle S(T(x)), y\rangle \\
&= \langle T(x), S^*(y)\rangle \\
&= \langle x, T^*(S^*(y))\rangle \\
&= \langle x, (T^*S^*)(y)\rangle
\end{aligned}$$

La unicidad del adjunto implica que $(ST)^* = T^*S^*$. ■

2.6.2 Representación Matricial del Operador Adjunto.

Veamos cómo obtener una representación matricial del operador adjunto a partir del operador original. Sea X un espacio vectorial complejo de dimensión finita dotado de un producto escalar y $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal de X. Sea T la matriz de T en la base $\mathcal{B}$, es decir, $T(a_{ij})$:

$$Au_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}u_j, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Sea $T^{'}$ la matriz del operador adjunto $T^{'}(a_{ij})$. Se tiene:

$$(u_i, Au_j) = (A^* u_i, u_j), \forall i, j = 1, \ldots, n$$

y sustituyendo las expresiones de Au_jy $A^* u_i$:

$$\begin{aligned}
(u_i \sum_{k=1}^{n} a_{kj} u_k) &= (\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^{'} u_k, u_j) \\
(\sum_{k=1}^{n} a_{kj} (u_i, u_k)) &= (\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^{'} (u_i, u_j)) \\
(\sum_{k=1}^{n} a_{kj} \delta_{ik}) &= (\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^{'} \delta_{kj})
\end{aligned}$$

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji}$$

es decir:

$$T^{'}(a_{ij}) = T^*(a_{ij})$$

La matriz del operador adjunto es la matriz transpuesta conjugada (la matriz adjunta) del operador de partida (el simbolo $*$ significará indistintamente operador adjunto o matriz transpuesta conjugada, dependiendo a quién esté aplicado). Nótese que este resultado es solo cierto cuando la base en la que están escritos los operadores es ortonormal. Así, la relación es más complicada y hacer intervenir la matriz del producto escalar. En estas bases que no son ortonormales, la matriz de T^* no es $T^*(a_{ij})$, lo que puede inducir a cierta confusión sino se presta atención.

Recordando cómo se calculaban las coordenadas de un vector en una base ortonormal, podemos encontrar una expresión de los elementos de matriz de un operador en bases de este tipo. En efecto,

$$(u_j, Au_j) = (u_i, \sum_{k=1}^{n} a_{kj}, u_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}, (u_i, u_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \delta_{ik} = a_{ij}$$

es decir:

$$a_{ij} = (u_i, Au_j)$$

2.6.3 Operadores Normales y Autoadjuntos

Teniendo en cuenta las relaciones entre T y T^*, se puede definir clases especiales de operadores. Sea $(X, \langle \, . \, \rangle)$ un espacio vectorial complejo con producto escalar, y T un operador en X.

Definición 2.6. *Se dice que el operador T es* normal *si conmuta con su adjunto:*

$$TT^* = T^* T$$

Definición 2.7. *Se dice el operador T es* autoadjunto *si coincide con su adjunto.*

$$T^* = T$$

Los operadores autoadjuntos verifican:

$$\langle x, Ty\rangle = \langle T^*x, y\rangle$$

y en bases ortonormales viene representados por matrices autoadjuntas (o hermíticas):

$$T^* = T$$

Es inmediato comprobar que los operadores autoadjuntos son normales. Existen operadores normales que no son autoadjuntos. Nuestro interés se centra en los operadores autoadjuntos. Sin embargo, es más conveniente, y no implica ningún esfuerzo adicional, estudiar los operadores normales y luego restringirnos al caso autoadjunto.

Proposición 2.2. *Cualquier autovalor de un operador autoadjunto es real.*

Demostración. *Supongamos que T es un operador autoadjunto de X. Sea λ un autovalor de T y un vector $x \neq 0$ tal que $Tx = \lambda x$. Entonces*

$$\begin{aligned}\lambda\|x\|^2 &= \langle \lambda x, x\rangle \\ &= \langle Tx, x\rangle \\ &= \langle x, Tx\rangle \\ &= \langle x, \lambda x\rangle \\ &= \overline{\lambda}\|x\|^2\end{aligned}$$

Entonces $\lambda = \overline{\lambda}$, Así λ es real. Lo que queríamos. ■

Proposición 2.3. *Sea X un espacio vectorial complejo con producto interno y sea $T \in \mathcal{L}(X)$. entonces T es autoadjunto si y sólo si*

$$\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$$

para cualquier $x \in X$.

Demostración. *Sea $x \in X$. Entonces*

$$\begin{aligned}\langle Tx, x\rangle - \overline{\langle Tx, x\rangle} &= \langle Tx, x\rangle - \langle x, Tx\rangle \\ &= \langle Tx, x\rangle - \langle T^*x, x\rangle \\ &= \langle (T - T^*)x, x\rangle.\end{aligned}$$

Si $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ para cualquier $x \in X$, entonces el lado izquierdo de la ecuación anterior es igual a 0. Así $\langle (T - T^*)x, x\rangle = 0$ para cualquier $x \in X$. Esto implica que $T - T^* = 0$, y así T es autoadjunto.

Recíprocamente, si T es autoadjunto, entonces el lado izquierdo de la ecuación es igual a 0. Así $\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} = 0$ para cualquier $x \in X$. Esto implica que $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ para cualquier $x \in X$. Lo que queríamos. ■

Proposición 2.4. *Un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ es normal si sólo si*

$$\|Tx\| = \|T^*x\|$$

para todo $x \in X$.

Demostración. *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$.probaremos las dos direcciones al mismo tiempo. Note que:*

$$\begin{aligned} T \text{ es normal} &\iff T^*T - TT^* = 0 \\ &\iff \langle (T^*T - TT^*)x, x\rangle = 0 \text{ para todo } x \in X \\ &\iff \langle T^*Tx, x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle \text{ para todo } x \in X \\ &\iff \|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2 \text{ para todo } x \in X \end{aligned}$$

Esto termina la prueba. ■

Corolario 2.1. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(X)$ es normal. Si $x \in X$ es un autovector de T con autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces x es también un autovector de T^* con autovalor $\overline{\lambda}$.*

Demostración. *Supongamos que $x \in X$ es un autovector de T con autovalores λ. Así $(T - \lambda I)x = 0$. Como T es normal, se tiene que $T - \lambda I$, como verificaremos. Entonces*

$$0 = \|(T - \lambda I)x\| = \|(T - \lambda I)^*x\| = \|(T^* - \overline{\lambda} I)x\|$$

y así x es un autovector de T^* con autovalor $\overline{\lambda}$, como queríamos. ■

2.6.4 Teorema Espectral para Operadores Normales.

Nuestro objetivo es probar que los operadores normales son diagonalizables, es decir, existe una base del espacio formada por autovectores, y además está base es ortonormal.

Teorema 2.5. *Supongamos que X es un espacio vectorial complejo con producto interno y $T \in \mathcal{L}(X)$. Entonces X tiene una base ortonormal formada por los autovectores de T si y sólo si T es normal.*

Demostración. *Primero supongamos que X tiene una base ortonormal formada por los autovectores de T. Con respecto a estás bases, T tiene una matriz diagonal. La matriz de T^* (con respecto a la misma base) es obtenida tomando la conjugada transponiendo la matriz de T; así T^* también tiene una matriz diagonal. Cualesquiera dos matrices diagonales conmutan; así T conmutan con T^*, entonces T es normal.*

Recíprocamente, al ser T un operador normal, T conmuta con su adjunto, luego por la proposición 2.4 y el corolario 2.1 T y T^*, tienen un autovalor común.

$$Tx = \lambda_1 x \quad y \quad T^*x = \mu x$$

Como

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \langle x, \mu x\rangle = \overline{\mu}\langle x, x\rangle$$

Pero

$$\langle Tx, x\rangle = \langle \lambda_1 x, x\rangle = \lambda_1\langle x, x\rangle$$

Es decir

$$\overline{\mu}\|x\|^2 = \lambda_1\|x\|^2$$

Entonces

$$\lambda_1 = \overline{\mu}$$

Sea T un operador normal y λ_1 un autovalor de T asociado a un autovector u_1 de norma 1. (vector unitario) de T y T^*.

$$u_1 = \frac{x}{\|x\|}$$

El subespacio $U_1 = \langle u_1\rangle = \{\lambda u_1 : \lambda \in \mathbb{C}\}$ es invariante bajo T y T^*.

Afirmación 1: En efecto

$$\begin{aligned} T(Tu_1) &= T(\lambda_1 u_1) \\ &= \lambda(\lambda_1 u_1) \\ &= (\lambda\lambda_1)u_1 \in U_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} T^*(Tu_1) &= T(\lambda_1 u_1) \\ &= \overline{\lambda}(\lambda_1 u_1) \\ &= (\overline{\lambda}\lambda_1)u_1 \in U_1 \end{aligned}$$

Así

$$T(U_1) \subset U_1 \qquad y \qquad T^*(U_1) \subset U_1$$

Como U_1 es invariante bajo T y T^*, por lo tanto $U_1^{\perp}$ es invariante bajo T y T^*.

Afirmación 2: En efecto

Sea $y \in U_1^{\perp}$ por definición de operador adjunto

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

Si $x \in U_1$*, al ser* T *invariante* $Tx \in U_1$

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = 0$$

de donde $T^*y \in U_1^*$.

Entonces

$$T(U_1^{\perp}) \subset U_1^{\perp} \qquad T^*(U_1^{\perp}) \subset U_1^{\perp}$$

Consideremos la restrinción $T_{|_{U^{\perp}}}$ *buscamos allí un autovector común a* T *y* T^**, el cual existe por proposición 2.4 (Supongamos que la norma 1).*

$$T_{u_2} = \lambda_2 U_2 \qquad T^*_{u_2} = \overline{\lambda_2} U_2$$

Además

$$\langle u_1, u_2\rangle = 0$$

Se construye el subespacio $U_2 = \langle u_2\rangle$ *y se continua el proceso que debe acabar por ser el espacio de dimensión finita.*

De está forma se obtiene una base formada por autovectores de T *que son ortonormales. Nótese que es también una base de autovectores de* T^*.

■

2.6.5 Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos.

Puesto que un operador autoadjunto es normal, los teoremas anteriores se aplican a este tipo de operadores.

Teorema 2.6. ***Teorema Espectral*** *Si* $T \in \mathcal{L}(X)$ *es autoadjunto, entonces* X *tiene una base ortonormal formada por los autovectores de* T.

Demostración. *Supongamos que* $T \in \mathcal{L}(X)$ *es autoadjunto. probaremos que* X *tiene una base ortonormal formada por los autovectores de* T *por inducción sobre la dimensión de* X*. Iniciamos, notando que el resultado es cierto en el caso de que* $\dim X = 1$*. Ahora asumamos que* $\dim X > 1$ *y veamos que el resultado es cierto para espacios vectoriales de menor dimensión.*

Sea λ *cualquier autovalor de* T *y sea* $u \in X$ *denota el correspondiente autovector con* $\|u\| = 1$*. Sea* U *un subespacio unidimensional de* X *formado por todos los multiplos de* u*. Notemos que un vector* $u \in X$ *es un* $U^{\perp}$ *si y sólo si* $\langle u, v\rangle = 0$.

Supongamos $x \in U^{\perp}$*. Como* T *es autoadjunto, se tiene*

$$\langle u, Tx\rangle = \langle Tu, x\rangle = \langle \lambda u, x\rangle = \lambda\langle u, x\rangle = 0$$

y así $Tx \in U^\perp$ como $Tx \in U^\perp$ siempre que $x \in U^\perp$ en otras palabras $U^\perp$ es invariante bajo T. Así podemos definir un operador $S \in \mathcal{L}(U^\perp)$ por $S = T_{|_{U^\perp}}$.

Supongamos $x \in U^\perp$. Entonces

$$\langle u, T^*x\rangle = \langle Tu, x\rangle = \langle \lambda u, x\rangle = \lambda\langle u, x\rangle = 0,$$

y así $T^*x \in U^\perp$. Entonces $T^*x \in U^\perp$ siempre que $x \in U^\perp$. Por otro lado, $U^\perp$ es invariante bajo T^*. Entonces

$$\langle Sx, w\rangle = \langle Tx, w\rangle = \langle x, Tw\rangle = \langle x, Sw\rangle.$$

esto muestra que S es autoadjunto. Así, por nuestra hipótesis inductiva, existe una base ortonormal de U^* formada por los autovectores de S. Claramente cualquier autovector de S es un autovector de T. Así adjuntando u a una base ortonormal de $U^\perp$ formada por los autovectores de S dada una base ortonormal de X formada por los autovectores de T como queríamos.

■

2.7 Proyectores Ortogonales

Sea X un espacio vectorial complejo de dimensión finita con producto escalar. Sea A un operador normal en X, con espectro

$$\sigma(T) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}, \ \ \lambda_i \neq \lambda_j, \ \ i \neq j, \ \ i, j = 1, \ldots, r \ \ r \leq n$$

Los subespacios invariantes:

$$X_i = \ker(T - \lambda_i I), \ \ i = 1, \ldots, r$$

Son ortogonales entre si:

$$X_i \perp X_j, \ \ i \neq j$$

como consecuencia del teorema espectral, pues corresponden a autovalores distintos. Además su suma es el espacio total

$$X = X_1 \oplus, \ldots, \oplus X_r$$

De esta forma podemos definir los proyectores sobre cada uno de los subespacios invariantes, generalizando los proyectores ortogonales que estudiamos en la descomposición de X en suma de un subespacio y su ortogonal

$$x \in X, \ \ x = x_1 + \ldots + x_r$$

$$\begin{array}{ccc} P_i : & \longrightarrow & X \\ x & \longrightarrow & x_i \end{array}$$

La familia de proyectores P_i verifica una serie de propiedades que se conocen como el teorema de descomposición espectral.

Teorema 2.7. *Los proyectores ortogonales $P_1, \dots, P_r$,asociados a un operador normal T en un espacio vectorial complejo X de dimensión finita con producto escalar, verifican las siguientes propiedades:*

1.- $P_i^* = P_i$.

2.- $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$.

3.- $P_1 + \ldots + P_r = I$.

4.- $\lambda_1 P_1, \dots, \lambda_r P_r = T$.

Demostración. *Los proyectores ortogonales son idempotentes y autoadjuntos*

$$P_i^2 x = P_i x_i = x_i$$

$$\langle x, P_i y\rangle = \langle x, y_i\rangle = \langle x_i, y_i\rangle = \langle x_i, y\rangle = \langle P_i x, y\rangle$$

Además

$$P_i P_j(x) = P_i x_j = 0 \quad i \neq j$$

En cuanto a su suma

$$(P_1 + \ldots + P_r)x = P_1 x + \ldots + P_r x = x_1 + \ldots + x_r = x, \quad \forall x \in X$$

luego es la identidad en X. Finalmente

$$\begin{aligned}(\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_r P_r)x &= \lambda_1 P_1 x + \ldots + \lambda_r P_r x \\ &= \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_r x_r \\ &= T x_1 + \ldots + T x_r \\ &= T(x_1 + \ldots + x_r) \\ &= Tx\end{aligned}$$

■

La expresión

$$T = \lambda_1 P_1 x + \ldots + \lambda_r P_r$$

Se conoce como la descomposición espectral del operador T.

La descomposición espectral de un operador permite caracterizarlo de la forma siguiente.

Proposición 2.5. *Sea X un espacio vectorial complejo de dimensión finita dotado de un producto escalar y T un operador en X.Supongamos que existe una familia de proyectores ortogonales (idempotentes y autoadjuntos) $\{P_1, \ldots, P_r\}$ y un conjunto de escalares (distintos), $\{\lambda_1 \ldots, \lambda_r\}$ que verifican:*

1.- $P_i P_j = 0, \ i \neq j.$

2.- $P_1 + \ldots + P_r = I.$

3.- $\lambda_1 P_1, \ldots, \lambda_r P_r = T.$

entonces T es normal.

Demostración.

$$\begin{aligned} TT^* &= (\sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i)(\sum_{j=1}^{r} \overline{\lambda_j} P_j^*) \\ &= \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \overline{\lambda_j} P_i^* P_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{r} \lambda_i \overline{\lambda_j} \delta_{ij} P_i \\ &= \sum_{i=1}^{r} |\lambda_i|^2 P_i \\ &= T^* T \end{aligned}$$

Los escalares λ_i son los autovalores de T, y los autovectores son de la forma $P_i x$ con $x \in X$. En efecto

$$TP_i(x) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j P_j P_i x = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \delta_{ij} P_i x = \lambda_i P_i x$$

Veamos que no hay otros autovalores. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que existe $x \in X$ distinto de cero y

$$Tx = \lambda x$$

$$Tx = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i x = \lambda \sum_{i=1}^{r} P_i(x)$$

es decir

$$\sum_{i=1}^{r} (\lambda_i - \lambda) P_i x = 0$$

Aplicando P_k

$$\sum_{i=1}^{r}(\lambda_i - \lambda)P_k P_i x = \sum_{i=1}^{r}(\lambda_i - \lambda)\delta_{ij} P_i x = (\lambda_k - \lambda)P_k x = 0$$

Por lo tanto $P_k x = 0$ *o bien* $\lambda = \lambda_k$. *En el segundo caso,* λ *es uno de los escalares que teníamos. En el primero, si la relación es cierta para todo* $k = 1, \ldots, r$, *entonces* $x = 0$. ■

Los operadores autoadjuntos se caracterizan de forma similar.

Proposición 2.6. *En la condiciones de la proposición anterior, si los escalares* $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ *son reales,* T *es autoadjunto.*

Demostración. *De acuerdo con la proposición 2.5,* T *es normal. Al tener todos sus autovalores reales es autoadjunto.* ■

2.8 Operadores en Espacios de Hilbert Reales

Las mismas preguntas que se suscitaron en relación con los espacios complejos dotados de un producto escalar serán estudiadas aquí. Como veremos,las dificultades principales provienen del hecho que no todo operador en un espacio real posee autovalores (se entiende reales).La extensión del cuerpo base a los números complejos, permitiría aligerar está sección. Sin embargo nos mantendremos en el campo real en todo lo posible.

2.8.1 El Operador Transpuesto

En analogía con el operador adjunto, definiremos aquí el operador transpuesto. Es este un nombre ya usado en relación con el espacio con el espacio dual. de hecho, utilizando el teorema de Fischer, ambos conceptos coinciden. Sin embargo, para evitar problemas de interpretación el operador transpuesto se entenderá en la forma que sigue:

Definición 2.8. *Sea* X *un espacio vectorial real con producto escalar, y* T *un operador en* X. *Se define el* operador transpuesto *de* A, A^t *como el único operador que verifica:*

$$\langle x, Ty \rangle = \langle T^t x, y \rangle$$

Para demostrar la existencia y unicidad de este operador, basta aplicar el teorema de Fischer, tal y como hizo en el caso complejo para el operador adjunto.

Las propiedades del operador transpuesto son similares a las del adjunto:

1.- $(T^t)^t$.

2.- $(T + S)^t = T^t + S^t$.

3.- $(\lambda T)^t = \lambda S^t$.

4.- $(TS)^t = S^t T^t$.

2.8.2 Representación Matricial del Operador Transpuesto

Queremos obtener la representación matricial del operador transpuesto T^t dada la del operador T. Sea X un espacio vectorial real de dimensión finita dotado de un producto escalar y $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base ortonormal de X. Sea A la matriz de A en la base $\mathcal{B}$, es decir, $A = (a_{ij})$

$$Au_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} u_j, \quad i = 1, \ldots, n$$

De lo estudiado para la expresión de los elementos de matriz del operador A se tiene:

$$a_{ij} = (u_j, Au_i)$$

y si A' es la matriz del operador transpuesto

$$a_{ji} = (u_i, A^t u_j)$$

como

$$(u_i, Au_j) = (A^t u_i, u_j) = (u_j, A^t u_i)$$

se concluye

$$a_{ij} = a_{ji}$$

es decir

$$A' = A^t$$

La matriz del operador transpuesto es la matriz transpuesta del operador de partida cuando la base es ortonormal. El símbolo ^{t} denotará el operador transpuesto.

2.8.3 Operadores Normales, Autoadjuntos y Ortogonales

Definición 2.9. *Se dice que el operador T es* normal *si conmuta con su transpuesto.*

$$TT^t = T^t T$$

Definición 2.10. *Se dice que el operador T es* Autoadjunto *si coincide con su transpuesta.*

$$T^t = T$$

Definición 2.11. *Se dice que el operador T es* Ortogonal*si:*

$$TT^t = T^tT = I$$

Los operadores ortogonales verifican:

$$\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$$

En bases ortonormales, sus matrices son ortogonales, es decir

$$TT^t = T^tT = I_n$$

Es inmediato comprobar que los operadores Autoadjuntos y Ortogonales son normales. Sin embargo en el caso real no estudiaremos los operadores normales. La razón es que los operadores Autoadjunto tienen todos sus autovalores reales y su estudio es muy similar al caso complejo. Pero los Ortogonales no los tienen reales en general (con más precisión no tienen autovalores en general), y por lo tanto requerirán un estudio especial.

2.8.4 Teorema Espectral de Operadores Autoadjuntos

El principal problema que surge en relación con el caso complejo es probrar que los autovalores de un operador Autoadjunto son reales.

Proposición 2.7. *Sea X un espacio vectorial real de dimensión finita con producto escalar. Sea T un operador normal en X. Si $x \in X$ es un autovector de T con autovalor λ, entonces x es autovector de T^t con el mismo autovalor.*

Demostración.

$$\begin{array}{rcl} \|(A^t - \lambda 1_X)x\|^2 & = & \langle (T^t - \lambda I), (T^t - \lambda I)x\rangle \\ & = & \langle (T - \lambda I)(T^t - \lambda I x, x)\rangle \\ & = & \langle (T^t - \lambda I)(T - \lambda I x, x)\rangle \\ & = & 0 \end{array}$$

y por lo tanto

$$(T^t - \lambda I)x = 0$$

■

Al igual que en el caso complejo, si un subespacio es invariante bajo un operador T, su complemento ortogonal lo es bajo el operador transpuesto.

El Teorema Espectral para Operadores Autoadjunto se puede enunciar como sigue:

Teorema 2.8. *Sea X un espacio vectorial real de dimensión finita con un producto escalar. Sea T un operador en X, tal que existe una base ortonormal de X formada por autovectores de T. Entonces T es autoadjunto.*

Demostración. *Sea $u_1, \dots, u_n$ la base ortonormal. Entonces*

$$Tu_k = \lambda_k u_k$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} T^t u_k &= \sum_{i=1}^{n} (u_i, T^t u_k) u_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (Tu_i, u_k) u_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (u_i, u_k) u_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{ij} u_i \\ &= \lambda_k u_k \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$T^t = T$$

■

Las matrices que intercambia las bases ortonormales son ortogonales. Se tiene el resultado siguiente para matrices:

Teorema 2.9. *Toda matriz autoadjunta (real) es diagonalizable por una transformación ortogonal.*

Demostración. *Una matriz autoadjunta se puede considerar como la matriz de un operador autoadjunto en una base ortonormal. Pasando a la base ortonormal de autovectores la matriz que representa al operador es ahora diagonal y la matriz de cambio de base es ortogonal.*

$$P^t T P$$

es diagonal.

■

2.8.5 Descomposición Espectral de Operadores Autoadjunto

Al igual que los operadores normales, los operadores autoadjunto admiten una descomposición espectral. Sea T un operador autoadjunto en un espacio vectorial real de dimensión finita dotado de un producto escalar.

Consideremos $\sigma(T) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ *el espectro de* T. *Sean* $X_i = \ker(T - \lambda_i I)$ *los subespacios invariantes. Entonces*

$$X = X_1 \oplus, \ldots, \oplus X_r$$

y los subespacios son ortogonales entre sí, al corresponder a autovalores distintos.

Existe entonces una familia de proyectores ortogonales (autoadjunto e idempotentes) que además verifican:

1.- $P_i P_j = 0,\ i \neq j$.

2.- $P_1 + \ldots + P_r = 1_X$.

3.- $\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_r P_r = T$.

Capítulo 3

Teoría Espectral de Operadores Normales

3.1 Introducción

El estudio de la Teoría Espectral de Operadores en el caso de espacios dimensión finita ofrecerá a través de la noción de proyecciones*, una nueva versión del Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos y Normales, el cual motivará el caso de dimensión infinita. Veremos que por medio de la siguiente expresión, se puede generalizar el caso de dimensión infinita.*

$$T = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_r P_r = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i \tag{3.1}$$

Para llegar a cabo esta generalización, estudiaremos el caso analítico*; por este motivo simplemente consideraremos un operador T autoadjunto y escribiremos la relación anterior de la forma*

$$T = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i \tag{3.2}$$

Nuestra razón para tomar esta suposición es que los autovalores de T son números reales y por consiguiente son ordenados de manera natural. Además asumiremos la notación usada en 3.2 de modo que $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots, \lambda_r$ y usando las P_i's definamos las nuevas proyecciones

$$\begin{array}{lcl} E_{\lambda_0} & := & 0; \\ E_{\lambda_1} & := & P_1; \\ E_{\lambda_2} & := & P_1 + P_2; \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_{\lambda_r} & := & P_1 + P_2 + \ldots + P_r; \end{array}$$

Los E_λ's hacen posible reescribir 3.2 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T &= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_r P_r \\ &= \lambda_1(E_{\lambda_1} - E_{\lambda_0}) + \lambda_2(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}) + \ldots + \lambda_r(E_{\lambda_r} - E_{\lambda_{r-1}}) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}) \end{aligned}$$

Si denotamos $(E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}})$ *por* $\Delta E_{\lambda_{i-1}}$*, entonces podemos reducir esto a*

$$T = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, \Delta E_{\lambda_i}$$

Esto sugiere la representación integral

$$T = \int \lambda \, dE_\lambda \tag{3.3}$$

De esta forma, la resolución espectral sigue siendo válida para operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert en dimensión infinita. Un resultado similar se tiene para operadores normales

$$N = \int \lambda \, dE_\lambda \tag{3.4}$$

Hay dificultades que pueden ser superados para alcanzar el nivel de 3.3 y 3.4, ya hemos resuelto unas de ellas, a saber, el hecho de que un operador T *en un espacio de Hilbert arbitrario* $H \neq \{0\}$ *no necesariamente tiene algún autovalor.*

En el caso general, el espectro *de* T *esta definido*

$$\sigma(T) = \{\lambda : \ (T - \lambda I) \text{ no es invertible}\}$$

donde H *es un espacio de dimensión finita, tenemos que ver que* $\sigma(T)$ *esta completamente formada por autovalores, esto no es cierto en general, lo que es verdadero, es que* $\sigma(T)$ *es siempre no vacío, cerrado y acotado y de este modo es un subconjunto compacto del plano complejo.*

3.2 Transformaciones Espectrales

Es interesante observar qué sucede con el espectro de un operador cuando se sujeta a varias transformaciones elementales. Si, por un instante, T *y* S *son operadores, y si* S *es invertible, es fácil ver que* $\sigma(T) = \sigma(S^{-1}TS)$*. (En vista de la identidad* $S^{-1}(T - \lambda)S = S^{-1}TS - \lambda$*, la invertibilidad del termino del lado derecho es equivalente a la invertibilidad de* $(T - \lambda)$*. Examinaremos el comportamiento del espectro con respecto a la formación del polinomio, inversas, y adjuntos.*

Teorema 3.1. *Si T es un operador y p es un polinomio, entonces*

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$$

Demostración. *Para cualquier número complejo λ_0 existe un polinomio q tal que $p(\lambda) - p(\lambda_0) = (\lambda - \lambda_0)q(\lambda)$ idénticamente en λ. De esto se sigue que $p(T) - p(\lambda_0) = (T - \lambda_0)q(T)$; y afirmamos que si $\lambda_0 \in \sigma(T)$, entonces $S = (T - \lambda_0)q(T)$ no es invertible. (Si tenemos*

$$\begin{aligned} (T - \lambda_0)q(T)S^{-1} &= 1 \\ &= S^{-1}S \\ &= S^{-1}(T - \lambda_0)q(T) \\ &= S^{-1}q(T)(T - \lambda_0) \end{aligned}$$

es decir; $T - \lambda_0$ también es invertible). Esto dice que $p(T) - p(\lambda_0)$ no es invertible, y tenemos probado que $p(\lambda_0) \in \sigma(p(T))$ y por lo tanto $p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$.

Supongamos por otro lado que $\lambda_0 \in \sigma(p(T))$, y sea $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, (no necesariamente distintas) raíces de la ecuación $p(\lambda) = \lambda_0$.

Así $p(T) - \lambda_0 = \alpha(T - \lambda_1) \ldots \alpha(T - \lambda_n)$ para un conveniente número complejo α distinto de cero, y por lo tanto $T - \lambda_j$ debe ser no invertible para por lo menos un valor de j, $1 \le j \le n$. Para el valor de j tenemos $\lambda_j \in \sigma(T)$ y $p(\lambda_j) = \lambda_0$ de modo que $\lambda_0 \in p(\sigma(T))$ y por lo tanto $\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T))$.

■

Teorema 3.2. *Si un operador T es invertible, entonces $\sigma(T^{-1}) = (\sigma(T))^{-1} = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(T)\}$.*

Demostración. *Observemos que decir que T es invertible es lo mismo que decir que 0 no esta en $\sigma(T)$, el símbolo $(\sigma(T))^{-1}$ toma sentido. La identidad $T^{-1} - \lambda^{-1} = (\lambda - T)\lambda^{-1}T^{-1}$ muestra que si $\lambda \in \sigma(T)$ tal que $T - \lambda$ es invertible, entonces $T^{-1} - \lambda^{-1}$ es invertible, de modo que $\lambda^{-1} \in \sigma(T)$. En otras palabras $\lambda(T^{-1}) \subset (\sigma(T))^{-1}$ y nuestro teorema esta casi probado. El inverso de la desigualdad se sigue aplicando, lo que ya tenemos probado para T^{-1} en lugar de T.*

■

Teorema 3.3. *Si T es un operador, entonces $\sigma(T^*) = (\sigma(T))^* = \{\lambda^* : \lambda \in \lambda(T)\}$*

Demostración. *Si $\lambda \in \sigma(T)$, de modo que $T - \lambda$ es invertible, entonces $T^* - \lambda^*$ es invertible, y por lo tanto $\lambda^* \in \sigma(T^*)$. Esto prueba que $\sigma(T^*) \subset (\sigma(T))^*$, la prueba puede ser completada justo como en el teorema anterior, obteniendo la desigualdad inversa es suficiente aplicar la desigualdad ya probada para T^* en lugar T.*

■

3.3 Espectro de un Operador Autoadjunto

Definición 3.1. *Decimos que un número complejo λ es un* valor propio aproximado *de un operador T si para cualquier número positivo ε existe un vector unitario x tal* *que* $\|Tx - \lambda x\| < \varepsilon\|x\|$. *El* espectro aproximado *de un operador* T*, es el conjunto de los valores propios aproximados y lo denotaremos por* $\Pi(T)$.

Teorema 3.4. *Si* T *es un operador norma, entonces* $\Pi(T) \subset \sigma(T)$.

Demostración. *Si* $\lambda \in \sigma(T)$*, entonces* $T-\lambda$ *es invertible y en consecuencia tenemos*

$$\|x\| = \|(T-\lambda)^{-1}(T-\lambda)x\| \leq \|(T-\lambda)^{-1}\|.\|Tx - \lambda x\|$$

para cualquier vector x. *Esto implica que* $\|Tx-\lambda x\| \geq \varepsilon\|x\|$, *con* $\varepsilon = 1/\|(T-\lambda)^{-1}\|$, *para todo vector* x*, y así tenemos que* $\lambda \in \Pi(T)$.

■

Teorema 3.5. *Si* T *es un operador normal, entonces* $\Pi(T) = \sigma(T)$.

Demostración. *En vista del teorema 3.4 es suficiente probar que* $\sigma(T) \subset \Pi(T)$. *Si* $\lambda \in \Pi(T)$ *entonces existe un número real positivo* ε *tal que* $\|Ty - \lambda y\| \geq \varepsilon\|y\|$ *para todo vector* y. *Puesto que* T *es normal entonces* $T - \lambda$ *es normal y por lo tanto* $(T-\lambda)^* = T^* - \lambda^*$*, y por 2.4 se tiene que* $\|T^*y - \lambda^* y\| \geq \varepsilon\|y\|$ *para todo* y. *Para probar que* $\lambda \in \sigma(T)$*, es decir; que* $T - \lambda$ *es invertible, es suficiente probar que el rango* $T-\lambda$ *es denso o equivalentemente, el complemento ortogonal del rango es* D. *Sin embargo, si un vector* y *es ortogonal al rango de* $T - \lambda$*, entonces* $0 = \langle (T-\lambda)x, y\rangle = \langle x, (T^* - \lambda^*)y\rangle$ *para todo* x*, así* $T^*y - \lambda^{\widetilde{*}}y = 0$. *Por lo tanto* $\|T^*y - \lambda^*y\| = \varepsilon\|y\|$*, de esto se sigue que* $y = 0$ *y la prueba es completada.*

■

Teorema 3.6. *Si* T *es un operador autoadjunto, entonces* $\sigma(T)$ *es un subconjunto del eje real.*

Demostración. *Si* λ *no es real, entonces, para cualquier vector distinto de cero* x,

$$\begin{aligned} 0 < |\lambda - \bar{\lambda}|.\ \|x\|^2 &= |(\langle (T-\lambda)x, x\rangle - \langle (T-\lambda^*)x, x\rangle| \\ &= |(\langle (T-\lambda)x, x\rangle - \langle x, (T-\lambda)x\rangle| \\ &\leq 2\|Tx - \lambda x\|.\ \|x\|; \end{aligned}$$

Si $\lambda \in \sigma(T) = \Pi(T)$*, entonces debe existir una sucesión* $\{x_n\}$ *tal que* $\|x_n\| = 1 \ \ \forall n$*, para la cual*

$$\|(T-\lambda)x_n\| \to 0$$

Puesto que $2\|(T-\lambda)x_n\|$ *debe ser mayor o igual a* $|\lambda - \bar{\lambda}| > 0$*, siendo la parte imaginaria de* λ *es distinta de cero tendríamos una contradicción. Concluimos que* $\lambda \in \sigma(T)$*, implica necesariamente* $\lambda = \bar{\lambda}$.

■

Nuestro próximo resultado es uno de las herramientas más poderosas en el estudio de los operadores autoadjuntos; afirma que la norma de tal operador, puede ser calculada a partir de su espectro.

Teorema 3.7. *Si T es un operador autoadjunto, entonces* $\|T\| = \alpha = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$.

Demostración. *El hecho de que $\alpha \leq \|T\|$, no depende en el carácter de T, esto se sigue de 3.6. probaremos que la igualdad prevalece mostrando que $\|T\|^2 \in \Pi(T^2)$; en vista de 3.6 entonces podremos concluir que el $\pm\|T\| \in \sigma(T)$. La prueba de la relación está basado en la identidad.*

$$\|T^2x - \lambda^2 x\|^2 = \|T^2 x\|^2 - 2\|\lambda^2\| + \|Tx\|^2 + \lambda^4\|x\|^2$$

válido para todo número real λ y para todo vector x. Si $\{x_n\}$ es una sucesión de vectores unitarios tales que $\|Tx_n\| \to \|T\|$, y si $\lambda = \|T\|$, entonces se sigue de la identidad que

$$\begin{aligned} \|T^2x_n - \lambda^2 x_n\| &\leq (\|T\|.\|Tx_n\|)^2 - 2\lambda^2\|Tx_n\|^2 + \lambda^4 \\ &= \lambda^4 - \lambda^2\|Tx_n\|^2 \to 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto tenemos de hecho que $\|T\| \in \Pi(T^2)$ ■

Un resultado útil que podemos concluir del teorema 3.7 es que el espectro de un operador autoadjunto no es vacío. Esto no es una conclusión trivial. Obtendremos el correspondiente hecho para operadores normales solamente después del uso de un análisis mucho más profundo. Diremos que el espectro de un operador arbitrario también es no vacío; puesto que no tendremos ninguna ocasión para hacer uso este hecho, no entraremos en su prueba.

Teorema 3.8. *Si T es un operador autoadjunto y p es un polinomio real, entonces* $\|p(T)\| = \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma(T)\}$.

Demostración. *Aplicamos primero el 3.7 (para $p(T)$ en lugar de T) y por 3.1, obtenemos*

$$\begin{aligned} \|p(T)\| &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(p(T))\} \\ &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in p(\sigma(T))\} \\ &= \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma(T)\} \end{aligned}$$

■

3.4 Medidas Numéricas

3.4.1 Definición

Definición 3.2. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto. Sea $B(X)$ la σ-álgebra de Borel generada por los conjuntos abiertos de X. Una* *medida positiva sobre X es una función μ, definida sobre $B(X)$ a los valores en $\mathbb{R}^+$ que posee la propiedad de σ-aditividad, esto es: si $\{A_i\}$ es una colección disjunta de elementos de $B(X)$, entonces:*

$$\mu(\bigcup_{i=1} A_i) = \sum_{i=1} \mu(A_i),$$

también pediremos que $\mu(K)$ sea finita para todo conjunto compacto K de X.

Una medida compleja *sobre X es una función a valores complejos definida sobre $B(X)$ σ-aditiva y finita sobre compactos. Asociada cada medida μ, definida por $|\mu|(E) = \sup \sum |\mu(E_i)|$, donde el supremo está tomado sobre todas las colecciones disjuntas finitas de conjuntos de Borel E_i cuya unión es E.*

Una medida μ *sobre X se dice* regular *si verifica:*

i) $|\mu|(E) = sup\{|\mu|(K) : K \text{ compacto}, \ K \subset E\}$

ii) $|\mu|(E) = inf\{|\mu|(V) : V \text{ abierto}, \ E \subset V\}$

En nuestro trabajo solo consideramos medidas μ regulares y σ-finitas, *es decir: existe una partición de X. $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset B(X)$ tal que $\mu(E_i) < \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Si μ es la medida sobre X y $A \in B(X)$, la restricción de μ a A es la medida definida por:*

$$\mu_A(E) = \mu(A \cap E)$$

Si $\mu = \mu_A$, entonces se dice μ está concentrada en A. Si μ_1 y μ_2 son dos medidas sobre X concentradas en conjunto disjuntos entonces se dice que μ_1 y μ_2 son mutuamente singulares. En este caso

$$\|\mu_1 + \mu_2\| = \|\mu_1\| + \|\mu_2\|$$

Sea μ una medida sobre X, m una medida positiva sobre X si $\mu(E) = 0$ cada vez que $m(E) = 0$ entonces diremos que μ es absolutamente continua respecto a m y lo denotaremos $\mu \ll m$ o $\mu < m$.

3.5 Medidas Espectrales

3.5.1 Medida Positiva

Definición 3.3. *Sea H un espacio de Hilbert. Una medida positiva sobre $\mathbb{R}$ a valores en $\mathcal{L}(H)$, es una función M que asigna a cada conjunto de Borel $\Delta \subset \mathbb{R}$ un operador $M(\Delta) \in \mathcal{L}(H)$ y que tiene las siguientes propiedades:*

(a) $M(\Delta) \geq 0$ *para todo* $\Delta \in B(\mathbb{R})$.

(b) $M(\Delta \cup \Delta') = M(\Delta) + M(\Delta')$, *para todo* $\Delta, \Delta' \in B(\mathbb{R}) : \Delta \cap \Delta' = \emptyset$

(c) $M(\mathbb{R}) = I$, $M(\emptyset) = 0$, *donde* I *denota el operador identidad sobre* H *y* 0 *la transformación nula.*

(d) Si $\{\Delta_n\}$ *es una colección creciente de elementos de* $B(\mathbb{R})$ *entonces, para todo* $x \in H$ *se tiene:* $M(\lim \Delta_n)x = \lim M(\Delta_n)x$.

Observación 3.1. *La condición (d) de la definición anterior, equivale que para todo* $x \in H$, $y \in H$, *la función* $\mu_{xy}(\Delta) = \langle M(\Delta)x, y\rangle$ *es una medida compleja de Borel.*

En lo sucesivo usaremos esta notación

$$\mu_{xy}(\Delta) = \langle M(\Delta)x, y\rangle$$

y escribiremos μ_x *en vez de* μ_{xx}. *De la definición 3.3 se desprende que para todo* $x \in H$ *la medida* μ_x *es una medida de borel.*

Proposición 3.1. *Sea* M *una medida a valores en* $\mathcal{L}(H)$*; entonces son equivalentes:*

(a) $M(\Delta) = P(\Delta)$ *es un proyector ortogonal para todo* $\Delta \in B(\mathbb{R})$.

(b) $M(\Delta \cap \Delta') = M(\Delta)M(\Delta')$ *para todo* $\Delta \in B(\mathbb{R})$, $\Delta' \in B(\mathbb{R})$.

Demostración. $(a) \to (b)$

i) Supongamos que $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$ *entonces* $M(\Delta) + M(\Delta') = [M(\Delta) + M(\Delta')]^2 = M(\Delta)^2 + 2M(\Delta)M(\Delta') + M(\Delta')^2$, *de donde resulta:* $0 = M(\Delta \cap \Delta') = M(\Delta)M(\Delta')$.

ii) Si $\Delta \subset \Delta'$ *entonces:* $M(\Delta - \Delta') = M(\Delta') - M(\Delta)$ *luego* $M(\Delta)M(\Delta') = M(\Delta)[M(\Delta' - \Delta) + M(\Delta)] = M(\Delta)M(\Delta' - \Delta) + M(\Delta)^2 = 0 + M(\Delta) = M(\Delta \cap \Delta')$

iii) Si Δ *y* Δ' *son elementos cualesquiera de* $B(\mathbb{R})$ *entonces:* $M(\Delta)M(\Delta') = M(\Delta)[M(\Delta' - \Delta) + \Delta' \cap \Delta] = M(\Delta)[M(\Delta' - \Delta) + M(\Delta \cap \Delta')] = M(\Delta)M(\Delta' - \Delta) + M(\Delta)M(\Delta \cap \Delta') = 0 + M(\Delta \cap \Delta')$ *(por i) y ii)). Luego hemos probado que si* $M(\Delta)M(\Delta') = M(\Delta \cap \Delta')$.

$(b) \to (a)$ *si* $\Delta = \Delta'$, *entonces:* $M(\Delta \cap \Delta) = M(\Delta)M(\Delta)$, *es decir*

$$M(\Delta) = M(\Delta)^2.$$

La conclusión deseada se obtiene de 3.3 (a) y del teorema 1.9.

■

Definición 3.4. *Una medida positiva* $P(\Delta)$ *a valores en* $\mathcal{L}(H)$ *se dice espectral (u ortogonal) si cumple:*

(e) $P(\Delta)^2 = P(\Delta)$ *para todo* $\Delta \in B(\mathbb{R})$.

3.6 Otras propiedades de las Medidas Espectrales

Las siguientes propiedades son consecuencia del hecho de que para todo $x, y \in H$, μ_x es una medida de Borel.

(f) *Si* $\Delta_1 \subset \Delta_2$ *entonces* $P(\Delta_1) \leq P(\Delta_2)$

(g) *Si* $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$, *y si* $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n = \emptyset$ *entonces* $P(\Delta_n)x \to 0$ $(n \to \emptyset)$ *para todo* $x \in H$.

(h) *Si* $\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, *con* $\Delta_n \cap \Delta_m = \emptyset$ *para* $n \neq m$, *entonces* $P(\Delta)x = \sum_{n=1}^{\infty} P(\Delta_n)x$ *para todo* $x \in H$.

3.7 Integración de Funciones Acotadas

Proposición 3.2. *Se $P(\Delta)$ una medida espectral definida en $\mathbb{R}$ a valores en $\mathcal{L}(H)$. A toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, medible Borel y acotada se puede hacer corresponder un operador $\phi(f) \in \mathcal{L}(H)$, de manera que se cumple:*

i) $P(\Delta) = \phi(1_\Delta)$ *para todo* $\Delta \in B(\mathbb{R})$. *Si f, g son funciones medibles y acotadas, entonces*

ii) *Para todo* $x, y \in H$ $\langle \phi(f)x, y \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d\mu_{xy}$.

iii) $f \geq 0$ *implica* $\phi(f) \geq 0$.

iv) $\|\phi(f)\| = \|f\|_\infty$.

v) $\phi(f + g) = \phi(f) + \phi(g)$.

vi) $\phi(f.g) = \phi(f).\phi(g)$.

vii) $\phi(f)^* = \phi(\overline{f})$.

viii $\|\phi(f)x\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2\, d_{\mu_x}$

ix) *Para todo* $\Delta \in B(\mathbb{R})$ $\langle P(\Delta)\phi(f)x, y \rangle = \int_\Delta f(\lambda)\, d_{\mu_{xy}}$

Demostración. *Sea B_1 el conjunto de todas las funciones de la forma $s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{\Delta_i}$ donde los Δ_i son conjuntos de Borel disjuntos dos a dos y los λ_i son números complejos. Para $s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_j 1_{\Delta_i} \in B_1$ definimos:*

$\phi(s) = \displaystyle\int s\, dP = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(\Delta_i)$, *de manera que para todo* $x, y \in H$:

$$\langle \phi(s)x, y\rangle = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_{xy}(\Delta_i) \overset{def}{=} \int s(t)\; d_{\mu_{xy}}(t)$$

La igualdad anterior asegura que el operador $\phi(s)$ *está bien definido y a partir de ella se prueban fácilmente propiedades* $i) \to ix)$ *de* $\phi(s)$ *para* $s \in B_1$

Si f *es una función medible acotada, entonces existe una subsucesión de funciones* $\{s_n\} \subset B_1$ *que converge uniformemente a* f.

Como $\|S_n - S_m\| < \varepsilon$ *para* m, n *suficiente grandes, entonces por iv) y v)* $\|\phi(s_n) - \phi(s_m)\| < \varepsilon$, *luego existe* $\lim_{n\to\infty} \phi(s_n) \in \mathcal{L}(H)$.

Definimos $\phi(f) = \lim_{n\to\infty} \phi(s_n)$

Para f *medible y acotada, las propiedades* $i) \to ix)$ *se obtienen inmediatamente por el paso al límite. En particular las propiedades vi) y vii) dicen que si f es compleja* $\phi(f)$ *es normal, y si* f *es real* $\phi(f)$ *es autoadjunto.*

■

3.8 Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos

Teorema 3.9. ***Teorema Espectral para operadores Adjuntos Acotados*** *Sea* H *un espacio de Hilbert,* $A : H \to H$ *un operador autoadjunto acotado. Entonces existe una única medida espectral* $E(\Delta)$ *definida en los bolerianos* $\Delta \subset \mathbb{R}$ *tal que* $E(\Delta)$ *está concentrada en el intervalo* $[-\|A\|, \|A\|\ ]$ *y tal que:*

1. $A = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \lambda\, dE(\lambda) = \int_{|\lambda| \le \|A\|} \lambda\, dE.$

2. $q(A) = \displaystyle\int q(\lambda)\, dE(\lambda)$ *para todo polinomio* $q(A)$.

3. *Para todo* $\Delta \in B([-\|A\|, \|A\|])$, $E(\Delta)$ *conmuta con cualquier operador* $S \in \mathcal{L}(H)$ *que conmute con* A.

Demostración. *Fijemos* $u, v \in H$ *y para todo polinomio* $q(\lambda)$ *pongamos*

$$L_{uv}(q) = L(q) = \langle q(A)u, v\rangle.$$

Luego tenemos que:

$$|L(q)| \le \|q(A)\|.\|u\|.\|v\| \le \|q\|_{\infty}\|u\|.\|v\| \tag{3.5}$$

lo cual significa que L_{uv} es un funcional lineal acotado en el subespacio denso de $[-\|A\|, \|A\|\ ]$ formado por los polinomios. Por el Teorema de Riesz existe una única medida μ_{uv} de Borel, regular y finita en $[-\|A\|, \|A\|\ ]$ tal que:

$$\langle q(A)u, v\rangle = L(q) = \int_{-\|A\|}^{\|A\|} q(\lambda)\ d_{\mu_{uv}} \tag{3.6}$$

con

$$\|\mu_{uv}\| = \|L\| \tag{3.7}$$

Veamos que la igualdad 3.6 muestra que para todo Δ, $\mu_{uv}(\Delta)$ es lineal en u y antilineal en v

$$\begin{aligned}
\int q(\lambda)\ d_{\mu\lambda}\langle u_1 + u_2, v\rangle &= \langle q(A)(u_1 + u_2), v\rangle \\
&= \langle q(A)u_1, v\rangle + \langle q(A)u_2, v\rangle \\
&= \int q(\lambda)\ d_{\mu\lambda}\langle u_1, v\rangle + \int q(\lambda)\ d_{\mu\lambda}\langle u_2, v\rangle
\end{aligned}$$

Y por 3.5 y 3.7 la forma $B(u,v) = \mu_{uv}(\Delta)$, $\Delta \in B([-\|A\|, \|A\|\ ])$ es una forma sesquilineal acotada con $\|B\| \leq 1$. Luego para cada Δ existe un operador $E'(\Delta) : H \to H$, acotado tal que:

$$\langle E'\Delta)u, v\rangle = \mu_{uv}(\Delta) \textit{ para todo } u, v \in H \textit{ con } \|E'(\Delta)\| \leq 1$$

Por otra parte, si $q \geq 0$ entonces $q(A) \geq 0$ y $\int q\ d_{\mu_{uu}} = \langle q(A)u, u\rangle \geq 0$ de modo que por el mismo Teorema de Riesz es $\mu_{uu}(\Delta) \geq 0$ y en consecuencia $\langle E'(\Delta)u, u\rangle = \mu_{uu}(\Delta) \geq 0$ para todo $\Delta \in B(\mathbb{R})$, resulta que $E(\Delta)$ es una medida positiva definida en $\mathbb{R}$ a valores en $\mathcal{L}(H)$.

Veamos que $E(\Delta)$ es una medida espectral: Si p, q son dos polinomios, entonces $\int pq\ d_{\mu_{uv}} = \langle p(A)q(A)u, v\rangle = \int p\ d\mu_{\langle q(A)u,v\rangle}$; luego las medidas $qd\mu_{uv}$ y $d\mu_{\langle q(A)u,v\rangle}$ coinciden y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\int q\, 1_{\Delta'} d\mu_{uv} &= \int_{\Delta'} q\, d\mu_{uv} \\
&= \int_{\Delta'} d\mu_{q(A)u,v} \\
&= \mu_{q(A)u,v}(\Delta)\,' \\
&= \langle E(\Delta')q(A)u, v\rangle \\
&= \langle q(A)u, E(\Delta')v\rangle \\
&= \int q\, d\mu_{u,E(\Delta')v}
\end{aligned}$$

Así pues $\int q1_{\Delta\,'}\, d\mu_{uv} = \int q\, d\mu_{u,E(\Delta')v}$ *para todo* q*, luego* $d\mu_{u,E(\Delta')v} = 1_{\Delta'} d\mu_{u,v}$ *por lo tanto* $\mu_{u,E(\Delta)v} = \mu_{uv}(\Delta \cap \Delta')$ *o sea:*

$$\begin{aligned}
\langle E(\Delta)u, E(\Delta')v\rangle &= \langle E(\Delta)E(\Delta')u, v\rangle \\
&= \mu_{uv}(\Delta \cap \Delta') \\
&= \langle E(\Delta \cap \Delta')u, v\rangle
\end{aligned}$$

para todo $u, v \in H$; $\Delta, \Delta' \in B(\mathbb{R})$*. Luego* $E(\Delta)$ *es una medida espectral.*

Las propiedades 1. 2. y 3. son consecuencia inmediata de la definición de $E(\Delta)$*.*

■

3.9 Teorema Espectral para Operadores Normales

Teorema 3.10. ***Teorema Espectral para Operadores Normales de*** $\mathcal{L}(H)$ *Sea* N *un operador normal en el espacio de Hilbert* H*. Existe una medida espectral* $P(\Delta)$ *definida en el plano complejo de modo que:*

1. $N = \displaystyle\int_{\sigma(N)} z\, dP(\Delta)$
2. $P(\Delta)$ *conmuta con todo operador* S *que conmute con* N *y* $P(\Delta) = 0$ *para todo* Δ *disjunto de* $\sigma(N)$

Demostración. *Sean* A *y* B *la parte real e imaginaria de* N *respectivamente, de modo que* A *y* B *son operadores autoadjuntos acotados que conmutan. Sea* $P_A(\Delta)$ *la medida espectral de* A *y* $P_B(\Delta)$ *la medida espectral de* B*.*

Como A *y* B *conmutan, se tiene que para todo* $\Delta', \Delta'' \in B(\mathbb{R})$ $P_A(\Delta')P_B(\Delta'') = P_A(\Delta'')P_A(\Delta')$*. Para* $\Delta' \times \Delta'' \in B(\mathbb{R}) \times B(\mathbb{R})$ *definimos* $P'(\Delta' \times \Delta'') = P_A(\Delta')P_B(\Delta'')$ *Se comprueba facilmente a partir de las propiedades de* P_A *y* P_B *que la función* $P' : B(\mathbb{R}) \times B(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(H)$ *verifica las siguientes propiedades:*

1. $P'(\Delta' \times \Delta'')$ *es una proyección autoadjunta para todo* $\Delta' \times \Delta'' \in B(\mathbb{R}) \times B(\mathbb{R})$.

2. $P'(\mathbb{R}^2) = I$ *y* $P'(\emptyset) = 0$.

3. *Si* $\Delta' \times \Delta''$, $\Delta'_1 \times \Delta''_1$, $\Delta'_2 \times \Delta''_2$ *son elementos de* $B(\mathbb{R}) \times B(\mathbb{R})$ *tal que* $\Delta' \times \Delta'' = (\Delta'_1 \times \Delta''_1) \cup (\Delta'_2 \times \Delta''_2)$ *y si* $(\Delta'_1 \times \Delta''_1) \cap (\Delta'_2 \times \Delta''_2) = \emptyset$ *entonces* $P'(\Delta' \times \Delta'') = P'(\Delta'_1 \times \Delta''_1) + P'(\Delta'_2 \times \Delta''_2)$.

4. *Si* $\{\Delta'_i \times \Delta''_i\}$ *es una colección disjunta de rectángulos cuya unión es un rectángulo* $\Delta' \times \Delta''$ *entonces* $P'(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta'_i \times \Delta''_i)\ u = P'(\Delta' \times \Delta'')u$ *para todo* $u \in H$.

Por el procedimiento habitual de extensión de medidas, se extiende $P'(\Delta)$ *a una medida* $P(\Delta)$ *definida en* $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ *que es también una medida espectral, y verifica* $\int z\, dP(z) = \int_{\mathbb{R}} R_e(z)\, dP_A + i \int_R Im(z)\, dP_B = N$. *La parte 2. del teorema es consecuencia de las propiedades de* P_A *y* P_B.

■

Capítulo 4

Aplicaciones

4.1 Introducción

En este capítulo daremos dos de las más conocidas aplicaciones del Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos. A manera de ilustrar las ventajas de las representaciones integrales espectrales.

Si T *es autoadjunto, entonces* T^2 *es positivo puesto que* $\langle T^2x, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle \geq 0$. *Además consideraremos el recíproco: Dado un operador positivo* T*, hallaremos un operador autoadjunto* A *tal que* $A^2 = T$.

4.2 Raíz Cuadrada Positiva

Teorema 4.1. ***Existencia de la Raíz Cuadrada de un Operador Positivo*** *Sea* H *un espacio de Hilbert, y sea* T *un operador positivo en* $\mathcal{L}(H)$*, es decir,* $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ *para todo* $x \in H$*. Entonces*

a) Existe un operador R *en* $\mathcal{L}(H)$ *tal que* $T = R^*R$.

b) Existe la raíz cuadrada de T.

Demostración. *Sabemos que necesariamente un operador positivo* T *es un operador autoadjunto. Entonces*

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dp(\lambda)$$

Mostremos que $p(-\infty, 0) = 0$*. Es decir, el espectro de* T *esta contenido en el conjunto de los números reales no negativos. De lo contrario, debe existir un* $\delta > 0$ *tal que* $p(-\infty, -\delta] \neq 0$*. Si* x *es un vector distinto de cero, en el rango de* $p(-\infty, -\delta]$*, entonces:*

$$\begin{aligned}\langle Tx, x\rangle &= \langle Tp(\infty, -\delta]x, x\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{-\delta} \lambda \, d\mu_x(\lambda) \\ &\leq -\delta\|x\|^2 \\ &< 0\end{aligned}$$

Pero esto implica que T no es un operador positivo. Por lo tanto, p esta en $[0, \infty)$. Claramente se tiene que $T = S^2$, donde

$$\int \sqrt{\lambda} \, dp(\lambda)$$

Tomando $R = S$ probamos (a).

Puesto que S es la integral de una funci.ón no negativa con respecto a la medida de proyección , se tiene que S es un operador positivo, por lo tanto, S es una raíz cuadrada positiva de T.

Ahora, si S' es cualquier raíz cuadrada positiva de T, entonces S' ciertamente conmuta con $T = S^2$. Así, S' conmuta con S.

■

Definición 4.1. *Sea M un subespacio de un espacio de Hilbert H. Una* isometría parcial *de M en H es un operador $V \in \mathcal{L}(H)$ el cual es una isometría sobre M y es 0 en el complemento ortogonal, $M^{\perp}$, de M.*

4.3 Teorema de Descomposición Polar

Teorema 4.2. *(Teorema de Descomposición Polar) Sea H un espacio de Hilbert, y sea T un elemento de $\mathcal{L}(H)$. Entonces existen operadores P y V, únicos, que satisfacen:*

a) P es un operador positivo, y V es una isometría parcial de el rango de P en H.

b) $T = VP$ y $P = V^*T$.

Más aun, si T es invertible, entonces P es invertible y V es un operador unitario.

Demostración. *Sea $P = \sqrt{T^*T}$. Entonces P es positivo. Veamos que $\|P(x)\| = \|T(x)\|$ para todo x, por y por consiguiente, si $P(x) = 0$ entonces $T(x) = 0$. En efecto*

$$\begin{aligned}\langle P(x), P(x)\rangle &= \langle P^2(x), x\rangle \\ &= \langle T^*T(x), x\rangle \\ &= \langle T(x), T(x)\rangle\end{aligned}$$

Por lo tanto, la aplicación V, que envía $P(x)$ a $T(x)$, es una isometría del rango de P, que llamaremos M, sobre el rango de T. Definiendo V como la única extensión isometríca de $\overline{M}$ sobre $\overline{M}$ y como 0 en el complemento ortogonal, $M^\perp$ de M, tenemos que V es una isometría parcial de M en H. Además, $T(x) = V(P(x))$, y $T = VP$, como queríamos y V^*V es una proyección en el rango de M de P, de modo que $V^*T = V^*VP = P$

Si Q es un operador positivo y W es una isometría parcial del rango de Q en H para la cual $T = WQ$ y $Q = W^*T$, entonces W^*W es una proyección sobre el rango de Q. Así,

$$T^*T = QW^*WQ = Q^2$$

En consecuencia $Q = P$ ya que que la raíz cuadrada positiva es única. Pero entonces $V = W$ ambos son isometrías parciales del rango de P en H y ellos coinciden en el rango de P. Por lo tanto, la afirmación de unicidad en el enunciado del teorema queda probado.

Finalmente, si T es invertible, P es invertible, y la isometría parcial $V = TP^{-1}$ es invertible.

■

Definición 4.2. *El operador $P = \sqrt{T^*T}$ del teorema anterior es llamado el* valor absoluto *de T y es denotado por $|T|$.*

Bibliografía

[1] Alfors L.V., Complex Analysis, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1953.

[2] Axler Sheldon, Linear Algebra Done Right, Springer-Verlag, New York. Inc. 1996.

[3] Bachman George y Narici, Funtional Analysis, New York, 1981.

[4] Cotlar M y Cignoli R, An Introduction to Funtional Analysis, Nort-Holland. Publishing company, 1974.

[5] Giménez José, Modelos Funcionales para Operadores Normales y Contracciones Completamente no Unitarias, UCV. 1989.

[6] Halmos P, Introduction to Hilbert Space and Theory of Spectral Multiplicity., Chelsea publishing Company, New York., 1957.

[7] Kreyszing. Erwin, Introductory Funtional Analysis with Applications, John Wiley & Sons. 1978.

[8] Nieto S. José, Introducción a los Espacios de Hilbert, Monografía N^o 19. Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico. 1978.

[9] Lawrence W, Baggett. Funtional Analysis,1978.

[10] Roman S, Advanced Lineal Algebra, GMT, Springer-Verlag, New York, 1992.

[11] K. Zhu, Operator Theory in Function Spaces, Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker INC, New York, 1990.