Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Dpto.de Matemáticas

Reconstrucción de Sucesiones

Trabajo Especial de Grado Modalidad Seminario-Monografía Para Optar al Título de Licenciada en Matemáticas

Begui Ovando

Tutor: Dr. Carlos Uzcátegui

Mérida - Venezuela

2005

Resumen

Estudiaremos, basados en [3], un problema de reconstrucción de sucesión de longitud n a partir de todas sus subsucesiones de longitud k.

Se probará que para $n > 7$ y $k \geq \left[\frac{n}{2}\right]$, las subsucesiones de longitud k de una sucesión S de longitud n determinan unívocamente a la sucesión original y que para $k < \log_2 n$ no sucede.

Índice general

Introducción

La definición que tiene la **Real Academia Española** de la palabra reconstrucción es la siguiente:

Reconstrucción: Acción y efecto de reconstruir.

Reconstruir: 1.tr. Volver a construir. 2.tr. Unir, allegar, evocar recuerdos o ideas para completar el conocimiento de un hecho o el concepto de algo.

De acuerdo con las definiciones anteriores podemos decir, que la palabra reconstrucción hace referencia a un objeto que ya está construido, se desordena y luego se vuelve a construir.

Para nosotros, se refiere a una sucesión S de longitud n que cuando es "desordenada" podemos formar el multiconjunto de todas las subsucesiones de S de longitud k. A partir de este multiconjunto no es sencillo construir de nuevo la sucesión original. Si el multiconjunto formado por las subsucesiones de longitud k de una sucesión S no es de otra sucesión S', entonces decimos que S es k-Reconstruible, es decir, si este multiconjunto determina unívocamente a S.

En este trabajo vamos a estudiar la demostración de un teorema que responde parcialmente la pregunta propuesta por primera vez por Kalashnink; (tal como lo citan Manvel *et al.* [3]):

¿Cuál es el menor k, para un $n \in \mathbb{N}$, tal que X es k-Reconstruible para todo X de longitud n?

El teorema es el siguiente:

Teorema[3]: *Sea $n > 7$, entonces toda sucesión de longitud n es k-Reconstruible, para $k \geq [\frac{n}{2}]$.*

En el artículo de *I.Krasikov* y *Y. Roditty* [2], se determina que, cualquiera n-sucesión es k-Reconstruible si $k \geq [\frac{16\sqrt{n}}{7}] + 5$.

Antes de comenzar este estudio es recomendable conocer cual es el origen del problema de la reconstrucción y esto se encuentra expuesto en el capítulo 1. El capítulo 2 es de suma importancia, ya que en éste se alcanzará el objetivo citado. Luego, en el capítulo 3 se mostrará que para todo $\varepsilon \in (0,1)$, si $k < (1-\varepsilon)log_2 n$, entonces existen al menos dos sucesiones de longitud n que no son k-Reconstruible.

Capítulo 1

Antecedentes

El problema de la reconstrucción fue planteado primero en grafos y luego en conjuntos ordenados parcialmente.

Veamos cómo se enuncia el problema de la reconstrucción en:

- Grafos
- Conjuntos Ordenados Parcialmente

1.1. Sobre el Problema de la Reconstrucción de Grafos

El problema de reconstrucción fue planteado por P.J. Kelly y S.M. Ulam en 1941; es considerado como uno de los primeros problemas sin resolver en la teoría de grafos [1].

Un **grafo** G es un par (V, E), donde V es un conjunto no vacío de puntos llamados vértices y $E \subseteq \{\{a, b\} : a,\ b \in V\}$ conocido como las aristas de G. Por comodidad denotaremos al conjunto de vértices V de G por $V(G)$ y al conjunto de aristas E de G por $E(G)$. Sean G_1 y G_2 dos grafos. Una función $f : V_1(G_1) \longmapsto V_2(G_2)$ es un isomorfismo de grafos si:

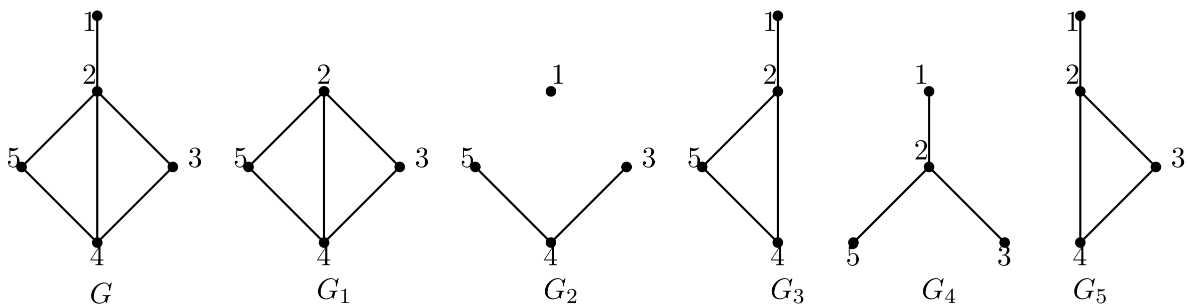
a.- f es biyectiva

b.- $\forall\, a, b \in V_1(G_1)$, $\{a,b\} \in E_1(G_1) \iff \{f(a), f(b)\} \in E_2(G_2)$.

Cuando existe tal función G_1, G_2 se dice que son **grafos isomorfos**.

Al borrar un vértice v junto con sus aristas en un grafo G, se obtiene un **subgrafo de** G que será denotado por G_v.

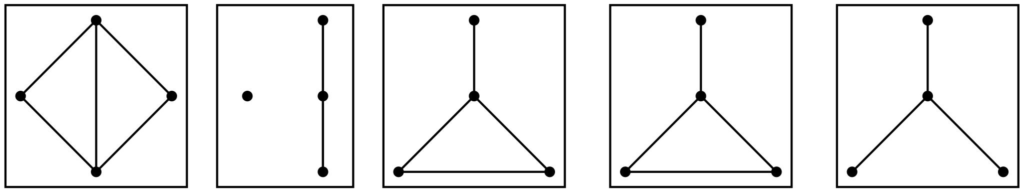
Ejemplo 1.1



Para enunciar el problema de la reconstrucción uno debe saber primero qué se entiende por una **carta** y por el **mazo** de un grafo G. Dado G, los subgrafos G_v, sin etiquetas, son las **cartas** de G; el **mazo** es el multiconjunto que contiene a todas las cartas G_v. El **mazo** se considera como multiconjunto porque G_v podría ser isomorfo a G_w; un ejemplo de éste hecho se observa en el ejemplo 1.1, ya que, $G_3 \cong G_5$. La notación para el mazo de un grafo G es $M(G)$.

Ejemplo 1.2

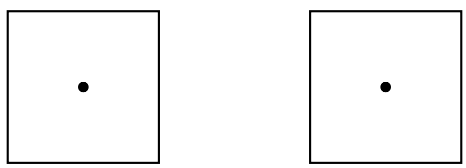
El mazo del grafo presentado en el ejemplo anterior.



Decimos que G es **reconstruible** si para cualquier grafo H, tal que $M(G) = M(H)$, entonces $G \cong H$.

Ejemplo 1.3

Considere el siguiente mazo:



A partir de éste se pueden reconstruir los siguientes grafos:

$2K_1$ K_2

Como $2K_1 \ncong K_2$, entonces ellos no son reconstruibles.

El **Problema de la Reconstrucción de Grafos** es la siguiente conjetura (ver [1]):

Todo grafo simple y finito con más de tres vértices es reconstruible.

1.2. Sobre el Problema de la Reconstrucción de Conjuntos Ordenados

Para enunciar el problema de reconstrucción para conjuntos ordenados parcialmente necesitamos conocer algunas definiciones.

Un **conjunto ordenado parcialmente** es un par ordenado $(P, \leq)$ donde P es un conjunto y $\leq$ es una relación binaria sobre P, tal que:

1.- La relación $\leq$ es reflexiva

$$\forall\, p \in P : p \leq p$$

2.- La relación $\leq$ es antisimétrica

$$\forall\, p, q \in P : [(p \leq q) \wedge (q \leq p)] \Rightarrow (p = q)$$

3.- La relación $\leq$ es transitiva

$$\forall\, p, q, r \in P : [(p \leq q) \wedge (q \leq r)] \Rightarrow (p \leq r)$$

$(Q, \leq_Q)$ es un **subconjunto ordenado** de $(P, \leq_P)$ si $Q \subseteq P$ y $\leq_Q = \leq_{P|Q\times Q}$.

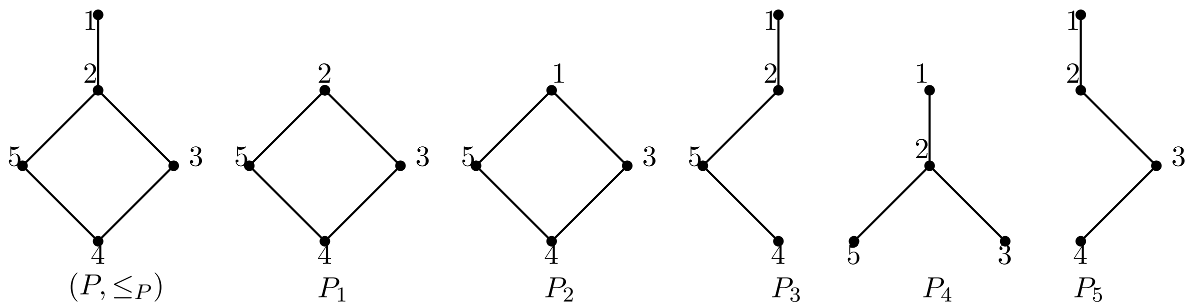
Sean $(P, \leq_P)$ y $(Q, \leq_Q)$ dos conjuntos ordenados parcialmente.

Una función $f : (P, \leq_P) \longmapsto (Q, \leq_Q)$ biyectiva, se dice que es un **isomorfismo de orden** si

$$\forall\, p,\ q \in P : [\ p \leq_P q \iff f(p) \leq_Q f(q)\ ].$$

Sea P un conjunto ordenado finito, para $x \in P$, el subconjunto ordenado $P\backslash\{x\}$ es lo que llamamos una **carta** de P.

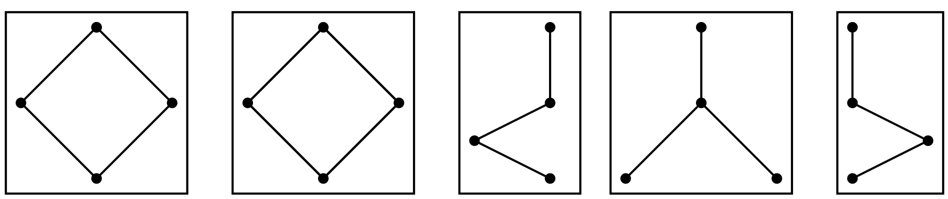
Ejemplo 1.4



El **mazo** de un conjunto ordenado es el multiconjunto que contiene todas las cartas del conjunto ordenado sin etiquetas. Denotaremos por M_P el mazo del conjunto ordenado P.

Ejemplo 1.5

Mazo del conjunto ordenado del ejemplo 1.3.



Diremos que G es **reconstruible** si para cualquier conjunto ordenado (finito) H, tal que $M_G = M_H$, entonces $G \cong H$.

El **Problema de la Reconstrucción de Conjuntos Ordenados** es la siguiente conjetura (ver [4]):

Cada conjunto ordenado (finito) con más de tres elementos es reconstruible.

Capítulo 2

Reconstrucción de Sucesiones

En este capítulo buscaremos responder la pregunta propuesta por primera vez por Kalashink; (tal como lo cita Manvel et al.[3]).

Dado un conjunto finito Ω, denotamos por Ω^n el conjunto de todas las sucesiones en Ω de longitud n, que llamaremos n-sucesiones.

Definición 2.1 *El **mazo** de orden k para $R \in \Omega^n$ es el multiconjunto formado por todas las k-subsucesiones de R; denotado por $M_k(R)$. Observemos que la cardinalidad de $M_k(R)$ es igual al número combinatorio $\binom{n}{k}$.*

Ejemplo 2.2

Sea $\Omega = \{a, b\}$, consideremos la siguiente sucesión $R \in \Omega^4$.

$$R = abba$$

$$M_2(R) = \{aa, ab, ab, bb, ba, ba\}.$$

Definición 2.3 *Una n-sucesión R se dice que es k-**reconstruible** (o k-RC) si R está unívocamente determinada por $M_k(R)$, es decir, si $M_k(R) = M_k(T)$ para algún T, entonces $R = T$.*

Ejemplo 2.4

Sea $\Omega = \{a, b\}$. Consideremos las siguientes sucesiones $R, T \in \Omega^4$

$$R = abba,\ T = baab$$

Calculando los mazos de orden 2 de R y T respectivamente se obtiene que $M_2(T) = \{ab, aa, bb, ba, ab, ba\} = M_2(R)$; por lo tanto, no son 2-RC.

Es obvio que si R tiene longitud n, entonces es n-RC.

Teniendo claro estas definiciones, entonces la interrogante que buscamos responder es la siguiente: *¿Cuál es el menor k, para un $n \in \mathbb{N}$, tal que R es k-RC para todo R de longitud n?*

En este capítulo y el siguiente haremos uso de dos resultados, lema 2.6 y lema 2.8, que son de suma importancia para su desarrollo. La expresión $\binom{S}{T}$ representa el número de veces que aparece la sucesión T en S. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2.5

$$\binom{abba}{ab} = 2$$

Lema 2.6 *Sean dos sucesiones S y $R \in \Omega^n$.*

Si $M_k(S) = M_k(R)$, entonces $M_{k-i}(S) = M_{k-i}(R)$ para $1 \leq i \leq k-1$.

Demostración:

Sea T una sucesión de longitud $(k-i)$. Supongamos que $M_k(S) = \{P_1, \ldots, P_m\}$, donde $m = \binom{n}{k}$. El número de veces que aparece T en $M_k(S)$ es el siguiente:

$$\binom{P_1}{T} + \binom{P_2}{T} + \cdots + \binom{P_m}{T}.$$

La expresión $\binom{S}{T}$ es el número de copias que hay de T en S. Sea T' una copia de T, observemos que $\binom{n-(k-i)}{i}$ nos indica el número de veces que aparece T' en $M_k(S)$, es decir, el número de manera de extender T' a una k-sucesión de S. Haciendo esto con cada copia de T obtenemos que $\binom{n-(k-i)}{i}\binom{S}{T}$ es el número de veces que aparece T en $M_k(S)$.

Como $M_k(S) = M_k(R)$, entonces $\displaystyle\binom{n-(k-i)}{i}\binom{S}{T} = \binom{n-(k-i)}{i}\binom{R}{T}$; por lo tanto $\displaystyle\binom{S}{T} = \binom{R}{T}$. ♣

Del lema anterior llegamos al siguiente resultado.

Corolario 2.7 *Si S es k-RC, entonces S es $(k+i)$-RC, para* $1 \leq i \leq n-k$.

Demostración:

Probaremos la contrarecíproca. Supongamos que S no es $(k+i)$-RC, para $0 < i \leq n-k$. Existe al menos una sucesión T, tal que $M_{k+i}(S) = M_{k+i}(T)$ y $S \neq T$. Por el lema 2.6 se obtiene que $M_k(S) = M_k(T)$. En consecuencia S no es k-RC. ♣

Ahora enunciaremos un resultado que nos indica que el problema que estamos estudiando se puede analizar para sucesiones en el alfabeto $\{a, b\}$.

Lema 2.8 *Sea Ω un alfabeto con más de un elemento. Toda sucesión $R \in \Omega^n$ es k-RC si, y sólo si, toda sucesión $T \in \{a, b\}^n$ es k-RC. Es decir, $\{k : \forall\, S \in \Omega^n\, [S \text{ es } k\text{-RC}]\} = \{k : \forall\, S \in \{a, b\}^n\, [S \text{ es } k\text{-RC}]\}$.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Mostraremos que toda sucesión $T \in \{a, b\}^n$ es k-RC.

Sea $R \in \{a, b\}^n$. Fijemos $x, y \in \Omega$ con $x \neq y$. Por cada a y b que aparezca en R las sustituimos por x y y respectivamente; así obtenemos una sucesión $T \in \Omega^n$, por hipótesis tenemos que T está unívocamente determinada por $M_k(T)$. Es claro que $M_k(T)$ es esencialmente igual a $M_k(R)$, entonces $M_k(R)$ determina unívocamente a R, por lo tanto R es k-RC.

($\Leftarrow$) Mostraremos que toda sucesión $R \in \Omega^n$ es k-RC.

La demostración se hará por reducción al absurdo. Sea $R \in \Omega^n$. Supongamos que R no es k-RC, entonces existe $T \neq R$ tal que $M_k(R) = M_k(T)$. Como $R \neq T$, entonces existe $i \in \{1, ..., n\}$, tal que $r_i \neq t_i$. Ahora, donde aparezca r_i en R lo sustituimos por a y las demás letras de R por b, y del mismo modo procedemos con T y en los mazos respectivos. En consecuencia R y T se transforman en dos sucesiones $R',\ T' \in \{a, b\}^n$, además $M_k(R)$ y $M_k(T)$ se transforman en $M_k(R')$ y $M_k(T')$. Luego $R' \neq T'$ y $M_k(R') = M_k(T')$. En consecuencia R', T' no son k-RC. Hay una contradicción con la hipótesis, ya que $R', T' \in \{a, b\}^n$.

Para entender mejor la construcción de R' a partir de R, haremos algunos comentarios; sean $R = r_1 r_2 \ldots r_n$, $T = t_1 t_2 \ldots t_n \in \Omega^n$, con $R \neq T$. Sean r_i y t_i tal que $r_i \neq t_i$. Definiremos las siguientes funciones:
$f : \Omega \longmapsto \{a, b\}$, tal que $f(r_i) = a,\ f(s) = b$; si $r_i \neq s$.
$g : \Omega^n \longmapsto \{a, b\}^n$, tal que $g[R] = f(r_1)f(r_2)...f(r_n)$.
Es fácil darse cuenta que $R' = g[R]$ y $T' = g[T]$.

- Si $R \neq T$, entonces $R' \neq T'$.
  Como $f(r_i) \neq f(t_i)$; en consecuencia $g[R] \neq g[T]$; es decir $R' \neq T'$.

- Si $M_k(R) = M_k(T)$, entonces $M_k(R') = M_k(T')$.
  Sea $Y \in M_k(R)$, la sucesión Y se puede representar como $Y = y_1 \ldots y_k$, entonces $g[Y] = f(y_1)f(y_2)\ldots f(y_k)$. Sabemos que y_i es un elemento de R, para cada $i \in \{1, ..., k\}$, por ende $f(y_i)$ es un elemento de R'; en consecuencia $g[Y] \in M_k(R')$. Sabemos que $M_k(R) = M_k(T)$, así $g[Y] \in M_k(T)$, entonces $Y \subseteq T$. Realizando el procedimiento anterior se obtiene que $g[Y] \in M_k(T')$. ♣

Del lema anterior, la pregunta realizada por Kalashink, se reduce para n-sucesiones que pertenece a un conjunto Ω^n, tal que $|\Omega| = 2$. Supondremos de aquí en adelante que todas nuestras sucesiones son del conjunto $\{a, b\}$; teniendo esto presente, introduciremos las siguientes definiciones.

Definición 2.9 *Sea $S \in \Omega^n$, denotaremos por $a(S)$ y $b(S)$ el número de $a's$ y $b's$ que tiene S.*

Definición 2.10 *Una sucesión S tiene distintas representaciones, tales como*

$$S = a^{i_0}ba^{i_1}b \dots a^{i_m}b \dots a^{i_{k-1}}ba^{i_k}$$

$$S = b^{j_0}ab^{j_1}a \dots b^{j_m}a \dots b^{j_{l-1}}ab^{j_l}$$

*donde i_m representa la cantidad de $a's$ situadas entre la m-ésima "b" y la $(m+1)$-ésima "b" en S y j_m representa la cantidad de $b's$ situadas entre la m-ésima "a" y la $(m+1)$-ésima "a" en S. El vector $(i_0, \dots, i_k)$ se llama el **vector a** de S y se denotará por $V_a(S)$. Análogamente definimos el **vector b** de S como $V_b(S) = (j_1, \dots, j_l)$.*

Ejemplo 2.11

$$\begin{aligned} S &= aabbaaab \\ S &= a^2ba^0ba^3ba^0 \\ V_a(S) &= (2,0,3,0) \\ S &= b^0ab^0ab^2ab^0ab^0ab' \\ V_b(S) &= (0,0,2,0,0,1) \end{aligned}$$

Observemos que, si sumamos todas las componentes del **vector a** de cualquiera sucesión S nos da $a(S)$ y si $V_a(S)$ tiene dimensión t, entonces $b(S) = t-1$. Una observación análoga vale para el **vector b**, haciendo los cambios convenientes. También observemos que $V_a(S)$ determina unívocamente a S; de igual manera ocurre con $V_b(S)$.

Simbolizamos por B_j^k la siguiente sucesión b^jab^{k-j-1}, donde k nos indica la longitud de la sucesión y $0 \leq j \leq k-1$. Es fácil notar que $V_b(B_j^k) = (j,\ k-j-1)$.

Vamos a introducir sistemas de conteos para algunas sucesiones.

Lema 2.12 *Si S es una sucesión con $b(S) = k-1$, entonces $\binom{S}{B_j^k} = i_j$ donde $0 \leq j \leq k-1$.*

Demostración:

Como $b(S) = b(B_j^k)$, entonces $\binom{S}{B_j^k}$ es la cantidad de $a's$ que se encuentra entre la j-ésima "b" y $(j+1)$- ésima "b" en S. En consecuencia, i_j es el número máximo de construir sucesiones de la forma $b^j a b^{k-j-1}$ en S. ♣

Lema 2.13 *Dada una sucesión $S \in \Omega^n$ con $b(S) = k-1$, se tiene que S es k-RC.*

Demostración:

La sucesión S está completamente determinada por $V_a(S)$. La demostración consiste en reconstruir $V_a(S)$ a partir de $M_k(S)$. Tenemos que $b(S) = k-1$, por lo tanto $V_a(S) = (i_o, i_1, \ldots, i_{k-1})$. Como conocemos $M_k(S)$, entonces sabemos $\binom{S}{B_j^k}$. En virtud del lema 2.12, se obtiene que $\binom{S}{B_j^k} = i_j$, con lo cual podemos formar $V_a(S)$. ♣

Lema 2.14 *Si $S \in \Omega^n$ y $n < 2k$, entonces $b(S) \leq k-1$ ó $a(S) \leq k-1$.*

Demostración:

Sea $S \in \Omega^n$. Supongamos que $b(S) > k-1$ y $a(S) > k-1$, entonces $a(S) + b(S) \geq k + k$, luego $n \geq 2k$. Este hecho contradice la hipótesis. ♣

Lema 2.15 *Si S es una sucesión con $b(S) = k$, entonces* $\binom{S}{B_j^k} = (k-j)i_j + (j+1)i_{j+1}$.

Demostración:

Sea $S = a^{i_0} b a^{i_1} b \ldots a^{i_j} b \ldots a^{i_{k-1}} b a^{i_k}$. Es conveniente recordar que $B_j^k = b^j a b^{k-j-1}$, y $b(B_j^k) = k-1$. La demostrar es por inducción en n.

Sea $n = 1$, entonces solo obtenemos dos sucesiones que son $T = a$ y $R = b$. Como $b(T) = 0$ y esto nos indica la longitud de la sucesión B_j^k, entonces es imposible calcular $\binom{T}{B_j^k}$. En el caso de R tenemos que $b(R) = 1$, entonces $\binom{R}{B_0^1} = 0$.

Antes de hacer el paso inductivo, probaremos el resultado para todo n cuando $j = 0$. Es decir, $\binom{S}{B_0^k} = ki_0 + i_1$, con $S \in \Omega^n$; para demostrarlo consideraremos dos casos.

Caso 1: La primera b en B_0^k es la segunda b en S. Entonces nos quedan una única manera para escoger las últimas b^{k-2} de B_0^k en S, además $i_0 + i_1$ maneras de escoger a en S. Así tenemos $i_0 + i_1$ maneras de escoger B_0^k en S.

Caso 2: La primera b en B_0^k es la primera b en S. Entonces nos quedan $k-1$ $b's$ en S para escoger $k-2$ $b's$ en S. Por lo tanto, hay $k-1$ maneras de escoger b^{k-2} en S y tenemos i_0 maneras de escoger a en S, para así tener $i_0(k-1)$ copias de B_0^k en S.

Por lo tanto $\binom{S}{B_0^k} = i_0 + i_1 + i_0(k-1) = ki_0 + i_1$.

Ahora si haremos el paso inductivo. Supongamos que para toda sucesión R de longitud menor a n se cumple que $\binom{S}{B_{j-1}^k} = (k-j+1)i_{j-1} + ji_j$, si $b(R) = k$. Mostraresmos que para toda sucesión $S \in \Omega^n$ se cumple que $\binom{S}{B_j^k} = (k-j)i_j + (j+1)i_{j+1}$.

Observemos que $B_j^k = b^j ab^{k-j-1} = b(b^{j-1}ab^{k-j-1})$. De nuevo consideraremos dos casos.

Caso 1: La primera b en B_j^k es la segunda b en S. Buscaremos de cuantas maneras podemos escoger $b^{j-1}ab^{k-j-1}$ en la siguiente subsucesión S' de S: $S' = a^{i'_0}ba^{i'_1}b \ldots ba^{i'_{k-3}}ba^{i'_{k-2}}$, donde $i'_0 = i_2, \ldots,\ i'_{k-2} = i_k$. Observemos que $b(S') = (k-2)$ y esta es la misma cantidad de $b's$ que tiene $b^{j-1}ab^{k-j-1}$. Haciendo uso del lema 2.12, se obtiene que $\binom{S'}{b^{j-1}ab^{k-j-1}} = i'_{j-1}$. Es decir, $\binom{S'}{b^{j-1}ab^{k-j-1}} = i_{j+1}$.

Caso 2: La primera b en B_j^k es la primera b en S. El procedimiento que vamos a utilizar es parecido al caso anterior, pero utilizaremos la hipótesis inductiva. Ahora contaremos de cuantas maneras podemos escoger $b^{j-1}ab^{k-j-1}$ en la siguiente subsucesión S'' de S: $S'' = a^{i''_0}ba^{i''_1}b \ldots a^{i''_j}ba^{i''_{j+1}} \ldots a^{i''_{k-2}}ba^{i''_{k-1}}$ donde $i''_0 = i_1, \ldots,\ i''_{k-1} = i_k$. Observemos que S'' es de longitud menor que n y $b(S'') = k-1$. Como $b^{j-1}ab^{k-j-1}$ tiene longitud $(k-1)$ y la cantidad de $b's$ es $k-2$, entonces por hipótesis inductiva se obtiene que $\binom{S''}{b^{j-1}ab^{k-j-1}} =$

$((k-1)-(j-1))i''_{j-1}+ji''_j$, es decir $\begin{pmatrix} S'' \\ b^{j-1}ab^{k-j-1} \end{pmatrix} = (k-j)i_j + ji_{j+1}$.

En consecuencia $\begin{pmatrix} S \\ B^k_j \end{pmatrix} = (k-j)i_j + (j+1)ji_{j+1}$. ♣

Con los resultados obtenidos podemos demostrar los siguientes lemas y corolario que son vitales para la meta del trabajo, que es la demostración del teorema 2.22.

Corolario 2.16 *Sea $n \in \mathbb{N}$. Toda sucesión $S \in \Omega^n$ es k-RC para $k = [\frac{n}{2}] + 1$.*

Demostración:

Sea $S \in \Omega^n$. Como $n < 2k$, en virtud del lema 2.14, se tiene que $b(S) \leq (k-1)$ ó $a(S) \leq (k-1)$.

Supongamos que $b(S) = k-1 = [\frac{n}{2}]$. Por el lema 2.13 se obtiene que S es k-RC.

Ahora, supongamos que $b(S) < k-1$. Por el lema 2.13, S es $(b(S)+1)$-RC. Como $b(S) < [\frac{n}{2}]$, entonces $b(S)+1 < [\frac{n}{2}]+1$ y haciendo uso del corolario 2.7 se obtiene que S es $([\frac{n}{2}]+1)$-RC. ♣

Definición 2.17 *Diremos S y S' son (k,a)-**equivalentes** si, $\binom{S}{B^k_j} = \binom{S'}{B^k_j}$ para toda $0 \leq j \leq (k-1)$.*

Lema 2.18 *Si S y S' con $V_a(S) = (i_o, \ldots, i_k)$ y $V_a(S') = (i'_o, \ldots, i'_k)$, son (k,a)-equivalentes, entonces $V_a(S) - V_a(S') = x\mu$ donde el vector $\mu = (\mu_1, ..., \mu_k)$ viene dado por $\mu_i = (-1)^i\binom{k}{i}$ para $0 \leq i \leq k$ y $x \in \mathbb{Z}$.*

Demostración:

Como S y S' son (k,a)-equivalentes, entonces $\begin{pmatrix} S \\ B^k_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S' \\ B^k_j \end{pmatrix}$, $\quad 0 \leq j \leq k-1$.

En virtud del lema 2.15, $\begin{pmatrix} S \\ B^k_j \end{pmatrix} = (k-j)i_j + (j+1)i_{j+1}$ y $\begin{pmatrix} S' \\ B^k_j \end{pmatrix} = (k-j)i'_j + (j+1)i'_{j+1}$.

Luego

$$\binom{S}{B_j^k} - \binom{S'}{B_j^k} = (k-j)i_j + (j+1)i_{j+1} - (k-j)i'_j - (j+1)i'_{j+1} = 0$$

$$\binom{S}{B_j^k} - \binom{S'}{B_j^k} = (k-j)(i_j - i'_j) + (j+1)(i_{j+1} - i'_{j+1}) = 0, \quad \text{para } 0 \leq j \leq k-1.$$

Variando j obtenemos un sistema lineal homogéneo; denotaremos por A a la matriz de los coeficientes, la cual nos induce a una transformación lineal T, la matriz A es la siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k-1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k-j & j+1 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & k \end{bmatrix}$$

Por el teorema de la dimensión, tenemos que

$$\text{nulidad de } T = (\text{ número de columnas de } A) - \text{rango de } T$$

$$\text{nulidad de } T = (k+1) - k = 1.$$

Faltaría ver cuál es la base del núcleo. De $AX = 0$, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} kx_0 + x_1 &= 0 \\ &\vdots \\ (k-j)x_j + (j+1)x_{j+1} &= 0 \\ &\vdots \\ x_{k-1} + kx_k &= 0 \end{aligned}$$

Ahora buscamos x_j para $0 < j \leq k$. $x_j = -\dfrac{(k-(j-1))x_{j-1}}{j} = x_0(-1)^j \binom{k}{j}$

Por lo tanto, la base del núcleo es $\left(\binom{k}{0}, -\binom{k}{1}, \cdots, (-1)^j\binom{k}{j}, \cdots, (-1)^k\binom{k}{k}\right)$.

Y en consecuencia, $V_a(S) - V_a(S') = x\mu$, donde $x \in \mathbb{Z}$, ya que $x = i_0 - i'_0$ ♣

Definición 2.19

$$\begin{aligned} g(k) &= \min\{n : \exists\, S \in \Omega^n \text{ que no es } k\text{-RC }\}, \\ s(k,t) &= \min\{a(S)\ : S \text{ es una sucesión que no es } k\text{-RC y } b(S) = t\ \}. \end{aligned}$$

$s(k,t)$ tiene las siguientes propiedades:

a) $g(k) = \min\{s(k\ ,r) + r : r \in \mathbb{N}\}$.

Afirmamos que $\{n :\ \exists\ S \in \Omega^n$ que no es$\} = \{s(k\ ,r) + r : r \in \mathbb{N}\}$. En efecto, sea $m \in \{n :\ \exists\ S \in \Omega^n$ que no es k-RC $\}$, entonces existe $S \in \Omega^m$ que no es k-RC, así $m = a(S) + b(S) \geq s(k, b(S)) + b(S)$, como $b(S) \in \mathbb{N}$ se obtiene que $m \in \{s(k,r) + r : r \in \mathbb{N}\}$.

Por otra parte, si $m \in \{s(k\ ,r) + r : r \in \mathbb{N}\}$, entonces existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $m = s(k,r) + r$. Por definición de $s(k,r)$, existe S que no es k-RC, tal que $a(S) = s(k,r)$ y $b(S) = r$; así $S \in \Omega^m$. Por lo tanto $m \in \{n :\ \exists\ S \in \Omega^n$ que no es k-RC $\}$.

En consecuencia $g(k) = \min\{s(k\ ,r) + r : r \in \mathbb{N}\}$.

b) $s(k\ ,r) \leq s(k+1, r)$.

Sea $a(S) \in \{a(T)\ : T$ es una sucesión que no es $(k+1)$-RC y $b(T) = t\ \}$, entonces S no es $(k+1)$-RC y $b(S) = t$; luego S no es k-RC por el lema 2.6, en consecuencia $a(S) \in \{a(T)\ : T$ es una sucesión que no es k-RC y $b(T) = t\ \}$. Y así obtenemos que $s(k\ ,r) \leq s(k+1, r)$. ♣

Lema 2.20 *Dado $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $s(k\ ,k) \geq 2^{k-1}$.*

Demostración:

Antes de comenzar recordemos las siguientes identidades (usaremos la siguiente convención: si $m < n$ entonces $\binom{m}{n} = 0$).

$$(1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n}{2i} + \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n}{2i+1} = 2^n \tag{2.1}$$

$$(1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n}{2i} - \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n}{2i+1} = 0 \tag{2.2}$$

Si sumamos (2.1) y (2.2) se obtiene

$$\sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n}{2i} + \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n}{2i+1} + \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n}{2i} - \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n}{2i+1} = 2^n, \text{ por lo tanto } \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n}{2i} = 2^{n-1}.$$

Con esta información daremos inicio a la demostración.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $S \in \Omega^n$, tal que S no es k-RC y $b(s) = k$, entonces existe $S' \in \Omega^n$ tal que $M_k(S) = M_k(S')$ además $V_a(S) = (i_o, \ldots, i_k)$ y $V_a(S') = (i_o', \ldots, i_k')$. De esto se deduce que S y S' son (k, a)-equivalentes. En virtud del lema 2.18, se tiene que $V_a(S) - V_a(S') = x\mu$ y así $(i_o - i_o', i_1 - i_1', \ldots, i_k - i_k') = x\mu$.

Como cada componente de μ es de la forma $(-1)^r \binom{k}{r}$ para $0 \leq r \leq k$, entonces $(i_{2r} - i_{2r}') = x(-1)^{2r}\binom{k}{2r}$.

Así

$$\sum_{r=0}^{[k/2]} (i_{2r} - i_{2r}') = x \sum_{r=0}^{[k/2]} \binom{k}{2r} = x2^{k-1}, \text{y por ende} \sum_{r=0}^{[k/2]} i_{2r} = x2^{k-1} + \sum_{r=0}^{[k/2]} i_{2r}' \geq x2^{k-1} \geq 2^{k-1}.$$

En consecuencia $a(S) = \sum_{r=0}^{k} i_r \geq 2^{k-1}$; de modo que $s(k,k) \geq 2^{k-1}$. ♣

Lema 2.21 $(n+1) < 2^{\frac{n-1}{2}}$, *si* $n > 7$.

Demostración:

Para todo $n > 7$, mostraremos por inducción que $(n+1) < 2^{\frac{n-1}{2}}$.

Veamos que para $n = 8$ sí se cumple;

$$8 + 1 < 2^{\frac{8-1}{2}}, \;\; 9 < 2^{\frac{7}{2}}$$

Supongamos que el resultado es verdadero para $n = k \geq 8$, es decir $k + 1 < 2^{\frac{k-1}{2}}$.

Mostremos que para $k + 1$ también se cumple:

$$\begin{array}{lll}
(k+1)+1 & < & 2^{\frac{k-1}{2}} + 1 \\
\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} & < & 2^4 \\
 & & \\
\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} & < & 2^{\frac{k}{2}} \qquad \text{para todo } \; k \geq 8 \\
 & & \\
2^{\frac{k-1}{2}} + 1 & < & 2^{\frac{k}{2}}
\end{array}$$

luego $(k+1)+1 < 2^{\frac{k}{2}}$; por lo tanto, para $n = k+1$ y $k \geq 8$, se cumple.♣

Teorema 2.22 *Sea $n > 7$, entonces toda n-sucesión es k-RC, para $k \geq [\frac{n}{2}]$.*

Demostración:

Sea $S \in \Omega^n$. Notemos que $a(S) \leq k$ ó $b(S) \leq k$, supongamos que $b(S) \leq k$.

Caso1: $b(S) = k - 1$.

Utilizando el lema 2.13 se obtiene que S es k-RC.

Caso 2: $b(S) < k - 1$.

$b(S) = j < k-1$, entonces del lema 2.13 se tiene que S es $j+1$-RC. Por otro lado $j+1 < k$, y en virtud del corolario 2.7 se obtiene que S es k-RC.

Caso 3: $b(S) = k$.

Supongamos que S no es k-RC. Denotaremos por t al número de $a's$ en S; es decir $a(S) = t$. Haciendo uso del lema 2.20 obtenemos que $t \geq s(k,k) \geq 2^{k-1}$. Luego, $n = t + k \geq s(k,k) + k \geq 2^{k-1} + k$. Por lo tanto, $n \geq 2^{k-1} + k$.

Sabemos que $k = [\frac{n}{2}]$, y en consecuencia $k \geq \frac{n-1}{2}$. De modo que $n \geq 2^{k-1}+k \geq 2^{\frac{n-1}{2}-1}+\frac{n-1}{2}$, de lo cual se deduce que $n \geq 2^{\frac{n-3}{2}} + \frac{n-1}{2}$. Por lo tanto, $n+1 \geq 2^{\frac{n-1}{2}}$. Y esto contradice al lema 2.21.

Por último, si $b(S) > k$, entonces $a(S) \leq k-1$. Para demostrar que S es k-RC, se repite el razonamiento anterior. ♣

Los siguientes ejemplos muestran que el teorema 2.22 no es válido para $n = 2, 3, 4, 5$ y 7.

Ejemplos 2.23

ab y *ba* no son 1-RC; $n = 2$

aba y *baa* no son 1-RC; $n = 3$

abba y *baab* no son 2-RC; $n = 4$

abbaa y *baaba* no son 2-RC; $n = 5$

abbbaab y *baabbba* no son 3-RC; $n = 7$.

En el capítulo siguiente veremos cómo se obtiene de forma constructiva algunas de las sucesiones expuesta anteriormente.

Antes de culminar, es importante resaltar que toda 6-sucesión es 3-RC. Mediante el lema 2.13 tenemos que todas las sucesiones $S \in \Omega^6$ con $b(S) = 2$ son 3-RC, del mismo modo sucede cuando $a(S) = 2$. Nos faltaría ver todas las sucesiones que contiene 3 $a's$. Si conseguimos al menos dos sucesiones que contenga 3 $a's$ y sean (3,a)-equivalentes, estas sucesiones pueden ser o no 3-RC; pero sí no son (3,a)-equivalentes entonces no son 3-RC. Aplicando el lema 2.15 en cada una de las 20 sucesiones que contienen 3 $a's$, nos damos cuenta que ninguna de las sucesiones no son $(3, a)$-equivalentes; por lo tanto toda 6-sucesión es 3-RC. En el siguiente ejemplo veremos algunas sucesiones de las 20 que no son $(3, a)$-equivalentes.

Ejemplo 2.24

$ababab$	$ababba$	$babaab$	$abbaab$
$V_a = (1,1,1,0)$	$V_a = (1,1,0,1)$	$V_a = (0,1,2,0)$	$V_a = (1,0,2,0)$
$\binom{S}{ab^2} = 4$	$\binom{S}{ab^2} = 4$	$\binom{S}{ab^2} = 1$	$\binom{S}{ab^2} = 4$
$\binom{S}{bab} = 4$	$\binom{S}{bab} = 2$	$\binom{S}{bab} = 6$	$\binom{S}{bab} = 4$
$\binom{S}{b^2a} = 1$	$\binom{S}{b^2a} = 3$	$\binom{S}{b^2a} = 2$	$\binom{S}{b^2a} = 2.$

Capítulo 3

Sucesiones no Reconstruibles

Sabemos que cuando $n \geq 7$ toda $S \in \Omega^n$ es k-RC, si $k \geq [\frac{n}{2}]$; pero este k no es necesariamente el mínimo, tal que toda $S \in \Omega^n$ sea k-RC, por esta razón en este capítulo buscaremos una cota inferior para ese k, y así tener una noción en donde se encuentra éste. Además, para todo $k \in \mathbb{N}$ se introduce un método para formar sucesiones que no son k-RC.

El número $\binom{n+(m-1)}{(m-1)}$ nos indica las combinaciones posibles de n elementos con repeticiones de un conjunto que contiene m elementos. Recordemos la función $g(k)$ definida en el capítulo 2 (2.19). Ahora procedemos a la siguiente definición.

Definición 3.1 $f(n) := \text{mín}\{k : \forall S \in \Omega^n \textit{ es } k\textit{-RC}\}$.

Proposición 3.2 *Si* $g(k) \leq n$, *entonces* $f(n) > k$.

Demostración:

Como $g(k) = t \leq n$, entonces existe $S \in \ \Omega^t$ tal que S no es k-RC, por lo tanto $k < t \leq n$. Luego $k < f(t) \leq f(n)$. ♣

El teorema 2.22 nos indica que $f(n) \leq [\frac{n}{2}]$, si $n \leq 7$. En el resultado que sigue mostraremos una cota inferior para $f(n)$.

Lema 3.3 *Para cualquier* $\varepsilon \in (0,1)$, *existe* N *tal que* $f(n) > (1-\varepsilon)\log_2 n$ *para todo* $n > N$.

Demostración:

El número de posibles mazos de orden k, para n-sucesiones, es el número de maneras para seleccionar $\binom{n}{k}$ sucesiones entre 2^k sucesiones distintas con repeticiones, el cual es $\left(\begin{array}{c} \binom{n}{k} + (2^k - 1) \\ (2^k - 1) \end{array} \right)$.

Para $2 \leq k < n$ y $n > 3$ tenemos:

$$\left(\begin{array}{c} \binom{n}{k} + 2^k - 1 \\ 2^k - 1 \end{array} \right) < \binom{n}{k}^{2^k-1} < n^{k(2^k-1)}. \tag{3.1}$$

Tan solo haciendo uso de las definiciones de los números combinatorios fácilmente podemos demostrar las desigualdades anteriores.

Recordemos que $\mid \{a,b\}^n \mid = 2^n$. Si cada sucesión de $\{a,b\}^n$ es k-RC, entonces deben existir 2^n mazos de orden k distintos. Supongamos que

$$n^{k(2^k-1)} < 2^n, \tag{3.2}$$

entonces existen al menos dos n-sucesiones con el mismo mazo de orden k. Fijando k y para n suficientemente grande la desigualdad (3.2) se cumple. Supongamos que $k = k' \log_2 n$, éste lo sustituimos en la desigualdad (3.2) y aplicando logaritmo a ambos lados y simplificando se obtiene que

$$k' \log_2^2 n \, [n^{k'} - 1] < n, \tag{3.3}$$

esto es cierto para n suficientemente grande, si $k' = (1-\varepsilon)$ y $\varepsilon \in (0,1)$. (Para verificar la última desigualdad, basta demostrar que para un $x \in \mathbb{R}^+$ se cumple que

$$t \lim_{x\to\infty} \frac{\log_2^2 x(x^t - 1)}{x} = 0, \quad \text{si } t \in (0,1).$$

Lo cual es inmediato usando la Regla de L'hospital varias veces).

Ahora hacemos el proceso inverso, es decir, de (3.3) donde se encuentre k' lo sustituimos por $k' = \frac{k}{log_2 n}$ y llegamos de nuevo a (3.2). Como $k = k'log_2 n$ puede ser un número entero o no, entonces $[k] \leq k'log_2 n$ denotaremos por t a la parte entera de k. Luego $n^{t(2^t-1)} < n^{k(2^k-1)} < 2^n$, por lo tanto

$$\begin{pmatrix} \binom{n}{t} + 2^t - 1 \\ 2^t - 1 \end{pmatrix} < \binom{n}{t}^{2^t-1} < n^{t(2^t-1)}. \tag{3.4}$$

En conclusión, dado $\varepsilon \in (0,1)$ existen al menos dos n-sucesiones que no son k-RC, para n suficientemente grande y k=(1–ε)$\log_2 n$. ♣

Emplearemos cuatro maneras para construir nuevas sucesiones a partir de sucesiones dadas. En lo que sigue S, R, T son sucesiones de cualquier longitud no necesariamente igual.

Definición 3.4 ***La concatenación*** $S+T$**,** *es la sucesión S seguida por la sucesión T.*

Definición 3.5 ***La sustitución*** $R[S,T]$**,** *se obtiene de R al reemplazar cada "a" de R por S y cada "b" de R por T.*

Definición 3.6 ***La complementación*** R_c, *de la sucesión R es $R\,[b,a]$.*

Definición 3.7 ***La inversión*** R_r, *es R leída hacia atrás.*

Ejemplo 3.8

Sean $R = aba$, $S = bbab$ y $T = aabbb$.

Entonces $S+T = bbabaabbb$, $R[S,T] = bbabaabbbbbab$, $S_c = S\ [b,a] = aaba$ y $T_r = bbbaa$.

Lema 3.9 *Para cualquier sucesión R y S con $M_k(R)=M_k(S)$ y cualquier otra sucesión T, se cumple que:*

a) $M_k(R+T) = M_k(S+T)$,

b) $M_k(R_c) = M_k(S_c)$,

c) $M_k(R_r) = M_k(S_r)$.

Demostración:

a) Mostraremos que si una sucesión $X \in M_k(R+T)$, entonces también se encuentra en $M_k(S+T)$. El otro caso se trata de manera análoga a la anterior.

Sea $X \in M_k(R+T)$. Puede suceder lo siguiente: i) X es una subsucesión de R , ii) X es una subsucesión de $R+T$, iii) X es una subsucesión de T.

i) Si X es una subsucesión de R, entonces $X \in M_k(R)$. Como $M_k(R) = M_k(S)$, entonces $X \in M_k(S)$. Por lo tanto, $X \in M_k(S+T)$.

ii) Si X es una subsucesión de $R+T$, supongamos $X = X' + X''$ tal que X' es una subsucesión de R y X'' de T, entonces:

   Como $X = X' + X''$, sucede que la longitud de X' es menor a k. Por lo tanto, existe $Y \in M_k(R)$ tal que X' también es subsucesión de Y. Como $M_k(R) = M_k(S)$, entonces $Y \in M_k(S)$. En consecuencia X' también es subsucesión de S, y además $X \in M_k(S+T)$.

iii) Si X es una subsucesión de T. En este caso no hay problema, ya que X también se encuentra en $M_k(S+T)$.

La demostración de b) y c) son similares a la anterior. ♣

Ejemplo 3.10

1) Sean $R = abba$, $S = baab$, y $T = aba$, entonces $R+T = abbaaba$ y $S+T = baababa$. Por lo tanto, $M_2(R+T) = M_2(S+T)$.

2) $R_c = R[b,a] = baab$ y $S_c = abba$. Aquí tenemos que $R_c = S$ y $S_c = R$, por lo tanto $M_2(R_c) = M_2(S_c)$.

3) $R_r = abba$ y $S_r = baab$. Por lo tanto, $M_2(R_r) = M_2(S_r)$.

La sustitución es muy útil para construir pares de sucesiones no reconstruibles, como lo ilustra el siguiente resultado.

Lema 3.11 *Si* $A,\ B \in \Omega^n$ *con* $M_k(A) = M_k(B)$ *y* $C,\ D \in \Omega^m$ *con* $M_h(C) = M_h(D)$, *entonces* $A[C,D],\ B[C,D] \in \Omega^{nm}$ *con* $M_{k+h}(A[C,D]) = M_{k+h}(B[C,D])$.

Demostración:

Sea $E \in M_{k+h}(A[C,D])$. Mostraremos que E aparece en $A[C,D]$ el mismo número de veces que aparece en $B[C,D]$.

Podemos decir que la sucesión $A[C,D]$ esta integrada por n bloques y cada uno de ellos de longitud m, cada bloque es igual C o D. Vamos a considerar los dos tipos de intersección que E puede tener con $A[C,D]$ y $B[C,D]$.

Tipo 1: E intersecta algún bloque de $A[C,D]$ en más de h lugares.

En este caso E puede intersectar a lo sumo k bloques. Supongamos que E intersecta j bloques donde $j \leq k$. Cada bloque que E intersecta en $A[C,D]$ representa una letra en A, en consecuencia formamos una j-subsucesión S de A. Como $M_k(A) = M_k(B)$, entonces S también se encuentra en $M_j(B)$ (esto sucede por el lema 2.6). Luego cada letra de S representa un bloque en $B[C,D]$; por lo tanto E también aparece en $B[C,D]$. Este procedimiento lo realizamos tantas veces como aparece E en $A[C,D]$. La demostración del caso inverso es análogo.

Tipo 2: E intersecta los bloques de $A[C,D]$ a lo sumo en h lugares.

Supongamos que $A[C,D] = A_1..A_i...A_n$ y $B[C,D] = B_1..B_i...B_n$, donde A_i y B_i pueden ser C o D. Las veces que E intersecta a A_i es igual en B_i, este hecho es debido a que $M_h(C) = M_h(D)$ y haciendo uso del lema 2.6. Por lo tanto, las veces que aparece E en $A[C,D]$ es igual en $B[C,D]$.

La demostración del caso inverso es análogo. ♣

El lema anterior es un método para construir sucesiones que no son RC, haciendo uso de éste podemos demostrar el siguiente resultado.

Lema 3.12 *Para todo $t \in \mathbb{N}$, $f(2^t) > t$.*

Demostración: La demostración es por inducción en t.

Sabemos que para $t = 1$ existen al menos dos sucesiones S y $S' \in \Omega^2$ que no son 1-RC. Por lo tanto, $f(2) > 1$.

Tenemos que $S[S,S']\ S'[S,S'] \in \Omega^4$; en este caso $t = 2$. Haciendo uso del lema anterior se tiene que $S[S,S']$ y $S'[S,S']$ no son 2-RC, por lo tanto $f(2^2) > 2$.

Supongamos que $f(2^k) > k$. Queremos mostrar que $f(2^{k+1}) > k+1$, para esto basta conseguir una sucesión $S \in \Omega^{2^{k+1}}$ que no sea $(k+1)$-RC.

Sabemos que $f(2^k) > k$ y $f(2) > 1$, entonces existen $T \in \Omega^{2^k}$ y $R \in \Omega^2$ que no son k-RC y 1-RC respectivamente. Entonces existen $T' \in \Omega^{2^k}$ y $R' \in \Omega^2$ tal que $M_k(T) = M_k(T')$ y $M_1(R) = M_1(R')$; haciendo uso del lema 3.11 se obtiene que $T[R,R']$, $T'[R,R'] \in \Omega^{2^{k+1}}$ y además $M_{k+1}(T[R,R']) = M_{k+1}(T'[R,R'])$, luego $T[R,R']$ y $T'[R,R']$ no son $(k+1)$-RC. Por lo tanto $f(2^{k+1}) > k+1$. ♣

Ejemplo 3.13

El par de sucesiones $S = ab$ y $S_r = ba$ no son 1-RC.

$$B = S[S, S_r] = abba, \quad C = S_r[S, S_r] = baab; \quad B, C \text{ no son 2-RC.}$$

$$D = B[S, S_r] = abbabaab, \quad E = C[S, S_r] = baababba; \quad D, E \text{ no son 3-RC.}$$

$$D[S, S_r] = abbabaabbaababba, \quad E[S, S_r] = baababbaabbabaab \ \text{ no son 4-RC.}$$

Por lo expuesto anteriormente se concluye que a partir de dos sucesiones que no son k-RC, se pueden construir dos sucesiones más que no son h-RC, para $h \geq k$. También observemos que para todo $k \in \mathbb{N}$, se pueden construir un par de sucesiones que no son k-RC.

Nosotros sabemos que toda n-sucesión es k-RC, si $k \geq [\frac{n}{2}]$ para $n > 7$. Ahora veamos como construimos algunas n-sucesiones que no son k-RC, cuando $n \leq 7$ y $k \geq [\frac{n}{2}]$.

Para Ω^1 tenemos dos únicas sucesiones que son "a" y "b" y éstas sucesiones son 1-RC.

Para Ω^2 existen al menos $S, S' \in \Omega^2$ que no son 1-RC.

Ejemplo 3.14

$S = ab \ \ y \ \ S' = ba, M_1(S) = \{a, b\} = M_1(S')$, por lo tanto S, S' no son 1-RC.

Sabemos que $S = ab$ no es 1-RC. Por el lema 3.7 podemos construir dos sucesiones de longitud 3 que no son 1-RC. Sea $T = a$, concatenamos S y S_r con T, es decir, $S+T = aba$ y $S_r+T = baa$. Sabemos que S y S_r no son 1-RC, por lo tanto $S+T$, S_r+T no son 1-RC.

Sean $abba$ y $baab$. Estas sucesiones se obtienen de $S[S, S_r]$ y $S_r[S, S_r]$, usando el lema 3.9 se deduce que $S[S, S_r]$, $S_r[S, S_r] \in \Omega^4$ y además no son 2-RC.

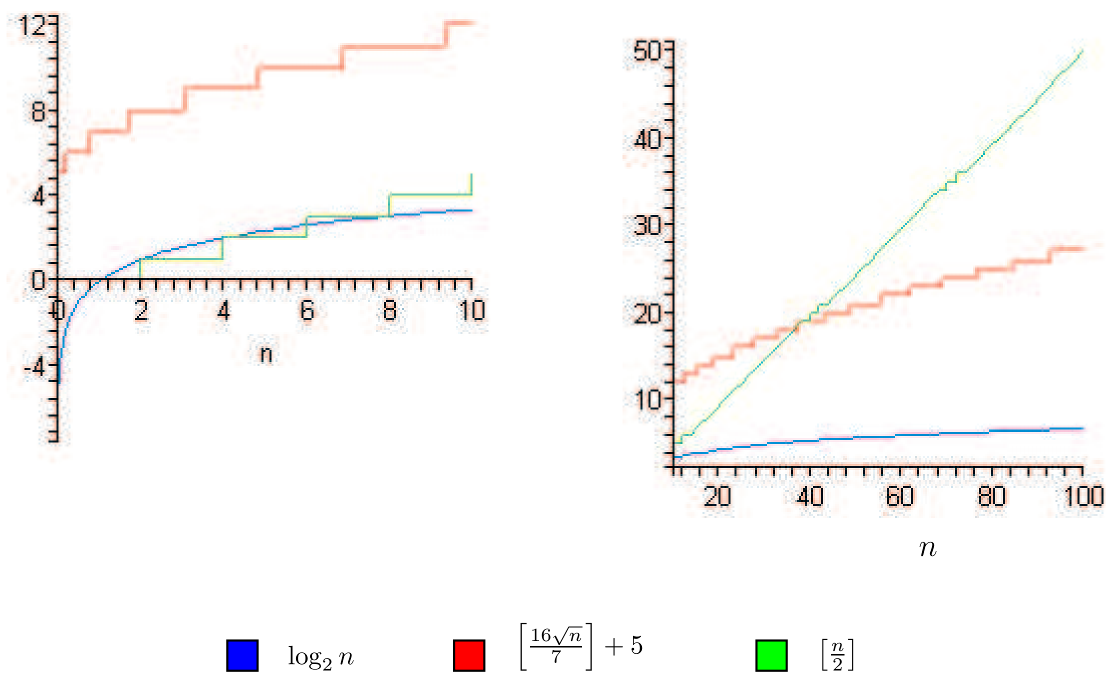
De $S[S, S_r]$, $S_r[S, S_r]$ y $T = a$ obtenemos las siguientes sucesiones: $S[S, S_r] + T = abbaa$, y $S_r[S, S_r] + T = baaba$. Estas sucesiones pertenecen al conjunto Ω^5, y en virtud del lema 3.7, tenemos que $abbaa$ y $baaba$ no son 2-RC.

Veamos la razón de porque no se pueden formar una 6-sucesión que no sea 3-RC usando el lema 3.10. Sean $S, S' \in \Omega^3$ y $T, T' \in \Omega^2$, entonces $S[T, T'], T[S', S] \in \Omega^6$. Observemos que T, T' no son 1-RC; pero S y S' si son 2-RC, esto es debido al corolario 2.16, y por ende no podemos conseguir una sucesión $R \in \Omega^6$ que no sea 3-RC.

Según en el artículo de Manvel et at. [4]; las sucesiones *abbbaab*, *baabbba* $\in \Omega^7$ no son 3-RC.

En el artículo de *I. Krasikov* y *Y. Roditty* [2], se determina que, cualquiera n-sucesión es k-RC si $k \geq [\frac{16\sqrt{n}}{7}] + 5$. Esto mejora la cota de $f(n)$ propuesta en este trabajo.

Veamos los siguientes gráficos :



Observemos que $[\frac{n}{2}] \leq [\frac{16\sqrt{n}}{7}] + 5$ si $n \in [8, 36]$ y $[\frac{n}{2}] \geq [\frac{16\sqrt{n}}{7}] + 5$ si $n \geq 37$. Entonces $f(n) \leq [\frac{n}{2}]$ si $n \in [8, 36]$ y $f(n) \leq [\frac{16\sqrt{n}}{7}] + 5$ si $n \geq 37$.

Bibliografía

[1] J. A. Bondy y R. L. Hemminger, Graph Reconstruction-A survey, *Journal of Graph Theory*, 1 (1977), 227-268.

[2] I. Krasikov y Y. Roditty, On a Reconstruction Problem for Sequences, *Journal of Combinatorial Theory*, (1997), 344-348.

[3] B. Manvel, A. Meyerowists, A. Schwenk, K. Smith y P. Stockmeyer, Reconstruction of sequences *Discrete Mathematics*, 94 (1994), 209-219.

[4] B. Schroder. *Ordered Sets, An introduction*. Birkhäuser, 2003.