



UNIVERSIDAD  
DE LOS ANDES  
MERIDA VENEZUELA

Universidad de los Andes  
Facultad de Ciencias  
Departamento de Matemática  
Grupo de Ecuaciones Diferenciales  
Mérida - Venezuela

---

**EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIÓDICAS PARA  
LA ECUACIÓN REDUCIDA DE VAN DER POL**

---

Requisito Especial de Grado Para Optar al Título de  
Licenciado en Matemáticas

**Br. Ana Milena Moros Semprun.**  
**Tutor: Luis Bladismir Ruiz Leal.**

Octubre, 2007

**ESTE TRABAJO ESTA DEDICADO EN PRIMER LUGAR A  
MI DIOS TODO PODEROSO Y EN SEGUNDO LUGAR A LAS  
2 MUJERES QUE HICIERON POSIBLE QUE ALCANZARA  
ESTA META, A MIS MADRES: ELBA SEMPRUN Y MIRIAM  
MOROS.. LAS AMO....¡AH! POR SUPUESTO Y A MI  
TODITO, TAMBIÉN TE AMO**

## AGRADECIMIENTO

Al Dr. Luis Bladismir Ruiz, por su asesoría, confianza, paciencia y dedicación en este trabajo.

Al Dr. Hugo Leiva, al Dr. Marcos Lizana, y al prof Chacón por las valiosas sugerencias realizadas en este trabajo, y por el apoyo brindado durante la carrera.

A Quriaky, Maria Elena, Rodolfo, José Luis, Hiliana y Dubraska amigos y compañeros incondicionales, gracias por su apoyo en los momentos difíciles.

A toda mi familia, en particular a mis tías Thais y Elba, por el apoyo brindado, este triunfo es de ustedes.

A todas esas personas que de una u otra manera estuvieron conmigo y me ayudaron a alcanzar esta meta.

GRACIAS



# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>13</b>
1.1. Existencia, Unicidad y Prolongabilidad de Soluciones . . . . .	13
1.2. Dependencia Continua de los Datos Iniciales . . . . .	15
1.3. Propiedades de los Sistemas Autónomos . . . . .	15
1.4. Propiedades de los Conjuntos Límites . . . . .	16
1.5. Teorema Del Flujo Tubular . . . . .	17
1.6. Teorema de la Curva de Jordan . . . . .	19
<b>2. Teorema de Poincaré-Bendixson</b>	<b>23</b>
<b>3. Ecuación Reducida de la Ecuación de Van der Pol</b>	<b>39</b>



# Resumen

En este trabajo se estudia la existencia de soluciones periódicas de la conocida Ecuación Reducida de Van der Pol

$$\begin{cases} x' = -x + A \cos(\varphi) \\ \varphi' = (x^2 - 1)\omega \end{cases}$$

donde  $(x, \varphi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$  y el parámetro  $0 < A < 1$ . El flujo generado por este sistema es conocido en la literatura como Flujo Reducido de Van der Pol y ha sido estudiado en [6]. En este trabajo, se prueba la existencia de una solución periódica no trivial para este sistema, para lo cual fue necesario hacer una extensión del famoso Teorema de Poincaré-Bendixson sobre el cilindro  $(-1, 1) \times \mathbb{S}^1$ .



# Introducción

A comienzo de 1940 la ecuación de Van Der Pol,

$$\epsilon x'' + (x^2 - 1)x' + \epsilon x = b\lambda \cos(\lambda.t) \quad (1)$$

tomo importancia, ya que esta ecuación modela las oscilaciones del potencial de la cavidad del magneton, este dispositivo fue usado para generar altas frecuencias en los radares; es decir, la ecuación (1) describe las oscilaciones de la corriente en un circuito eléctrico con un feedback y una fuerza externa periódica. Por ello, desde entonces se viene estudiando el comportamiento cualitativo de dicha ecuación, como es: la existencia de soluciones acotadas, soluciones periódicas, existencia de atractores y en general la dinámica de dicha ecuación.

Para el caso en que  $b = 0$ , tenemos un sistema autónomo cuyo comportamiento es bien conocido. Es decir, si hacemos  $b = 0$  en la ecuación (1), obtenemos la ecuación  $x'' + k(x^2 - 1)x' + x = 0$ , con  $k = \frac{1}{\epsilon} > 0$ , la cual es equivalente al sistema de ecuaciones diferenciables en el plano

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - k(x^2 - 1)y, \end{cases} \quad (2)$$

el cual tiene una orbita periódica no trivial para todos los valores del parámetro

escalar  $k > 0$  (ver [2]). Para ver esto, se usa el famoso Teorema de Poincaré-Bendixson; en tal sentido, se debe construir una región positivamente invariante mediante una curva cerrada  $C$  alrededor del origen, y usar el hecho que el origen es el único punto crítico, el cual es inestable debido a que los autovalores del sistema linealizado son  $k \pm i\sqrt{1 - k^2}$ . Este estudio es realizado con detalles en (ver [8],[2]).

Este ciclo límite de la ecuación de Van der Pol corresponde a una valvula oscilante que da lugar a una forma ondulada, la cual va hacia arriba y hacia abajo repetidamente. El ciclo límite en el oscilador de Van der Pol tiene importantes consecuencias para la tecnología.

Ahora para el caso  $b \neq 0$  se complica el comportamiento drásticamente, ocasionando ésto grandes sorpresas. En este caso la dinámica es muy rica y mucho se a hecho para estudiarla. (ver [3], [6], [9] )

Entre las nuevas técnicas desarrolladas para atacar este problema, en los parámetros donde no se conoce muy bien el comportamiento de la dinámica, aparece un sistema de la forma (ver [6]):

$$\begin{cases} x' = -x + A \cos(\varphi) \\ \varphi' = (x^2 - 1)\omega \end{cases} \quad (3)$$

donde  $(x, \varphi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ , llamado flujo reducido de la ecuación de Van der Pol.

El objetivo principal de este trabajo es estudiar el comportamiento de las soluciones para valores del parámetro  $A$  donde el sistema (3) no presenta puntos críticos . Queremos estudiar la existencia de soluciones periódicas no triviales. Para lograr esto, adaptaremos una versión del Teorema de Poincaré-Bendixson a una superficie cilíndrica. Observemos que  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$  no es simplemente conexo, es por ello que no podemos aplicar directamente el teorema de Poincaré-Bendixson.

Finalmente, este trabajo esta estructurado de la siguiente manera:

En el Capítulo 1, se presenta, sin demostración, algunos resultados básicos de la Teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias como son; el Teorema de Existencia de Soluciones Globales, el Teorema del Flujo Tubular y el Teorema de la Curva de Jordan.

En el capítulo 2, se presenta una prueba geométrica del Teorema de Poincaré-Bendixson en el plano, la cual nos ayudará a entender este Teorema en superficies mas generales, como es el caso de una superficie cilíndrica.

El Capitulo 3, es el capítulo principal, pues allí se demuestra el resultado mas importante de este trabajo; es decir, se prueba la existencia de una órbita periódica del sistema (3), y para ello se extiende el Teorema de Poincaré-Bendixson sobre el cilindro  $D = (-1, 1) \times \mathbb{S}^1$ .



# Preliminares

Dado que el problema estudiado en este trabajo versa sobre la existencia de soluciones periódicas para la ecuación reducida de Van der Pol, la cual es un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias, en este capítulo nos referiremos fundamentalmente al estudio de los sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales ordinarias. Todos los resultados expuestos en este capítulo fueron tomados de [7] y [8].

## 1.1. Existencia, Unicidad y Prolongabilidad de Soluciones

Los resultados que serán expuestos en esta sección valen para una superficie diferenciable.

Consideremos el siguiente sistema autónomo:

$$x' = f(x), \tag{1.1}$$

donde  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función de clase  $C^1$ , definida en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ .

Una *solución* de la ecuación diferencial (1.1) es una función diferenciable  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida en un intervalo abierto  $I$ , tal que  $u(t) \in U$  para cada  $t \in I$  y

$$u'(t) = f(u(t)); \quad \forall t \in I.$$

En particular,  $u$  es continuamente diferenciable.

Ahora, dado  $x_0 \in U$ , entenderemos por una *solución* del siguiente problema de valor inicial ( abreviado P.V.I )

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

una solución  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de (1.1) tal que  $u(0) = x_0$  y  $0 \in I$ .

Así, dado  $x_0 \in U$ , denotamos por  $u(t, x_0)$  la solución del problema de valor inicial (P.V.I ) (1.2)

### **Teorema 1 (Teorema de existencia y unicidad local)**

Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función de clase  $C^1$ , entonces para cualquier punto  $x_0 \in U$  existe  $\delta > 0$  tal que el P.V.I (1.2) tiene una única solución  $u(t)$  definida en el intervalo  $I = (-\delta, \delta)$ .

### **Teorema 2 .**

Si  $f \in C^1(U)$  (Donde  $C^1(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^n : f \text{ es una función continua y diferenciable}\}$ ) entonces para cada punto  $x_0 \in U$  hay un intervalo maximal  $J$  en el cual el P.V.I (1.2) tiene una única solución,  $u(t)$ ; es decir, si el P.V.I (1.2) tiene otra solución  $v(t)$  en el intervalo  $I$ , entonces  $I \subset J$  y  $v(t) = u(t)$  para todo  $t \in I$ . Además, el intervalo maximal  $J$  es abierto ( $J = (\alpha, \beta)$ ).

### **Definición 1 (Intervalo Maximal)**

El intervalo  $J(x_0) = (\alpha, \beta)$  dado por el Teorema 2 es llamado *intervalo maximal de existencia de la solución  $u(t)$  del P.V.I (1.2)*.

### **Teorema 3 (Prolongabilidad de las soluciones)**

Sea  $f \in C^1(U)$  y  $(\alpha, \beta)$  el intervalo maximal de existencia de la solución  $u(t)$  del P.V.I (1.2). Si existe un conjunto compacto  $K \subset D$ , tal que  $u(t) \in K$  para todo  $t \in (\alpha, \beta)$ , entonces  $\alpha = -\infty$  y  $\beta = \infty$ .

## 1.2. Dependencia Continua de los Datos Iniciales

En esta sección presentaremos, sin demostración, el Teorema de la dependencia continua de la solución del P.V.I (1.2) respecto a la condición inicial  $x_0$ .

### **Teorema 4** (*Dependencia Continua de los Datos Iniciales*)

Supongamos que  $f \in C^1(U)$  y  $x_0 \in U$ , entonces existen  $a > 0$ ,  $\delta > 0$  tal que para todo  $y \in B_\delta(x_0)$  (Bola abierta de centro  $x_0$  y radio  $\delta$ ) el problema

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = y, \end{cases} \quad (1.3)$$

admite una única solución  $u(t, y)$  con  $u \in C^1(G)$  y  $G = [-a, a] \times B_\delta(x_0)$ .

Es decir, la aplicación  $(t, x) \rightarrow u(t, y)$  con  $(t, y) \in [-a, a] \times B_\delta(x_0)$  es continuamente diferenciable.

## 1.3. Propiedades de los Sistemas Autónomos

En esta sección presentaremos algunas propiedades de los sistemas autónomos, que serán utilizadas en los capítulos siguientes.

**Lema 1** Si  $u : I \rightarrow U$  es una solución de (1.1), entonces para cualquier  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $u(t + \tau)$  es también solución de (1.1) definida en  $I - \tau$ .

**Lema 2** Si  $u : J \rightarrow U$  es una solución de (1.1) que no es inyectiva, entonces  $u$  es periódica.

**Teorema 5** (*Propiedad de Semigrupo*)

Dado  $x_0 \in U; \tau \in J(x_0), t \in J(u(\tau, x_0))$  se tiene que  $t + \tau \in J(x_0)$  y

$$u(t + \tau, x_0) = u(t, u(\tau, x_0)).$$

Una noción más general que la de sistemas autónomo, es la de sistema dinámico, la que daremos a continuación:

**Definición 2** (*Sistema Dinámico*)

Por un sistema dinámico continuo en un espacio métrico  $X$  se entiende una función continua  $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow X$  definida en un abierto  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R} \times X$  tal que:

1.  $\varphi(0, x) = x, \quad \forall x \in \mathcal{D}.$
2.  $\varphi(t + \tau, x) = \varphi(t, \varphi(\tau, x)), \quad (t, x), (t, \varphi(\tau, x)) \in \mathcal{D}.$

**Observación:** Supongamos que para todo  $x_0 \in U$  el intervalo de existencia y unicidad de  $u(t, x)$  es  $J(x) = \mathbb{R}$ . Entonces la aplicación  $\varphi : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$  dada por:  $\varphi(t, x) := u(t, x)$  define un sistema dinámico en  $\mathbb{R}^n$ .

## 1.4. Propiedades de los Conjuntos Límites

En esta sección,  $u$  denotará una solución maximal de (1.1) cuyo dominio contiene un intervalo de la form  $[\tau, \infty)$ . Supongamos además que la clausura de  $u_0([\tau, \infty))$  es un subconjunto compacto en  $U$ . Estos resultados se encuentran con mas detalles en [8].

**Definición 3** (*Conjunto  $\omega$ -Límite*)

Se define el conjunto  $\omega$ -límite de  $u$  como el conjunto

$$\Omega(u) = \{p \in U : u(t_k) \rightarrow p \quad \text{para alguna sucesión } t_k \rightarrow +\infty\}.$$

y el conjunto  $\omega$ -límite de un punto  $x_0$  como el conjunto

$$\Omega(x_0) = \{p \in U : u(t_k, x_0) \rightarrow p \quad \text{para alguna sucesión } t_k \rightarrow +\infty\}.$$

**Definición 4** (*Conjuntos Positivamente invariantes*)

Un conjunto  $D$  es positivamente invariante respecto al sistema autónomo (1.1), si para todo  $x_0 \in D$  la solución  $u(t, x_0) : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  correspondiente al P.V.I (1.2) satisface que  $u(t, x_0) \in D$ , para todo  $t \in [0, \beta)$ .

**Teorema 6** El conjunto  $\Omega(u)$  es un subconjunto compacto, conexo y no vacío de  $U$ , el cual es invariante por (1.1), bajo la hipótesis de que la clausura de  $u_0([\tau, \infty))$  es un subconjunto compacto de  $U$ .

**Corolario 1** Si  $p \in \Omega(u)$ , entonces  $u(t, p)$  está definida en  $\mathbb{R}$ .

## 1.5. Teorema Del Flujo Tubular

En esta sección presentaremos unos de los Teoremas más importante de este trabajo, como es el Teorema del Flujo Tubular.

**Definición 5** (*Sección Transversal*)

Una sección transversal a  $f$  es una función  $S : D \rightarrow U$  de clase  $C^1$  definida en un subconjunto abierto y conexo  $D$  de  $\mathbb{R}^{n-1}$  tal que  $S'(q)v_1, S'(q)v_2, \dots, S'(q)v_{n-1}, f(S(q))$  es una base de  $\mathbb{R}^n$ , cualquiera que sea  $q \in D$  y cualquiera que sea la base  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$  de  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

**Definición 6** (*Sección Transversal Afín*)

Una sección transversal  $S : D \rightarrow U$  a  $f$  se dice afín si existe  $x_0 \in U$  y una aplicación lineal inyectiva  $T : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $S(q) = x_0 + T(q)$ ,  $q \in D$ .

**Proposición 1** Si  $x_0 \in U$  y  $f(x_0) \neq 0$ , entonces  $f$  posee una sección transversal en  $x_0$ , la cual es afín.

**Definición 7** (*Sistemas Topológicamente Conjugados*)

Sean  $F, G : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  funciones de clase  $C^1$ , donde  $U$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $p_0, q_0$  son las condiciones iniciales de los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} x' = F(x) \\ x(0) = p_0, \end{cases} \quad (1.4) \quad \begin{cases} x' = G(x) \\ x(0) = q_0, \end{cases} \quad (1.5)$$

Si  $u, v$  son soluciones de (1.4) y (1.5) respectivamente, entonces se dice que estos sistemas son topológicamente conjugados en  $p_0, q_0$  si existen abiertos  $V_{p_0} \subset U$  y  $W_{q_0} \subset U$  y un homeomorfismo  $h : V_{p_0} \rightarrow W_{q_0}$ , tal que lleva soluciones de la ecuación (1.4) en soluciones de la ecuación (1.5); es decir,  $h(p_0) = q_0$  y para todo  $p \in V_{p_0}$  se tiene que  $h(u(t, p)) = v(t, h(p))$ .

### **Teorema 7 (Teorema del Flujo Tubular)**

Sea  $S : D \rightarrow U$  una sección transversal a  $f$  y  $K$  un subconjunto compacto y no vacío de  $D$  tal que la restricción de  $S$  a  $K$  es inyectiva. Entonces existe  $\eta > 0$  tal que la aplicación

$$\begin{aligned} h : (-\eta, \eta) \times B(K, \eta) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ h(t, q) &= u(t, S(q)), \end{aligned}$$

está bien definida y es un homeomorfismo sobre el abierto  $\text{Im}(h)$  de  $\mathbb{R}^n$ .

**Observación:** Es importante notar que el Teorema del Flujo Tubular lo que hace es conjugar los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.6) \quad \begin{cases} x' = (1, 0) \\ x(0) = (0, q), \end{cases} \quad (1.7)$$

pues las soluciones de (1.7) vienen dadas por

$$\bar{u}(t, q) = (t, q),$$

luego a través del homeomorfismo dado por el Teorema del Flujo tubular nos queda que

$$h(\bar{u}(t, q)) = h(t, q) = u(t, S(q)).$$

Por lo tanto, como las soluciones de (1.7) están yendo a través de  $h$  en soluciones de (1.6), podemos decir que estos sistemas son topológicamente conjugados.

**Proposición 2** *Sea  $h$  el homeomorfismo dado por el Teorema del Flujo Tubular. Dado  $p \in \text{Im}(h)$  existe  $\theta \in (-\eta, \eta)$  tal que  $u(\theta, p) \in S(D)$ .*

**Proposición 3** *Supongamos que existe un punto  $x_0 \in U$  tal que la clausura de  $\{u(t, x_0) : t \geq 0\}$  es un subconjunto compacto de  $U$ . Si  $S : D \rightarrow U$  es una sección transversal a  $f$  y  $p \in \Omega(x_0) \cap S(D)$ , entonces existe una sucesión  $t_k \rightarrow +\infty$  tal que  $u(t_k, x_0) \rightarrow p$  y  $u(t_k, x_0) \in S(D)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .*

## 1.6. Teorema de la Curva de Jordan

El Teorema de separación de Jordan, es un resultado de enunciado simple que encuentra tremenda aplicación en la teoría de Sistemas Dinámico al permitir dar luz a la prueba del Teorema de Poincaré- Bendixson.

### Definición 8 (*Curva de Jordan*)

*Una curva  $C$ , es una curva de Jordan si  $C$  es la imagen de una función continua  $\tau : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\tau(a) = \tau(b)$  y la restricción de  $\tau$  a  $[a, b)$  es inyectiva.*

### Teorema 8 (*Separación de Jordan*)

*Si  $C$  es una curva de Jordan en  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  es la unión de dos abiertos  $V$  y  $W$  conexos, disjuntos y no vacíos de  $\mathbb{R}^2$ , tales que  $\partial V = \partial W = C$ , donde  $\partial$  denota la frontera.*

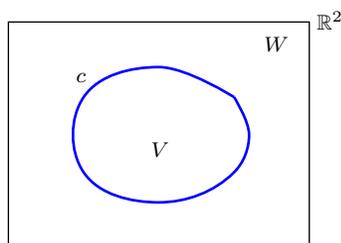


Figura 1.1:

**Corolario 2** Sean  $V$  y  $W$  los abiertos separados por la curva de Jordan  $C$ . Si existe una curva continua  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\alpha(a) \in V$  y  $\alpha(b) \in W$ , entonces existe  $\xi \in (a, b)$  tal que  $\alpha(\xi) \in C$ .

**Demostración:** (Por reducción al absurdo)

Supongamos que para todo  $\xi \in (a, b)$  se tiene que  $\alpha(\xi) \notin C$ .

Entonces la curva  $\Gamma$  definida por la función  $\alpha$  está totalmente contenida en  $W \cup V$ .

Consideremos  $x_1 \in W$  y  $x_2 \in V$  arbitrarios, como se muestra en la figura 1.2.

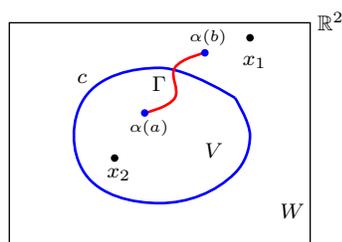


Figura 1.2:

Dado que  $W$  y  $V$  son arcoconexos, entonces existen curvas  $C_1 \in W$  y  $C_2 \in V$  que unen los puntos  $\alpha(b)$  con  $x_1$  y  $\alpha(a)$  con  $x_2$  respectivamente. ver figura

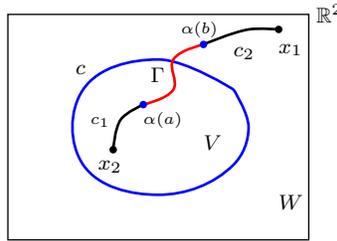


Figura 1.3:

Luego la curva  $\zeta = \Gamma \cup C_1 \cup C_2$  es una curva continua contenida en  $W \cup V$  que une a  $x_1$  con  $x_2$ ; así  $W \cup V$  es arcoconexo, lo cual implica que  $W \cup V$  es conexo y esto contradice el hecho de que  $W \cup V$  no es conexo.

Como la contradicción viene de suponer que para todo  $\xi \in (a, b)$  se tiene que  $\alpha(\xi) \notin C$ , entonces podemos concluir que existe  $\xi \in (a, b)$  tal que  $\alpha(\xi) \in C$ .

†

**Corolario 3** Sea  $C$  una curva de Jordan y  $V$  y  $W$  los abiertos dados por el Teorema de separación de Jordan. Supongamos que existe un conjunto denso  $E$  en un abierto  $H$  de  $\mathbb{R}^2$  tal que  $E \subset V$ . Entonces,  $H$  está contenido en  $V$ .

**Demostración:** (Por reducción al absurdo.)

Supongamos que  $H$  no está contenido en  $V$ , así existe  $p \in H$  tal que  $p \notin V$ .

Como  $p \notin V$ , entonces  $p \in V^c = W \cup C$ , así  $H \cap (W \cup C) \neq \emptyset$ , por lo tanto  $H \cap W \neq \emptyset$  ó  $H \cap C \neq \emptyset$ .

Si  $H \cap W \neq \emptyset$ , entonces existe una bola abierta  $B_\varepsilon(p)$  de  $\mathbb{R}^2$  tal que  $B_\varepsilon(p) \subset H$  y  $B_\varepsilon(p) \subset W$ , pues  $H$  y  $W$  son conjuntos abiertos.

Como por el Teorema de la curva de Jordan sabemos que  $V \cap W = \emptyset$ , entonces  $V \cap B_\varepsilon(p) = \emptyset$ , luego como  $E \subset V$ , entonces  $E \cap B_\varepsilon(p) = \emptyset$  lo cual contradice el hecho de que  $E$  es denso en  $H$ ; pues,  $B_\varepsilon(p) \subset H$  y  $E \cap B_\varepsilon(p) = \emptyset$ . Como la contradicción viene de suponer que  $H \not\subset V$ , entonces podemos concluir que  $H \subset V$ .

†

# Capítulo 2

## Teorema de Poincaré-Bendixson

En este capítulo daremos una demostración muy detallada y geométrica del Teorema de Poincaré-Bendixson, siguiendo las ideas que se encuentran en [8] y [9]. Para ello haremos uso de los resultados enunciados en el capítulo anterior y asumiremos las siguientes condiciones:

Consideremos el siguiente sistema autónomo, en el plano:

$$x' = f(x) \tag{2.1}$$

donde  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una función de clase  $C^1$ , definida en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Dado  $x_0 \in U$ , denotamos por  $u(t, x_0)$  la solución de (2.1). Fijaremos  $x_0 \in U$  y supondremos que la solución  $u_0(t) := u(t, x_0)$  está definida en  $[0, \infty)$  y que la clausura de  $u_0([0, \infty))$  es un subconjunto compacto de  $U$ .

**Teorema 9 (Teorema de Poincaré-Bendixson en el Plano)** *Si  $\Omega(x_0)$  no contiene puntos de equilibrio, entonces el  $\Omega(x_0)$  es una órbita periódica del sistema (2.1). Es decir,  $\Omega(x_0) = \{u(t, y_0) : t \in \mathbb{R}\}$  para alguna solución periódica  $u(t, y_0)$  del sistema (2.1).*

Para demostrar este teorema necesitamos algunos análisis, definiciones y resultados previos, como los siguientes:

Si suponemos que  $u_0$  es una solución periódica de (2.1), de periodo  $\tau$ , entonces el resultado se tiene fácilmente, pues en este caso tendríamos que

$$u|_{[0,\tau]} = \{u(t, x_0) : t \geq 0\} = \mathcal{O}^+(x_0),$$

donde  $\mathcal{O}^+(x_0)$  denota la órbita positiva de la solución  $u$ , como este conjunto es cerrado, él contiene todo sus puntos límites, y así se tiene que:

$\mathcal{O}^+(x_0) = \Omega(x_0)$ , lo cual implica que  $\Omega(x_0)$  contiene una órbita periódica.

Por lo tanto, supondremos que la solución  $u_0(t)$  no es periódica.

En lo que sigue  $S : D \subset \mathbb{R} \rightarrow U$  denota una sección transversal afín a  $f$ ; es decir, existe  $x_0 \in U$  y una aplicación lineal inyectiva  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$S(q) = x_0 + T(q), \quad \text{con } q \in D$$

Es claro que en este caso dicha sección transversal es un segmento de recta, y por lo tanto le podemos imponer el siguiente orden: dados  $p_0 = S(q_0)$  y  $p_1 = S(q_1)$  pondremos  $p_0 <_S p_1$  si  $q_0 < q_1$ .

Para continuar con la demostración del teorema necesitaremos los siguientes lemas:

**Lema 3** Sean  $0 \leq t_0 < t_1$  tales que  $u_0(t_i) \in S(D)$ ,  $i = 1, 2$ .

Si  $u_0(t_0) <_S u_0(t_1)$ ,  $u_0(t) \notin S(D)$  para todo  $t \in (t_0, t_1)$ , y además si existe  $t > t_1$  tal que  $u_0(t) \in S(D)$ , entonces  $u_0(t_1) < u_0(t)$

Para demostrar este lema necesitamos hacer un análisis previo:

Primero veamos que la curva  $C$  formada por el arco  $u_0([t_0, t_1])$  y el segmento

$L := \{u_0(t_1) + \frac{t}{t_0}(u_0(t_0) - u_0(t_1)) : 0 \leq t \leq t_0\} \subset S(D)$  que une a  $u_0(t_0)$  con  $u_0(t_1)$  es una curva de Jordan en  $\mathbb{R}^2$ , ver la figura 2.1.

En efecto, consideremos la siguiente aplicación:

$$\tau : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

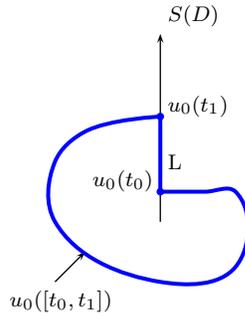


Figura 2.1:

$$\tau(t) = \begin{cases} u_0(t_1) + \frac{t}{t_0}(u_0(t_0) - u_0(t_1)), & \text{si } t \in [0, t_0] \\ u_0(t), & \text{si } t \in (t_0, t_1] \end{cases} \quad (2.2)$$

Es claro que  $\tau$  está bien definida y además es continua, pues  $L$  es continua y  $u_0(t)$  también lo es para todo  $t \in (t_0, t_1]$ , luego

$$\tau(0) = L(0) = u_0(t_1) = \tau(t_1);$$

es decir,  $\tau(0) = \tau(t_1)$  lo que implica que  $\tau$  es una curva cerrada, falta ver que  $\tau|_{[0, t_1]}$  es inyectiva. En efecto; como  $L$  es una recta, ella es inyectiva, y como estamos suponiendo que  $u_0(t)$  no es periódica entonces es inyectiva, además por hipótesis sabemos que  $u_0(t) \notin S(D)$  para todo  $t \in (t_0, t_1)$  y que  $L \subset S(D)$  lo cual implica que  $u_0(t) \notin L$  para todo  $t \in (t_0, t_1)$ , por lo tanto  $\tau$  es inyectiva.

Como  $\tau$  es continua, cerrada e inyectiva en  $[0, t_1)$  y  $C$  es la imagen de esta aplicación, entonces  $C$  es una curva de Jordan en  $\mathbb{R}^2$ . Así por el Teorema de Separación de Jordan,  $C$  divide al plano en dos abiertos

$$V \quad \text{y} \quad W \quad (2.3)$$

conexos y disjuntos, tales que  $\partial V = \partial W = C$ , como se muestra en la figura 2.2:

Ahora, escribamos  $u_0(t_i) = S(q_i)$  y  $K = [q_0, q_1]$ , es claro que  $S$  restringida a  $K$  es inyectiva, así por el Teorema del Flujo Tubular existe  $\eta > 0$  tal que la aplicación

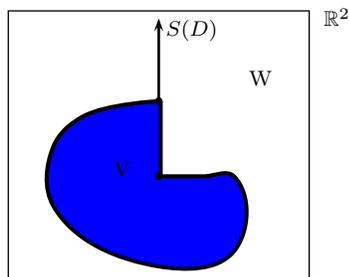


Figura 2.2:

$$h : (-\eta, \eta) \times [q_0 - \eta, q_1 + \eta] \rightarrow U$$

$$h(t, q) = u(t, S(q)),$$

está bien definida y es un homeomorfismo sobre el abierto  $Im(h)$  de  $\mathbb{R}^n$ .  
Ver figura 2.3

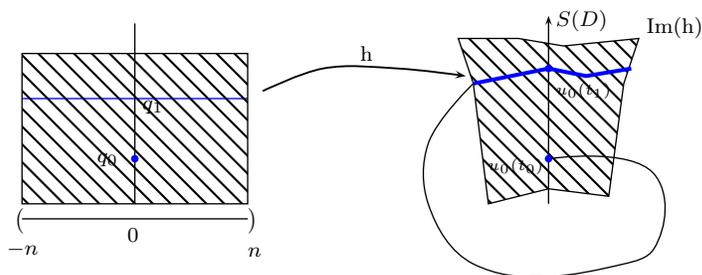


Figura 2.3:

Para continuar con la demostración de este lema necesitamos las siguientes afirmaciones:

**Afirmación 1** Si  $h(\bar{t}, q) \in u_0([t_0, t_1])$ , entonces  $q = q_0$  y  $\bar{t} \geq 0$  ó  $q = q_1$  y  $\bar{t} \leq 0$ .

Ver figura 2.4.

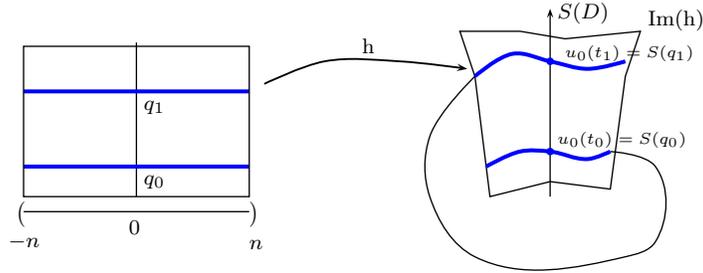


Figura 2.4:

En efecto; de la definición de  $h$ , tenemos que

$$h(\bar{t}, q) = u(\bar{t}, S(q)), \quad (2.4)$$

y como  $h(\bar{t}, q) \in u_0([t_0, t_1])$ , entonces existe  $t^* \in [t_0, t_1]$  tal que

$$h(\bar{t}, q) = u_0(t^*). \quad (2.5)$$

Luego, de (2.4) y (2.5) se sigue que

$$u_0(t^*) = u(\bar{t}, S(q)),$$

por la unicidad de las soluciones se tiene que

$$u_0(t^* + \tau) = u(\bar{t} + \tau, S(q))$$

tomando  $\tau = t - \bar{t}$ , nos queda que

$$u_0(t^* + t - \bar{t}) = u(\bar{t} + t - \bar{t}, S(q));$$

es decir,

$$u_0(t^* + t - \bar{t}) = u(t, S(q)).$$

Ahora, evaluando la expresión anterior en  $t = 0$ , se obtiene

$$u_0(t^* - \bar{t}) = u(0, S(q)) = S(q) \in S(D).$$

Así, en virtud de las hipótesis del lema

$$u_0(t^* - \bar{t}) = u_0(t_0) \quad u_0(t^* - \bar{t}) = u_0(t_1)$$

Si  $u_0(t^* - \bar{t}) = u_0(t_0)$ , entonces por la inyectividad de  $u_0$  tenemos que

$$t^* - \bar{t} = t_0 \quad \Rightarrow \quad \bar{t} = t^* - t_0,$$

como  $t^* \in [t_0, t_1]$ , entonces  $t_0 \leq t^*$ , así  $t^* - t_0 \geq 0$  y por lo tanto  $\bar{t} \geq 0$ , trivialmente se ve que  $q = q_0$ , pues

$$\begin{aligned} h(0, q) &= u(0, S(q)) = u_0(t^* - t) \\ &= u_0(t_0) \\ &= S(q_0) \\ &= u(0, S(q_0)) \\ &= h(0, q_0) \end{aligned}$$

luego por ser  $h$  un homeomorfismo,  $q = q_0$ .

Con argumentos análogos se demuestra que, si  $u_0(t^* - \bar{t}) = u_0(t_1)$ , entonces  $\bar{t} \leq 0$  y  $q = q_1$ .

†

**Afirmación 2**  $u_0(t) \notin L$  si  $t > t_1$

En efecto, supongamos por el absurdo que existe  $\tau > t_1$  ( $\tau$  es el primer instante de tiempo donde la solución corta al segmento  $L$ ) tal que  $u(\tau) \in L$ , así  $u_0(t) \notin L \quad \forall t \in (t_1, \tau)$ . Como se muestra en la figura 2.5

Escribamos  $u_0(\tau) = S(\bar{q})$  con  $\bar{q} \in [q_0, q_1]$ . Ya que  $u_0$  no es periódica,  $\bar{q} \neq q_0, q_1$ . Fijemos  $\bar{t} \in (0, \eta)$  tal que  $\tau - t_1 > 2\bar{t}$ , así

$$\begin{aligned} \tau - t_1 > \bar{t} + \bar{t} &\Rightarrow t_1 + \bar{t} < \tau - \bar{t} \\ &\Rightarrow [t_1 + \bar{t}, \tau - \bar{t}] \subset [t_1, \tau] \end{aligned}$$

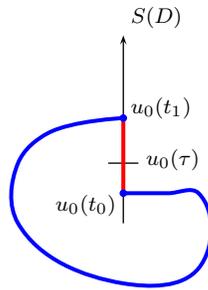


Figura 2.5:

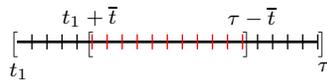


Figura 2.6:

Ver figura 2.6

Del homeomorfismo dado por el Teorema del Flujo Tubular, tenemos que  $u_0(t_1 + \bar{t}) = h(\bar{t}, q_1)$  y  $u_0(\tau - \bar{t}) = h(-\bar{t}, \bar{q})$ . Así, de la afirmación 1 se tiene que  $h(\bar{t}, q_1) \in W$  y  $h(-\bar{t}, \bar{q}) \in V$ , ver figura 2.7.

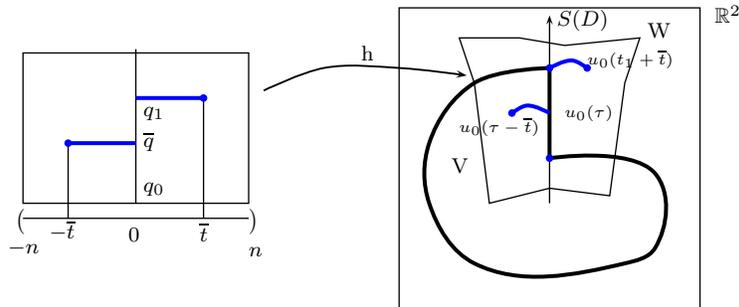


Figura 2.7:

donde  $V$  y  $W$  son los abiertos que se consideran en (2.3), en consecuencia  $u_0(t_1 + \bar{t}) \in W$  y  $u_0(\tau - \bar{t}) \in V$ . Como se muestra en la figura 2.8

Como la restricción  $u_0 : [t_1 + \bar{t}, \tau - \bar{t}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , es una curva continua que une a  $u_0(t_1 + \bar{t}) \in W$  con  $u_0(\tau - \bar{t}) \in V$ , entonces por el corolario 2 del capítulo 1, existe  $t' \in (t_1 + \bar{t}, \tau - \bar{t})$ , tal que  $u_0(t') \in C$ .

Como  $u_0(t') \in C$ , entonces  $u_0(t')$  corta a  $u_0([t_0, t_1])$  ó  $u_0(t')$  corta a  $L$ , pues

$$C = u_0([t_0, t_1]) \cup L.$$

Como  $u_0(t)$  no es periódica,  $u_0(t') \notin u_0([t_0, t_1])$ , así  $u_0(t') \in L$ , y esto

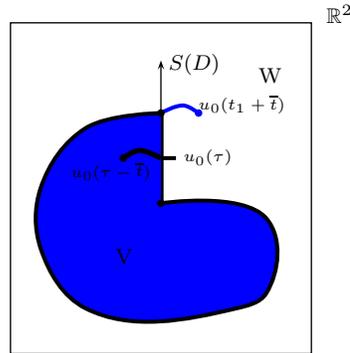


Figura 2.8:

contradice el hecho de que  $\tau$  es el primer instante de tiempo en que la solución  $u_0$  corta al segmento  $L$ .

Como la contradicción viene de suponer que  $u_0(\tau) \in L$  para un cierto  $\tau > t_1$ , entonces podemos concluir  $u_0(t) \notin L$  si  $t > t_1$  y esto concluye la demostración de la afirmación 2.

†

**Afirmación 3** Sea  $L_0 = \{p \in S(D) : p <_S u_0(t_0)\}$ . Si  $t > t_1$ , entonces  $u_0(t) \notin L_0$ .

Ver figura 2.9

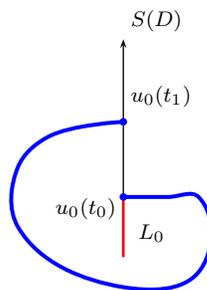


Figura 2.9:

En efecto, si el resultado fuera falso entonces, razonando como en la afir-

mación anterior, existiría  $\tau > t_1$  tal que  $u_0(\tau) \in L_0$  y  $u_0(t) \notin L_0 \ \forall t \in (t_1, \tau)$ ; es decir  $\tau$  es el primer instante de tiempo en que la solución  $u_0$  corta al segmento  $L_0$ , ver figura 2.10

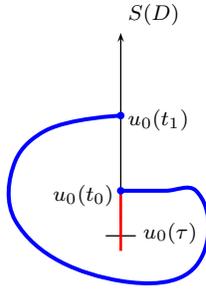


Figura 2.10:

Fijemos  $\bar{t} \in (0, \eta)$  tal que  $\bar{t} < \tau - t_1$ , así  $\bar{t} + t_1 < \tau$ , lo cual implica que  $(\bar{t} + t_1, \tau) \subset (t_1, \tau)$ , como se muestra en la figura 2.11

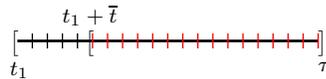


Figura 2.11:

De la afirmación 1 y del Teorema de Flujo Tubular se sigue que  $u_0(t_1 + \bar{t}) \in W$  y  $u_0(\tau) \in V$ , donde  $V$  y  $W$  son los abiertos considerados en (2.3). Ver figura 2.12 y 2.13

Como la restricción de  $u_0 : [t_1 + \bar{t}, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una curva continua que une a  $u_0(t_1 + \bar{t}) \in W$  con  $u_0(\tau) \in V$ , entonces por el corolario 2, existe  $t' \in (t_1 + \bar{t}, \tau)$ , tal que  $u_0(t') \in C$ .

Como  $C = u_0([t_0, t_1]) \cup L$ , entonces  $u_0(t')$  corta a  $u_0([t_0, t_1])$  ó  $u_0(t')$  corta a  $L$ .

Si  $u_0(t')$  corta a  $L$ , contradice la afirmación 1.

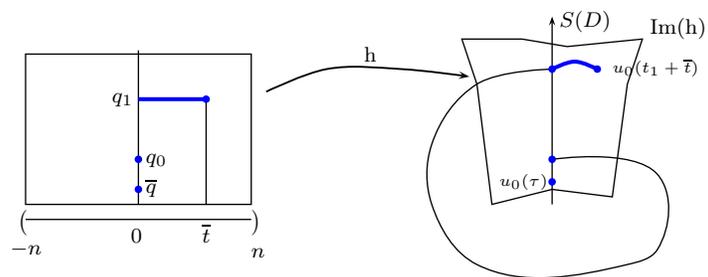


Figura 2.12:

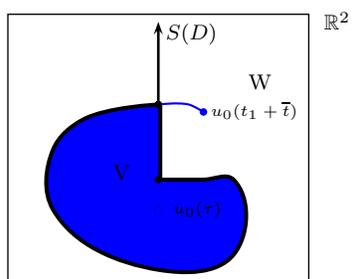


Figura 2.13:

Y si  $u_0(t')$  corta a  $u_0([t_0, t_1])$ , entonces contradice el hecho de que la solución no es periódica.

Como las contradicciones vienen de suponer que  $u_0(\tau) \in L_0$  para un cierto  $\tau > t_1$ , entonces podemos concluir  $u_0(t) \notin L_0$  si  $t > t_1$  y esto concluye la demostración de la afirmación 3.

†

**Demostración de Lema 3:**

La prueba del lema es consecuencia de las afirmaciones 2 y 3, pues estas nos garantizan que  $u_0(t)$  no está en  $L$  ni en  $L_0$ , para todo  $t > t_1$ , y como por hipótesis  $u_0(t) \in S(D)$  para algún  $t > t_1$ , entonces necesariamente  $u_0(t) < u_0(t_1)$  si  $t > t_1$ , como se muestra en la figura 2.14.

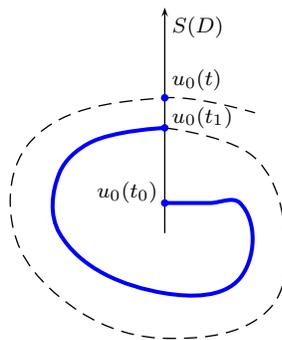


Figura 2.14:

†

**Lema 4**  $\Omega(x_0) \cap S(D)$  contiene a lo sumo un punto.

**Demostración:**

Supongamos que hay dos puntos  $p_0 \neq p_1$ , tales que

$$\{p_0, p_1\} \subset \Omega(x_0) \cap S(D).$$

Como  $p_0 \in \Omega(x_0) \cap S(D)$ , entonces por la proposición 3 existe una sucesión

$t_k \rightarrow +\infty$  tal que

$$u_0(t_k) \rightarrow p_0 \quad y \quad u_0(t_k) \in S(D) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

Análogamente, Como  $p_1 \in \Omega(x_0) \cap S(D)$ , entonces por la proposición 3 existe una sucesión  $t'_k \rightarrow +\infty$  tal que

$$u_0(t'_k) \rightarrow p_1 \quad y \quad u_0(t'_k) \in S(D) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.7)$$

Veamos que en los siguientes casos llegamos a una contradicción.

En Efecto;

**Caso 1**  $u_0(t) \notin [p_0, p_1]$  para todo  $t \in \text{dom}(u_0)$ .

Donde  $[p_0, p_1]$  denota el segmento que une a  $p_0$  con  $p_1$ .

Como  $u_0(t) \notin [p_0, p_1]$  para todo  $t \in \text{dom}(u_0)$ , entonces por (2.6) y (2.7) podemos elegir  $\{t_k\}$  y  $\{t'_k\}$  tales que, sin pérdida de generalidad,  $u_0(t_k) < p_0 < p_1 < u_0(t'_k)$  así, existen  $t_0 \in \{t_k\}$  y  $t_1 \in \{t'_k\}$  tales que  $u_0(t_0) < p_0 < p_1 < u_0(t_1)$  y además  $u_0(t) \notin S(D)$  para todo  $t \in (t_0, t_1)$ , esto ultimo se obtiene por la continuidad de la solución.

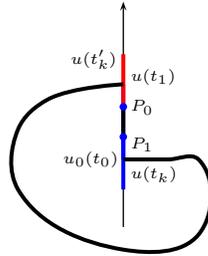


Figura 2.15:

Como  $p_0 \in \Omega(x_0)$ , por (2.6) existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $u_0(t_k) \in S(D)$  si  $t_k > t_1$ .

Por lo tanto, como  $u_0(t_0) <_S u_0(t_1)$ ,  $u_0(t) \notin S(D)$  para todo  $t \in (t_0, t_1)$  y  $u_0(t_k) \in S(D)$  si  $t_k > t_1$ , entonces por el lema 3  $u_0(t_1) <_S u_0(t_k)$ . Esto implica que  $p_0 \notin \Omega(x_0)$ , lo cual es una contradicción. Ver la figura 2.16

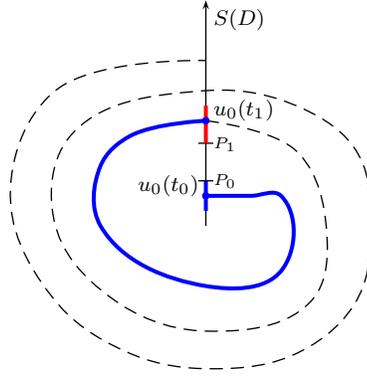


Figura 2.16:

**Caso 2**  $u_0(t_0) \in [p_0, p_1]$  para algún  $t_0 \in \text{dom}(u_0)$ .

Con argumentos análogos a los del caso 1, en este caso también se llega a una contradicción.

Como las contradicciones vienen de suponer que existe más de un punto en la intersección de  $\Omega(x_0)$  con  $S(D)$ , entonces podemos concluir que si existe un punto en  $\Omega(x_0) \cap S(D)$  es único.

†

**Lema 5** Si  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow U$  es una solución periódica no trivial de (2.1) con  $\gamma(\mathbb{R}) \subset \Omega(x_0)$ , entonces  $\gamma(\mathbb{R}) = \Omega(x_0)$ .

**Demostración:** Supongamos por el absurdo que  $\Omega(x_0) \neq \gamma(\mathbb{R})$ .

**Afirmación 4**  $\Omega(x_0) \setminus \gamma(\mathbb{R})$  tiene un punto de acumulación en  $\gamma(\mathbb{R})$ .

En efecto, con el propósito de llegar a una contradicción, supondremos que  $\Omega(x_0) \setminus \gamma(\mathbb{R})$  no tiene puntos de acumulación en  $\gamma(\mathbb{R})$ . Así, para todo  $y \in \gamma(\mathbb{R})$  existe  $\varepsilon_y > 0$  tal que  $B(y, \varepsilon_y) \cap (\Omega(x_0) \setminus \gamma(\mathbb{R})) = \emptyset$ .

Como,  $\gamma(\mathbb{R}) \subset \bigcup_{y \in \gamma(\mathbb{R})} B(y, \varepsilon_y) = V$ , entonces  $V \cap (\Omega(x_0) \setminus \gamma(\mathbb{R})) = \emptyset$

Sea  $W = \bigcup_{y \in \gamma(\mathbb{R})} B(y/2, \varepsilon_{y/2})$ , claramente  $W \subset V$ , como  $\overline{W}$  es cerrado y  $V$  es abierto, entonces  $\overline{W} \subsetneq V$ , así  $\overline{W} \cap (\Omega(x_0) \setminus \gamma(\mathbb{R})) = \emptyset$ , y en consecuencia  $\Omega(x_0) \setminus \gamma(\mathbb{R}) \subset \overline{W}^C$ .

Como  $\gamma(\mathbb{R}) \subset W$  y  $\Omega(x_0) \setminus \gamma(\mathbb{R}) \subset \overline{W}^C$ , entonces  $\Omega(x_0) \subset W \cup \overline{W}^C$  y esto es una contradicción, pues  $\Omega(x_0)$  es conexo y no puede estar contenido en dos abiertos disjuntos. Con esta contradicción termina la prueba de la afirmación.

†

Sea  $y_0 \in \gamma(\mathbb{R})$  el punto de acumulación de  $\Omega(x_0) \setminus \gamma(\mathbb{R})$  dado por la afirmación 4. Entonces, como  $\gamma(\mathbb{R}) \subset \Omega(x_0)$  y  $\Omega(x_0)$  no contiene puntos de equilibrio, se tiene que  $f(y_0) \neq 0$ . Así, por la proposición 1 dada en el capítulo 1, existe una sección transversal  $S : D \rightarrow U$  a  $f$  en  $y_0$  la cual es afín.

Sea  $h : (-\eta, \eta) \times B(K, \eta) \rightarrow Im(h)$  el homeomorfismo dado por el Teorema del Flujo Tubular y fijemos  $z_0 \in \Omega(x_0) \setminus \gamma(\mathbb{R})$  tal que  $z_0 \in Im(h)$ . Por la proposición 3, existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $u(t_0, z_0) \in S(D)$  y como  $\Omega(x_0)$  es invariante respecto al sistema (2.1), también tenemos que  $u(t_0, z_0) \in \Omega(x_0)$ . De aquí y el lema 4,  $y_0 = u(t_0, z_0)$  y en consecuencia,  $z_0 = u(-t_0, y_0) \in \gamma(\mathbb{R})$ . Esta contradicción termina la prueba.

†

### **Demostración: (Del Teorema de Poincaré- Bendixson en el Plano)**

Fijemos  $p_0 \in \Omega(x_0)$ . Como  $\Omega(x_0)$  es invariante respecto al sistema (2.1), entonces  $u(t, p_0) \in \Omega(x_0) \forall t \in \mathbb{R}$ . Luego  $\Omega(p_0) \subset \Omega(x_0)$ .

Ahora fijemos  $y_0 \in \Omega(p_0)$ , entonces existe una sección transversal afín  $S : D \rightarrow U$  en  $y_0$ . Como  $y_0 \in \Omega(x_0) \cap S(D)$ , existe una sucesión  $t_n \rightarrow +\infty$  tal que  $u(t_n, p_0) \rightarrow y_0$  y  $u(t_n, p_0) \in S(D) \forall n \in \mathbb{N}$ . Como  $u(t_n, p_0) \in \Omega(x_0) \cap S(D)$ , entonces por el lema 4  $u(t_n, p_0) = y_0 \forall n \in \mathbb{N}$  y en consecuencia  $\gamma(t) := u(t, p_0)$  es periódica. Además,  $\gamma$  es no trivial por que  $\Omega(x_0)$  no contiene puntos de equilibrio. Así por el lema 5 se tiene que  $\Omega(x_0) = \gamma(\mathbb{R})$ .

†

**Teorema 10** *Si  $K$  es un conjunto positivamente invariante respecto al sistema (2.1) y homeomorfo a la bola cerrada de  $\mathbb{R}^2$ , entonces el sistema (2.1) tiene un punto crítico en  $K$ .*

# Capítulo 3

## Ecuación Reducida de la Ecuación de Van der Pol

En este capítulo consideraremos el siguiente sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} x' = -x + A \cos(\varphi) \\ \varphi' = (x^2 - 1)\omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde los parámetros  $A > 0$  y  $\omega > 0$  y las variables  $(x, \varphi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ , este sistema es llamado flujo reducido de la ecuación de Van der Pol.

Nuestro objetivo principal en este capítulo es demostrar que el sistema (3.1) tiene una solución periódica no trivial en el cilindro  $D = (-1, 1) \times \mathbb{S}^1$ , para demostrar esto adaptaremos el teorema de Poincaré - Bendixson a nuestro caso; es decir, daremos una versión del teorema de Poincaré - Bendixson para una superficie cilíndrica. También estudiaremos la estabilidad de dicha solución.

Comencemos a estudiar el comportamiento de las soluciones del sistema (3.1). Consideremos el campo vectorial del sistema (3.1) :

$$G(x, \varphi) = (-x + A \cos(\varphi), (x^2 - 1)\omega)$$

Como  $G \in C^\infty$ , entonces  $G$  es localmente Lipschitz, así por el Teorema de existencia y unicidad local (Teorema 1), existe  $\delta > 0$  tal que el P.V.I

$$\begin{cases} x' = -x + A \cos(\varphi) \\ \varphi' = (x^2 - 1)\omega \\ x(0) = x_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0; \end{cases} \quad (3.2)$$

posee una única solución  $u(t)$  definida en el intervalo  $I = (-\delta, \delta)$ .

La prolongabilidad de las soluciones se obtienen fácilmente aplicando la formula de variación de parámetros a la variable  $x$ , pues aplicando dicha formula obtenemos que

$$x(t) = e^{-t}x_0 + \int_0^t e^{-(t-s)} A \cos(\varphi(s)) ds. \quad (3.3)$$

De (3.3) es fácil ver que  $x(t)$  está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ , y en consecuencia  $\varphi(t)$  también esta definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ ; pues,  $\varphi(t)$  depende de  $x(t)$ .

Por lo tanto, podemos asumir que las soluciones de (3.1) están definidas sobre todo  $\mathbb{R}$ .

**Proposición 4** *Si  $A < 1$  el sistema (3.1) no posee puntos críticos.*

**Demostración:** Para demostrar esto, procedamos a hallar los puntos críticos del sistema (3.1); es decir, veamos donde el campo vectorial se anula, para ello basta resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-x + A \cos(\varphi) = 0 \quad (3.4)$$

$$(x^2 - 1)\omega = 0 \quad (3.5)$$

Como  $A > 0$ , de la ecuación (3.4) se obtiene que;

$$\cos(\varphi) = \frac{x}{A} \quad (3.6)$$

Como  $\omega \neq 0$ , de la ecuación (3.5) se tiene que necesariamente

$$x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$$

Luego;

✓ si  $x = 1$ , sustituyendo en (3.6), nos queda que  $\cos(\varphi) = \frac{1}{A}$ ,

como  $|\cos(\varphi)| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|A|} \leq 1 \Rightarrow |A| \geq 1$ .

✓ si  $x = -1$ , sustituyendo en (3.6), nos queda que  $\cos(\varphi) = \frac{-1}{A}$ ,

como  $|\cos(\varphi)| < 1 \Rightarrow \left|\frac{-1}{A}\right| \leq 1 \Rightarrow |A| \geq 1$ .

En consecuencia los puntos críticos del sistema (3.1) son:

\*  $P_1 = (1, \arccos(\frac{1}{A}))$ , con  $A \geq 1$ .

\*  $P_2 = (-1, \arccos(\frac{-1}{A}))$ , con  $A \geq 1$ .

Por lo tanto, si  $A < 1$  el sistema (3.1) no posee puntos críticos. Este es el caso en que estamos interesados en estudiar.

†

**Definición 9** *Un conjunto  $D$  es positivamente invariante respecto a un sistema autónomo*

$$x' = f(x)$$

si para todo  $x_0 \in D$  la solución  $u(t, x_0) : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  correspondiente al problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

satisface que  $u(t, x_0) \in D$ , para todo  $t \in [0, \beta)$

**Proposición 5** Si  $A < 1$ , entonces  $D = (-1, 1) \times \mathbb{S}^1$  es positivamente invariante respecto al sistema (3.1).

Para demostrar esto necesitaremos los siguientes resultados:

**Lema 6** Sea  $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ , si  $x(t) < a \quad \forall t \in (t_0, t^*] \subset (\alpha, \beta)$  y  $x(t^*) = a$ , entonces  $x'(t^*) \geq 0$ .

**Demostración:** (Por reducción al absurdo).

Supongamos que  $x'(t^*) < 0$ , entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que  $x(t)$  es decreciente en el intervalo  $(t^* - \epsilon, t^*] \subset [t_0, t^*]$ , por lo tanto, existe  $t_1 \in (t^* - \epsilon, t^*)$  tal que  $x(t^*) < x(t_1)$ . Luego, como por hipótesis  $x(t_1) < a$  entonces  $x(t^*) < a$  lo cual contradice la hipótesis de que  $x(t^*) = a$ .

Como la contradicción viene de suponer que  $x'(t^*) < 0$ , podemos concluir que  $x'(t^*) \geq 0$ .

†

**Lema 7** Sea  $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ , si  $x(t) > b \quad \forall t \in (t_0, t^*] \subset (\alpha, \beta)$  y  $x(t^*) = b$ , entonces  $x'(t^*) \leq 0$ .

**Demostración:** (Por reducción al absurdo).

Supongamos que  $x'(t^*) > 0$ , entonces existe  $\epsilon_1 > 0$  tal que  $x(t)$  es creciente en el intervalo  $(t^* - \epsilon_1, t^*] \subset [t_0, t^*]$ , así, existe  $t_2 \in (t^* - \epsilon_1, t^*)$  tal que  $x(t_2) < x(t^*)$ . Luego, como por hipótesis  $x(t_2) > b$  entonces  $x(t^*) > b$  lo cual contradice la hipótesis de que  $x(t^*) = b$ .

Como la contradicción viene de suponer que  $x'(t^*) > 0$ , podemos concluir que  $x'(t^*) \leq 0$ .

†

### Demostración de la proposición 5:

Sea  $y_0 = (x_0, \varphi_0) \in D$  y  $u(t, y_0)$  una solución del sistema (3.1) con condición inicial  $y_0$ . Queremos ver que  $u(t, y_0) \in D$ , para todo  $t > 0$ . Denotaremos la solución  $u(t, y_0) = (x(t), \varphi(t))$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Decir que  $u(t, y_0) \in D$ , para todo  $t \geq 0$ , es equivalente a decir que  $|x(t)| < 1$ , para todo  $t > 0$ . Así, mostraremos que  $|x(t)| < 1$ , para todo  $t > 0$ .

#### (Por reducción al absurdo)

Supongamos que existe  $t^* > 0$  (primer instante de tiempo donde  $x(t)$  alcanza la frontera de  $D$ ) tal que  $x(t^*) = 1$  y además que  $x(t) < 1$  para todo  $t \in [0, t^*)$ .

Como  $x(t)$  satisface las hipótesis del lema 6, entonces

$$x'(t^*) \geq 0 \tag{3.7}$$

Por otro lado del sistema (3.1) se tiene que

$$\begin{aligned} x'(t^*) &= -x(t^*) + A \cos(\varphi(t^*)) \\ &= -1 + A \cos(\varphi(t^*)) \end{aligned}$$

Como  $|A| < 1$  y  $|\cos(\varphi(t^*))| < 1$ , entonces  $x'(t^*) < 0$  y esto contradice (3.7).

Como la contradicción viene de suponer que existe  $t^* > 0$  tal que  $x(t^*) = 1$ , entonces podemos concluir que  $x(t) < 1$  para todo  $t > 0$ .

Ahora supongamos que existe  $t^* > 0$  (primer instante de tiempo donde  $x(t)$  alcanza la frontera de  $D$ ) tal que  $x(t^*) = -1$  y además que  $x(t) > -1$ , para todo  $t \in [0, t^*)$ .

Como  $x(t)$  satisface las hipótesis del lema 7, entonces

$$x'(t^*) \leq 0 \quad (3.8)$$

Por otro lado, del sistema (3.1) se tiene que

$$\begin{aligned} x'(t^*) &= -x(t^*) + A \cos(\varphi(t^*)) \\ &= 1 + A \cos(\varphi(t^*)) \end{aligned}$$

Como  $|A| < 1$  y  $|\cos(\varphi(t^*))| < 1$ , entonces  $x'(t^*) > 0$  y esto contradice (3.8).

Como la contradicción viene de suponer que existe  $t^* > 0$  tal que  $x(t^*) = -1$ , entonces podemos concluir que  $x(t) > -1$ , para todo  $t > 0$

Por lo tanto, hemos probado que  $|x(t)| < 1$  para todo  $t > 0$ , es decir,  $u(t, y_0) \in D$  para todo  $t > 0$ , lo que implica que  $D$  es positivamente invariante respecto al sistema (3.1).

†

Notemos que las soluciones a lo largo de la variable espacial  $\varphi$  decrecen para todo  $t \geq 0$ ; pues, del sistema (3.1) se tiene que

$$\varphi'(t) = (x^2 - 1)\omega$$

Como  $\omega > 0$  y  $|x| < 1$ , entonces  $\varphi'(t) < 0$  para todo  $t \geq 0$ , lo cual implica que  $\varphi$  es decreciente.

A continuación presentaremos y demostraremos el resultado principal de este trabajo; es decir, la existencia de una una solución periódica de la Ecuación Reducida de Van der Pol (3.1). Este resultado es prácticamente una extensión del Teorema de Poincaré-Bendixsón en el cilindro  $D = (-1, 1) \times \mathbb{S}^1$ , y su prueba es análoga a la del Teorema de Poincaré-Bendixsón en el plano.

### **Teorema 11 (Teorema Principal)**

Sea  $z_0 = (x_0, \varphi_0) \in D$ .  $\Omega(z_0)$  es una órbita periódica.

Para demostrar este Teorema necesitamos algunas definiciones y resultados previos.

En lo que sigue supondremos que la solución  $u_0(t) := u(t, x_0, \varphi_0)$  no es periódica y que  $S : I \rightarrow D$  denota una sección transversal a  $G$ , donde  $I$  es un subconjunto abierto y conexo de  $\mathbb{R}$ . Además, dados  $p_0 = S(q_0)$  y  $p_1 = S(q_1)$  pondremos  $p_0 <_S p_1$  si  $q_0 < q_1$ .

**Lema 8** Sean  $0 \leq t_0 < t_1$  tales que  $u_0(t_i) \in S(I)$ ,  $i = 1, 2$ . Si  $u_0(t_0) <_S u_0(t_1)$ ,  $u_0(t) \notin S(I)$  para todo  $t \in (t_0, t_1)$  y existe  $t > t_1$  tal que  $u_0(t) \in S(I)$ , entonces  $u_0(t_1) < u_0(t)$

**Demostración:** Sea  $C$  una curva en el cilindro  $D$ , formada por el arco  $u_0([t_0, t_1])$  y el segmento  $\ell$ , de la sección transversal  $S(I)$ , que une a  $u_0(t_0)$  con  $u_0(t_1)$ . Como  $u_0(t)$  no es periódica, entonces  $C$  es una curva cerrada e inyectiva, la cual puede representarse geoméricamente de dos maneras, como se muestra en la figura 3.1

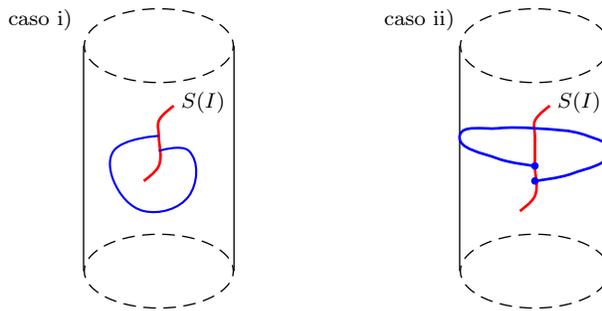


Figura 3.1:

Analícemos los casos:

**Caso i)** :  $C$  es una curva cerrada cuya proyección en  $\mathbb{S}^1$  no es una circunferencia.

Veamos que este caso no puede darse en el cilindro  $D$ .

Sea  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \in \mathbb{S}^1$  y definamos  $\theta(t) := \arctan(\frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)})$ . Entonces, como  $\varphi$  es decreciente, podemos suponer que  $\theta$  es una función creciente o decreciente. Por lo tanto, asumiremos sin pérdida de generalidad que  $\theta(t)$  es creciente; es decir, supondremos que  $\varphi$  se mueve en  $\mathbb{S}^1$  en sentido contrario a las agujas del reloj, como se muestra en la figura 3.2:

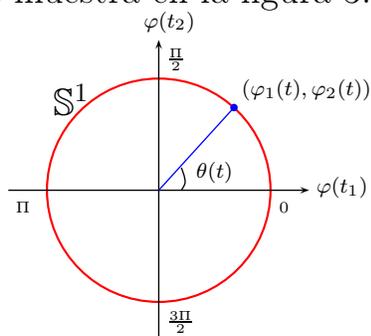


Figura 3.2:

Como  $C$  es una curva cerrada cuya proyección en  $\mathbb{S}^1$  no es una circunferencia, entonces existen  $t_1 \neq t_2$  tal que  $\theta(t_1) = \theta(t_2)$ , lo cual contradice el hecho que  $\theta(t)$  es creciente. Por lo tanto, este caso no puede darse en el cilindro.

Así, solo el caso *ii)* tiene lugar.

**Caso ii) :**  $C$  es una curva cerrada cuya proyección en  $\mathbb{S}^1$  es una circunferencia.

Para este caso daremos primero una versión del Teorema 8 (Teorema de Separación de Jordan) adaptado al cilindro, en particular adaptado a  $D$ , y segundo veremos que las afirmaciones usadas para demostrar el Teorema de Poincaré - Bendixson en el plano se siguen cumpliendo en el cilindro  $D$ .

**Lema 9** *La curva cerrada  $C$  que rodea al cilindro  $D$ , lo divide en dos abiertos  $V^*$  y  $W^*$  conexos y disjuntos tal que  $D = V^* \cup W^* \cup C$ , como se muestra en la figura 3.3:*

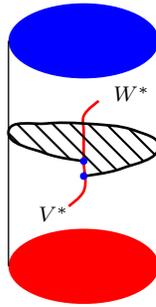


Figura 3.3:

La siguiente afirmación se demuestra de manera análoga al corolario 2 del Capítulo 1 ya que  $D = V^* \cup W^* \cup C$ .

**Afirmación 5** *Sean  $V^*$  y  $W^*$  los abiertos separados por la curva  $C$  en  $D$ . Si existe una curva continua  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  contenida en  $D$  tal que  $\alpha(a) \in V^*$  y  $\alpha(b) \in W^*$ , entonces existe  $\xi \in (a, b)$  tal que  $\alpha(\xi) \in C$ .*

Como se muestra en la figura 3.4:

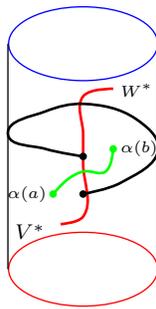


Figura 3.4:

Por otra parte, como el Teorema del Flujo Tubular vale para un campo diferenciable sobre una superficie (ver [5]), entonces podemos aplicarlo en el cilindro  $D$ . Ahora, si escribimos  $u_0(t_i) = S(q_i)$  y  $K = [q_0, q_1]$ , entonces  $S$  restringida a  $K$  es inyectiva; así, por el Teorema del Flujo Tubular existe  $\eta > 0$  tal que la aplicación

$$h : (-\eta, \eta) \times [q_0 - \eta, q_1 + \eta] \rightarrow D$$

$$h(t, q) = u(t, S(q)),$$

está bien definida y es un homeomorfismo sobre el abierto  $Im(h)$  de  $\mathbb{R}^n$ , como se muestra en la figura 3.5.

Las siguientes afirmaciones se demuestran de manera análoga a las Afirmaciones 1, 2 y 3 del Capítulo 2 debido a que en el cilindro  $D$  vale la afirmación 5 y el Teorema del Flujo Tubular.

**Afirmación 6** Si  $h(\bar{t}, q) \in u_0([t_0, t_1])$ , entonces  $q = q_0$  y  $\bar{t} \geq 0$  ó  $q = q_1$  y  $\bar{t} \leq 0$

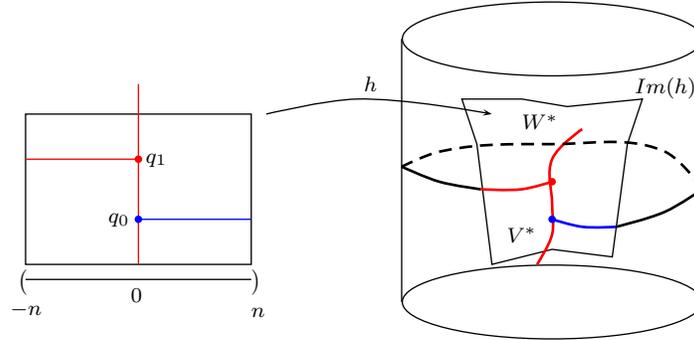


Figura 3.5:

**Afirmación 7**  $u_0(t) \notin \ell$  si  $t > t_1$

En efecto, supongamos por el absurdo que existe  $\tau > t_1$  ( $\tau$  es el primer instante de tiempo donde la solución corta al segmento  $\ell$ ) tal que  $u(\tau) \in \ell$ , así  $u_0(t) \notin \ell \quad \forall t \in (t_1, \tau)$ . Como se muestra en la figura 3.6

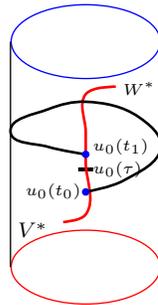


Figura 3.6:

Escribamos  $u_0(\tau) = S(\bar{q})$  con  $\bar{q} \in [q_0, q_1]$ . Ya que  $u_0$  no es periódica,  $\bar{q} \neq q_0, q_1$ . Fijemos  $\bar{t} \in (0, \eta)$  tal que  $\tau - t_1 > 2\bar{t}$ , así

$$\begin{aligned} \tau - t_1 > \bar{t} + \bar{t} &\Rightarrow t_1 + \bar{t} < \tau - \bar{t} \\ &\Rightarrow [t_1 + \bar{t}, \tau - \bar{t}] \subset [t_1, \tau] \end{aligned}$$

Ver figura 3.7

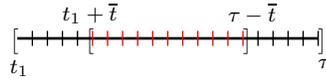


Figura 3.7:

Del homeomorfismo dado por el Teorema del Flujo Tubular, tenemos que  $u_0(t_1 + \bar{t}) = h(\bar{t}, q_1)$  y  $u_0(\tau - \bar{t}) = h(-\bar{t}, \bar{q})$ . Así, de la afirmación 6 se tiene que  $h(\bar{t}, q_1) \in W^*$  y  $h(-\bar{t}, \bar{q}) \in V^*$ , ver figura 3.8

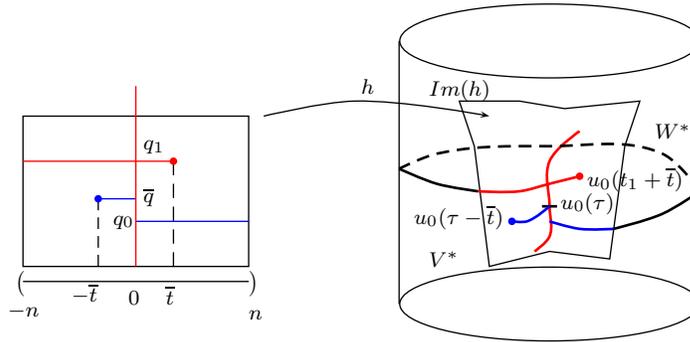


Figura 3.8:

Como la restricción  $u_0 : [t_1 + \bar{t}, \tau - \bar{t}] \rightarrow D$ , es una curva continua que une a  $u_0(t_1 + \bar{t}) \in W^*$  con  $u_0(\tau - \bar{t}) \in V^*$ , entonces por la afirmación 5, existe  $t' \in (t_1 + \bar{t}, \tau - \bar{t})$ , tal que  $u_0(t') \in C$ .

Como  $u_0(t') \in C$ , entonces  $u_0(t')$  corta a  $u_0([t_0, t_1])$  ó  $u_0(t')$  corta a  $\ell$ , pues  $C = u_0([t_0, t_1]) \cup \ell$ .

Como  $u_0(t)$  no es periódica,  $u_0(t') \notin u_0([t_0, t_1])$ , así  $u_0(t') \in \ell$ , y esto

contradice el hecho de que  $\tau$  es el primer instante de tiempo en que la solución  $u_0$  corta al segmento  $\ell$ .

Como la contradicción viene de suponer que  $u_0(\tau) \in \ell$  para un cierto  $\tau > t_1$ , entonces podemos concluir  $u_0(t) \notin \ell$  si  $t > t_1$ .

†

**Afirmación 8** *Sea  $\ell_0 = \{p \in S(I) : p <_S u_0(t_0)\}$ . Si  $t > t_1$ , entonces  $u_0(t) \notin \ell_0$ .*

De estas afirmaciones se concluye la prueba de este lema al igual que en el Teorema 9 (Teorema de Poincaré- Bendixson).

†

Para la demostración del Teorema Principal, es importante observar que las propiedades del conjunto  $\Omega$ - límite se siguen cumpliendo; es decir, que el conjunto  $\Omega$ - límite de un punto  $z_0$  es compacto, conexo e invariante respecto al sistema (3.1). Esto se debe a que el cilindro  $D$  es una región acotada y conexa, y en consecuencia, la solución  $u(t, z_0)$  que pasa por el punto  $z_0$  está acotada sobre  $[0, \infty)$ .

Ahora, como los argumentos usados para demostrar los lemas 4 y 5 del capítulo anterior siguen siendo validos en el cilindro  $D$  y bajo las hipótesis del Teorema 11, entonces tenemos que los siguientes lemas se cumplen:

**Lema 10**  $\Omega(z_0) \cap S(I)$  contiene a lo sumo un punto.

**Lema 11** Si  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow D$  es una solución periódica no trivial de (3.1) con  $\gamma(\mathbb{R}) \subset \Omega(z_0)$ , entonces  $\gamma(\mathbb{R}) = \Omega(z_0)$ .

Así la demostración de este Teorema se sigue idénticamente igual que la del Teorema de Poincaré- Bendixson en el plano.

**Demostración: (Del Resultado Principal)**

Fijemos  $p_0 \in \Omega(z_0)$ . Como  $\Omega(z_0)$  es invariante respecto al sistema (3.1), entonces  $u(t, p_0) \in \Omega(z_0) \forall t \in \mathbb{R}$ . Luego  $\Omega(p_0) \subset \Omega(z_0)$ , ya que  $\Omega(z_0)$  es

compacto.

Ahora fijemos  $y_0 \in \Omega(p_0)$ , entonces existe una sección transversal afín  $S : I \rightarrow D$  en  $y_0$ . Como  $y_0 \in \Omega(z_0) \cap S(I)$ , existe una sucesión  $t_n \rightarrow +\infty$  tal que  $u(t_n, p_0) \rightarrow y_0$  y  $u(t_n, p_0) \in S(I) \forall n \in \mathbb{N}$ . Como  $u(t_n, p_0) \in \Omega(z_0) \cap S(I)$ , entonces por el lema 10  $u(t_n, p_0) = y_0 \forall n \in \mathbb{N}$  y en consecuencia  $\gamma(t) := u(t, p_0)$  es periódica. Además,  $\gamma$  es no trivial por que  $\Omega(z_0)$  no contiene puntos de equilibrio. Así por el lema 11 se tiene que  $\Omega(z_0) = \gamma(\mathbb{R})$ .

†

Ahora, gracias al Teorema 11 podemos garantizar que el sistema (3.1) tiene al menos una solución periódica no trivial en el cilindro  $D = (-1, 1) \times \mathbb{S}^1$ , ya que  $D$  es positivamente invariante respecto al sistema (3.1) y además dado cualquier punto  $(x_0, \varphi_0) \in D$  el omega limite de la solución que pasa por ese punto no tiene puntos críticos, pues ya vimos que en  $D$  el sistema (3.1) no contiene puntos críticos.

**Observación:** La órbita periódica encontrada anteriormente no puede estar enteramente contenida en una cara del cilindro, ya que la región del cilindro encerrada por la órbita es homeomorfa a la bola cerrada de  $\mathbb{R}^2$  y positivamente invariante respecto al sistema (3.1), así por el Teorema 10 del capítulo 2 se tiene que en el interior de la órbita hay un punto crítico, por lo tanto esto contradice el hecho de que en  $D$  no hay puntos críticos.

# Bibliografía

- [1] Devaney. *An Introduction to Chaotic dynamical Systems* . Addison Wesley, (1987).
- [2] M. Hirsch and S. Smale. *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*. Academic Press (1974).
- [3] Mark Levi. *Qualitative analysis of the periodically forced relaxation oscillations*. Memoirs of the Amer. Math. Soc. Vol 32 No. 244 (1981).
- [4] M. L. Cartwright and J. E. Littlewood. *On nonlinear differential equation of the second order: I. The equation  $\ddot{y} - k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\lambda k \cos(\lambda t + \alpha)$ ,  $K$  large*. J. London Math. Soc; Vol 20(1945), pp. 180-189.
- [5] Palis J. e De Melo W. *Introdução Aos Sistemas Dinâmicos*. Projeto Euclides(IMPA), (1978).
- [6] P. Szmolyan and M. Wecheselberger. *Relaxation Oscillations in  $\mathbb{R}^3$* . J. Differential Equations. 200 (2004) pp 69-104.
- [7] Marcos Lizana *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Universidad Centro Occidental Lizandro Alvarado. TFORMA (2000).
- [8] Rivero J. y Tieno A. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Universidad de los Andes. (2005).

- [9] Sotomayor, Jorge. Lições de Equações Diferenciais Ordinárias. Projeto Euclides, IMPA, 1979.