Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Grupo de Ecuaciones Diferenciales

Controlabilidad de Sistemas No lineales con Retardo

Br. Angulo H. Naive N

Trabajo Especial de Grado
Para Optar al Título de
Licenciada en Matemáticas
Tutor: Dr. Hugo Leiva

Mérida - Venezuela
2005

Dedicatoria

Agradezco a las personas que me apoyaron y permitieron culminar este proyecto para terminar esta etapa profesional:

Dr. Hugo Leiva (Tutor), Dr. Diomedes Bárcenas, Lic. Zoraida Sívoli, Lic. Janhett Uzcategui (Jurados), gracias a Uds. este trabajo fue posible.

Dr. Jesús Pérez, Dr. Marcos Lizana por la asesoría y orientación durante la carrera y la realización de este proyecto.

Departamento de Matemática, de la Universidad de Los Andes por haberme dado la oportunidad de culminar esta etapa profesional de mi vida.

CDCHT por su importante apoyo económico.

Agradezco especialmente:

A mi familia por creer siempre en mi y darme siempre su apoyo.

A Elizabeth, Yeni, Nelyana , Juan Pablo, Wilmer, Dairuve, Danillys, Begui, Elbis,Lis,Gregorio, Sedly.

A todos mis amigos que me han entregado su amor y apoyo siempre.

A todas las personas que han creído en mi…

Índice general

Introducción

La Teoría de Control para ecuaciones diferenciales No Lineales con retardo es bastante nueva, de hecho existen pocos artículos que hablan sobre el tema; recientemente aparecieron algunos resultados debido a K. Balachandran y sus colaboradores Sakthivel y Manimegalai, los cuales han sido cuestionados por Diómedes Bárcenas, Hugo Leiva y Zoraida Sívoli en su artículo *"A broad class of evolution equation are never exactly"* , el cual apareció en IMA-JMCI (2005) Págs 1-11.

En los trabajos mencionados anteriormente, aunque se estudia el problema infinito dimensional, no se trata el problema no autónomo, así que, en este trabajo estudiaremos el caso de sistemas de dimensión finita semilineales no autónomos con retardo. Específicamente, en este proyecto nos proponemos resolver el siguiente problema.

Estudiaremos la controlabilidad del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales con retardo

$$(1) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + \displaystyle\int_0^t f(s, x_s, u(s))ds, \quad t \in J = [0, T] \\ x_0 &= \varphi \ \text{ sobre } \ C[-r, 0] \end{cases}$$

donde el estado $x(\cdot)$ toma valores en $\mathbb{R}^n$ y la función de control $u(\cdot)$ pertenece a $L^2(J, \mathbb{R}^m)$. $A(\cdot)$ y $B(\cdot)$ son matrices continuas de dimensiones $n \times n$ y $n \times m$ respectivamente y $f : J \times C \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y uniformemente Lipschitziana en C. Aquí $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ es el espacio de Banach de las funciones continuas $\varphi : [-r, 0] \to \mathbb{R}^n$ dotado con la norma

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(\theta)| : -r \leq \theta \leq 0\}.$$

También, para $x \in C([-r,T];\mathbb{R}^n)$ definimos la truncación de x como la función $x_t \in C([-r,0];\mathbb{R}^n)$, dada por

$$x_t(\theta) = x(t+\theta) \quad \forall\, \theta \in [-r,0], \quad t \in [0,T].$$

Este trabajo está organizado fundamentalmente de la siguiente manera;

En el primer capítulo, estudiaremos la controlabilidad del siguiente sistema lineal

$$\dot{x}(t) \;=\; A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{2}$$

donde el estado $x(\cdot)$ está en $\mathbb{R}^n$. $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ son funciones matriciales continuas de dimensiones $n \times n$ y $n \times m$ respectivamente, definidas sobre $J = [0,T]$ y la función control $u(\cdot)$ pertenece a $L^2([0,T];\mathbb{R}^m)$.

Se prueba que la controlabilidad del sistema (2) equivale a la sobreyectividad del operador

$$G : L^2(0,T;\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n,$$

definido por

$$Gu(s) = \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds$$

Esta equivalencia nos permite tratar la controlabilidad del sistema (2) como un problema de teoría de operadores en espacios de Banach. Así usando resultados conocidos sobre caracterización de operadores sobreyectivos, obtenemos los resultados sobre la controlabilidad.

También se prueba que la controlabilidad del sistema (2) es equivalente a que la matriz

$$W = \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)B^*(s)\phi^{-1^*}(s)ds$$

sea definida positiva, lo cual nos permite hallar explícitamente un control u que transfiere el punto x_0 hasta el punto x_1 en tiempo T.

En el capítulo 2. se demuestra que la controlabilidad del sistema lineal (1) se preserva bajo perturbaciones no lineales, no necesariamente pequeñas, esta se lleva cabo usando el Teorema de Arzela-Azcoli y el Teorema del Punto Fijo de Shauder, además se prueba la existencia y unicidad de las soluciones y el control.

En el capítulo 3, consideramos condiciones suficientes para la controlabilidad del sistema (1). La controlabilidad de este sistema se demuestra a través de aproximaciones sucesivas, verificando que el operador $G_f : L^2(J;\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido por:

$$G_f u = \int_0^T \phi^{-1}(s)[B(s)u(s) + \int_0^s f(\tau, x_\tau, u(\tau))d\tau]ds \tag{3}$$

es sobreyectivo.

Preliminares

Caracterización de los Operadores Sobreyectivos.

Teorema 0.1 *Sea* $A : D(A) \subset E \rightarrow F$*, un operador no acotado, cerrado y con* $\overline{D(A)} = E$*. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

i.- A *es sobreyectivo, es decir,* $\mathrm{R(A)} = F$

ii.- Existe una constante $C \geq 0$ *tal que*

$$\|x\| \leq C\|A^*x\| \quad x \in D(A^*)$$

iii.- $\mathrm{Ker(A^*)} = \{0\}$ $\mathrm{R(A^*)}$ *es cerrado.*

Corolario 0.1 *Sean* E *y* F *espacios de Banach reflexivos y* $G \in L(E, F)$*. Entonces tenemos:*

a.- $\mathrm{R(G)} = F$ *si, y sólo si, existe* α *tal que* $\|G^*x^*\| \geq \alpha\|x^*\|$, $x \in E^*$.

b.- $\overline{\mathrm{R(G)}} = F$ *si, y sólo si,* $\mathrm{Ker(G)}^* = \{0\}$

Corolario 0.2 *Si además de las hipótesis anteriores, se tiene que* $dimF < \infty$*, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a.- $\mathrm{R(G)} = F$

b.- Existe α *tal que* $\|G^*x^*\| \geq \alpha\|x^*\|$, $x^* \in E^*$.

c.- $\mathrm{Ker(G^*)} = \{0\}$

Teorema 0.2 (Arzela Azcoli) *Sea C una familia de funciones sobre un espacio X de Haussford a un espacio Y uniforme de Haussford. C esta en la topologia de la convergencia uniforme sobre compactos.*

Entonces una subfamilia F de C es compacta si y sólo si:

1. *F es cerrada en C.*
2. *$F[X]$ tiene clausura compacta para cada $x \in X$ y*
3. *la familia F es equicontinua.*

Teorema 0.3 (Punto Fijo de Banach) *Sea X un espacio de Banach y sea $T : X \to X$ una Contracción (Es decir, para algún $k \in [0, 1)$ $\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\|$). Entonces T posee un único punto fijo x_*. Es más, la sucesión $\{T^n(x)\}$ converge a x_* para cualquier $x \in X$.*

Teorema 0.4 (Shauder) *Sea X un subconjunto no vacio, cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach E. Entonces, toda aplicación continua y compacta $T : X \to E$ tiene un punto fijo.*

Capítulo 1

Controlabilidad de Sistemas Lineales sin Retardo

1.1. Sistemas Lineales No Autónomos.

Consideremos el siguiente sistema de control lineal No Autónomo,

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{1.1}$$

donde el estado $x(\cdot)$ está en $\mathbb{R}^n$. $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ son funciones matriciales continuas de dimensiones $n \times n$ y $n \times m$ respectivamente, definidas sobre $J = [0, T]$ y la función control $u(\cdot)$ pertenece a $L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$.

Proposición 1.1 *Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y un control $u(\cdot)$ en $L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$ el sistema (1.1) tiene una única solución $x(T) = x_u(T)$, la cual está dada por:*

$$x_u(T) = \phi(T)x_0 + \phi(T) \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds,$$

donde $\phi(\cdot)$ es la matriz fundamental del siguiente sistema.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

es decir, ϕ satisface:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= A(t)\phi(t) \\ \phi(0) &= I \end{aligned}$$

Definición 1.1 ***(Controlabilidad sobre*** $[0,T]$***)***

El sistema (1.1) es **Controlable sobre** $[0,T]$. *Si dado dos puntos* $x_0,\ x_1 \in \mathbb{R}^n$, *existe un control* $u \in L^2(J,\mathbb{R}^m)$ *tal que la solución correspondiente* $x_u(\cdot)$ *de (1.1) satisface la condición de frontera:* $x_u(0) = x_0,\ x_u(T) = x_1$.

Consideremos el siguiente operador

$$G : L^2(0,T;\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n,$$

definido por

$$Gu(s) = \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds$$

Proposición 1.2 *El sistema (1.1) es controlable sobre [0,T] si y solo si el operador G es sobreyectivo, es decir* $\mathrm{R(G)} = \mathbb{R}^n$

Teorema 1.1 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i.- *El sistema (1.1) es controlable sobre* $[0,T]$.

ii.- $\mathrm{R(G)} = \mathbb{R}^n$.

iii.- *Existe* $\gamma > 0$ *tal que:*

$$\gamma \|B^*(\cdot)\phi^{-1^*}(\cdot)x\|_{L^2} \geq \|x\|_{\mathbb{R}^n} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

iv.- *Si* $B^*(t)\phi^{*-1}(t)x = 0$ *con* $0 \leq t \leq T$, *entonces* $x = 0$

v.- *La siguiente matriz es definida positiva*

$$W = \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)B^*(s)\phi^{-1^*}(s)ds$$

es decir, existe $\alpha > 0$ *tal que*

$$\langle Wx, x\rangle \geq \alpha \parallel x \parallel^2 .$$

Más aún, dado $x_1, x_0 \in \mathbb{R}^n$ *el control*

$$u(t) = B^*(t)\phi^{-1^*}(t)W^{-1}(\phi^{-1}(T)x_1 - x_0),$$

transfiere el punto x_0 *hasta el punto* x_1.

Demostración. ($i \longrightarrow ii$) Supongamos que el sistema (1.1) es controlable sobre $[0, T]$. Probemos la sobreyectividad del operador G.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, consideremos $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ tal que $x = \phi^{-1}(T)x_1 - x_0$, es decir,

$$x_1 = \phi(T)(x + x_0).$$

De la controlabilidad del sistema (1.1) existe $u \in L^2[0, T; \mathbb{R}^m]$ tal que se satisfacen las condiciones de frontera

$$x_u(0) = x_0 \qquad y \qquad x_u(T) = x_1$$

donde

$\phi(T)(x + x_0) = x_1 = x_u(T)$.

Entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
\phi(T)(x + x_0) &= \phi(T)x_0 + \phi(T)\int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds \\
x + x_0 &= x_0 + \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds \\
x &= \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds \ = \ Gu
\end{aligned}$$

($ii \Longrightarrow i$) Supongamos que G es sobreyectivo.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, existen x_1, x_0 tal que:

$$x = \phi^{-1}(T)x_1 - x_0.$$

Ahora como G es sobreyectivo existe $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que

$$Gu = x = \phi^{-1}(T)x_1 - x_0.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(T)x_1 - x_0 &= Gu \\
\phi^{-1}(T)x_1 - x_0 &= \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds \\
\phi^{-1}(T)x_1 &= x_0 + \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds \\
x_1 &= \phi(T)\left[x_0 + \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds\right] \; = \; x_u(T)
\end{aligned}$$

De esta manera hemos conseguido una solución $x_u(\cdot)$ del sistema (1.1), tal que

$$x_u(T) = x_1,\; x_u(0) = x_0,$$

por lo tanto, el sistema es controlable.

Para probar las siguientes implicaciones usaremos el teorema 0.1 que caracteriza los operadores sobreyectivos. Para ello es necesario hallar G^* explícitamente.

En efecto, G^* viene dado por:

$$G^* : \mathbb{R}^{n*} \to L^{2*}(0,T;\mathbb{R}^m),$$

donde se tiene $\mathbb{R}^{n*} = \mathbb{R}^n$ y $L^{2*}(0,T;\mathbb{R}^m) = L^2(0,T,\mathbb{R}^m)$.

Por definición de adjunto se cumple que:

$$\langle u, G^*x\rangle_{L_2,L_2} = \langle Gu, x\rangle_{\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n}\,, \quad x \in \mathbb{R}^n,\; u \in L^2(0,T,\mathbb{R}^m)$$

De aquì resulta que

$$\langle Gu, x\rangle_{\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n} \;=\; \left\langle \int_0^T \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds, x\right\rangle_{\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n}$$

$$= \int_0^T \Big\langle u(s), B^*(s)\Phi^{-1^*}(s)x \Big\rangle_{\mathrm{R}^n,\mathrm{R}^n} ds$$

$$= \Big\langle u(\cdot), B^*(\cdot)\Phi^{-1^*}(\cdot)x \Big\rangle_{\mathrm{L}^2,\mathrm{L}^2}$$

Por lo tanto, $G^*x = B^*(\cdot)\Phi^{-1^*}(\cdot)x, \ x \in \mathbb{R}^n$.

De aquí, aplicando el corolario 0.2, obtenemos la equivalencia entre iii) y iv).

$(iii \longrightarrow v)$Supongamos que el sistema (1.1) es controlable sobre [0,T].Del corolario 0.2 existe un $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha\|B^*(\cdot)\Phi^{-1^*}(\cdot)x\| = \alpha\|G^*x\| \geq \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

de esta igualdad, elevando al cuadrado a ambos lados, se tiene

$$\alpha^2\|B^*(\cdot)\Phi^{-1^*}(\cdot)x\|^2_{\mathrm{L}^2} \geq \|x\|^2_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Por la definición de norma en L^2, obtenemos

$$\alpha^2 \int_0^T \|B^*(\cdot)\Phi^{-1^*}(\cdot)x\|^2_{\mathbb{R}^n} \geq \|x\|^2_{\mathbb{R}^n} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

lo cual es equivalente a

$$\int_0^T \Big\langle B^*(\cdot)\Phi^{-1^*}(\cdot)x, B^*(\cdot)\Phi^{-1^*}(\cdot)x \Big\rangle ds \ \geq \ \frac{1}{\alpha^2} < x, x >, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Por propiedades del producto interno y definición de adjunto se tiene:

$$\Big\langle \int_0^T \Phi^{-1}(\cdot)B(\cdot)B^*(\cdot)\Phi^{-1^*}(\cdot)xds, x \Big\rangle \ \geq \ \frac{1}{\alpha^2} < x, x >, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

que es equivalente

$$\langle x, Wx\rangle \ \geq \ \frac{1}{\alpha^2}\|x\|^2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Obteniéndose que W es definida positiva.

$(v \to ii)$ Sea W definida positiva, entonces existe W^{-1}.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$ definamos el siguiente control

$$u(s) = B^*(s)\phi^{-1^*}(s)W^{-1}x$$

Luego,

$$\begin{aligned} Gu &= \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds = \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)B^*(s)\phi^{-1^*}(s)W^{-1}xds \\ &= WW^{-1}x \\ &= x \end{aligned}$$

Así $Gu = x$. Por lo tanto R(G) $= \mathbb{R}^n$

Observación: Si $W(T)$ es definida positiva, entonces existe $W^{-1}(T)$.

Por lo tanto, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ definamos el control

$$u(t) = B^*(t)\Phi^{-1*}(t)W^{-1}(T)x.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} Gu &= \int_0^T \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds \\ &= \int_0^T \Phi^{-1}(s)B(s)B^*(s)\Phi^{-1*}(s)W^{-1}xds \\ &= W(T)W^{-1}(T)x = x. \end{aligned}$$

Luego, para todo $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, definamos el control

$$u(t) = B^*(t)\Phi^{-1*}(t)W^{-1}[\Phi^{-1}(T)x_1 - x_0].$$

De esta manera hemos exhibido un control para el sistema (1.1) el cual, transfiere el punto x_0 hasta x_1.

✠

1.2. Sistemas de Control Autónomos

Consideremos el sistema Lineal Autónomo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0. \tag{1.2}$$

Observación 1.1 *Para referirnos al sistema (1.2) usaremos la terna* (A, B)*, donde*

$$A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),\ B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

matrices constantes. El operador G *toma la forma*

$$Gu = \int_0^T e^{-As} Bu(s)ds$$

y la solución del sistema con condición inicial $x(0) = x_0$ *está dada por:*

$$x_u(t) = \mathrm{e}^{At}x_0 + \mathrm{e}^{At}\int_0^t \mathrm{e}^{-As}Bu(s)ds,\ t \geq 0$$

1.2.1. Caracterización algebraica de controlabilidad del sistema (A, B)

Ahora presentaremos y demostraremos un Teorema fundamental de la Teoría de Control Lineal Autónomo debido a Kalman, cuya demostración se basa en el teorema de Cayley-Hamilton. Este teorema permite identificar el sistema (1.2) por (A, B)

Teorema 1.2 *(**Condición de Kalman**)El sistema* (A, B) *es controlable sobre* $[0, T]$ *si y sólo si*

$$\mathrm{Rank}[B|AB|\cdots|A^{n-1}B] = n.$$

Demostración.

(Necesidad) Supongamos que el sistema (A, B) es controlable sobre todo $[0, T]$, es decir, $\mathrm{R(G)} = \mathbb{R}^n$.

Por Teorema de Caley-Hamilton sabemos que toda matriz A es una raíz del polinomio característico . Es decir, si

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n\lambda^0$$

es el polinomio característico de A, entonces

$$P(A) = A^n + a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + \ldots + a_nA^0 = 0,$$

lo cual implica que

$$\mathrm{e}^{-As} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(-s)A^i, \qquad \alpha_i(-s) \in \mathbb{R}, \qquad i = 0, 1, 2 \ldots, n-1.$$

Luego, el operador G puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} Gu &= \int_0^T \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(-s)A^i \right) Bu(s)ds \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} A^iB \int_0^T \alpha_i(-s)u(s)ds \end{aligned}$$

Haciendo $y(i) = \displaystyle\int_0^T \alpha_i(-s)u(s)ds$, y teniendo en cuenta que, $u(s) \in \mathbb{R}^m$, y $\alpha_i(-s) \in \mathbb{R}$, obtenemos

$$Gu = \sum_{i=0}^{n-1} A^iBy(i), \qquad y(i) \in \mathbb{R}^m.$$

Ahora, consideremos el siguiente operador:

$$\widetilde{G} : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}^n, \; \mathcal{Y} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$$

definido por:

$$\widetilde{G}y = \sum_{i=0}^{n-1} A^iBy(i), \qquad y = (y(0), y(1), \ldots, y(n-1)).$$

Entonces,

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{R(G)} \subset \mathrm{R}(\widetilde{\mathrm{G}}) \Rightarrow \mathrm{R}(\widetilde{\mathrm{G}}) = \mathbb{R}^n,$$

esto implica que

$$\mathrm{Span}\{B\mathbb{R}^m, AB\mathbb{R}^m, \ldots, A^{m-1}B\mathbb{R}^m\} = \mathbb{R}^n,$$

lo cual es equivalente a

$$\text{Rank}[B|AB|\cdots|A^{n-1}B] = n.$$

(Suficiencia). Supongamos que

$$\text{Rank}[B|AB|\cdots|A^{n-1}B] = n$$

y el sistema (1.2) no es controlable sobre todo $[0, T]$, en consecuencia $\text{Ker}(\text{G}^*) \neq \{0\}$. Entonces existe $\eta \neq 0$ tal que

$$B^*(\Phi^{-1})^*(t)\eta = B^*\text{e}^{-A^*t}\eta = 0, \; t \in [0, T],$$

luego

$$0 = \left\langle \; B^*\text{e}^{-A^*t}\eta, x \; \right\rangle_{\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m} = \left\langle \; \eta, \text{e}^{-At}Bx \; \right\rangle_{\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n}, \quad t \in [0, T]$$

Si $t = 0$, entonces

$$\left\langle \; \eta, \text{e}^{-At}Bx \; \right\rangle_{\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n} = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad (3),$$

Ahora, al tomar la k-ésima derivada en (3) se tiene:

$$\frac{d^k}{dt^k} \left\langle \; \eta, \text{e}^{-At}Bx \; \right\rangle_{\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n} \Big|_{t=0} = \Big\langle \; \eta, -A^k\text{e}^{-At}Bx \; \Big\rangle_{\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n} \Big|_{t=0} = \Big\langle \; \eta, -A^kBx \; \Big\rangle_{\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n}$$

Así,

$$\Big\langle \; \eta, -A^kBx \; \Big\rangle_{\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n} = 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

lo que es equivalente a:

$$\left\langle \; \eta, \text{Span}\{B\mathbb{R}^m, AB\mathbb{R}^m, \ldots, A^{m-1}B\mathbb{R}^m\} \; \right\rangle = 0.$$

Es decir, si llamamos π_η el plano por el origen cuya normal es η, resulta que

$$\text{Span}\{B\mathbb{R}^m, AB\mathbb{R}^m, \ldots, A^{m-1}B\mathbb{R}^m\} \subset \pi_\eta$$

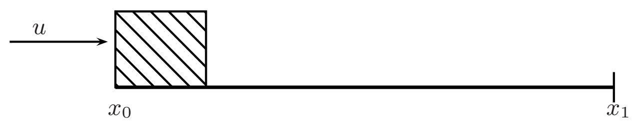
Por lo tanto, $dim\left\{\text{Span}\{B\mathbb{R}^m, AB\mathbb{R}^m, \ldots, A^{m-1}B\mathbb{R}^m\}\right\} < n$, lo cual es una contradicción.

✠

Ejemplo 1.1 *Supongamos que deseamos mover un punto material de masa $m = 1$, el cual se desplaza en linea recta según la ecuación*

$$\ddot{x} = u$$

u- es la fuerza o control regulador del movimiento.



Usando cambio de variable tenemos:

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= u \end{cases}$$

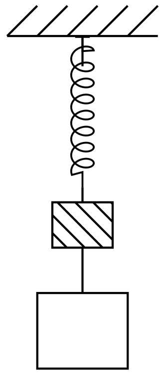
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rank}\,[B : AB] = \text{Rank}\left[\begin{array}{ccc} 0 & \vdots & 1 \quad 0 \\ 1 & & 0 \quad 0 \end{array}\right] = 2$$

Por lo tanto el sistema es controlable.

Ejemplo 1.2 *Consideremos un sistema de masa-resorte con amortiguamiento y con una fuerza externa actuando como control y veamos que el sistema es controlable:*



$x'' + \eta x' + \gamma x = u(t)$
γ−la constante del resorte
$\eta x'$−fuerza de amortiguamiento
$u(t)$−fuerza externa (control)
$m = 1, \gamma > 0, \eta > 0$

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + kx = u(t)$$

k-la constante del resorte

$\eta\dot{x}$- Fuerza de amortiguamiento

$u(t)$-Fuerza externa (Control)

$$m = 1, \quad k \leq 0, \quad \eta \leq 0.$$

$$\begin{cases} \dot{x} & = & y \\ \ddot{y} & = & -\eta\dot{x} - kx + u(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -\eta \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rank}\,[B : AB] = \text{Rank} \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 & 1 \\ 1 & & -k & -\eta \end{bmatrix} = 2$$

Por lo tanto el sistema es controlable.

Capítulo 2

Controlabilidad de Sistemas de Ecuaciones No Lineales sin Retardo

Consideremos el siguiente sistema de control no lineal sin retardo

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + F(t, x(t), u(t)) \qquad t \in J = [0, T] \tag{2.1}$$

donde el estado $x(\cdot)$ está en $\mathbb{R}^n$, $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ son funciones matriciales continuas de dimensiones $n \times n$ y $n \times m$ respectivamente, definidas sobre $J = [0, T]$ y la función control $u(\cdot)$ pertenece a $L^p([0, T]; \mathbb{R}^m)$. El término no lineal $F : J \times \mathbb{R}^{n \times m} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua en J y satisface la siguiente condición de Lipschitz:

$$\|F(t, x_2, u_2) - F(t, x_1, u_1)\| \leq \mathrm{K}\{\|x_2 - x_1\| + \|u_2 - u_1\|\}$$

Proposición 2.1 *Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y un control $u(\cdot)$ en $L^p([0, T]; \mathbb{R}^m)$. El sistema (2.1) tiene una única solución $x(T) = x_u(T)$, la cual satisface la condición $x(0) = x_0$.*

Dicha solución está dada por la siguiente fórmula de variación de parámetro:

$$\begin{aligned} x_u(t) = {} & \phi(t)x_0 + \phi(t)\int_0^t \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds \\ + {} & \phi(t)\int_0^t \phi^{-1}(s)F(s, x(s), u(s))ds, \end{aligned}$$

donde $\phi(\cdot)$ es la matriz fundamental del siguiente sistema.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

es decir, ϕ satisface el problema de valor inicial:

$$\begin{aligned}\dot{Z}(t) &= A(t)Z(t)\\ Z(0) &= I_{\mathbb{R}^n}\end{aligned}$$

Definición 2.1 .***(Controlabilidad sobre*** $[0,T]$***)***

El sistema (2.1) es **Controlable sobre** $[0,T]$*, si para todo* $x_0,\ x_1 \in \mathbb{R}^n$*, existe un control* $u \in L^p(J;\mathbb{R}^m)$ *tal que la solución correspondiente* $x_u(\cdot)$ *del sistema (2.1) satisface la condición de frontera:* $x_u(0) = x_0, \quad x_u(T) = x_1$.

De la fórmula de variación de parámetro se tiene que:

$$\begin{aligned}x_1 = &\ \phi(T)x_0 + \phi(T)\int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds\\ + &\ \phi(T)\int_0^T \phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds.\end{aligned}$$

2.1. Formulación del problema

Supongamos que el siguiente sistema lineal es controlable sobre $[0,T]$;

(2.2) $$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \qquad t \in J = [0,T].$$

El problema de controlabilidad del sistema no lineal (2.1) consiste en lo siguiente:

Dado $x_0,\ x_1 \in \mathbb{R}^n$, debemos hallar un control $u(\cdot) \in L^p(J;\mathbb{R}^m)$ tal que:

$$\begin{aligned}x_1 &= \phi(T)x_0 + \phi(T)\int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds\\ &+ \phi(T)\int_0^T \phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds.\end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$
\begin{aligned}
x_1 - \phi(T)x_0 &= \phi(T)\int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds \\
&+ \phi(T)\int_0^T \phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds
\end{aligned}
$$

$$\phi^{-1}(T)x_1 - x_0 = \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds + \int_0^T \phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds$$

Definimos el punto $\overline{x}$ como sigue,

$$\overline{x} = Gu + \int_0^T \phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds$$

Consideremos el siguiente operador

$$G_F : L^p(J;\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n,$$

definido por

$$G_F u(s) = \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds + \int_0^T \phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds$$

$$G_F u = Gu + \int_0^T \phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds \tag{2.3}$$

Proposición 2.2 *El sistema (2.1) es controlable en J si y sólo si el operador G_F dado por (2.3) es sobreyectivo, esto es*

$$G_F(L^p(J;\mathbb{R}^m)) = \mathbb{R}^n$$

La controlabilidad de (2.1) es equivalente a encontrar un u tal que $G_F u = \bar{x}$.

Por otra parte, la controlabilidad del sistema (2.2) es equivalente a la invertibilidad de la siguiente matriz:

$$W = \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)B^*(s)\phi^{-1^*}(s)ds.$$

Además, si pudiéramos hallar un control de la forma

$$u(t) = B^*(t)\phi^{-1^*}(t)W^{-1}\left[\overline{x} - \int_0^T \phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds\right]$$

obtendríamos que,

$$Gu = \overline{x} - \int_0^T \phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds \quad \Longleftrightarrow \quad G_F u = \bar{x}$$

Por lo tanto, el problema de la controlabilidad de (2.1) se reduce a hallar un punto fijo del siguiente operador:

$$\Gamma : L^p(J;\mathbb{R}^{n\times m}) \longrightarrow L^p(J;\mathbb{R}^{n\times n})$$

tal que:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}(t),$$

$$\mathbf{S}_1 = \Gamma \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} B^*(t)\phi^{-1^*}(t)W^{-1}(t)\left[\overline{x} - \int_J \phi^{-1}(s)F(s,z(s),v(s))ds\right] \\ \\ \phi(t)x_0 + \phi(t)\int_0^t \phi^{-1}(s)\left[B(s)u(s) + F(s,z(s),v(s))\right]ds \end{pmatrix}$$

2.1.1. Existencia de las Soluciones y el Control

Para la demostración del próximo teorema, consideremos la siguiente notación: Para $\alpha_i \in L^1(J)$, $\quad i = 1, ...q$ usaremos los siguientes simbolos:

$K = \text{máx}\{\|\phi(t)\phi^{-1}(s)\| : 0 \leq s \leq t \leq T\}$

$$\|\phi\| = \sup_{t\in J}\{\|\phi(t)\|\}$$

$$k = \text{máx}\{\|\phi\|, \|\phi^{-1}B\|t, 1\}$$

$$b_i = 3K\|\alpha_i\|$$

$$a_i = 3k\|B^*(t)\phi^{-1^*}(t)\|\|W^{-1}\|\|\phi^{-1}(s)\|\|\alpha_i\|$$

$$C_i = \text{máx}\{a_i, b_i\}$$

$$d_1 = 3k\|B^*(t)\phi^{-1^*}(t)\|\|W^{-1}\|\|\overline{x}\|$$

$$d_2 = 3\|\phi\|\|x_0\|$$

$$d = \text{máx}\{d_1, d_2\}$$

$$a_i < c_i, \quad d_1 < d \quad y \quad \int_J |\alpha_i(s)| = \|\alpha_i\|$$

Teorema 2.1 *Sean $\varphi_i : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ funciones medibles y $\alpha_i : J \longrightarrow \mathbb{R}^+$, funciones integrables, $i = 1, ..., q$ tales que:*

$$\|F(s,z,v)\| \leq \sum_{i=1}^{q} \alpha_i(s)\varphi_i(z,v), \qquad (s,z,v) \in J \times \mathbb{R}^{n\times m} \qquad (3)$$

Entonces, la controlabilidad del sistema (2.2) implica la controlabilidad del sistema (2.1) si

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \left(r - \sum_{i=1}^{q} C_i \sup\{\varphi_i(z,v) : \|(z,v)\| \leq r\} \right) = \infty \qquad (4)$$

Observación 2.1 *Dado que el espacio de las funciones continuas $C(J;\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(J;\mathbb{R}^n)$, para los efectos de la controlabilidad, no importa con cual de estos espacios se trabaje.*

Demostración. Consideremos el operador Γ ó el sistema $\mathbf{S}_1$ definidos anteriormente. Si F es lo suficientemente suave, el operador Γ es continuo. Los puntos fijos de Γ, es decir, $\Gamma(x,u) = (x,u)$, son soluciones del sistema $\mathbf{S}_1$.

Probaremos la existencia de tales puntos fijos, usando el Teorema del Punto Fijo de Shauder.

Sea $\quad \psi(r) = \sup\{\varphi(z,v) : \|(z,v)\| \leq r\} \quad$ Por (4) tenemos que:

Dado $d > 0$, existe $r_0 > 0$ tal que

$$r_0 - \sum_{i=1}^{q} C_i\psi_i(r_0) \geq d \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{q} C_i\psi_i(r_0) + d < r_0$$

Consideremos

$$C_{r_0} = \{(z,v) \in C(J;\mathbb{R}^{n\times m}) : \|(z,v)\| \leq r_0\}$$

Probemos que Γ aplica C_{r_0} en C_{r_0}. Si $(z,v) \in C_{r_0}$, entonces usando S_1 tenemos:

$$\|u(t)\| \leq \|B^*(t)\phi^{-1*}(t)\|\|W^{-1}\| \left[\|\overline{x}\| - \int_0^t \|\phi^{-1}(s)\|\|F(s,z(s),v(s))\|ds\right].$$

Por hipótesis, se tiene que:

$$\|u(t)\| \leq \|B^*(t)\phi^{-1*}(t)\|\|W^{-1}\| \left[\|\overline{x}\| - \int_0^t \|\phi^{-1}(s)\| \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i\varphi_i(z,v)\right) ds\right]$$

y por la definición de ψ_i y propiedades de la norma tenemos:

$$\|u(t)\| \leq \|B^*(t)\phi^{-1*}(t)\|\|W^{-1}\| \left[\|\overline{x}\| + \int_0^t \|\phi^{-1}(s)\| \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i\psi_i(r_0)\right) ds\right]$$

$$\|u(t)\| \leq \frac{d_1}{3k} + \|B^*(t)\phi^{-1*}(t)\|\|W^{-1}\|\|\phi^{-1}(s)\| \sum_{i=1}^{q} \int_0^t \alpha_i\psi_i(r_0)ds$$

$$\|u(t)\| \leq \frac{d_1}{3k} + \sum_{i=1}^{q} \|B^*(t)\phi^{-1*}(t)\|\|W^{-1}\|\|\phi^{-1}(s)\|\|\alpha_i\|\psi_i(r_0)$$

$$\|u(t)\| \leq \frac{d_1}{3k} + \sum_{i=1}^{q} \frac{a_i}{3k}\psi_i(r_0) \leq \frac{1}{3k}(d + \sum_{i=1}^{q} C_i\psi_i(r_0)) \leq \frac{1}{3k}r_0 \leq \frac{r_0}{3}$$

Para x tenemos,

$$\begin{aligned}\|x(t)\| \leq & \ \|\phi(t)\|\|x_0\| + \|\phi(t)\| \int_0^t \|\phi^{-1}(s)B(s)\|\|u(s)\|ds \\ + & \ \|\phi(t)\| \int_0^t \|\phi^{-1}(s)\|\|F(s, z(s), v(s))\|ds\end{aligned}$$

Luego por hipótesis obtenemos:

$$\begin{aligned}\|x(t)\| \leq & \ \|\phi(t)\|\|x_0\| + \|\phi(t)\|\|\phi^{-1}(s)B(s)\|\|u(s)\|t \\ + & \ \|\phi(t)\| \int_0^t \|\phi^{-1}(s)\| \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varphi_i(s, z, v)ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x(t)\| \leq & \ \|\phi(t)\|\|x_0\| + \|\phi(t)\| \cdot \|\phi^{-1}(s)B(s)\|\|u(s)\|t \\ + & \ \int_0^t K \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varphi_i(s, z, v)ds\end{aligned}$$

Sea $d_2 = 3\|\phi\|\|x_0\|$, y $C_i = \max\{a_i, b_i\}$, además como $\int_J |\alpha_i(s)| = \|\alpha_i\|$ se tiene:

$$\|x(t)\| \leq \frac{d_2}{3} + k\|u(s)\| + \sum_{i=1}^{q} \frac{C_i}{3}\psi_i(r_0)$$

$$\|x(t)\| \leq \frac{1}{3}\left[d + \sum_{i=1}^{q} \frac{C_i}{3}\psi_i(r_0)\right] + k\|u(s)\| \leq \frac{r_0}{3} + k\frac{r_0}{3k} = \frac{2}{3}r_0$$

Luego Γ aplica C_{r_0} en sí mismo. Ahora, demostremos que, $\Gamma(C_{r_0})$ es equicontinuo sobre J. Para esto veamos que, para todo $(z, v) \in C_{r_0}$ y $\forall\ s_1, s_2 \in J$ con $s_1 < s_2$ tenemos:

$$\begin{aligned}u(s_1) - u(s_2) = & \ B^*(s_1)\phi^{-1^*}(s_1)W^{-1}\left[\overline{x} - \int_J \phi^{-1}(s)F(s, z(s), v(s))ds\right] \\ - & \ B^*(s_2)\phi^{-1^*}(s_2)W^{-1}\left[\overline{x} - \int_J \phi^{-1}(s)F(s, z(s), v(s))ds\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u(s_1) - u(s_2) = & \ \left[B^*(s_1)\phi^{-1^*}(s_1)W^{-1} - B^*(s_2)\phi^{-1^*}(s_2)W^{-1}\right] \\ \times & \ \left[\overline{x} - \int_J \phi^{-1}(s)F(s, z(s), v(s))ds\right]\end{aligned}$$

Normalizando tenemos:

$$\begin{aligned}\|u(s_1)-u(s_2)\| \leq & \left[\|B^*(s_1)\phi^{-1^*}(s_1)-B^*(s_2)\phi^{-1^*}(s_2)\|\cdot\|W^{-1}\|\right] \\ \times & \left[\|\overline{x}\|-\int_J \|\phi^{-1}(s)\|\|F(s,z(s),v(s))\|ds\right]\end{aligned}$$

Por la hipótesis (3) tenemos:

$$\begin{aligned}\|u(s_1)-u(s_2)\| \leq & \left[\|B^*(s_1)\phi^{-1^*}(s_1)-B^*(s_2)\phi^{-1^*}(s_2)\|\|W^{-1}\|\right] \\ \times & \left[\|\overline{x}\|-\int_J \|\phi^{-1}(s)\|\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\varphi_i(z,v)ds\right]\end{aligned}$$

Más aún para todo $(z,v)\in C_{r_0}$

$$\|u(t)\| \leq \|B^*(t)\phi^{-1^*}(t)\|\cdot\|W^{-1}\|\left[\|\overline{x}\|-\int_J \|\phi^{-1}(s)\|\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\psi_i(r)ds\right]$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}x(s_1)-x_(s_2) = & \phi(s_1)x_0+\phi(s_1)\int_0^{s_1}\phi^{-1}(s)\left[B(s)u(s)+F(s,x(s),u(s))\right]ds \\ - & \left[\phi(s_2)x_0+\phi(s_2)\int_0^{s_2}\phi^{-1}(s)\left[B(s)u(s)+F(s,x(s),u(s))\right]ds\right] \\ = & \left(\phi(s_1)-\phi(s_2)\right)x_0 \\ + & \left(\phi(s_1)-\phi(s_2)\right)\int_0^{s_1}\phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds \\ + & \phi(s_2)\int_{s1}^{s_2}\phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds \\ + & \left(\phi(s_1)-\phi(s_2)\int_0^{s_1}\phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds \\ + & \phi(s_2)\int_{s_1}^{s_2}\phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds\end{aligned}$$

Normalizando tenemos:

$$\begin{aligned}
\|x(s_1) - x_(s_2)\| \leq & \quad \|\left(\phi(s_1) - \phi(s_2)\right)\| \cdot \|x_0\| \\
+ & \quad \|\left(\phi(s_1) - \phi(s_2)\right)\| \int_0^{s_1} \|\phi^{-1}(s)B(s)\| \cdot \|u(s)\| ds \\
+ & \quad \|\phi(s_2)\| \int_{s1}^{s_2} \|\phi^{-1}(s)B(s)\| \cdot \|u(s)\| ds \\
+ & \quad \|(\phi(s_1) - \phi(s_2)\| \int_0^{s_1} \|\phi^{-1}(s)\| \cdot \|F(s, x(s), u(s))\| ds \\
+ & \quad \|\phi(s_2)\| \int_{s_1}^{s_2} \|\phi^{-1}(s)\| \cdot \|F(s, x(s), u(s))\| ds
\end{aligned}$$

Nuevamente de la definición ψ_i, y por la hipótesis (3) tenemos:

$$\begin{aligned}
\|x(s_1) - x_(s_2)\| \leq & \quad \|\left(\phi(s_1) - \phi(s_2)\right)\| \cdot \|x_0\| \\
+ & \quad \|\left(\phi(s_1) - \phi(s_2)\right)\| \int_0^{s_1} \|\phi^{-1}(s)B(s)\| \cdot \|u(s)\| ds \\
+ & \quad \|\phi(s_2)\| \int_{s1}^{s_2} \|\phi^{-1}(s)B(s)\| \cdot \|u(s)\| ds \\
+ & \quad \|(\phi(s_1) - \phi(s_2)\| \int_0^{s_1} \|\phi^{-1}(s)\| \sum_{i=1}^{q} \alpha_i(s)\psi_i(r) ds \\
+ & \quad \|\phi(s_2)\| \int_{s_1}^{s_2} \|\phi^{-1}(s)\| \sum_{i=1}^{q} \alpha_i(s)\psi_i(r) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|x(s_1) - x_(s_2)\| \leq & \quad \|\left(\phi(s_1) - \phi(s_2)\right)\| \cdot \|x_0\| \\
+ & \quad \|\left(\phi(s_1) - \phi(s_2)\right)\| \|\phi^{-1}(s)B(s)\| \cdot \|u(s)\| s_1 \\
+ & \quad \|\phi(s_2)\| \|\phi^{-1}(s)B(s)\| \cdot \|u(s)\| (s_2 - s_1) \\
+ & \quad \|(\phi(s_1) - \phi(s_2)\| \|\phi^{-1}(s)\| \sum_{i=1}^{q} \|\alpha_i(s)\| \psi_i(r) \\
+ & \quad \|\phi(s_2)\| \|\phi^{-1}(s)\| \sum_{i=1}^{q} \|\alpha_i(s)\| \psi_i(r)
\end{aligned}$$

De las acotaciones correspondientes y la continuidad uniforme de las funciones $\phi(\cdot)$, $\phi^*(\cdot)$, y $B(\cdot)$ se desprende la equicontinuidad de la familia $\Gamma(C_r)$.

Del teorema de Arzela Ascoli $\overline{\Gamma(C_r)}$ es relativamente compacta en $C(J; \mathbb{R}^{n\times m})$. Por lo tanto, Γ es un operador completamente continuo. Además C_{r_0} es no vacio, cerrado, acotado y convexo, así por el teorema de punto fijo de Shauder, Γ posee un punto fijo. Luego (x, u) existen, esto finaliza la demostración.

✠

2.2. Controlabilidad para controles en $L^p(J; \mathbb{R}^m)$

Consideremos el sistema de control no lineal (2.1) bajo perturbaciones F tal que satisfagan,

$$\|F(t, x_1, u_1) - F(t, x_2, u_2)\| \leq k(t)\{\|x_2 - x_1\| + \|u_2 - u_1\|\}$$

con $k(\cdot) \in C([0,1], \mathbb{R}^+)$.

De tal forma que caracterizaremos la controlabilidad del sistema de control no lineal (2.1) mediante un operador no lineal, continuo G_f. Además daremos una condición necesaria para la controlabilidad de dicho sistema. Veamos que, $F(t, x, u) \in L^p(J; \mathbb{R}^m)$.

Efectivamente bastaría ver

$$\int_0^T \|F(t, x(t), u(t))\|^p dt < +\infty$$

Por hipótesis tenemos:

$$\|F(t, x_1(t), u_1(t)) - F(t, 0, 0)\| \leq k(t)\left(\|x_1\| + \|u_1\|\right)$$

luego

$$\|F(t, x_1(t), u_1(t))\| \leq \|F(t, 0, 0)\| + k(t)\left(\|x_1\| + \|u_1\|\right)$$

tomemos $a = \|F(t, 0, 0)\|$

$$\|F(t, x_1(t), u_1(t))\| \leq a + k(t)\left(\|(x_1, u_1)\|\right), \qquad \text{con} \quad a, k(\cdot) \in C([0,1], \mathbb{R}^+)$$

Veamos que para todo $x \in L^p(J;\mathbb{R}^n)$ y $\forall u \in L^p(J;\mathbb{R}^m)$, se tiene que $F(\cdot,x(\cdot),u(\cdot)) \in L^p(J;\mathbb{R}^n)$.

Efectivamente, elevando a la p, tenemos:

$$\|F(t,x_1(t),u_1(t))\|^p \leq (a + k\,(\|(x_1,u_1)\|))^p$$

pero sabemos que

$$\|h+g\|^p \leq 2^p(\|h\|^p + \|g\|^p)$$

luego,

$$\|F(t,x_1(t),u_1(t))\|^p \leq 2^p(a^p + k^p\|(x_1,u_1)\|^p)$$

$$\|F(t,x_1(t),u_1(t))\|^p \leq 2^p a^p + 2^p k^p\|(x_1,u_1)\|^p$$

Integrando sobre J tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^t \|F(t,x_1(t),u_1(t))\|^p dt &\leq \int_0^t 2^p a^p dt + 2^p k^p \int_0^t \|(x_1(t),u_1(t))\|^p dt, \qquad t \in [0,T]\\ &\leq 2^p a^p t + 2^p k^p \|(x_1(t),u_1(t))\|^p_{L^p} t < +\infty,\end{aligned}$$

Así

$$\int_0^T \|F(t,x(t),u(t))\|^p dt < +\infty$$

Lema 2.1 *(***Gronwall***) Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua que satisface*

$$y(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)y(s)ds, \qquad \forall\, t \in [a,b]$$

Entonces se tiene

$$y(t) \leq f(t) + \int_a^t f(s)g(s)exp\left(\int_s^t g(u)du\right)ds, \qquad \forall\, t \in [a,b]$$

En el caso particular que $f \equiv C$, es constante, se tiene

$$y(t) \leq Cexp\left(\int_a^t g(s)ds\right), \qquad \forall\, t \in [a,b]$$

Lema 2.2 *Si a la hipótesis del lema (1), agregamos que, f es monótona creciente, podemos afirmar que:*

$$y(t) \leq f(t) exp\left(\int_s^t g(s)ds\right) ds$$

Lema 2.3 *Sea $u(\cdot) \in L^p(J; \mathbb{R}^m)$, $\quad x_0 \in \mathbb{R}^n \quad y \quad F$ satisface la siguiente condición:*

$$\|F(t, x_1, u_1) - F(t, x_2, u_2)\| \leq k(t)\{\|x_2 - x_1\| + \|u_2 - u_1\|\}$$

con $k(\cdot) \in C([0,1], \mathbb{R}^+)$, entonces la aplicación $x(\cdot)$ del sistema (2.1) satisface la relación:

$$\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{L^p} \leq \Big[\|B\|_{L^p} + k\Big] M_2 T \|u_1(\cdot) - u_2(\cdot)\|_{L^p}$$

Demostración. La solución del sistema (2.1) está dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi(t)x_0 + \phi(t)\int_0^t \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds \\ &+ \phi(t)\int_0^t \phi^{-1}(s)F(s, x(s), u(s))ds \end{aligned}$$

Consideremos:

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x_2(t)\| &\leq \|\phi(t)\| \times \Bigg\| \Bigg[\int_0^t \phi^{-1}(s)B(s)u_1(s)ds \\ &+ \int_0^t \phi^{-1}(s)F(s, x_1(s), u_1(s))ds \\ &- \left(\int_0^t \phi^{-1}(s)B(s)u_2(s)ds \right.\\ &+ \left.\int_0^t \phi^{-1}(s)F(s, x_2(s), u_2(s))\right) ds\Bigg]\Bigg\| \end{aligned}$$

usando desigualdad triangular

$$\begin{aligned}
&\leq \quad \|\phi(t)\|\|\phi^{-1}(s)\| \times \left[\int_0^t \|B(s)u_1(s) - B(s)u_2(s)\|ds\right. \\
&+ \quad \left.\int_0^t \|F(s, x_1(s), u_1(s)) - F(s, x_2(s), u_2(s)\|ds\right]
\end{aligned}$$

Tomemos $M = \max\limits_{0 \leq s < t \leq T}\{\|\phi(t)\|\|\phi^{-1}(s)\|\}$

$$\begin{aligned}
&\leq \quad M\left[\int_0^t \|B(s)u_1(s) - B(s)u_2(s)\|ds\right. \\
&+ \quad \left.\int_0^t \|F(s, x_1(s), u_1(s)) - F(s, x_2(s), u_2(s)\|ds\right]
\end{aligned}$$

como F es globalmente Lipschitz tenemos:

$$\begin{aligned}
&\leq \quad M\left[\int_0^t \|B(s)u_1(s) - B(s)u_2(s)\|ds\right. \\
&+ \quad \left.\int_0^t k(t)(\|x_1(s) - x_2(s)\| + \|u_1(s) - u_2(s)\|)ds\right]
\end{aligned}$$

Consideremos $k = \text{máx}_{s \in J} k(s)$

$$\begin{aligned}
&\leq \quad M\left[\int_0^t \|B(s)u_1(s) - B(s)u_2(s)\|ds\right. \\
&+ \quad \left.k\int_0^t \|x_1(s) - x_2(s)\|ds + k\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|ds\right]
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Holder obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\leq \quad M\left[\left(\int_0^t \|B(s)u_1(s) - B(s)u_2(s)\|^p ds\right)^{1/p} \cdot \left(\int_0^t ds\right)^{1/q}\right. \\
&+ \quad k\int_0^t \|x_1(s) - x_2(s)\|ds \\
&+ \quad \left.k\left(\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|^p d(s)\right)^{1/p} \cdot \left(\int_0^t ds\right)^{1/q}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq M\Big[\|B(s)u_1(s)-B(s)u_2(s)\|_{L^p}.t^{1/q}\\
&+ k\int_0^t \|x_1(s)-x_2(s)\|d(s)\\
&+ k\|u_1(s)-u_2(s)\|_{L^p}\cdot t^{1/q}\Big]
\end{aligned}
$$

Ahora como, $M\left[\|B(s)u_1(s)-B(s)u_2(s)\|_{L^p}.t^{1/q}+k\|u_1(s)-u_2(s)\|_{L^p}\cdot t^{1/q}\right]$ es continua y monótona creciente en J, por el lema 2.2 tenemos:

$$
\begin{aligned}
\|x_1(s)-x_2(s)\| &\leq M\Bigg[\|B(s)u_1(\cdot)-B(\cdot)u_2(\cdot)\|_{L^p}.t^{1/q}\\
&+ k\|u_1(\cdot)-u_2(\cdot)\|_{L^p}\cdot t^{1/q}\Bigg]exp\left(M\int_0^t kds\right)
\end{aligned}
$$

elevando a la p, integrando sobre J y elevando este resultado a $1/p$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
\|x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\|_{L^p} &\leq \Bigg[\int_0^t\Bigg(M\Big[\|B(\cdot)u_1(\cdot)-B(\cdot)u_2(\cdot)\|_{L^p}.t^{1/q}\\
&+ k\|u_1(\cdot)-u_2(\cdot)\|_{L^p}\cdot t^{1/q}\Big]\Bigg)^p ds\; exp\,(Mkt)^p\Bigg]^{1/p}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\|_{L^p} &\leq Mexp\,(Mkt)\Bigg[\int_0^t\Bigg(\|B(\cdot)u_1(\cdot)-B(\cdot)u_2(\cdot)\|_{L^p}.t^{1/q}\\
&+ k\|u_1(\cdot)-u_2(\cdot)\|_{L^p}\cdot t^{1/q}\Bigg)^p ds\Bigg]^{1/p}
\end{aligned}
$$

usando la desigualdad de Minkowski:

$$
\begin{aligned}
\|x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\|_{L^p} &\leq Mexp\,(Mkt)\Bigg[\int_0^t\Big(\|B(\cdot)u_1(\cdot)-B(\cdot)u_2(\cdot)\|^p_{L^p}.t^{p/q}ds\Big)^{1/p}\\
&+ \Big(\int_0^t k^p\|u_1(\cdot)-u_2(\cdot)\|^p_{L^p}\cdot t^{p/q}ds\Big)^{1/p}ds\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\|_{L^p} &\leq Mexp\,(Mkt)\Bigg[\|B(\cdot)u_1(\cdot)-B(\cdot)u_2(\cdot)\|_{L^p}.\Big(\int_0^t t^{p/q}ds\Big)^{1/p}\\
&+ k\|u_1(\cdot)-u_2(\cdot)\|_{L^p}\cdot\Big(\int_0^t t^{p/q}ds\Big)^{1/p}ds\Bigg]
\end{aligned}
$$

como p y q son conjugados

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\Longrightarrow 1+\frac{p}{q}=p\Longrightarrow \frac{p}{q}=p-1,$$

Así,

$$\begin{aligned}\|x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\|_{L^p} &\leq Mexp\,(Mkt)\Bigg[\|B(\cdot)u_1(\cdot)-B(\cdot)u_2(\cdot)\|_{L^p}.\Big(\int_0^t t^{p-1}ds\Big)^{1/p}\\ &+ k\|u_1(\cdot)-u_2(\cdot)\|_{L^p}\cdot\Big(\int_0^t t^{p-1}ds\Big)^{1/p}ds\Bigg]\end{aligned}$$

luego $\displaystyle\int_0^t t^{p-1}ds=F(t)=\frac{t^p}{p}$

$$\begin{aligned}\|x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\|_{L^p} &\leq Mexp\,(Mkt)\Bigg[\|B(\cdot)u_1(\cdot)-B(\cdot)u_2(\cdot)\|_{L^p}.\Big(\frac{t^p}{p}\Big)^{1/p}\\ &+ k\|u_1(\cdot)-u_2(\cdot)\|_{L^p}\cdot\Big(\frac{t^p}{p}\Big)^{1/p}\Bigg]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\|_{L^p} &\leq Mexp\,(Mkt)\Bigg[\|B(\cdot)u_1(\cdot)-B(\cdot)u_2(\cdot)\|_{L^p}.\frac{t}{p^{1/p}}\\ &+ k\|u_1(\cdot)-u_2(\cdot)\|_{L^p}\cdot\frac{t}{p^{1/p}}\Bigg]\end{aligned}$$

$$\|x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\|_{L^p} \leq Mexp\,(Mkt)\,\|u_1(\cdot)-u_2(\cdot)\|_{L^p}\cdot\frac{t}{p^{1/p}}\left[\|B\|+k\right],$$

llamemos

$$M_2=\frac{Mexp\,(Mkt)}{p^{1/p}}.$$

Así,

$$\|x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\|_{L^p}\leq\Big[\|B\|_{L^p}+k\Big]M_2T\|u_1(\cdot)-u_2(\cdot)\|_{L^p}.$$

✠

Teorema 2.2 *Supongamos que el sistema lineal (2.2) es controlable en J, la función F, satisface la condición de Lipschitz*

$$\|F(t,x_1(t),u_1(t))\| - \|F(t,x_2(t),u_2(t))\| \leq L\{\|x_2(t)-x_1(t)\| + \|u_2(t)-u_1(t)\|\}$$

y vale

$$M^2\|B\|\|W^{-1}\|KT^{\frac{p+1}{p}} \leq 1$$

entonces el sistema (2.1) es controlable.

Demostración. El sistema lineal (2.2) es controlable, entonces el operador

$$W = \int_J \phi^{-1}(s)B(s)B^*(s)\phi^{-1^*}(s)ds$$

es invertible y el operador

$$Gu = \int_J \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds$$

es sobreyectivo. Veamos que el operador

$$G_F = Gu + \int_J \phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds$$

es sobreyectivo

Dado $x_1, x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe $u \in L^p(J;\mathbb{R}^m)$ tal que

$$x_1 = \phi(T)x_0 + \phi(T)\int_J \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds + \phi(T)\int_J \phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds.$$

Debemos hallar $u(\cdot) \in L^p(J;\mathbb{R}^m)$ tal que

$$u(t) = B^*(t)\phi^{-1^*}(t)W^{-1}[\overline{x} - \int_J \phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds]$$

Dado u_1 y la solución correspondiente al sistema (2.1) dada por:

$$x_1 = \phi(T)x_0 + \phi(T)\int_J \phi^{-1}(s)B(s)u_1(s)ds + \phi(T)\int_J \phi^{-1}(s)F(s,x_1(s),u_1(s))ds.$$

La controlabilidad del sistema (2.2) nos permite garantizar la existencia de un control $u_2 \in L^p(J;\mathbb{R}^m)$ tal que:

$$u_2(t) = B^*(t)\phi^{-1^*}(t)W^{-1}[\overline{x} - \int_J \phi^{-1}(s)F(s,x_1(s),u_1(s))ds]$$

y

$$Gu_2 = \bar{x} - \int_J \phi^{-1}(s)F(s,x_1(s),u_1(s))ds$$

Así,

$$\bar{x} - \int_J \phi^{-1}(s)F(s,x_1(s),u_1(s))ds - \int_J \phi^{-1}(s)B(s)u_2(s)ds = 0$$

Para este u_2 consideremos la solución correspondiente de (2.1) $x_2 = x_2(t,x_2(t),u_2(t))$, dado que

$$\overline{x} - \int_J \phi^{-1}(s)F(s,x_1(s),u_1(s))ds \in \mathbb{R}^n$$

existe un control $u_3 \in L^p(J;\mathbb{R}^m)$ y la solución correspondiente dada por $x_3 = x_3(t,x_3(t),u_3(t))$, las cuales satisfacen

$$u_3(t) = B^*(t)\phi^{-1^*}(t)W^{-1}[\overline{x} - \int_J \phi^{-1}(s)F(s,x_2(s),u_2(s))ds]$$

y

$$Gu_3 = \overline{x} - \int_J \phi^{-1}(s)F(s,x_2(s),u_2(s))ds$$

En consecuencia,

$$\overline{x} - \int_J \phi^{-1}(s)F(s,x_2(s),u_2(s))ds - \int_J \phi^{-1}(s)B(s)u_3(s)ds = 0$$

Continuando con este proceso construimos sucesiones:$\{u_n\}_{n\geq 1} \subset L^p(J;\mathbb{R}^m)$ y $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset (J;\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\mathbf{S}_2 = \begin{cases} u_{n+1}(t) = B^*(t)\phi^{-1^*}(t)W^{-1}[\overline{x} - \int_J \phi^{-1}(s)F(s,x_n(s),u_n(s))ds] \\ \overline{x} - \int_J \phi^{-1}(s)F(s,x_n(s),u_n(s))ds - \displaystyle\int_J \phi^{-1}(s)B(s)u_{n+1}(s)ds = 0 \end{cases}$$

Probemos ahora que $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(J;\mathbb{R}^m)$. En efecto:

$$\begin{aligned} \|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| &\leq \|B^*\|\|\phi^{-1^*}\|\|W^{-1}\| \\ &\times \int_J \|\phi^{-1}(s)\|(\|F(s,x_n(s),u_n(s)) - F(s,x_{n-1}(s),u_{n-1}(s))\|)ds \end{aligned}$$

tomemos $M = \max_{s\in J}\{\|\phi^{-1}(s)\|\}$, luego de lo anterior tenemos:

$$\leq \quad \|B^*\|M\|W^{-1}\|M\int_J \|F(s,x_n(s),u_n(s)) - F(s,x_{n-1}(s),u_{n-1}(s))\|ds$$

Tomemos $q_1 = \|B^*\|M^2\|W^{-1}\|$ y como F es Lipschitziana tenemos:

$$\leq q_1L\Big\{\int_J \|x_n(s) - x_{n-1}(s)\|ds + \int_J \|u_n(s) - u_{n-1}(s)\|ds\Big\}$$

usando el lema 2.3 y la desigualdad de Holder

$$\leq q_1L\Big\{[\|B\|_{L^p} + L]M_2T\|u_n - u_{n-1}\|_{L^p} + \|u_n - u_{n-1}\|_{L^p}T^{\frac{1}{q}}\Big\}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| \quad &\leq \quad q_1L\Big\{[\|B\|_{L^p} + L]M_2T\|u_n - u_{n-1}\|_{L^p} + \|u_n - u_{n-1}\|_{L^p}T^{\frac{1}{q}}\Big\} \\
&\leq \quad \|B^*\|M^2\|W^{-1}\|L\Big\{[\|B\|_{L^p} + L]M_2T + T^{\frac{1}{q}}\Big\}\|u_n - u_{n-1}\|_{L^p} \\
&\leq \quad \|B^*\|M^2\|W^{-1}\|L\Big\{[\|B\|_{L^p} + L]M_2T^{\frac{1}{q}} + 1\Big\}T\|u_n - u_{n-1}\|_{L^p}
\end{aligned}$$

Tomemos $K = L\Big([\|B\|_{L^p} + L]M_2T^{\frac{1}{q}} + 1\Big)$ elevando a la p, integrando y luego elevando a $1/p$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - u_n\|_{L^p} \quad &\leq \quad \Big(\int_J \Big(\|B^*\|M^2\|W^{-1}\|KT\|u_n - u_{n-1}\|_{L^p})^p ds\Big)^{\frac{1}{p}} \\
\|u_{n+1}(\cdot) - u_n(\cdot)\|_{L^p} \quad &\leq \quad M^2T\|B\|\|W^{-1}\|K\|u_n(\cdot) - u_{n-1}(\cdot)\|_{L^p}T^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \quad M^2\|B\|\|W^{-1}\|K\|u_n(\cdot) - u_{n-1}(\cdot)\|_{L^p}T^{\frac{p+1}{p}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si se cumple que

$$M^2\|B\|\|W^{-1}\|KT^{\frac{p+1}{p}} \leq 1$$

se tiene que $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(J;\mathbb{R}^m)$ tal que

$$u_n \to u, \qquad n \to \infty$$

Para este $u \in L^p(J;\mathbb{R}^m)$ consideremos la solución correspondiente de (1) $x(t) = x(t,x,u)$ y probemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\int_J \phi^{-1}(s)F(s,x_n(s),u_n(s))ds = \int_J \phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds.$$

En efecto,

$$\int_J \|\phi^{-1}(s)\|\|F(s,x_n(s),u_n(s)) - F(s,x(s),u(s))\|ds$$

$$\leq L\int_J \|\phi^{-1}(s)\|\Big(\|x_n(t)-x(t)\| + \|u_n(t)-u(t)\|\Big)ds$$

$$\leq LM\Big[\int_J \|x_n(t)-x(t)\|ds + \int_J \|u_n(t)-u(t)\|ds\Big]$$

Luego por el lema 2.3 resulta que:

$$\int_J \|\phi^{-1}(s)\|\|F(s,x_n(s),u_n(s)) - F(s,x(s),u(s))\|$$

$$\leq LM\Big[\int_J [\|B\|_{L^p}+L]M_2T\|u_n-u\|_{L^p}ds + \int_J \|u_n(s)-u(s)\|ds\Big]$$

$$\leq LM\Big[[\|B\|_{L^p}+L]M_2T\|u_n-u\|_{L^p}T + \|u_n-u\|_{L^p}\sqrt{T}\Big]$$

Consideremos $\mathsf{K} = [\|B\|_{L^p}+L]M_2T^2 + \sqrt{T}$

$\leq LM\mathsf{K}\|u_n-u\|_{L^p}$

Así,

$$\lim_{n\to\infty}\int_J \phi^{-1}(s)[F(s,x_n(s),u_n(s)) - F(s,x(s),u(s))]ds = 0$$

Finalmente pasando el limite en $\mathbf{S}_2$, obtenemos que

$$\bar{x} - \int_J \phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds - \int_J \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds = 0$$

Entonces:

$$\bar{x} = \int_J \phi^{-1}(s)[B(s)u(s) + F(s,x(s),u(s))]ds$$

Lo que prueba que G_F es sobreyectivo. Luego de la proposición 2.2 podemos concluir que el sistema (2.1) es controlable.

✠

Capítulo 3

Controlabilidad de Sistemas de Ecuaciones No Lineales con Retardo

En este capitulo daremos condiciones suficientes para la controlabilidad del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales con retardo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + \displaystyle\int_0^t f(s, x_s, u(s))ds, \quad t \in J = [0, T] \\ x_0 &= \varphi \text{ sobre } \quad [-r, 0] \end{cases} \tag{3.1}$$

donde el estado $x(\cdot)$ toma valores en $\mathbb{R}^n$ y la función de control $u(\cdot)$ pertenece a $L^2(J, \mathbb{R}^m)$. $A(\cdot)$ y $B(\cdot)$ son matrices continuas de dimensiones $n \times n$ y $n \times m$ respectivamente y $f : J \times C \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y uniformemente Lipschitziana en $C \times \mathbb{R}^m$. Aquí $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^m)$ es el espacio de Banach de las funciones continuas $\varphi : [-r, 0] \to \mathbb{R}^n$ dotado con la norma

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(\theta)| : -r \leq \theta \leq 0\}.$$

También, para $x \in C([-r, T]; \mathbb{R}^n)$ definimos la truncación de x como la función $x_t \in C([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$, dada por

$$x_t(\theta) = x(t + \theta) \quad \forall\, \theta \in [-r, 0], \quad t \in [0, T].$$

Bajo ciertas condiciones sobre f se prueba que, si el sistema lineal

$$\dot{x}(t) \quad = \quad A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad t \in J = [0, T] \tag{3.2}$$

es controlable, entonces el sistema de ecuaciones no lineal (3.1), también lo es. Es decir, la controlabilidad del sistema lineal se preserva bajo este tipo de perturbación no lineal.

3.1. Existencia y Unicidad de las Soluciones

En esta sección daremos algunas definiciones y probaremos algunos resultados preliminares necesarios para la formulación y demostración del resultado principal de este trabajo.

Las hipótesis principales serán las siguientes:

a) El sistema de control lineal,

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad t \in J = [0, T]$$

es controlable sobre $[0, T]$.

b) La función no lineal $f : J \times C \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ cumple con la siguiente condición de Lipschitz

$$\|f(t, \varphi_2, u_2) - f(t, \varphi_1, u_1)\| \leq \mathrm{L}\{\|\varphi_2 - \varphi_1\| + \|u_2 - u_1\|\}$$

para todo $t \geq 0, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in C \quad$ y $\quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}^m$

Definición 3.1 *si $\varphi \in C([-r, 0]; \mathbb{R}^m)$ y $u \in L^2(J; \mathbb{R}^m)$, entonces a la función $x \in C([-r, T]; \mathbb{R}^n)$ dada por*

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t)\varphi(0) + \phi(t)\displaystyle\int_0^t \phi^{-1}(s)[B(s)u(s) + \int_0^s f(\tau, x(\tau), u(\tau))d\tau]ds, & t \in J \\ \varphi(t), \quad \textit{sobre} \quad -r \leq t \leq 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

la llamaremos solución correspondiente del sistema (3.1)

Proposición 3.1 *Dado $\varphi \in C([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$ y un control $u \in L^2(J; \mathbb{R}^m)$. El problema (3.1) posee una única solución dada por (3.3)*

Demostración. Dado que f es uniformemente Lipschitz en C, existe $L > 0$ tal que

$$\|f(t, \varphi_2, u_2) - f(t, \varphi_1, u_1)\| \leq \mathrm{L}\{\|\varphi_2 - \varphi_1\| + \|u_2 - u_1\|\}$$

para todo $t \geq 0, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in C \quad$ y $\quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}^m$

Sea $\varphi \in C = C([-r,0];\mathbb{R}^n)$, definimos el siguiente operador:

$$F : C([-r,T];\mathbb{R}^n) \to C([-r,T];\mathbb{R}^n)$$

$$Fx(t) = \begin{cases} \phi(t)\varphi(0) + \phi(t)\displaystyle\int_0^t \phi^{-1}(s)[B(s)u(s) + \int_0^s f(\tau, x_\tau, u(\tau))d\tau]ds, & t \in J \\ \varphi(t), \qquad \text{sobre} \quad -r \le t \le 0. & \end{cases}$$

Si $x, v \in C([-r,T];\mathbb{R}^n)$ y $t \in [0,T]$, entonces

$$\begin{aligned} \|Fx(t) - Fv(t)\| &= \|\phi(t)\int_0^t \phi^{-1}(s)\int_0^s [f(\tau,x_\tau,u(\tau)) - f(\tau,v_\tau,u(\tau))]d\tau ds\| \\ &\le \int_0^t \|\phi(t)\phi^{-1}(s)\|\int_0^s L\{\|x_\tau - v_\tau\| + \|u_\tau - u_\tau\|\}d\tau ds \\ &\le ML\int_0^t\int_0^s \|x_\tau - v_\tau\|d\tau ds \qquad (1.1) \end{aligned}$$

donde L es la constante de Lipschitz y $M = \max\limits_{a \le s \le t \le T}\{\|\phi(t)\phi^{-1}(s)\|\}$.

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \|x_\tau - v_\tau\| &= \sup_{\theta\in[-r,0]}\|x(\tau+\theta) - v(\tau+\theta))\| \\ &= \sup_{\epsilon\in[-r+\tau,\tau]}\|x(\epsilon) - v(\epsilon)\| \\ &\le \sup_{\epsilon\in[-r,T]}\|x(\epsilon) - v(\epsilon)\| \\ &= \|x - v\| \qquad (1.2) \end{aligned}$$

Así, de (1.1) tenemos que:

$$\|Fx(t) - Fv(t)\| \le ML\|x - v\|\tfrac{t^2}{2}, \quad t \in J. \qquad (1.3)$$

Si $t \in [-r,0]$, entonces $\|Fx(t) - Fv(t)\| = 0$. Luego (1.3) se satisface para $t \in [-r,T]$

Usando (1.1) tenemos

$$\begin{aligned}\|(F^2x)(t)-(F^2v(t)\| &= \|F(Fx(t))_\tau - F(Fv(t))_\tau\| \\ &\leq ML\int_0^t\int_0^s \|(Fx)_\tau-(Fv)_\tau\|d\tau ds \qquad (1.4)\end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned}\|(Fx)_\tau-(Fv)_\tau\| &= \sup_{\theta\in[-r,0]}\|(Fx)(\tau+\theta)-(Fv)(\tau+\theta)\| \\ &= \sup_{\epsilon\in[-r+\tau,\tau]}\|Fx(\epsilon)-Fv(\epsilon)\| \\ &\leq \sup_{s\in[-r,T]}\|Fx(s)-Fv(s)\|\end{aligned}$$

de (1.3) tenemos:

$$\begin{aligned}\|(F^2x)_\tau-(F^2v)_\tau\| &\leq ML\int_0^t\int_0^s ML\frac{\tau^2}{2}\|x-v\|d\tau ds \\ &= \frac{M^2L^2}{2}\|x-v\|\int_0^t\frac{s^3}{3}ds \\ &= \frac{M^2L^2t^4}{2*3*4}\|x-v\|\end{aligned}$$

Así hemos probado que,

$$\|F^2x(t)-F^2v(t)\| = \frac{M^2L^2t^4}{4!}\|x-v\|, \quad t\in[-r,T].$$

Siguiendo este proceso, podemos probar por inducción que

$$\|F^nx(t)-F^nv(t)\| \leq \frac{(MLT^2)^n}{2n!}\|x-v\|.$$

Dado que para n suficientemente grande

$$\frac{(MLT^2)^n}{(2n!)} < 1$$

y que $C([-r,T];\mathbb{R}^n)$ con la norma

$$\|\varphi\| = \max_{\theta\in[-r,T]}\{|\varphi(\theta)|\}$$

es completo, se sigue del Teorema del Punto Fijo de Banach que F tiene un único punto fijo $x\in C([-r,T];\mathbb{R}^n)$. Luego de la definición 3.1 se sigue el resultado.

✠

3.2. Controlabilidad del Sistema No Lineal con Retardo.

Una vez probada la existencia y unicidad de la solución del problema (3.1) y la representación de la misma, estamos en condiciones de definir la controlabilidad para este sistema y probar el resultado principal de este trabajo.

Definición 3.2 *El sistema (3.1) es controlable sobre J, si para cualquier $\varphi \in C$ y $x_1 \in \mathbb{R}^n$ existe un control $u \in L^2(J;\mathbb{R}^m)$ tal que la solución $x(t)$ de (3.1) satisface $x(T) = x_1$*

Definimos el operador $G_f : L^2(J;\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ como sigue

$$G_f u = \int_0^T \phi^{-1}(s)[B(s)u(s) + \int_0^s f(\tau, x_\tau, u(\tau))d\tau]ds \tag{3.4}$$

donde x_τ es el truncamiento de la solución correspondiente

$$x(t) = x(t, \varphi, u)$$

del sistema (3.1).

Proposición 3.2 *El sistema (3.1) es controlable en J si y sólo si el operador G_f dado por (3.4) es sobreyectivo, esto es:*

$$G_f(L^2(J;\mathbb{R}^n)) = \mathbb{R}^n$$

Lema 3.1 *Sea $u_1, u_2 \in L^2(J;\mathbb{R}^m)$, $\varphi \in C$ y $x_i = x(t, \varphi, u_i)$; i=1,2, las correspondientes soluciones de (3.1). Entonces, ocurre la siguiente estimación*

$$\|x_t^2 - x_t^1\| \leq \sqrt{T} M k \; exp\; (ML\frac{T^2}{2})\|u_2 - u_1\|_{L^2(J;\mathbb{R}^m)}$$

Demostración. Sean x_1, x_2 soluciones de (3.1), correspondientes a u_1, u_2 respectivamente entonces:

$$\begin{aligned} \|x_2(t) - x_1(t)\| &= \|\phi(t)\int_0^t \phi(s)[B(s)u_2(s) - B(s)u_1(s)]ds \\ &+ \phi(t)\int_0^t \phi^{-1}(s)\int_0^s [f(\tau, x_\tau^2, u_2(\tau)) - f(\tau, x_\tau^1, u_1(\tau))]d\tau ds\|, t \in J. \end{aligned}$$

Tomando $M = \max_{\alpha \leq s \leq t \leq T} \{\|\phi(t)\phi^{-1}(s)\|\}$ y consideremos la condición de Lipschitz sobre f.

Así,
$$\begin{aligned} \|x_2(t) - x_1(t)\| &\leq M\|B\| \int_0^t \|u_2(s) - u_1(s)\| ds \\ &+ ML \int_0^t \int_0^t \Big(\|x_\tau^2 - x_\tau^1\| + \|u_2(\tau) - u_1(\tau)\| \Big) d\tau . ds \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Holder obtenemos

$$\int_0^t \|u_2(s) - u_1(s)\| ds \leq \|u_2 - u_1\|_{L^2(J;\mathbb{R}^m)} \sqrt{T}. \tag{1.2}$$

Luego,
$$\begin{aligned} \|x_2(t) - x_1(t)\| &= M\|B\| \|u_2 - u_1\|_{L^2(J;\mathbb{R}^m)} \sqrt{T} + ML \int_0^t \int_0^s \|x_\tau^2 - x_\tau^1\| d\tau ds \\ &+ ML \int_0^t \int_0^s \|u_2(\tau) - u_1(\tau)\| d\tau ds \end{aligned}$$

Usando cambio de variable y desigualdad de Holder tenemos:
$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^s \|u_2(\tau) - u_1(\tau)\| d\tau ds &= \int_0^t \int_\tau^t \|u_2(\tau) - u_1(\tau)\| ds d\tau \\ &= \int_0^t \|u_2(\tau) - u_1(\tau)\| (t - \tau) d\tau \\ &\leq \|u_2 - u_1\|_{L^2(J;\mathbb{R}^m)} \sqrt{T} \end{aligned}$$

Entonces,
$$\begin{aligned} \|x_2(t) - x_1(t)\| &\leq M\|B\| \|u_2 - u_1\|_{L^2(J;\mathbb{R}^m)} \sqrt{T} + ML\|x_\tau^2 - x_\tau^1\| \frac{T^2}{2} \\ &+ ML\|u_2 - u_1\|_{L^2(J;\mathbb{R}^m)} \sqrt{T} \\ &= M\sqrt{T}\Big[\|B\| + L\Big] \|u_2 - u_1\|_{L^2(J;\mathbb{R}^m)} + ML \int_0^t \|x_\tau^2 - x_\tau^1\| (T - \tau) d\tau, \end{aligned}$$
como el lado derecho de esta desigualdad es una función no decreciente en la variable t, resulta que
$$\begin{aligned} \|x_2(t + \theta) - x_1(t + \theta)\| &\leq M\sqrt{T} K \|u_2 - u_1\|_{L^2(J;\mathbb{R}^m)} \\ &+ ML \int_0^t \|x_\tau^2 - x_\tau^1\| (T - \tau) d\tau, \end{aligned}$$
para $t \geq 0$ y $\theta \in [-r, 0]$.

Luego, usando la desigualdad de Gronwall tenemos:

$$\|x_t^2 - x_t^1\| \leq \sqrt{T} Mk\ exp\Big(ML \int_0^t (t-\tau)d\tau\Big)\|u_2 - u_1\|_{L^2(J;\mathbb{R}^m)}$$

Así hemos probado que

$$\|x_t^2 - x_t^1\| \leq \sqrt{T} Mk\ exp\Big(ML\frac{T^2}{2}\Big)\|u_2 - u_1\|_{L^2(J;\mathbb{R}^m)}.$$

✠

Teorema 3.1 *Supongamos que el sistema lineal 3.2 es controlable, $f : J \times C \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es continua en J y uniformemente Lipschitz en $C \times \mathbb{R}^m$ y que*

$$\|B\|M^2L\|W^{-1}\|\Big(\sqrt{T}MK\ exp\Big(ML\frac{T^2}{2}\Big) + 1\Big)\frac{T^3}{2} \leq 1$$

Entonces el sistema (3.1) es Controlable.

Demostración. Tenemos que el sistema (3.2) es controlable, entonces el operador

$$W = \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)B^*(s)\phi^{-1^*}(s)ds$$

es invertible y el operador

(3.5) $$Gu = \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds$$

es sobreyectivo. Veamos que el operador G_f dado por (3.4) es sobreyectivo; para ello consideremos

$$\bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad u_1 \in L^2(J;\mathbb{R}^m) \quad \text{y} \quad \varphi \in C([-r,0];\mathbb{R}^n)$$

y llamaremos $x_1(t) = x(t,\varphi,u_1)$ a la solución correspondiente de (3.1) dada por (3.3); la controlabilidad del sistema (3.2) nos permite garantizar la existencia de un control $u_2 \in L^2(J;\mathbb{R}^m)$ tal que

$$u_2(t) = B^*(t)\phi^{-1^*}W^{-1}[\bar{x} - \int_0^t \phi^{-1}(s)\int_0^s f(\tau, x_\tau^1, u_1(\tau))d\tau ds]$$

$$Gu_2 = \bar{x} - \int_0^T \phi^{-1}(s)\int_0^s f(\tau, x_\tau^1, u_1(\tau))d\tau ds$$

Así,

$$\bar{x} - \int_0^T \phi^{-1}(s)\int_0^s f(\tau, x_\tau^1, u_1(\tau))d\tau ds - \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u_2(s)ds = 0$$

Para este u_2 consideremos la solución correspondiente de (3.1), $x^2(t,\varphi,u_2)$ dada por (3.3) y su respectivo truncamiento x_t^2.

Dado que

$$\bar{x} - \int_0^T \phi^{-1}(s) \int_0^s f(\tau, x_\tau^1, u_1(\tau))d\tau ds \in \mathbb{R}^n,$$

y (3.2) es controlable, existe un control $u_3 \in L^2(J;\mathbb{R}^m)$ tal que

$$u_3(t) = B^*(t)\phi^{-1*}W^{-1}[\bar{x} - \int_0^t \phi^{-1}(s) \int_0^s f(\tau, x_\tau^2, u_2(\tau))]$$

y la correspondiente solución de (3.1) dada por $x_3(t,\varphi,u_3)$. Además,

$$Gu_3 = \bar{x} - \int_0^T \phi^{-1}(s) \int_0^s f(\tau, x_\tau^2, u_2(\tau))d\tau ds$$

y

$$\bar{x} - \int_0^T \phi^{-1}(s) \int_0^s f(\tau, x_\tau^2, u_2(\tau))d\tau ds - \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u_3(s)ds = 0$$

Continuando con este proceso construimos dos sucesiones$\{u_n\}_{n\geq 1} \subset L^2(J;\mathbb{R}^m)$ y $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset C([-r,T];\mathbb{R}^n)$ tales que:

$$(3.6) \qquad \begin{cases} u_{n+1}(t) = B^*(t)\phi^{-1*}W^{-1}[\bar{x} - \int_0^t \phi^{-1}(s) \int_0^s f(\tau, x_\tau^n, u_n(\tau))d\tau ds] \\ \bar{x} - \int_0^T \phi^{-1}(s) \int_0^s f(\tau, x_\tau^n, u_n(\tau))d\tau ds - \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u_{n+1}(s)ds = 0 \end{cases}$$

Probemos ahora que $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(J;\mathbb{R}^m)$. En efecto:

$$\begin{aligned} \|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| &\leq \|B^*\|\|\phi^{-1*}\|\|W^{-1}\| \\ &\times \int_0^T \|\phi^{-1}(s)\| \int_0^s \Big(\|F(\tau, x_\tau^n, u_n(\tau)) - F(\tau, x_\tau^{n-1}, u_{n-1}(\tau))\|\Big) d\tau ds \end{aligned}$$

Consideremos $M = \max\limits_{0\leq s\leq t\leq T}\{\phi^{-1}(s), \phi^{-1*}(t)\}$ y como f cumple con al condición de Lipschitz tenemos que:

$$\begin{aligned} \|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| &\leq \|B^*\|\|M\|\|W^{-1}\| \\ &\times \int_0^T ML \int_0^s (\|x_\tau^n - x_\tau^{n-1}\| + \|u_n(\tau) - u_{n-1}(\tau))\|) d\tau ds \qquad (*) \end{aligned}$$

Por ota parte, usando el lema 1.

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^s \|x_\tau^n - x_\tau^{n-1}\| d\tau ds &= \int_0^T \int_\tau^T \|x_\tau^n - x_\tau^{n-1}\| ds d\tau \\
&= \int_0^T \|x_\tau^n - x_\tau^{n-1}\| (T-\tau) d\tau \\
&\leq \sqrt{T} M K exp\Big(ML\frac{T^2}{2}\Big) \|u_2 - u_1\|_{L^2(J;\mathbb{R}^m)} \frac{T^2}{2}
\end{aligned}$$

Además, usando cambio de variable y desigualdad de Holder tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^s \|u_2(\tau) - u_1(\tau)\| d\tau ds &= \int_0^T \int_\tau^T \|u_2(\tau) - u_1(\tau)\| ds d\tau \\
&= \int_0^T \|u_2(\tau) - u_1(\tau)\| (T-\tau) d\tau \\
&\leq \|u_2 - u_1\|_{L^2(J;\mathbb{R}^m)} \frac{T^2}{2}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (*) se tiene que:

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| &\leq \|B\| \|M^2\| L \|W^{-1}\| \\
&\times \Big[\sqrt{T} M K exp\Big(ML\frac{T^2}{2}\Big) \|u_2 - u_1\|_{L^2(J;\mathbb{R}^m)} T^{\frac{5}{2}} + \|u_2 - u_1\|_{L^2(J;\mathbb{R}^m)} \frac{T^2}{2}\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| &\leq \|B\| \|M^2\| L \|W^{-1}\| \frac{T^2}{2} \\
&\times \Big[\sqrt{T} M K exp\Big(ML\frac{T^2}{2}\Big) + 1\Big] \|u_2 - u_1\|_{L^2(J;\mathbb{R}^m)}
\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado e integrando a ambos miembros y luego elevando a la $\frac{1}{2}$, tenemos que:

$$\|u_{n+1} - u_n\|_{L^2} \leq \|B\| \|M^2\| L \|W^{-1}\| \Big[\sqrt{T} M K exp\Big(ML\frac{T^2}{2}\Big) + 1\Big] \frac{T^3}{2} \|u_2 - u_1\|_{L^2(J;\mathbb{R}^m)}$$

Por lo tanto, si se cumple

$$\|B\| M^2 L \|W^{-1}\| \Big[\sqrt{T} M K \; exp\Big(ML\frac{T^2}{2}\Big) + 1\Big] \frac{T^3}{2} \leq 1$$

Se tiene que $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(J;\mathbb{R}^m)$ y de la completitud de este espacio se garantiza la existencia de $u \in L^2(J;\mathbb{R}^m)$ tal que

$$u_n \to u, \qquad n \to \infty.$$

Para este $u \in L^2(J;\mathbb{R}^m)$ consideremos la solución correspondiente de (3.1) $x(t) = x(t, \varphi, u)$ y probemos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \phi^{-1}(s)\int_0^s f(\tau,x_\tau^n,u_n(\tau))d\tau ds=\int \phi^{-1}(s)\int_0^s f(\tau,x_\tau,u(\tau))d\tau ds, \tag{3.7}$$

donde x_τ es el truncamiento de la solución $x(t,\varphi,u)$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \phi^{-1}(s)\left[\int_0^s \left(f(\tau,x_\tau^n,u_n(\tau))-f(\tau,x_\tau,u(\tau))\right)d\tau\right]ds\\
&\leq ML\int_0^T\int_0^s \left(\|x_\tau^n-x_\tau\|+\|u_n(\tau)-u(\tau)\|\right)d\tau ds\\
&= ML\int_0^T\int_\tau^T \left(\|x_\tau^n-x_\tau\|+\|u_n(\tau)-u(\tau)\|\right)ds d\tau\\
&= ML\int_0^T \left(\|x_\tau^n-x_\tau\|+\|u_n(\tau)-u(\tau)\|\right)(T-\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Luego por el lema 3.1

$$\begin{aligned}
&= ML\int_0^T \sqrt{T}Mk\, exp(ML\frac{T^2}{2})\|u_n-u\|_{L^2(J;\mathbb{R}^m)}(T-\tau)d\tau\\
&+ML\int_0^T \|u_n(\tau)-u(\tau)\|(T-\tau)d\tau.\\
&\leq ML\sqrt{T}Mk\, exp(ML\frac{T^2}{2})\|u_n-u_{n-1}\|_{L^2(J;\mathbb{R}^m)}T\\
&+ML\|u_n-u_{n-1}\|_{L^2(J;\mathbb{R}^m)}\sqrt{T}.\\
&\leq ML\sqrt{T}\Big(Texp(ML\frac{T^2}{2})+1\Big)\|u_n-u_{n-1}\|_{L^2(J;\mathbb{R}^m)}
\end{aligned}$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty}\int_J \left\|\phi^{-1}(s)\left[\int_0^s f(\tau,x_\tau^n,u_n(\tau))-f(\tau,x_\tau,u(\tau))d\tau\right]\right\|ds=0,$$

lo cual prueba (3.7)

Finalmente pasando el limite en (3.6), obtenemos que

$$\bar{x}-\int_0^T \phi^{-1}(s)\int_0^s f(\tau,x_\tau,u(\tau))d\tau ds-\int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds=0$$

Entonces:

$$\int_0^T \phi^{-1}(s)\left[B(s)u(s)+\int_0^s f(\tau,x_\tau,u(\tau))d\tau\right]ds=\bar{x}.$$

Lo que prueba que G_f es sobreyectivo. Luego de la proposición 3.2, podemos concluir que el sistema (3.1) es controlable

✠

Bibliografía

[1] D. Bárcenas, H. Leiva and Z. Sívoli,*A Broad Class of Evolution Equation are Never exactly.* To appear in IMA-JMCI 2004.

[2] H. Leiva y H. Zambrano, *Rank Condiction for the controllability of linear time-Varying System*, International Journal of Control, Vol. 72, 920-931, (1999).

[3] H. Leiva y Zoraida Sívoli, *Contralibilidad Exacta para un Sistema de Ecuaciones Funcionales Semilineales Integrodiferenciales*, To appear in IMA-JMCI 2005.

[4] J. L. Kelley, *Genearl Topology*, International Students Editions,(1970), pp.230-235.

[5] K. Balachandran and R. Sakthivel, *Controlabillity of Functional Semilinear Integrodifferential Systems in Banach Spaces*, Journal of Math. Anal. and Appl. Vol. 255, (2001), pp.447-457.

[6] K. Balachandran and P. Manimegalai,*Controlabillity of Nonlinear Abstract Neutral Evolution Integrodifferential Systems*, Nonlinear Funct. Anal. and Appl., Vol. 7, N0.1 (2002), pp.85-100.

[7] R.F. Curtain and A.J. Pritchard, *Infinite Dimensional Linear Systems*, Lecture Notes in Control a Information Sciences, Vol. 8. Springer Verlag, Berlín (1978).

[8] R.F. Curtain and H. J. Zwart, *An Introduction to Infinite Dimensional Linear Systems Theory*, Text in Applied Mathematics, VOL. 21. Springer Verlag, New York (1995).