Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Grupo de Álgebra

Condiciones locales en un módulo para la linealidad de una función homogénea

Wilmer A. Pereira V.

Trabajo Especial de Grado
Para Optar al Título de
Licenciado en Matemáticas
Tutor: Dr. Juan Rada

Mérida - Venezuela
2005

Índice general

Introducción

Recordamos que si A es un anillo con 1 entonces M es un A-módulo (ó módulo sobre A) por la izquierda, denotado por ${}_AM$, si M es un grupo abeliano con respecto a la operación $+$ y existe una función $A \times M \to M$ (la imagen de (r, x) la denotamos por rx) tal que para todo $r, s \in A$ y $x, y \in M$ se cumple:

1. $r(x + y) = rx + ry$

2. $(r + s)x = rx + sx$

3. $r(sx) = (rs)x$

4. $1x = x$

En vista de que los módulos que trataremos en este trabajo son todos por la izquierda, diremos simplemente que M es un A-módulo.

El concepto de módulo es una generalización del de espacio vectorial; en lugar de restringir los escalares a un cuerpo permitimos en un módulo que los escalares sean elementos de un anillo.

Sea M un A-módulo. Un subconjunto no vacío S de M es un submódulo de M si S es un subgrupo aditivo de M y $rx \in S$ para todo $r \in A$ y $x \in S$. Cuando A es un cuerpo, un submódulo es precisamente un subespacio de un espacio vectorial. Para mayor detalles sobre la teoría de módulos ver [8].

El concepto de transformación lineal entre módulos es bastante conocido. Si A es un anillo y M es un A-módulo, un A-endomorfismo de M es una función $f : M \to M$ que satisface dos condiciones:

1. f es aditiva: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in M$;

2. f es homogénea: $f(rx) = rf(x)$ para todo $r \in A$ y $x \in M$.

Las condiciones de aditividad y homogeneidad son independientes; existen ejemplos de funciones homogéneas que no son aditivas y viceversa. Surge así naturalmente la pregunta: ¿Cuándo una función homogénea es lineal?

En general, tenemos que el conjunto $\mathcal{H}_A(M)$ de las funciones homogéneas definidas sobre M contiene al de los A-endomorfismos $End_A(M)$. Para ciertos módulos estos coinciden. Por ejemplo, si A es el anillo de las matrices 2×2 con elementos en $\mathbb{R}$, entonces para todo A-módulo se tiene que $\mathcal{H}_A(M) = End_A(M)$ (ver ejemplo 1.5 del capítulo 1). Sin embargo, es posible que la contención sea propia como lo muestra el ejemplo 1.3 del mismo capítulo. En este caso, existen funciones homogéneas $f : M \to M$ que no son lineales.

Un problema que ha sido abordado recientemente plantea lo siguiente ([2] - [7]): ¿Cuánta linealidad local hay que imponerle a una función homogénea para que sea lineal? Una manera de imponer linealidad consiste en suponer que la función es lineal en algunos submódulos propios de M. Luego, la pregunta es ¿En cuántos submódulos es necesario imponer linealidad de manera que las funciones homogéneas sean lineales?

Basados en una pregunta de L. Fuchs "Si M es un A-módulo libre ¿Cuál es el mínimo número de submódulos propios necesarios para imponer linealidad?" Maxson y Meyer introdujeron recientemente [6] el concepto de **número que impone linealidad en un módulo**; se trata de un tipo de medida que indica cuánta linealidad local es necesaria para implicar linealidad global. Además, los autores en ese trabajo calculan el número que impone linealidad, denotado por $fln(M)$ (por las siglas en inglés "forcing linearity number"), cuando M es un espacio vectorial, un módulo sobre un dominio entero y un módulo sobre un anillo local.

El objetivo de este trabajo consiste en una revisión cuidadosa de los artículos [6] y [7] y una presentación de sus resultados principales. Concretamente, en el capítulo 2 damos la definición del número $fln(M)$ e ilustramos como calcularlo en algunos módulos particulares. Luego, en el capítulo 3 damos una demostración simplificada del número que impone linealidad para módulos libres finitamente generados sobre un dominio entero (Teorema 3.1):

Teorema: Si D es un dominio entero (que no es cuerpo) entonces

1. $fln(D) = 0$;

2. $fln(D^m) = 1$ para todo entero no negativo $m > 1$.

Finalmente, en el capítulo 4 presentamos el teorema que nos indica como calcular $fln(V)$ para espacios vectoriales sobre un cuerpo (Teorema 4.2):

Teorema: Sea V espacio vectorial sobre el cuerpo K. Entonces:

1. Si $dim_K(V) = 1$ entonces $fln(V) = 0$;

2. Si $dim_K(V) > 1$, entonces $fln(V) = \infty$.

Capítulo 1

Funciones Homogéneas

Comenzaremos este capítulo dando una motivación del problema a estudiar.

Definición 1.1 *Sean M y N módulos sobre A. Una* **transformación lineal***, o A-homomorfismo, de M en N es una función $f : M \to N$ que satisface:*

1) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$*, para todo* $v_1, v_2 \in M$.

2) $f(rv) = rf(v)$*, para todo* $r \in A$ *y* $v \in M$.

En el caso que $M = N$ diremos que f es un A-endomorfismo de M y denotaremos al conjunto de todos los A-endomorfismos de M por $End_A(M)$.

Una pregunta natural que nos podemos hacer es si habrá alguna dependencia entre las condiciones 1) y 2), es decir, ¿implicará 1) a 2) o 2) a 1)? En general, la repuesta es negativa, como se puede observar en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.2 *Consideremos a $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre sí mismo. Construiremos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface 1) pero no 2).*

En primer lugar consideremos a $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. Sabemos que $\sqrt{2}$ y $\sqrt{6}$ son linealmente independientes en ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$, por lo cual podemos extender el conjunto $\{\sqrt{2}, \sqrt{6}\}$ a una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. Definimos en $\mathcal{B}$ la función f como

$$f(b) = \begin{cases} 1, & si \quad b = \sqrt{2} \\ 0, & si \quad b \neq \sqrt{2} \end{cases}$$

Luego, podemos extender linealmente f a $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ de la siguiente manera: dado $x \in \mathbb{R}$, definimos f en x por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} q_i f(b_i), \textit{ donde } \ b_i \in \mathcal{B}, \ \ q_i \in \mathbb{Q}$$

y $\sum_{i=1}^{k} q_i b_i$ es la forma de expresar a x en términos de los elementos de la base. Así, $f : {}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R} \to {}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ cumple con 1) y 2). Sin embargo, si consideramos a $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, f satisface 1) pero no 2). En efecto,

$$f(\sqrt{3}\sqrt{2}) = f(\sqrt{6}) = 0 \neq \sqrt{3} = \sqrt{3}f(\sqrt{2})$$

Ejemplo 1.3 *Sea A un anillo y consideremos A^2 como A-módulo. Sea $g : A^2 \to A^2$ la función definida por*

$$g(x, y) = \begin{cases} (x, 0), & si \quad y = 0 \\ (0, 0), & si \quad y \neq 0 \end{cases}$$

Esta función así definida satisface 2) pero no 1), pues $g(rx, ry) = rg(x, y)$ para todo $r, x, y \in A$. Sin embargo

$$g((1, 0) + (0, 1)) = g(1, 1) = (0, 0) \neq (1, 0) = g(1, 0) + g(0, 1).$$

Sabiendo que las condiciones 1) y 2) son independientes tiene sentido la siguiente definición.

Definición 1.4 *Sea M un módulo sobre A. Una función $f : M \to M$ es una* **función homogénea** *de M si satisface la condición*

$$f(rv) = rf(v), \textit{ para todo } r \in A \textit{ y } v \in M.$$

Es decir, f es homogénea si satisface la condición 2) de la definición de linealidad. Denotaremos por $\mathcal{H}_A(M)$ al conjunto de todas las funciones homogéneas de M. Observamos que la siguiente contención es inmediata

$$End_A(M) \subseteq \mathcal{H}_A(M).$$

Del ejemplo 1.3 podemos ver que esta contención puede ser propia, sin embargo, existen A-módulos M para los cuales $End_A(M) = \mathcal{H}_A(M)$. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.5 *Sea $A = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, el anillo de las matrices 2×2 con elementos en $\mathbb{R}$, M cualquier módulo sobre A y $e_{ij}, 1 \leq i, j \leq 2$, denotará la matriz en A con 1 en la posición (i, j) y cero en otra parte. Notemos que $e_{11} + e_{22}$ es la identidad en A y*

$$e_{ij}e_{pq} = \begin{cases} 0, & si \quad j \neq p \\ e_{iq}, & si \quad j = p \end{cases}$$

Sea $f \in \mathcal{H}_A(M)$. Para cualquier $1 \leq i, j \leq 2$ y $v, w \in M$ tenemos que

$$f(e_{1i}v + e_{2j}w) = f(e_{1i}v) + f(e_{2j}w) \qquad (*)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} f(e_{1i}v + e_{2j}w) &= (e_{11} + e_{22})f(e_{1i}v + e_{2j}w) \\ &= e_{11}f(e_{1i}v + e_{2j}w) + e_{22}f(e_{1i}v + e_{2j}w) \\ &= f(e_{11}e_{1i}v + e_{11}e_{2j}w) + f(e_{22}e_{1i}v + e_{22}e_{2j}w) \\ &= f(e_{1i}v) + f(e_{2j}w) \end{aligned}$$

En particular,

$$f(e_{11}v + e_{11}w + e_{21}w) = f(e_{11}v + e_{11}w) + f(e_{21}w) \qquad (**)$$

Pero $e_{11}v + e_{11}w + e_{21}w = (1 + e_{12})(e_{11}v + e_{21}w)$ y, en consecuencia, por $(*)$

$$\begin{aligned} f(e_{11}v + e_{11}w + e_{21}w) &= (1 + e_{12})f(e_{11}v + e_{21}w) \\ &= (1 + e_{12})[f(e_{11}v) + f(e_{21}w)] \\ &= f(e_{11}v) + f(e_{21}w) + f(e_{11}w) \end{aligned}$$

Se sigue de $(**)$ que

$$f(e_{11}v + e_{11}w) = f(e_{11}v) + f(e_{11}w)$$

Análogamente

$$f(e_{22}v + e_{22}w) = f(e_{22}v) + f(e_{22}w)$$

Finalmente, para cualesquiera $v, w \in M$ tenemos que

$$\begin{aligned} f(v+w) &= (e_{11}+e_{22})f(v+w) \\ &= e_{11}f(v+w)+e_{22}f(v+w) \\ &= f(e_{11}v+e_{11}w)+f(e_{22}v+e_{22}w) \\ &= f(e_{11}v)+f(e_{11}w)+f(e_{22}v)+f(e_{22}w) \\ &= f(e_{11}v+e_{22}v)+f(e_{11}w+e_{22}w) \\ &= f(v)+f(w) \end{aligned}$$

Hemos probado así que $f \in End_A(M)$, por lo tanto $End_A(M) = \mathcal{H}_A(M)$.

Capítulo 2

El Número que Impone Linealidad en un Módulo

En este capítulo introducimos un tipo de medida que indica cuanta linealidad local es necesaria para implicar linealidad global. Esto da origen a la siguiente definición.

Definición 2.1 *Sea $\mathcal{W} = \{S_i : i \in I\}$ una colección no vacía de submódulos propios de ${}_AM$. Diremos que $\mathcal{W}$* **impone linealidad en** *${}_AM$ si cada vez que $f \in \mathcal{H}_A(M)$ y $f\mid_{S_i}: S_i \to M$ es lineal para todo $i \in I$ entonces $f \in End_A(M)$*

Aclaramos esta definición con un ejemplo.

Ejemplo 2.2 *Consideremos el módulo $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}$, el anillo de los enteros. Entonces la función $g : M \to M$ definida por*

$$g(a,b) = \begin{cases} (a,0), & si \quad b = 0 \\ (0,0), & si \quad b \neq 0 \end{cases}$$

satisface $g \in \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}(M)$ pero $g \notin End_{\mathbb{Z}}(M)$ (ver ejemplo 1.3), lo que asegura que $End_{\mathbb{Z}}(M) \subsetneqq \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}(M)$.

Ahora consideremos el submódulo propio $S = 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de M. Demostraremos que S impone linealidad sobre M. Sea $f \in \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}(M)$ y supongamos que f es lineal en S. Entonces para todo $(a,b),(c,d) \in M$ se tiene que

$$\begin{aligned} 2f((a,b)+(c,d)) &= f(2(a,b)+2(c,d)) && \textit{por ser } f \in \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}(M) \\ &= f((2a,2b)+(2c,2d)) \\ &= f(2a,2b)+f(2c,2d) && \textit{porque } f\mid_S \textit{ es lineal} \\ &= 2(f(a,b)+f(c,d)) \end{aligned}$$

Luego,

$$f((a,b)+(c,d)) = f(a,b)+f(c,d).$$

Esto prueba que, $f \in End_{\mathbb{Z}}(M)$

Notemos que si M es un A-módulo tal que $\mathcal{H}_A(M) = End_A(M)$ entonces toda colección de submódulos propios trivialmente impone linealidad. A continuación presentamos un ejemplo que muestra el otro extremo, se trata de un módulo para el cual ninguna colección de submódulos propios impone linealidad en el módulo.

Ejemplo 2.3 *Sea* $\mathbb{R}^2$ *espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$. *En el ejemplo 1.3 vimos que para este espacio vectorial hay funciones homogéneas que no son lineales, es decir,* $End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) \subsetneqq \mathcal{H}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$. *Por otro lado, sabemos que todos los subespacios propios de* $\mathbb{R}^2$ *son de la forma* $\mathbb{R}(x,y)$, *donde* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *Una función* $g \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ *es lineal en cada uno de estos subespacios. En efecto, sean* $r, s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(r(x,y)+s(x,y)) &= g((r+s)(x,y)) \\ &= (r+s)g(x,y) \\ &= rg(x,y)+sg(x,y) \\ &= g(r(x,y))+g(s(x,y)). \end{aligned}$$

Luego, si tomamos $g \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ *pero* $g \notin End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ *se sigue que ninguna colección de subespacios propios de* $\mathbb{R}^2$ *impone linealidad en* $\mathbb{R}^2$.

Un módulo puede tener distintas colecciones de submódulos propios que imponen linealidad. De hecho, si $\mathcal{W}$ impone linealidad entonces es fácil ver que cualquier colección $\mathcal{W}'$ que contiene a $\mathcal{W}$ impone linealidad. Esto nos conduce a estudiar cuál es el mínimo número de submódulos propios que imponen linealidad en un módulo.

Definición 2.4 *Para cada* A*-módulo* M *asignamos el número* $fln(M) \in \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$, *llamado el número que impone linealidad a* M, *como sigue:*

(I) *Si* $\mathcal{H}_A(M) = End_A(M)$, *entonces* $fln(M) = 0$;

(II) *Si* $\mathcal{H}_A(M) \neq End_A(M)$ *y existe alguna colección finita* $\mathcal{W}$ *de submódulos propios de* M *que impone linealidad con* $|\mathcal{W}| = s$, *pero ninguna colección* $\mathcal{W}'$ *de submódulos propios de* M *con* $|\mathcal{W}'| < s$ *impone linealidad, entonces* $fln(M) = s$;

(III) *Si no ocurre ninguna de las condiciones anteriores, entonces* $fln(M) = \infty$

Observemos que para el A-módulo M dado en el ejemplo 1.5 $fln(M) = 0$. En el ejemplo 2.2 encontramos que $fln(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = 1$ y para el A-módulo discutido en el ejemplo 2.3, $fln(M) = \infty$.

Capítulo 3

$fln(D^m)$ cuando D es un Dominio Entero

Calculamos en este capítulo el número que impone linealidad para D^m, cuando D es un dominio entero que no es un cuerpo. En el próximo teorema enunciamos y demostramos este resultado.

Teorema 3.1 *Sea D un dominio entero que no es un cuerpo, y $m \in \mathbb{N}$. Entonces*

1) $fln(D) = 0$

2) $fln(D^m) = 1$, *para todo* $m \geq 2$.

Demostración. Sea D un dominio entero que no es un cuerpo, y $m \in \mathbb{N}$.

1) Para probar que $fln(D) = 0$, por definición, se debe ver que $\mathcal{H}_D(D) = End_D(D)$.

Sea $f \in \mathcal{H}_D(D)$ y $x, y \in D$. Entonces

$$f(x+y) = f((x+y)1) = (x+y)f(1) = xf(1) + yf(1) = f(x) + f(y).$$

En consecuencia, $f \in End_D(D)$ y así $\mathcal{H}_D(D) = End_D(D)$.

2) Mostraremos que $fln(D^m) = 1$, para todo $m \geq 2$.

En primer lugar veremos que $fln(D^m) \neq 0$, $m \geq 2$, es decir, $End_D(D^m) \subsetneqq \mathcal{H}_D(D^m)$. Definamos $f : D^m \to D^m$ por

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \begin{cases} (x_1, \ldots, x_{m-1}, 0), & \text{si} \quad x_m = 0 \\ (0, \ldots\ldots, 0), & \text{si} \quad x_m \neq 0 \end{cases}$$

Probaremos que f es homogénea en D^m, pero no es lineal en D^m.

- $f \in \mathcal{H}_D(D^m)$

  Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in D^m$ y $d \in D$. Consideremos $d \neq 0$, pues para el caso en que $d = 0$ la prueba es inmediata.

  Si $x_m = 0$ entonces $dx_m = 0$, así

$$\begin{aligned} f(dx) &= f(dx_1, \ldots, dx_m) \\ &= (dx_1, \ldots, dx_{m-1}, 0) \\ &= d(x_1, \ldots, x_{m-1}, 0) \\ &= df(x_1, \ldots, x_m) \\ &= df(x) \end{aligned}$$

  Si $x_m \neq 0$ entonces $dx_m \neq 0$, por ser D dominio entero. Luego,

$$\begin{aligned} f(dx) &= f(dx_1, \ldots, dx_m) \\ &= (0, \ldots, 0) \\ &= d(0, \ldots, 0) \\ &= df(x_1, \ldots, x_m) \\ &= df(x) \end{aligned}$$

  Luego, $f \in \mathcal{H}_D(D^m),\ m \geq 2$

- $f \notin End_D(D^m)$

  Sea $x = (1, 0, \ldots, 0)$ y $y = (0, \ldots, 0, 1) \in D^m$. Entonces

  $f(x + y) = f(1, 0, \ldots, 0, 1) = (0, \ldots, 0)$. Por otra parte,

  $f(x) + f(y) = f(1, 0, \ldots, 0) + f(0, \ldots, 0, 1) = (1, 0, \ldots, 0) + (0, \ldots, 0) = (1, 0, \ldots, 0)$

  Luego, $f(x + y) \neq f(x) + f(y)$ y, por lo tanto, $f \notin End_D(D^m)$.

En consecuencia, $End_D(D^m) \subsetneqq \mathcal{H}_D(D^m)$.

Ahora, mostraremos un submódulo propio de D^m que impone linealidad.

Sea $0 \neq d_0 \in D$, no invertible, lo cual asegura que $d_0 D \subsetneqq D$. Así,

$S = d_0 D \times \underbrace{D\times, \ldots, \times D}_{m-1 \text{ veces}}$ es un submódulo propio de D^m. Veamos que S impone linealidad en D^m.

Sea $f \in \mathcal{H}_D(D^m)$, supongamos que $f\mid_S$ es lineal y tomemos $x, y \in D^m$. Así

$$d_o f(x+y) = f(d_0x + d_0y) = f(d_0x) + f(d_0y) = d_0f(x) + d_0f(y) = d_0[f(x) + f(y)].$$

Como $d_0 \neq 0$ se obtiene que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, para todo $x, y \in D^m$.

Luego, $f \in End_D(D^m)$ y, por lo tanto, el submódulo S impone linealidad.

De esta manera, hemos probado que $fln(D^m) = 1$, para todo $m \geq 2$.

$\blacksquare$

Capítulo 4

$fln(K^m)$ cuando K es un Cuerpo

En este capítulo demostramos uno de los teoremas centrales de este trabajo (Teorema 4.2) en el cual se calcula el número que impone linealidad de un espacio vectorial sobre un cuerpo.

Proposición 4.1 *Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K con $dim(V) \geq 2$ y $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in I}$ una colección de subespacios de V.*
Si $\bigcup_{i \in I} W_i \subsetneqq V$, entonces $\mathcal{W}$ no impone linealidad en V.

Demostración. Sea V espacio vectorial sobre K y $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in I}$ una colección de subespacios de V tal que $\bigcup_{i \in I} W_i \subsetneqq V$. Definamos $f : V \to V$ por

$$f(v) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad v \in \bigcup_{i \in I} W_i \\ v, & \text{si no} \end{cases}$$

Probaremos que f es homogénea en V y lineal en cada W_i, pero no es lineal en todo V.

- $f \in \mathcal{H}_K(V)$:

  Sea $v \in V$. Notamos que para cada $r \in K$, $rv \in \bigcup_{i \in I} W_i$ si y sólo si $v \in \bigcup_{i \in I} W_i$. Así, si $v \in \bigcup_{i \in I} W_i$ entonces $f(rv) = 0 = rf(v)$. En el caso que $v \notin \bigcup_{i \in I} W_i$ entonces $rv \notin \bigcup_{i \in I} W_i$, y, por lo tanto, $f(rv) = rv = rf(v)$.

  Luego, f es homogénea.

- f es lineal en cada W_i :

  Como f es homogénea en V se sigue que f es homogénea en cada W_i. Faltaría ver que

$f(u+v) = f(u) + f(v)$ para todo $u, v \in W_i$, $i \in I$. En efecto, sean $u, v \in W_i$. Como W_i es un subespacio sabemos que $u + v \in W_i$ y, en consecuencia, $f(u+v) = 0 = f(u) + f(v)$.

- $f \notin End_K(V)$:

  Sea $0 \neq u \in \bigcup_{i \in I} W_i$ y $v \in V \setminus \bigcup_{i \in I} W_i$. Probaremos que $f(u+v) \neq f(u) + f(v)$.

  Si $u + v \in V \setminus \bigcup_{i \in I} W_i$, entonces $f(u+v) = u + v \neq v = f(u) + f(v)$. Si $u + v \in \bigcup_{i \in I} W_i$ entonces $f(u+v) = 0 \neq v = f(u) + f(v)$

Así, $f \notin End_K(V)$ y por lo tanto $\mathcal{W}$ no impone linealidad en V, como queríamos probar.

∎

Teorema 4.2 *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Entonces*

1. *Si $dim_K(V) = 1$, entonces $fln(V) = 0$.*

2. *Si $dim_K(V) = 2$, entonces $fln(V) = \infty$.*

3. *Si $dim_K(V) > 2$ y K infinito, entonces $fln(V) = \infty$*

Demostración. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K.

1. La prueba es similar a la hecha en el teorema 3.1, donde se muestra que $fln(D) = 0$.

2. Supongamos que la $dim_K(V) = 2$. Sabemos que $V \cong K^2$ y que los subespacios propios de K^2 tienen dimensión menor o igual que uno, en consecuencia, son de la forma $K(x,y)$, para algún $(x,y) \in K^2$.

Si $f \in \mathcal{H}_K(K^2)$ entonces $f\mid_{K(x,y)}$ es lineal. En efecto,

sean $r, s \in K$. Entonces

$$\begin{aligned} f(r(x,y) + s(x,y)) &= f((r+s)(x,y)) \\ &= (r+s)f(x,y) \\ &= rf(x,y) + sf(x,y) \\ &= f(r(x,y)) + f(s(x,y)). \end{aligned}$$

Así, f es lineal en cada uno de los subespacios propios de K^2.

Ahora, Por el ejemplo 1.3, $End_K(K^2) \subsetneqq \mathcal{H}_K(K^2)$. Luego, existe $f \in \mathcal{H}_K(K^2)$ tal que $f \notin End_K(K^2)$. Se deduce de aquí que ninguna colección de subespacios propios de K^2 impone linealidad.

Luego, $fln(V) = \infty$.

3. Supongamos que la $dim_K(V) > 2$ y K infinito. Veamos que la unión de un número finito de subespacios propios de V no puede ser V, es decir, si $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ es una colección de subespacios propios de V entonces $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} V_i \subsetneqq V$ [1]. En efecto, supongamos que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} V_i = V$. Podemos asumir que $V_1 \nsubseteq V_2 \cup V_3 \cup \ldots \cup V_n$, de lo contrario $\displaystyle\bigcup_{i=2}^{n} V_i = V$ y simplemente eliminamos V_1. Sea $x \in V_1$, $x \notin V_2 \cup V_3 \cup \ldots \cup V_n$ y $y \notin V_1$. Consideremos el conjunto $A = \{x + ry : r \in K\} \subseteq V$. Entonces

- A es infinito: si $x + ry = x + sy$ entonces $(r - s)y = 0$ y como $y \neq 0$ concluimos que $r = s$. Como K es infinito entonces A es infinito.
- El único elemento de A que pertenece a V_1 es x : si $x + ry \in V_1$, donde $r \neq 0$, entonces $x + ry = w \in V_1$. Como $x \in V_1$ se sigue que $y = \frac{1}{r}(w - x) \in V_1$, una contradicción.
- Para $i \geq 2$, cada V_i contiene a lo sumo un elemento de A: si $x + ry, x + sy \in V_i$, donde $r \neq s$, entonces $s(x + ry) - r(x + sy) = (s - r)x \in V_i$ y, en consecuencia, $x \in V_i$ donde $i \geq 2$. Una contradicción.

En conclusión, $V_1 \cup \ldots \cup V_n$ contiene a lo sumo n elementos del conjunto infinito $A \subseteq V$. Esto es imposible porque $V = V_1 \cup \ldots \cup V_n$

Finalmente, el resultado se sigue de la proposición 4.1.

∎

Bibliografía

[1] Bhaskara Rao and A. Ramachandra Rao, *Unions and Common Complements of Subspaces*, American Mathematical Monthly 98 (1991), 127-131.

[2] Fuchs, *On Modules which Force Homogeneous Functions to be Linear*, Proc. Amer. Math. soc. 128 (2000) 5-15.

[3] Fuchs, *Forcing Linearity Numbers for Abelian Groups*, Communications in Algebra, 32(5) (2004)1855-1864.

[4] Fuchs and Maxson, *When do Maximals Force Linearity?*, Journal of Pure and Applied Algebra, 141 (1999) 211-224

[5] Kreuzer and Maxson, *Forcing Linearity Numbers for Injective Modules over PID'S*, Archiv der Mahematík 77(6) (2001)476-483.

[6] Maxson and Meyer, *Forcing Linearity Numbers*, Journal of Algebra, 223 (2000), 190-207.

[7] Maxson and Meyer, *How Many Subspaces Force Linearity?*, American Mathematical Monthly (2001), 531-536.

[8] Steven Roman, *Advanced Linear Algebra* , Springer-Verlag 1992