Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Grupo de Análisis Funcional

Espacios de Banach Estrictamente Convexos

Br. Elbis A. Briceño L.

Trabajo Especial de Grado
Para Optar al Titulo de
Licenciado en Matemáticas
Tutor: José Roberto Morales

Mérida-Venezuela

2005

Índice general

Introducción

El interés en las propiedades geométricas de los espacios de Banach se debe, en gran parte, al hecho de que las propiedades topológicas lineales, que son extremadamente útiles en aplicaciones, están ligadas a la bola unitaria del espacio; es decir, el conjunto $\mathrm{B}_{\mathrm{X}}(0,1) = \{x : \|x\| \leq 1\}$. Es así como, en 1936, J.A. Clarkson en su artículo [12], introduce la noción de espacios de Banach uniformemente convexos, en sus estudios e investigaciones de las propiedades diferenciales de funciones definidas sobre un dominio euclidiano siendo el rango un subespacio de Banach. De esta manera, no solamente se dio una solución parcial al problema de hallar una clase concreta de espacios de Banach en los cuales toda función absolutamente continua f con dominio $[0,1]$ fuese derivable casi siempre y demostrándose así que tales espacios eran parte de la clase buscada, sino que además por la riqueza de las propiedades geométricas de estos espacios, su estudio ha proliferado desde entonces, generándose una gran actividad sobre el tema.

Clarkson en el mismo artículo introduce los espacios de Banach estrictamente convexos, los cuales son un poco más amplios que los uniformemente convexos y demostró que en esos espacios el problema no siempre tiene una solución positiva, es decir, existen espacios estrictamente convexos X en los cuales no siempre una función continua $f : [0,1] \to \mathrm{X}$ es diferenciable. Para ello, demostró la convexidad estricta de $(\mathcal{C}_{[0,1]}, \|\cdot\|_\infty)$ utilizando una norma $|||\cdot|||$ equivalente a $\|\cdot\|_\infty$ con la cual el nuevo espacio renormado $(\mathcal{C}_{[0,1]}, |||\cdot|||)$ es estrictamente convexo, basándose en un resultado de Banach que afirma que todo espacio separable es isomorfo a un subespacio de $\mathcal{C}_{[0,1]}$, concluyendo luego que todo espacio de Banach separable admite una norma equivalente estrictamente convexa.

El objetivo de este trabajo es presentar un amplio estudio de la convexidad estricta a través de caracterizaciones, propiedades, relación con otras propiedades geométricas y algunas aplicaciones. Con el propósito de hacer el trabajo autocontenido y facilitar su comprensión, lo hemos dividido en seis capítulos.

Capítulo I: Preliminares.

En éste capítulo nuestro objetivo es enunciar algunas definiciones, propiedades y resultados de la teoría de los espacios de Banach, los cuales servirán de base a los posteriores capítulos. En particular, presentaremos una demostración detallada del teorema de extensión de Hahn-Banach en su versión para espacios vectoriales y damos un ejemplo en donde la extensión de dicho teorema no es única.

Capítulo II: Los Espacios de Banach Estrictamente Convexos.

En este capítulo nuestro objetivo es dar la definición de espacio estrictamente convexo, algunos ejemplos y resultados sobre estos espacios en una manera sencilla y que dan una idea del tipo de los mismos.

Capítulo III: Caracterizaciones de los Espacios Estrictamente Convexos.

La convexidad estricta fue definida primeramente por J. Clarkson [12] y M. Krein [21], ello dio lugar a la aparición de numerosos conceptos de convexidad de un espacio. En este capítulo presentaremos algunas de las caracterizaciones más conocidas y que tienen relación con la igualdad en la desigualdad triangular, los puntos extremales y maximalidad de elementos del espacio dual. Una interesante e importante caracterización de convexidad estricta que expondremos es la que involucra la aplicación dualidad introducida por Beurling y Livingston [8] y que posteriormente fue estudiada por muchos matemáticos entre los que podemos mencionar F. Browder[21] y S. Gudder [19]. En esta sección daremos una caracterización que resuelve a través de la convexidad estricta el problema de la unicidad de extensión de funcionales lineales continuos el cual quedaba planteado en el Capítulo I. También estudiaremos resultados obtenidos recientemente por P. Miličić [35] sobre caracterización de la convexidad estricta a través de la noción de g-ángulo. Finalizamos con un resultado presentado por J. Blatter [9] caracterizando estos espacios mediante la proyección métrica en su trabajo sobre la teoría de aproximación.

Capítulo IV: Propiedades de los Espacios de Banach Estrictamente Convexos.

La propiedad de convexidad uniforme, que es una propiedad totalmente geométrica induce una propiedad topológica: la reflexividad de espacios uniformemente convexos. Este resultado es conocido como el teorema de Milman-Pettis $(1938-1939)$.

En este capítulo veremos algunas propiedades de estabilidad como el espacio producto, el espacio cociente y consideraremos el comportamiento de estas propiedades con respecto a los espacios ℓ_p.

Capítulo V: Relación de los Espacios de Banach Estrictamente Convexos con otras Propiedades Geométricas de los Espacios de Banach.

Clarkson en su artículo [12] introdujo la noción de norma uniformemente convexa en un espacio de Banach. Demostró que para $p > 1$ los espacios ℓ_p y L_p son uniformemente convexos. Por otra parte, D.P. Milman [33] probó la reflexividad de los espacios uniformemente convexos y que tiempo después J. Lindenstrauss y L. Tzafriri [31] logran una demostración de excepcional claridad. Posteriormente; A.R. Lovaglia [32] introdujo el concepto local uniformemente convexo (LUC) y estudio el comportamiento de esta propiedad en relación con el producto de los espacios de Banach del tipo ℓ_p. En esta sección mostraremos la relación existente entre la convexidad estricta y las propiedades antes mencionadas $(UC\ y\ LUC)$ y daremos algunos ejemplos de estas relaciones.

Capítulo VI: Aplicación de los Espacios de Banach Estrictamente Convexos a la Teoría de Aproximación.

Es conocida la amplia aplicación de la teoría de aproximación. Este capítulo lo orientaremos al estudio de su relación con la convexidad estricta, en donde expondremos resultados obtenidos por I. Singer [21] y otros relacionados con el Conjunto de Chebyshev mencionados en la literatura de Megginson [33].

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Introducción

En este capítulo daremos un breve resumen de la teoría de los espacios de Banach; enunciaremos algunas definiciones , propiedades y resultados que nos serán de gran utilidad en el desarrollo de este trabajo.

Todo lo anterior en su mayoría es visto en un curso de Análisis Funcional de la licenciatura, por lo cual la prueba de la mayor parte de ellos no será realizada en este trabajo indicándose la referencia bibliográfica en donde ubicarla.

En concreto, daremos la definición de espacio de Banach, espacio reflexivo, espacio separable, normas equivalentes, espacio producto, espacio cociente y el teorema de Hahn-Banach; el cual será desarrollado en forma completa ya que, es bien conocido que la extensión que se indica en el enunciado no es única dándose en capítulos posteriores condiciones bajo las cuales tal extensión es única.

Denotaremos por $(E, \| \, . \, \|)$ un espacio de Banach, $B_E = \{x \in E / \, \| x \| \leq 1\}$ y $S_E = \{x \in E / \, \| x \| = 1\}$ bola unitaria y la esfera unitaria en E, respectivamente.

1.2. Definiciones y Ejemplos

Definición 1.1. *Sea* $E \neq \emptyset$ *y* $d : E \times E \longrightarrow [0, +\infty)$ *, decimos que* d *es una métrica sobre* E *si:*

i.- $d(x, y) \geq 0$ *y* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii.- $d(x, y) = d(y, x)$

iii.- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall\, x,y,z \in E$

Al par (E,d) *se le llama* ***espacio métrico****.*

Ejemplo 1.1. *Sea* $E \neq \emptyset$ *y consideremos* $d : E \times E \longrightarrow [0,+\infty)$*, definida por:*

$$d(x,y) \;=\; \begin{cases} 1 & si \quad x \neq y \\ 0 & si \quad x = y \end{cases}$$

d *es una métrica llamada métrica discreta, y así* (E,d) *es un espacio métrico.*

Ejemplo 1.2. *Sea* $E = \mathbb{R}$ *y consideremos* $d : E \times E \longrightarrow [0,+\infty)$*, definida por:*

$$d(x,y) \;=\; |x-y| \quad \forall\, x,y \in E$$

entonces (E,d) *es un espacio métrico.*

Definición 1.2. *Sea* E *un espacio vectorial, decimos que* E *es un* ***espacio normado*** *si para cada* $x \in E$ *corresponde un número real* $\|x\|$ *llamado la norma de* x*, la cual satisface:*

i.- $\|x\| \geq 0 \quad y \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii.- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \;\; \alpha \in \mathbb{R}, \;\; x \in E$

iii.- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \;\; \forall\, x,y \in E$

Tal espacio normado lo denotamos como $(E, \|\cdot\|)$.

Ejemplo 1.3. ℓ_p^n*,* $n \in \mathbb{N}$*,* $1 \leq p < \infty$*, es el espacio que consiste de* $n-$*uplas* $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$*, donde* $\alpha_i \in \mathbb{R}$*,* $\forall\, 1 \leq i \leq n$*.*

ℓ_p^n *con la norma* $\|x\|_p = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p\right)^{1/p}$ *es un espacio normado.*

Ejemplo 1.4. *Consideremos ahora* ℓ_∞^n*, el espacio vectorial de todas las* $n-$*uplas* $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$*, donde* $\alpha_i \in \mathbb{R}$*,* $\forall\, 1 \leq i \leq n$*.*

ℓ_∞^n *con la norma* $\|x\|_\infty = \sup\{|\alpha_i| : \;\; 1 \leq i \leq n\}$ *es un espacio normado.*

Ejemplo 1.5. ℓ_∞*, el espacio de todas las sucesiones* $x = \{\alpha_n\}$ *de escalares acotadas, con la norma* $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : \; n \in \mathbb{N}\}$ *es un espacio normado.*

Ejemplo 1.6. $\left(\mathcal{C}_{[a,b]}, \|\cdot\|_\infty\right)$, *es un espacio normado, donde*

$$\mathcal{C}_{[a,b]} = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ f \text{ es continua}\} \quad y \quad \|\cdot\|_\infty = \text{máx}\{|f(t)|\}.$$

Es claro que si $d(x,y) := \|x-y\|$ entonces d es una métrica, por lo tanto todo espacio normado es un espacio métrico.

Definición 1.3. *Un espacio normado $(E, \| \ . \ \|)$ es un espacio de Banach si E con la métrica inducida por $\| \ . \ \|$ es completo.*

A continuación daremos algunos ejemplos de espacios de Banach.

Ejemplo 1.7. *$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ con $n \geq 1$ es un espacio de Banach, donde*

$$\|x\|_2 \quad = \quad \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2} \qquad \text{denota la norma euclideana.}$$

Ejemplo 1.8. *$(\ell_p \ , \ \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < \infty$, es un espacio de Banach donde*

$$\| \ x \ \|_p \quad = \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

Ejemplo 1.9. *$(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, es un espacio de Banach donde c_0 denota el conjunto de todas las sucesiones de números reales que convergen a cero y*

$$\| \ x \ \|_\infty \quad = \quad \sup_{k\geq 1}\{|x_k| : k \in \mathbb{N}\}.$$

Ejemplo 1.10. *$(L_p([0,1]), \|\cdot\|_p)$ $1 \leq p < \infty$, es un espacio de Banach. $L_p([0,1])$ consiste en el conjunto de todas las funciones medibles*

$$f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \qquad \text{tales que}$$

$$\int_0^1 |f(t)|^p dt < \infty$$

siendo

$$\| \ f \ \|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p \ \ dt\right)^{1/p}.$$

Ejemplo 1.11. $\left(\mathcal{C}_{[a,b]}, \|\cdot\|_\infty\right)$ *es un espacio de Banach; ya que al tomar una sucesión de Cauchy $\{f_n\}$ de elementos del espacio converge uniformemente a alguna función f continua, como puede verse en [1].*

Cabe señalar que no todos los espacios normados son espacios de Banach. El siguiente ejemplo, nos muestra la existencia de un espacio normado que no es completo.

Ejemplo 1.12. *Sea* $\Big(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_2\Big)$. *Definamos* $\|\cdot\|_2$ *como*

$$\| f \|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 \quad dt \right)^{1/2}$$

entonces, $\Big(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_2\Big)$ *es un espacio normado pero no es un espacio de Banach.*

Definición 1.4. *Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sean $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ dos normas sobre E. Se dice que $\|\cdot\|$ es equivalente a $|||\cdot|||$, es decir $\|\cdot\| \sim |||\cdot|||$; si existen k_1, k_2 constantes positivas tales que:*

$$k_1\|x\| \leq |||x||| \leq k_2\|x\| \qquad para\ todo \qquad x \in E$$

Teorema 1.1. *En un espacio de dimensión finita todas las normas son equivalentes.*

Una demostración detallada de este teorema la podemos obtener en [1].

Ejemplo 1.13. *En* $\mathbb{R}^n$ *las normas* $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ *y* $\|\cdot\|_\infty$ *son todas equivalentes; ya que*

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_2 \qquad para\ todo \qquad x \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

y

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \quad \|x\|_\infty \qquad para\ todo \qquad x \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

luego de (1.1) *y* (1.2) *se tiene que*

$$\|\cdot\|_1 \quad \sim \quad \|\cdot\|_2 \quad \sim \quad \|\cdot\|_\infty$$

Ejemplo 1.14. *Para cada $x \in (\ell_1, \|\cdot\|_1)$ definimos:*

$$\|x\| = \Big(\|x\|_1^2 + \|x\|_2^2\Big)^{1/2} \qquad para\ todo \qquad x \in \ell_1$$

donde

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \quad , \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}$$

entonces

$$\|x\|_1 \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \quad \|x\|_1 \qquad \textit{para todo} \qquad x \in \ell_1$$

con lo cual se tiene que la norma $\|x\| \sim \|x\|_1$ *en* ℓ_1.

Ejemplo 1.15. *En* $\mathcal{C}[a,b]$ *no todas las normas son equivalentes.*

En efecto, tomando $C[0,1]$ *con* $\|\cdot\|_1$ *y* $\|\cdot\|_\infty$, *estas normas no son equivalentes, puesto que*

$$\|f\|_1 \quad = \quad \int_0^1 |f(t)|dt \quad \leq \quad \int_0^1 \sup|f(t)|dt \quad = \quad \|f\|_\infty$$

pero si definimos

$$f_n(t) \quad = \quad \begin{cases} nt & si \quad 0 \leq t \leq 1/n \\ 2-nt & si \quad 1/n < t < 2/n \\ 0 & si \quad t > 2/n \end{cases}$$

tenemos que $\|f_n\|_\infty = 1$ *y* $\|f_n\|_1 = 1/n$, $n = 1,2,\ldots$ *entonces podemos ver que no existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$k\|f_n\|_\infty \quad \leq \quad \|f_n\|_1. \qquad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{N}$$

Definición 1.5. *Sea* $(E, \|.\|)$ *un espacio de Banach. Se dice que* E *es separable si contiene un subconjunto denso numerable.*

Son ejemplos de espacios separables:

Ejemplo 1.16. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *y* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, *son espacios separables ya que el conjunto de los números racionales* Q *y* Q^n *son subconjuntos densos numerables en* $\mathbb{R}$ *y* $\mathbb{R}^n$ *respectivamente.*

Ejemplo 1.17. ℓ_p , $1 \leq p < \infty$ *son separables; ya que* $\ell_p = [\{e_n : n \in \mathbb{N}\}]$.

Ejemplo 1.18. c_0 *es separable, al tomar de manera similar al ejemplo anterior* $c_0 = [\{e_n : n \in \mathbb{N}\}]$.

Ejemplo 1.19. $\mathcal{C}[a,b]$ *con la métrica definida así:*

$$d(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

En virtud del teorema de aproximación de Weierstrass (ver [1]) sabemos que el conjunto de los polinomios es un subconjunto denso en este espacio. Sin embargo, esta colección no es numerable. Ahora, la colección de todos los polinomios con coeficientes racionales es un subconjunto numerable, denso en $\mathcal{C}_{[a,b]}$*, por lo tanto* $(\mathcal{C}_[a,b],d)$ *es un espacio separable.*

Ejemplos de espacios que no son separables:

Ejemplo 1.20. $L_\infty[0,1]$ *denota el conjunto de todas las funciones medibles acotadas en* $[0,1]$*. Entonces,* $L_\infty[0,1]$ *no es separable; pues, si tomamos* B *la colección de todas las funciones con dominio [0,1]. Entonces,* B *es un subconjunto no numerable de* $L_\infty[0,1]$ *tal que* $\|f-g\|_\infty = 1$*, siempre que* f *y* g *sean miembros diferentes de* B*.*

Ejemplo 1.21. ℓ_∞ *no es separable; pues, si* B *es el subconjunto de* ℓ_∞ *que consiste en todas las sucesiones cuyos términos son del conjunto* $\{0,1\}$*, en* B *es no numerable y* $\|(\alpha_n)-(\beta_n)\|_\infty = 1$ *si* (α_n) *y* (β_n) *son miembros diferentes de* B*.*

Definición 1.6. *Sea* $(E,\|\cdot\|)$ *un espacio normado. El espacio dual de* E *es el espacio vectorial normado* $\mathcal{B}(E,\mathbb{R})$ *formado por todos los funcionales lineales acotados en* E *.*

Este espacio se denota por E^* *y es llamado espacio dual topológico de* E *con la norma*

$$\|f\| = \sup_{x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|} \qquad \text{ó} \qquad \|f\| = \sup_{\|x\|=1}|f(x)|$$

Definición 1.7. *Sea* $(E,\|\cdot\|)$ *un espacio normado. El segundo dual de* E *es el espacio dual* $(E^*)^*$ *de* E^* *y lo denotamos por* E^{**}*.*

Definición 1.8. *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *un espacio normado, el isomorfismo canónico es la función natural* $J : E \longrightarrow E^{**}$ *que asocia a* E *con* E^{**}*, de la manera siguiente,*

$$J(x) = x^{**} \quad \textit{para algún} \quad x^{**} \in E^{**}$$

donde

$$x^{**}(x^*) = x^*(x) \quad , \quad \forall \;\; x^* \in E^*.$$

Definición 1.9. *Un espacio normado* E *es reflexivo si la aplicación* $J : E \to E^{**}$ *es sobreyectiva.*

Son ejemplos de espacios reflexivos los siguientes:

1.- $\ell_p \quad , \quad 1 < p < \infty$

2.- $L^p \quad , \quad 1 < p < \infty$

3.- Todo espacio de Hilbert es reflexivo ya que por el Teorema de representación de Riesz se puede establecer un isomorfismo lineal entre X y X^*.

4.- Todo espacio de dimensión finita es reflexivo ya que $\dim \mathrm{X} = \dim \mathrm{X}^* = \dim \mathrm{X}^{**}$ y un operador lineal $1-1$ entre espacios de dimensión finita de la misma dimensión es también sobreyectivo.

Ejemplos de espacios que no son reflexivos:

1.- ℓ_1

2.- ℓ_∞

3.- L_∞

4.- c_0

5.- $\mathcal{C}[a, b]$

1.3. El Teorema de Hahn-Banach

Unos de los resultados importantes en esta sección de Preliminares es el teorema de Hahn-Banach y sus consecuencias, por lo que daremos una demostración detallada de dichos resultados.

Definición 1.10. *Sea E un espacio lineal. Una aplicación*

$$p : E \to \mathbb{R} \qquad \textit{que satisface:}$$

(a) $p(x) \geq 0 \quad$ para todo $\quad x \in E$

(b) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad$ para todo $\quad x, y \in E \quad$ (subaditiva)

(c) $p(\alpha x) \;=\; \alpha p(x) \quad$ para todo $\quad x \in E, \alpha > 0;$ (positivamente homógenea)

Se denomina *funcional convexo.* Si sólo verifican las dos últimas condiciones la aplicación se llama funcional sublineal.

Lema 1.1. *Sea M un subespacio propio de un espacio lineal real E y sea $x_0 \notin M$. Consideremos $N = [M \cup \{x_0\}]$ y supongamos que f es un funcional lineal sobre M, p un funcional sublineal definido en E tal que:*

$$f(x) \leq p(x) \qquad \textit{para todo} \qquad x \in M$$

Entonces f puede extenderse a un funcional lineal F definido sobre N con la propiedad de que

$$F(x) \leq p(x) \qquad \textit{para todo} \qquad x \in N$$

Demostración. .- Puesto que $f(x) \leq p(x) \in M$, entonces para $y_1, y_2 \in M$, vemos que:

$$\begin{aligned} f(y_1 - y_2) \;&=\; f(y_1) - f(y_2) \;\leq\; p(y_1 - y_2) = p(y_1 + x_0 - y_2 - x_0) \\ &\leq\; p(y_1 + x_0) + p(-y_2 - x_0) \end{aligned}$$

Agrupando por separado los términos que contienen a y_1 y y_2, tenemos que:

$$-p(-y_2 - x_0) - f(y_2) \leq p(y_1 + x_0) - f(y_1) \tag{1.3}$$

Fijemos y_1 y hagamos variar a $y_2 \in$ M. De (1.3) deducimos que el conjunto de números reales

$$\{-p(-y_2 - x_0) - f(y_2)/y_2 \in M\}$$

tiene una cota superior y también extremo superior.
Definamos entonces

$$a = \sup\{-p(-y_2 - x_0) - f(y_2)/y_2 \in M\}$$

De la misma forma, podemos asegurar la existencia de

$$b = \text{ínf}\{p(y_1 + x_0) - f(y_1)/y_1 \in M\}$$

Luego; de (1.3) tenemos

$$a \leq b$$

así que debe existir $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$a \leq c_0 \leq b$$

En el caso en que $a = b$, c_0 es precisamente el valor común.
Entonces, para todo $y \in M$,

$$-p(-y - x_0) - f(y) \leq \ c_0 \leq p(y + x_0) - f(y) \tag{1.4}$$

Puesto que $x_0 \notin M$, podemos expresar cualquier $x \in N$ como

$$x = y + \alpha x_0$$

siendo $\alpha \in K$ único e $y \in M$ único.
Puesto que esta representación es única, la aplicación

$$F : N \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$F(y + \alpha x_0) = f(y) + \alpha \ c_0$$

está bien definida y es además un funcional lineal sobre el subespacio N.

También es evidente que, si $x \in M$,

$$F(y) = f(y),$$

es decir, F extiende a f.

Falta sólo demostrar que $F(x) \leq p(x)$ para todo $x \in N$.

Para ello consideremos 3 casos:

Para todo $x \in N$, con $x = y + \alpha x_0$ debe ser

$$\alpha = 0, \quad \alpha > 0 \quad \text{ó} \quad \alpha < 0$$

(1) $\alpha = 0$. Basta ver que $F(y + \alpha x_0) = F(y)$ y aplicamos luego la hipótesis.

(2) $\alpha > 0$. Consideremos el miembro derecho de (1.4), sustituyendo y por y/α, se tiene que:

$$c_0 \leq p\left(\frac{y}{\alpha} + x_0\right) - f(y/\alpha)$$

Multiplicando por α y puesto que p es un funcional sublineal, tenemos

$$f(y) + \alpha c_0 \leq p(y + \alpha x_0)$$

o bien

$$F(x) \leq p(x)$$

(3) $\alpha < 0$. Consideremos ahora el miembro izquierdo de (1.4) y sustituímos y por y/α. Obtenemos

$$-p(-y/\alpha - x_0) - f(y/\alpha) \leq c_0$$

$$-p(-y/\alpha - x_0) \leq c_0 + f(y/\alpha)$$

Al multiplicar por α, resulta

$$(-\alpha) \quad p(-y/\alpha - x_0) \geq \alpha \quad c_0 + f(y)$$

y por ser $-\alpha > 0$

$$p(y + \alpha x_0) \geq \alpha \quad c_0 + f(y),$$

lo que completa la prueba.

■

Teorema 1.2. ***(Hahn-Banach)****(Versión espacios vectoriales reales)*
Sea M un subespacio del espacio vectorial E, $\boldsymbol{p}$ un funcional sublineal sobre E y $\boldsymbol{f}$ un funcional lineal sobre M tal que, para todo $x \in M$,

$$f(x) \leq p(x)$$

Entonces existe un funcional lineal F en E que extiende a $\boldsymbol{f}$ y tal que $F(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Demostración. Sea $S = \{\hat{f} : D_{\hat{f}} \to \mathbb{R} \ : \ \hat{f}$ lineal que extiende a f y tal que$\hat{f} \leq p(x)\}$
En primer lugar notemos que $S \neq \emptyset$ ya que $f \in S$.
Definamos una relación de orden en S:
Diremos que $\hat{f}_1 < \hat{f}_2$ para todo $\hat{f}_1, \hat{f}_2 \in S$ si $\hat{f}_2$ extiende a $\hat{f}_1$
Entonces " $<$ " es una relación de orden parcial en S ya que, " $<$ " es;

(a) Reflexiva
Si $\hat{f}_1 < \hat{f}_1$
entonces

$D_{\hat{f}_1} \subset D_{\hat{f}_1}$

luego;

$\hat{f}_1 \ = \ \hat{f}_1$ (todo funcional extiende a sí mismo)

(b) Simétrica
Si $\hat{f}_1 < \hat{f}_2$ y $\hat{f}_2 < \hat{f}_1$
entonces

$D_{\hat{f}_1} \subset D_{\hat{f}_2}$ y $D_{\hat{f}_2} \subset D_{\hat{f}_1}$

luego;

$\hat{f}_2 \ = \ \hat{f}_1$

(c) Transitiva

Si $\hat{f}_1 < \hat{f}_2$ y $\hat{f}_2 < \hat{f}_3$

entonces

$D_{\hat{f}_1} \subset D_{\hat{f}_2} \subset D_{\hat{f}_3}$

luego;

$\hat{f}_3|_{D_{\hat{f}_1}} = \hat{f}_2 = \hat{f}_1$

Veamos ahora que $(S, <)$ es inductivamente ordenado.

Sea $T \subset S$, totalmente ordenado y veamos que T posee cota superior.

Definamos

$$\hat{f}_T : \bigcup_{\hat{f} \in T} D_{\hat{f}} \to \mathbb{R} \qquad \text{por}$$

$$\hat{f}_T(x) = \hat{f}(x) \qquad \text{si} \quad x \in D_{\hat{f}}$$

Antes de ver que $\hat{f}_T$ está bien definida, debemos comprobar que su dominio es un subespacio. Si

$$x \in \bigcup_{\hat{f} \in T} D_{\hat{f}},$$

entonces $x \in D_{\hat{f}}$ y puesto que $D_{\hat{f}}$ es subespacio, deducimos que; para $\alpha \in \mathrm{R}$, se tiene $\alpha x \in D_{\hat{f}}$

Supongamos que

$$x, y \in \bigcup_{\hat{f} \in T} D_{\hat{f}}$$

Esto implica que, $x \in D_{\hat{f}_x}$, $y \in D_{\hat{f}_y}$ para algún $\hat{f}_x$, $\hat{f}_y \in T$ y puesto que T es totalmente ordenado, o bien $D_{\hat{f}_x} \subset D_{\hat{f}_y}$ ó bien $D_{\hat{f}_y} \subset D_{\hat{f}_x}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que se cumple la primera inclusión, así

$$x, y \in D_{\hat{f}_y},$$

de lo cual se tiene que

$$x + y \in D_{\hat{f}_y} \qquad \text{dado que} \qquad D_{\hat{f}_y} \text{ es subespacio.}$$

Luego, $\bigcup_{\hat{f} \in T} D_{\hat{f}}$ es subespacio.

Veamos ahora que $\hat{f}_T$ está bien definida. Supongamos que

$$x \in D_{\hat{f}_x} \qquad \text{y} \qquad y \in D_{\hat{f}_y}$$

Por definición de $\hat{f}$, tenemos:

$$\hat{f}_T(x) = \hat{f}_x(x) \qquad \text{y} \qquad \hat{f}_T(x) = \hat{f}_y(x)$$

Como T es totalmente ordenado, $\hat{f}_x$ es una extensión de $\hat{f}_y$ y también $\hat{f}_y$ es una extensión de $\hat{f}_x$. En cualquier caso,

$$\hat{f}_x(x) = \hat{f}_y(x),$$

así $\hat{f}_T$ está bien definida.

Es evidente que $\hat{f}_T$ es una aplicación lineal, que extiende a f y que

$$\hat{f}_T(x) \leq p(x) \qquad \text{para todo} \qquad x \in \bigcup_{\hat{f}_T} D_{\hat{f}}$$

además, si $\hat{f} \in T$ entonces

$$D_{\hat{f}} \subset \bigcup_{\hat{f} \in T} D_{\hat{f}} \qquad \text{y} \qquad \hat{f}_T \mid_{D\hat{f}} = \hat{f}$$

esto nos dice, por definición, que;

$$\hat{f} < \hat{f}_T$$

Así, $\hat{f}_T$ es cota superior de T. De ésta manera, $(S, <)$ es inductivamente ordenado. Luego, por el Lema de Zorn, S tiene un elemento maximal F, esto es;

$$F : D_f \to \mathbb{R}$$

es un funcional lineal que extiende a f y tal que

$$F(x) \leq p(x) \qquad \text{para todo} \qquad x \in D_F$$

y además, si $\hat{f} \in S$ y $F < \hat{f}$ implica que $F = \hat{f}$.

Para completar la prueba del teorema sólo basta comprobar que $D_F = E$.

Supongamos que no es así, esto es, existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin D_F$.

Aplicando el Lema anterior, vemos que F puede extenderse a otro funcional lineal F que extiende a f y tal que

$$F(x) \leq p(x) \quad \text{cuando} \quad x \in [D_F \cup \{x_0\}]$$

Así pues, $F \in S$, y extiende a F, lo que contradice la maximilidad de F.
Por lo tanto, x_0 no puede existir y el dominio de F es todo el espacio E ∎

Como veremos luego, cada funcional continuo definido en un subespacio de un espacio de Banach X tiene una extensión al espacio total (con la misma norma). Pero, para un funcional dado pueden existir muchos funcionales en X (con la misma norma) los cuales extienden al funcional dado; de hecho, si f_1 y f_2 son extensiones de $f \in$ X entonces la combinación convexa de f_1 y f_2 también es una extensión de f como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 1.3. *Sean* X *un espacio normado,* Y $\subset$ X *y* f_1 *y* f_2 *extensiones de* $f : Y \longrightarrow \mathbb{K}$ *que preservan la norma, entonces*

$$\hat{f} = \lambda f_2 + (1 - \lambda) f_1$$

también es extensión de f *y preserva la norma, para todo* $\lambda \in [0, 1]$.

Demostración. Sea $y \in$ Y y veamos que $\hat{f}$ extiende a f. Entonces

$$\begin{aligned} \hat{f}(y) &= \lambda f_2(y) + (1 - \lambda) f_1(y) \\ &= \lambda f(y) + (1 - \lambda) f(y) \qquad \text{ya que } f_1 \text{ y } f_2 \text{ son extensiones de } f \\ &= f(y) \end{aligned}$$

Luego se tiene que $\hat{f}$ es extensión de f. Para ver que $\hat{f}$ preserva la norma, tomemos $x \in$ X entonces,

$$\begin{aligned} |\hat{f}(x)| &\leq \lambda |f_2(x)| + (1 - \lambda) |f_1(x)| \\ &\leq (\lambda \|f_2\| + (1 - \lambda) \|f_1\|) \|x\| \end{aligned}$$

pero, dado que; por hipótesis $\|f_1\| = \|f_2\| = \|f\|$ entonces

$$|\hat{f}(x)| \leq \|f\| \|x\|$$

con lo cual se tiene que

$$\|\hat{f}\| \leq \|f\| \tag{1.5}$$

Ahora, si $x \in \mathrm{Y}$ entonces tenemos

$$|f(y)| = |\hat{f}(y)| \leq \|\hat{f}\|\|y\|$$

y así;

$$\|f\| \leq \|\hat{f}\| \tag{1.6}$$

por lo tanto, de (1.5) y (1.6) se tiene

$$\|\hat{f}\| \leq \|f\|.$$

■

El siguiente es un ejemplo que nos permite ver de una manera más clara lo establecido en el teorema anterior.

Ejemplo 1.22.
Sean $\mathrm{X} = \mathbb{R}^2$ *con la norma* $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ *y* $Y := \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.
definamos

$$f : \mathrm{Y} \to \mathbb{R} \qquad \textit{por}$$

$$f(x, y) = x$$

Es evidente que $\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}$.

f *es lineal pues, para* $x, y \in \mathrm{Y}$ *con* $x = (x_1, 0)$ *y* $y = (x_2, 0)$

$$\begin{aligned} \iota. - \qquad f(x + y) &= f((x_1, 0) + (x_2, 0)) \\ &= x_1 + x_2 \\ &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

$$
\imath\imath.- \quad \begin{aligned} f(\alpha x) &= f(\alpha(x_1,0)) \\ &= f((\alpha x_1,0)) \\ &= \alpha x_1 \\ &= \alpha f(x) \end{aligned}
$$

Además,

$$|f(x,y)| = |x| \leq \|(x,y)\|$$

por otro lado si $|f(1,0)| = 1$ *y* $(x,y) \in \mathrm{Y}$*, entonces*

$$|f(x,y)| \leq \|f\|\|(x,y)\| \leq \|(x,y)\|$$

$$\Rightarrow \qquad \|f\| \leq 1 \qquad (1)$$

De igual manera si $|f(x,y)| = 1$ *tenemos*

$$|f(x,y)| = 1 \leq \|f\|\|(x,y)\|$$

$$\Rightarrow \qquad 1 \leq \|f\| \qquad (2)$$

luego, de (1) *y* (2) *se tiene*

$$\|f\|_{\mathrm{Y}} = 1$$

Así; f *es un funcional lineal acotado en* Y *y* $\|f\| = 1$.

Definamos ahora dos funcionales $f_1, f_2 \in \mathrm{X}$ *tales que* $f_1 \neq f_2$ *y veamos que ambos son extensiones distintos de* f *y que preservan la norma.*

Sean

$$
\begin{aligned} &f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad\qquad && f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ &f_1(x,y) = x + y && f_2(x,y) = x - y \end{aligned}
$$

Claramente f_1 *y* f_2 *son lineales. Además*

$\imath.-$ $|f_1(x,y)| = |x+y| \leq |x| + |y| = \|(x,y)\|$

$$\Rightarrow \qquad |f_1(x,y)| \leq \|(x,y)\|$$

ıı.– $|f_2(x,y)| = |x - y| \leq |x| + |y| = \|(x,y)\|$

$$\Rightarrow \qquad |f_2(x,y)| \leq \|(x,y)\|$$

Luego, f_1 y f_2 son acotados.

Si $(x,y) \in \mathrm{Y}$ entonces

$$f_1(x,y) = f_1(x,0) = x = f(x,y)$$

luego, f_1 extiende a f.

De manera similar se ve que f_2 extiende a f.

Si $(x,y) \in \mathrm{X}$ entonces;

$$\begin{aligned} |f_1(x,y)| &= |x+y| \leq |x| + |y| \\ &= \|(x,y)\| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad |f_1| \leq 1 = \|f\|$$

$$\Rightarrow \qquad |f_1| \leq \|f\|$$

Si $(x,y) \in \mathrm{Y}$ entonces

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &= |f_1(x,y)| \qquad \textit{pues } f_1 \textit{ extiende a } f \\ &\leq \|f_1\|\|(x,y)\| \\ \Rightarrow \qquad \|f\| &\leq \|f_1\| \end{aligned}$$

Así,

$$\|f\| = \|f_1\|$$

Hemos visto que f_1 extiende a f y además, preserva la norma.

De manera similar se verifica para f_2. Por lo tanto f_1 y f_2 son extensiones de f distintos las cuales preservan la norma; así,

$$\|f\|_Y = \|f_1\|_{\mathrm{X}} = \|f_2\|_{\mathrm{X}}$$

En el **Capítulo** 3 referente a la Caracterización de los espacios estrictamente convexos el teorema 3,9 nos da condiciones que nos permiten asegurar la unicidad de la extensión del Teorema de Hahn Banach.

1.3.1. Consecuencias del Teorema de Hahn-Banach

En esta sección se expondrán ciertas consecuencias importantes del teorema de Hahn-Banach. La mayoría de ellas referentes al estudio de funcionales lineales acotados; en particular, se demostrará que, fijado un vector x del espacio, siempre existe un funcional lineal acotado que toma en x el valor $\|x\|$.

Teorema 1.4. *Sea E un espacio normado, M un subespacio de E. Si $f \in M^*$ entonces existe un funcional $F \in E^*$ que extiende a f y tal que*

$$\|F\| \quad = \quad \|f\|$$

Demostración. Puesto que por hipótesis f es un funcional lineal acotado, entonces, para todo $x \in M$,

$$| f(x) | \leq \|f\|.\|x\|$$

Definamos

$$p : E \to \mathbb{R} \qquad \text{por}$$

$$p(x) = \|f\|.\|x\|$$

es evidente que las siguientes afirmaciones son ciertas:

(1) $p(x) \geq 0$ para todo $x \in E$

(2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ para $x, y \in E$

(3) $p(\alpha x) =| \alpha | p(x)$ para $x \in E$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

Así, una vez verificadas éstas afirmaciones, es claro que $p(x)$ es un funcional sublineal simétrico convexo.

Además, $| f(x) |\leq p(x)$ para todo $x \in M$ ya que

$$| f(x) |\leq \quad \|f\|.\|x\| = p(x) \qquad \text{para todo} \qquad x \in M$$

Luego, por el Teorema de Hahn-Banach existe $F \in E^*$ que extiende a f y tal que

$$| F(x) | \quad \leq p(x) \qquad para \quad todo \quad x \in E$$

Resulta evidente de acá que F es un funcional acotado y que

$$\|F\| \leq \|f\| \tag{1.7}$$

por otro lado:

$$|\ f(x)\ | \ = \ |\ F(x)\ |$$

para todo $x \in M$ (ya que F extiende a f). Así

$$\|f\| \ = \sup_{\|x\|=1} |\ f(x)\ | \ = \ \sup_{\|x\|=1} |\ F(x)\ | \ \leq \sup_{\|x\|=1} |\ F(x)\ | \ = \ \|F\|$$

de donde se obtiene

$$\|f\| \leq \|F\| \tag{1.8}$$

Por lo tanto de (1.7) y (1.8) concluimos

$$\|F\| \ = \ \|f\|$$

■

Teorema 1.5. *Sea $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$. Entonces existe un funcional lineal acotado $F \in E^*$ con $\|F\| = 1$ tal que*

$$F(x_0) = \|x_0\|$$

Demostración. Consideremos $M = [\{x_0\}]$ y definamos

$$f : M \to \mathbb{K}$$

$$f(x) = \alpha \|x_0\| \qquad \text{si} \quad x = \alpha\ x_0$$

es evidente que f es una funcional lineal bien definido.

Por otro lado

$$|\ f(x)\ | \ = \ |\ \alpha \|x_0\|\ | \ = \ |\ \alpha\ |\ \|x_0\| \ = \ \|\alpha x_0\| \ = \ \|x\|$$

con lo cual se tiene que f es acotado.

Además

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \mid f(x) \mid = \sup_{\|x\|=1} \|x\| = 1$$

Por el teorema anterior, existe un funcional $f \in E^*$ que extiende a f y además

$$\|F\| = \|f\| = 1$$

Entonces,

$$F(x_0) = f(x_0) = \|x_0\| \qquad \text{ya que} \qquad x_0 \in M \quad y \quad F \quad \text{extiende a} \quad f$$

■

Teorema 1.6. *Sean* $(\mathrm{X}, \| \cdot \|)$ *un espacio de Banach y* $x \in \mathrm{X}$. *Entonces*

$$\|x\| = \sup\{|x^* x| : x^* \in \mathrm{B}_{\mathrm{X}^*}\}$$

Además; este supremo es alcanzado en algún punto de B_{X^*}.

Demostración. Si $x = 0$, entonces la fórmula para $\|x\|$ es trivialmente cierta y el supremo se alcanza en cada punto de $\mathrm{B}_{\mathrm{X}^*}$.
Supongamos entonces que $x \neq 0$. Como

$$|x^*(x)| \leq \|x^*\| \|x\| \leq \|x\| \qquad \text{siempre que} \qquad x^* \in \mathrm{B}_{\mathrm{X}^*}$$

entonces,

$$\|x\| \geq \sup\{|x^*(x)| : x^* \in \mathrm{B}_{\mathrm{X}^*}\}.$$

Por el teorema anterior existe $x_0^* \in \mathrm{X}^*$ tal que $\|x_0^*\| = 1$ y $x_0^* = \|x\|$ y así

$$\|x\| = \sup\{|x^*(x)| : x^* \in \mathrm{B}_{\mathrm{X}^*}\}$$

alcanzándose el supremo en x_0^*.

Capítulo 2

Espacios de Banach Estrictamente Convexos (EC)

2.1. Introducción

El estudio de la geometría de los espacios de Banach está relacionado con la bola unitaria B_E. Las primeras consideraciones sobre los espacios estrictamente convexos (EC), también llamados espacios rotundos (R) se deben a A. J. Clarkson y M. G. Krein quienes las introdujeron de forma independiente, dando algunas propiedades interesantes de esta clase de espacios de Banach.

Para darnos una idea geométrica de este tipo de espacios, imaginemos la bola unitaria cerrada en los espacios $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$ $(fig1)$, $(\ell_1, \|\cdot\|_2)$ $(fig2)$ y $(\ell_\infty, \|\cdot\|_2)$ $(fig3)$

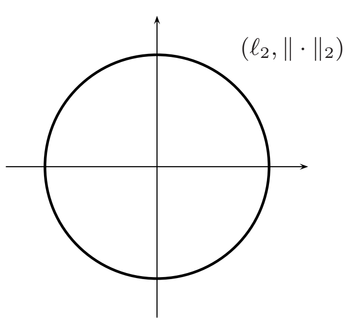

Figura 1

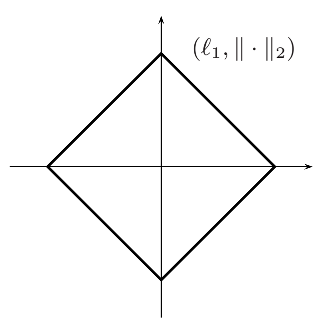

Figura 2

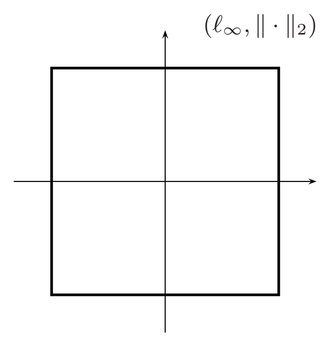

Figura 3

Nótese que ninguno de las bolas unitarias de las dos últimas figuras mencionadas son redondas en el sentido usual de la palabra, ya que sus fronteras; las cuales se llaman esferas, están formadas por cuatro segmentos de linea recta, como también no son lisos debido a que dichas figuras tienen cuatro esquinas. Es evidente que esto no ocurre con la figura 1 referente al espacio $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$. Todo lo antes mencionado se conoce como la propiedad de rotundidad o redondez de los espacios de Banach estrictamente convexos.

El propósito de este capítulo es dar la definición de espacios estrictamente convexos (EC) introducida por J.A. Clarkson en 1936 [12], en su artículo sobre los espacios uniformemente convexos (UC). En dicho artículo Clarkson la define como una propiedad muy especial de los espacios normados cuyas bolas unitarias son redondas, en el sentido de que la esfera unitaria no posee segmentos rectilíneos.

2.2. Espacios Estrictamente Convexos

Definición 2.1. *Un espacio de Banach* $(E, \|\,.\,\|)$, *se dice que es* ***estrictamente convexo***, *(EC), si para todo* $x, y \in S_E$ *con* $\| x+y \| = 2$ *se tiene que* $x = y$.

Geométricamente, ésta definición nos dice que la esfera unitaria del espacio no contiene segmentos lineales.

A continuación damos algunos ejemplos de espacios de Banach que son estrictamente convexos.

Ejemplo 2.1. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ *es EC.*

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. *Supongamos que para* $x, y \in S_E$ *y* $\|x+y\|_2 = 2$, *con* $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$.

$$\|x+y\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2\right)^{1/2}$$

Veamos que $x = y$.

$$\begin{aligned} 4 &= \|x+y\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^2 = \sum_{i=1}^{n}|x_i^2+2x_iy_i+y_i^2| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| + \sum_{i=1}^{n}|y_i|^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 4 \leq 2 + 2\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|$$

$$1 \leq \sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|$$

Entonces $x_i = y_i \quad \forall \ i = 1, \ldots, n$ *ya que si suponemos* $x_i \neq y_i$ *para algún* $i = 1, \ldots, n$

$$x_i x_i \neq y_i x_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \neq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$1 \neq 1 \qquad (\Rightarrow\Leftarrow)$$

Luego, $x = y$. ∎

Teorema 2.1. *Todo espacio con producto interno es E.C.*

Demostración. Sea H un espacio con producto interno y sean $x, y \in H$ con $\|x\| = \|y\| = 1$ y $\|x + y\| = 2$.

Puesto que todo espacio con producto interno satisface la *ley del paralelogramo*, tenemos

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \tag{2.1}$$

de lo anterior tenemos que:

$$\|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x + y\|^2 \tag{2.2}$$

Así

$$\|x - y\| = 0$$

luego;

$$x = y$$

∎

Evidentemente de lo anterior se tiene que todo espacio de Hilbert es EC.

Ejemplo 2.2. $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$, $(\mathbf{L}^2, \|\cdot\|_2)$ *son espacios estrictamente convexos ya que cada uno de ellos es un espacio de Hilbert.*

Seguidamente daremos ejemplos de espacios de Banach que no son estrictamente convexos.

Ejemplo 2.3. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ *no es EC.*

Prueba.-

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ *con*

$$\begin{aligned} x &= e_1 = (1,0,0,\ldots,0) \\ y &= e_2 = (0,1,0,\ldots,0) \end{aligned}$$

entonces; $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$; *además*

$$\|x+y\|_1 = \|(1,0,0,\ldots,0)+(0,1,0,\ldots,0)\|_1 = \|(1,1,0,\ldots,0)\|_1 = 2$$

entonces

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_1 = 1 \quad \textit{pero} \quad x \neq y$$

Por lo tanto $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ *no es EC.* ■

Del ejemplo anterior se tiene que en particular, para n=2, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ no es EC.

Ejemplo 2.4. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *no es EC.*

Prueba

Consideremos

$$\begin{aligned} x &= e_1 + e_2 \\ y &= e_1 - e_2 \end{aligned}$$

entonces,

$$\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1 \qquad y \qquad \|x+y\| = 2$$

pero por definición $x \neq y$. ■

Otros ejemplos de espacios que no son EC.

1.- $(\mathcal{C}_0, \|\cdot\|_\infty)$

2.- $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$

Existen otros ejemplos clásicos de espacios estrictamente convexos, entre los cuales podemos indicar:

1.- $(\ell_p, \|\cdot\|_p), \quad 1 < p < \infty.$

2.- $(L_p, \|\cdot\|_p), \quad 1 < p < \infty.$

3.- $(\mathcal{C}_{[a,b]}, \|\cdot\|_p), \quad 1 < p < \infty.$

La prueba de los anteriores ejemplos será dada en los próximos capítulos una vez que veamos algunas caracterizaciones de los espacios estrictamente convexos.

A.J. Clarkson [12], en su trabajo, mostró un conjunto de desigualdades las cuales son de utilidad para estudiar las propiedades geométricas de los espacios L^p y ℓ_p.

Lema 2.1. *Si* $\quad 2 \leq p < \infty \quad$ *y* $\quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \geq 0 \quad$ *y* $\quad b \geq 0$, *entonces*

$\imath)$ $a^p + b^p \leq (a^2 + b^2)^{\frac{p}{2}}$

$\imath\imath)$ $(a^2 + b^2)^{\frac{p}{2}} \leq 2^{\frac{p-2}{2}}(a^p + b^p).$

Demostración.

$\imath)$ Si a o b son cero, entonces la desigualdad es trivial. Ahora sin perdida de generalidad podemos asumir que ninguno de los dos es cero.

Es obvio que

$$\frac{a^2}{a^2+b^2} \leq 1 \quad \text{y} \quad \frac{b^2}{a^2+b^2} \leq 1$$

así, dado que $p/2 \geq 1$

$$\begin{aligned} {\frac{a^p}{a^2+b^2}}^{p/2} + {\frac{b^p}{a^2+b^2}}^{p/2} &= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)^{p/2} + \left(\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)^{p/2} \\ &\leq \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Luego,

$$a^p + b^p \leq (a^2 + b^2)^{p/2}$$

$\imath\imath$) Nótese que si $p = 2$ la desigualdad es trivial. Si $p > 2$, consideremos $p' = p/2 > 1$ y $q' = \frac{p'}{(p'-1)} = \frac{p}{(p-2)}$, luego

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$$

y utilizando la desigualdad de Hölder para sumas finitas, tenemos

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &\leq ((a^2)^{p'} + (b^2)^{p'})^{1/p'} \\ &= (a^p + b^p)^{2/p}(2^{p-2/2}) \end{aligned}$$

y de acá se tiene,

$$a^2 + b^2 \leq 2^{p-2/2}(a^p + b^p)$$

∎

Teorema 2.2. ***(Desigualdades de Clarkson)****[12]*
sean $f, g \in \mathrm{L^p}(\mu)$ y p, q exponentes conjugados, entonces:

(i.) $$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p\,, \quad si\ p \geq 2.$$

(ii.) $$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_q^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_q^q \leq \left[\frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p\right]^{\frac{1}{p-1}}\,, \quad si\ 1 < p < 2.$$

Demostración. Una prueba detallada de este teorema la podemos encontrar en [20] y [46].

Capítulo 3

Caracterizaciones de los Espacios Estrictamente Convexos (EC)

3.1. Introducción

En 1936, J.A. Clarkson [1] introdujo la noción de espacios de Banach Uniformemente Convexos (U.C.) y mostró que ℓ^p y L^p con $1 < p < \infty$ son U.C.; además mostró que el producto finito de espacios U.C. es U.C. para luego probar que los ℓ^p son U.C.. De ésta manera nació el estudio de los espacios de Banach Estrictamente Convexos (E.C.).

Los espacios de Banach Estrictamente Convexos tienen una amplia aplicación, ya que, por ejemplo; la convexidad estricta tiene gran utilidad en el estudio de la geometría de los espacios de Banach [1],[23],[5], ortogonalidad [23], semi-producto interno [7],[34],[51] y operadores no lineales. Entre las caracterizaciones de convexidad estricta más conocidas que expondremos acá se encuentran las siguientes:

(1) Si $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, $x \neq 0$ entonces $y = cx$ para algún $c > 0$.

(2) Todo elemento de la esfera unitaria es un punto extremo de la bola unitaria.

(3) Todo funcional continuo distinto de cero alcanza su máximo en al menos un punto de la esfera unitaria.

En éste capítulo daremos también otras caracterizaciones de espacios de Banach E.C. en términos de la aplicación dualidad y que servirán para unificar diferentes enfoques obtenidos por Menaker [34], Berkson [7] y Torrance [51]. Así mismo, estudiaremos otras caracterizaciones establecidas por Istratescu [21], Baurbu-Precupanu [3] y Beauzamy [6] entre otros. Otro resultado importante que mostaremos lo representa la caracterización que nos permitirá establecer la unicidad de la extensión del teorema de Hahn-Banach y del cual se hizo mención en el capítulo 1.

Finalmente, expondremos resultados obtenidos recientemente por Miličić [35], basados en la noción de g-ángulo.

3.2. Caracterizaciones de Espacios E.C.

Comenzaremos este capítulo dando caracterizaciones de espacios estrictamente convexos introducidas por Barbu-Precupanu [3] y B. Beauzamy [5], las cuales en lo que sigue nos serán de utilidad para dar otras nociones equivalentes.

Proposición 3.1. *(Barbu-Precupanu [3]) Sea* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio normado.* X *es estrictamente convexo si y sólo si para todo* $x, y \in \mathrm{X}$ *tales que* $x \neq y$ *con* $\|x\| = \|y\| = 1$ *se tiene que*

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\| \quad < \quad 1 \qquad \textit{para todo} \quad \alpha \in (0,1).$$

Demostración.

$\Leftarrow$] Si para $x, y \in \mathrm{X}$, tal que $x \neq y$ con $\|x\| = \|y\| = 1$ se tiene que $\|\alpha x + (1-\alpha)y\| \quad < \quad 1$ para $\alpha \in$(0,1). Entonces para $\alpha = \frac{1}{2}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left\|\tfrac{1}{2}x + (1-\tfrac{1}{2})y\right\| &= \left\|\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y\right\| \\ &= \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \\ &< 1 \end{aligned}$$

Luego X es estrictamente convexo.

$\Rightarrow$] Tomando un vector en el segmento de recta que une x y $\dfrac{x+y}{2}$ el cual es de la forma

$$\alpha x + (1-\alpha)\Big(\frac{x+y}{2}\Big)$$

donde $\alpha \in$ (0,1) y su norma es:

$$\left\|\alpha x + (1-\alpha)\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\right\| < \alpha + (1-\alpha) = 1$$

Por otro lado, un vector en el otro extremo de la recta $\left(\dfrac{x+y}{2}, x\right)$ es de la forma

$$\alpha y + (1-\alpha)\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

con $\alpha \in$(0,1) y de norma

$$\left\|\alpha y + (1-\alpha)\left(\frac{x+y}{2}\right)\right\| < \alpha + (1-\alpha) = 1$$

■

La siguiente caracterización de convexidad estricta de un espacio de Banach, está relacionada con una propiedad máxima de elementos del espacio dual.

Teorema 3.1. *(Istratescu [21]) El espacio de Banach* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *es estrictamente convexo si y sólo si para cada* $f \in \mathrm{X}^*$ *existe a lo más un punto en* $\mathrm{B_X}$ *en el cual* f *alcanza su máximo.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que X es estrictamente convexo y sea f un elemento arbitrario de X^*. Supongamos que existen al menos dos puntos distintos $x, y \in \mathrm{B_X}$ en donde f alcanza el valor máximo.

Podemos asumir sin perdida de generalidad que el máximo valor es 1 y que $\|f\| = 1$.

Dado que

$$\begin{aligned} 1 &= f\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ &\leq \|f\|\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \\ &= \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

entonces,

$$1 \leq \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1$$

de donde obtenemos que

$$\|x+y\| = 2.$$

Así, $x = y$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $x, y \in \mathrm{B_X}$, $\|x\| = \|y\| = 1$ y que $\|x+y\| = 2$. Veamos que $x = y$. Por el teorema de extensión de Banach podemos hallar $f \in \mathrm{X}^*$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(x+y) = 2$.

Puesto que f es lineal se tiene que

$$f(x) + f(y) = 2$$

Así, de lo anterior y puesto que; como por hipótesis, existe $x \in \mathrm{B_X}$ en donde f alcanza su máximo, tenemos que

$$f(x) = f(y) = 1$$

entonces:

$$x = y$$

con lo cual se tiene luego que X es estrictamente convexo. ∎

Otra caracterización de convexidad estricta está basada en la ocurrencia de la igualdad en la desigualdad triangular; un hecho elemental en la geometría Euclideana.

Teorema 3.2. *(Barbu-Precupanu [3]) Sea* X *un espacio lineal normado, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) El espacio X *es estrictamente convexo.*

(ii) Si $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ *y* $x \neq 0$, *existe* $t > 0$ *tal que* $y = tx$

(iii) Si $\|x\| = \|y\| = 1$ *y* $x \neq y$, *entonces* $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1$ *para todo* $\lambda \in (0,1)$

(iv) Si $\|x\| = \|y\| = 1$ *y* $x \neq y$, *entonces* $\|\frac{1}{2}(x+y)\| < 1$

Demostración.

$(i) \rightarrow (ii)$ Sea X estrictamente convexo y sean $x, y \in \mathrm{X} \setminus \{0\}$ tal que

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$$

Como X es un espacio lineal normado y $x \neq 0$ existe $x^* \in X^*$ tal que

$$x^*(x+y) = \|x+y\| \qquad \text{y} \qquad \|x^*\| = 1$$

puesto que

$$\begin{aligned} x^*(x) &\leq \|x^*\|\|x\| \\ &\leq \|x\| \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} x^*(y) &\leq \|x^*\|\|y\| \\ &\leq \|y\| \end{aligned}$$

tenemos que $x^*(x) = \|x\|$ y $x^*(y) = \|y\|$; es decir

$$x^*\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = x^*\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = 1.$$

Como X es estrictamente convexo, se tiene que:

$$\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|}$$

Por lo tanto, tomando $t = \dfrac{\|y\|}{\|x\|}$ se tiene $y = \dfrac{\|y\|}{\|x\|}x = tx.$

$(ii) \rightarrow (iii)$ Supongamos por el contrario que existe $x \neq$ y tal que $\|x\| = \|y\| = 1$ y que

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| = 1 \qquad \text{con} \qquad \lambda \in (0,1).$$

Por lo tanto; como $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ entonces;

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| = \|\lambda x\| + \|(1-\lambda)y\|$$

luego por hipótesis se tiene que existe $t \geq 0$ tal que

$$\lambda x = t(1-\lambda)y$$

y como $\|x\| = \|y\|$ tenemos

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \|t(1-\lambda)y\| \\ \lambda\|x\| &= t(1-\lambda)\|y\| \\ \lambda &= t(1-\lambda) \end{aligned}$$

y así; $x = y$, lo cual es una contradicción.

$(iii) \to (iv)$ Es obvio, tomando $\lambda = 1/2$.

$(iv) \to (i)$ Supongamos que X no es estrictamente convexo.
Entonces existe $x_0^* \in \mathrm{X}^*$ y $x, y \in \mathrm{X}$ con

$$\|x_0^*\| = 1 \quad y \quad \|x\| = \|y\| = 1$$

y además $x = y$ tal que:

$$x_0^*(y) = x_0^*(x) = 1$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} x_0^*\Big(\frac{1}{2}(x+y)\Big) &= x_0^*\left(\frac{x}{2}\right) + x_0^*\left(\frac{y}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}x_0^*(x) + \frac{1}{2}x_0^*(y) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Así;

$$\begin{aligned} \Big\|\frac{1}{2}(x+y)\Big\| &= \sup_{\|x_0^*\| \leq 1} x_0^*\Big(\frac{1}{2}(x+y)\Big) \\ &\geq x_0^*\Big(\frac{1}{2}(x+y)\Big) \\ &= 1 \end{aligned}$$

lo cual contradice (iv). ∎

Proposición 3.2. *[B. Beauzamy [5]] Sea* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach. Entonces* X *es estrictamente convexo si y sólo si, para cada* p*, con* $1 < p < \infty$ *y todos* $x, y \in \mathrm{X}$*, con* $x \neq y$*,*

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p < \frac{1}{2}(\|x\|^p + \|y\|^p) \tag{3.1}$$

Demostración.

Supongamos que X es estrictamente convexo y que x e y no son colineales. Entonces, dado que, para $1 \leq p < \infty$, $f(x) = x^p$ es un funcional convexo, se tiene

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p \leq (\frac{\|x\| + \|y\|}{2})^p \leq \frac{1}{2}(\|x\|^p + \|y\|^p),$$

luego;de la convexidad estricta de X se tiene:

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p < \frac{1}{2}(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

Ahora, si suponemos que x e y son colineales, es decir; $y = tx$, entonces

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p = \left\| \frac{x+tx}{2} \right\| = \left| \frac{1+t}{2} \right|^p \|x\|^p$$

pero

$$\left| \frac{1+t}{2} \right|^p < \frac{1}{2}(1 + |t|^p) \quad \text{para todo} \quad t \neq 1 \quad \text{ya que} \quad p > 1 :$$

Para $t \geq 0$, calculamos las derivadas y recordando que, para $p > 1$, la función $t \to |t|^p$ es derivable y tiene por derivada $pt^{p-1}Sgnt$. Para $t \leq 0$, escribimos

$$\left| \frac{1+t}{2} \right|^p \leq \left| \frac{1-t}{2} \right|^p$$

y así tenemos la implicación probada.

Recíprocamente, supongamos que para todos $x, y \in$ X, (3.1) se cumple para todo $p > 1$. Tomemos $x, y \in S_{\mathrm{X}}$, tales que $\|x\| = \|y\| = 1$. Entonces, en (3.1) se tiene que

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p < 1$$

y finalmente

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1$$

■

Para la siguiente caracterización de espacios estrictamente convexos necesitamos la noción de punto extremal de un conjunto convexo.

Definición 3.1. *Sean* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y* $\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}$ *un subconjunto convexo en* X *y* $z \in \mathrm{Y}$. *Diremos que* z *es un punto extremal de* Y *si existen* $x, y \in \mathrm{Y}$ *tal que* $z = tx + (1-t)y$, *para algún* $t \in [0,1]$ *entonces* $x = y$.

Usando la definición anterior tenemos la siguiente caracterización de espacios estrictamente convexos.

Teorema 3.3. *(Diestel, J. [17]) Sea* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach. Entonces* X *es E.C. si y solo si todo punto* $z \in S_{\mathrm{X}}$ *es un punto extremal de* B_{X}.

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que X es E.C. Veamos que todo $z \in S_{\mathrm{X}}$ con $\|z\| = 1$ es un punto extremal de B_{X}.

Si suponemos por el contrario que la afirmación no es cierta, entonces existe $x, y \in \mathrm{B}_{\mathrm{X}}$, con $x \neq y$ y $t \in (0,1)$ tal que $z = tx + (1-t)y$. Entonces,

$$\begin{aligned} 1 &= \|z\| \\ &= \|tx + (1-t)y\| \\ &\leq t\|x\| + (1-t)\|y\| \\ &< \|x\| + \|y\| \quad = \ 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad 2 = \|x\| + \|y\| < 2$$

$$\Rightarrow \qquad \|x\| = 1 = \|y\|$$

$$\Rightarrow \qquad x, y \in S_{\mathrm{X}}$$

Ahora veamos que $\|x+y\| = 2$. Supongamos que $\|x+y\| < 2$ y tomemos $z = tz + (1-t)z$, entonces

$$\begin{aligned} 1 = \|z\| &= \|tz + (1-t)z\| \\ &= \|t[tx + (1-t)y] + (1-t)[tx + (1-t)y]\| \\ &= \|t^2x + t(1-t)y + t(1-t)x + (1-t)^2y\| \\ &= \|t^2x + t(1-t)(x+y) + (1-t)^2y\| \\ &\leq t^2\|x\| + t(1-t)\|x+y\| + (1-t)^2\|y\| \\ &< t^2 + 2t(1-t) + (1-t)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \qquad 1 = \|z\| < 1$, lo cual es una contradicción.

Así $\|x + y\| = 2$. Esto implica que $x = y$.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que cada z, con $\|z\| = 1$, es un punto extremo de $\mathrm{B_X}$ y veamos que esto implica la convexidad estricta de X.

Es claro que, para cada $x, y \in \mathrm{X}$ tal que

(i) $\|x\| = \|y\| = 1$.

(ii) $\|x + y\| = 2$.

el punto $u = \frac{1}{2}(x + y)$ tiene la propiedad de que $\|u\| = 1$ pues

$$\|u\| = \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| = \frac{\|x+y\|}{2} = 1$$

pero u es un punto extremo y así $x = y$.

De esta manera X es estrictamente convexo. ∎

A continuación damos un ejemplo de un espacio de Banach que no posee puntos extremales.

Ejemplo 3.1. *Consideremos; para $p = 1$, el ejemplo 1.10 con la norma $\|\cdot\|_1$, esto es, $L^1[a, b]$ con la norma*

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt. \qquad \text{para todo} \quad f \in L^1[a, b]$$

Si tomamos $\mathrm{X} = L^1([a, b])$ y $\mathbf{K} = \mathrm{B_X}(0, 1) = \{f \in L^1([a, b]) : \|f\|_1 \leq 1\}$ entonces, $extr(\mathbf{K}) = \emptyset$; es decir, $\mathrm{B_X}(0, 1)$ no tiene puntos extremales. Para ver esto, sea

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt = 1 \quad ; f \in L^1([a, b]).$$

Además, consideremos $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^c |f(t)|dt = \frac{1}{2}$$

sean

$$h(t) = \begin{cases} 2f(t) & si \quad t \in [a,c] \\ o & si \quad t \in [c,b] \end{cases} \qquad y \qquad g(t) = \begin{cases} o & si \quad t \in [a,c] \\ 2f(t) & si \quad t \in [c,b] \end{cases}$$

entonces,

$$\|h\|_1 = \int_a^b |h(t)|dt = 2\int_a^c |f(t)|dt = 1$$

de manera similar se tiene $\|g\|_1 = 1$.

Así, $f(t) = \frac{1}{2}(h(t) + g(t))$, *es decir,* $f \in extr(\mathbf{K})$ *pero* $h(t) \neq g(t)$ *por definición. De lo anterior tenemos que* f *es el punto medio del segmento* $[h, g]$ *cuyos extremos pertenecen a* $\mathbf{K} = \mathrm{B_X}(0,1)$. *Por lo tanto,* $extr(\mathbf{K}) = \emptyset$. ∎

Para la siguiente caracterización necesitamos la noción de punto minimal con respecto a un conjunto, la cual fue introducida por B. Beauzamy y B. Maurey (1977)[6].

Definición 3.2. *Sea* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y* $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{X}$. *Un punto* $x \in \mathrm{X}$ *se llama minimal con respecto a* M *si siempre que* $\|y - m\| \leq \|x - m\|$ *para todo* $m \in \mathrm{M}$ *entonces* $x = y$. *El conjunto de todos los puntos minimales con respecto a* M *se denota por* $min\mathrm{M}$.

La caracterización de espacios estrictamente convexos es:

Teorema 3.4. *Sea* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach. Entonces* X *es estrictamente convexo si y solo si para* $x, y \in \mathrm{X}$ *cualesquiera; los puntos del segmento*

$$[x, y] = \{z = tx + (1-t)y : t \in [0,1]\}$$

son puntos minimales con respecto a el segmento $M = [x, y]$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que X es estrictamente convexo y sea $z_t = tx + (1-t)y \in [x, y]$. Supongamos además que para algún $z \in \mathrm{X}$,

$$\|z - x\| \leq (1-t)\|x - y\| \qquad \text{y} \qquad \|z - y\| \leq t\|x - y\|$$

es claro que

$$\|z - x\| = (1-t)\|x - y\| \qquad \text{y} \qquad \|z - y\| = t\|x - y\|$$

así, de lo anterior, podemos tener que:

$$\|x - y\| = \|x - z\| + \|z - y\|$$

Luego, de la convexidad estricta de X se tiene $x - y = k(z - y)$
lo que implica que z esta en el segmento $[x, y]$.
Así, cualquier punto $z \in [x, y]$ es minimal con respecto a $\{x, y\}$.

$\Leftarrow)$ Supongamos que para $x, y \in \mathrm{X}$ cualesquiera, se tiene que $z \in [x, y]$ es minimal con respecto a $\{x, y\}$ y veamos que X es estrictamente convexo.
Sea $m = 0$ y $n = x + y$ y consideremos $\mathrm{M} := \{0, x + y\}$.

Si $\max(\|x\|, \|y\|) > \|x + y\|$ entonces es claro que

$$\|x + y\| < \|x\| + \|y\|.$$

Ahora, si

$$\|x\| < \|x + y\| \qquad \text{ó} \qquad \|y\| < \|x + y\|$$

entonces; tomemos el único punto x' de el segmento $[0, x + y]$ tal que

$$\|x'\| = \|x\|.$$

Entonces; por hipótesis, este punto único, denotado por x', es minimal con respecto a M, y puesto que $\|x'\| = \|x\|$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|y\| &\leq \|x + y - x'\| \\ &< \|x + y\| \end{aligned}$$

∎

Para la siguiente caracterización de convexidad estricta necesitamos la noción de aplicación dualidad introducida por Beurling y Livingston (1962)[8].

Definición 3.3. *Sean* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y* 2^{X^*} *el espacio de todos los subconjuntos de* X^*. *Definimos una aplicación ponderada a la aplicación continua y estrictamente creciente*

$$\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$

tal que $\varphi(0) = 0$ *y* $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$.

Llamamos aplicación dualidad ponderada φ *a la aplicación*

$$\mathrm{J}(x) = \{x^* \in \mathrm{X}^* : x^*(x) = \|x\|\|x^*\|; \|x^*\| = \varphi(\|x\|)\}$$

La aplicación dualidad que corresponde a la aplicación ponderada $\varphi(t) = t$ *se llama aplicación dualidad normalizada. En esta sección estaremos interesados en una aplicación dualidad* $I : \mathrm{X} \to 2^{\mathrm{X}^*}$ *definida de la manera siguiente:*

$$I(x) = \{x^* : x^* \in \mathrm{X}^*, x^*(x) = \|x\|\|x^*\|\}.$$

Teorema 3.5. *(S.P Gudder y D. Strawther, 1976)[19]*

Sea $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) X *es estrictamente convexo.*

(2) Si $I(y) \subseteq I(x)$ *para* $x \neq 0$ *entonces* $y = cx, \quad c \geq 0$.

(3) Si $I(y) = I(x)$ *entonces* $y = cx$ *para* $c \geq 0$.

Demostración.

$(1) \to (2)$ Supongamos que $x \neq 0$ y $I(y) \subseteq I(x)$ y que por el contrario $y \neq cx$ para algún $c \geq 0$, teniéndose así una contradicción.

Es evidente que $y \neq 0$ ya que de lo contrario tendríamos $I(x) = I(y) = \mathrm{X}^*$ lo cual implica que $x = 0$.

Así, el corolario del teorema de extensión de H-B (forma geométrica) nos asegura la existencia de $x^* \in \mathrm{X}^*$ tal que

$$\|x^*\| = 1 \qquad \text{y} \qquad x^*(y) = \|y\|.$$

De esta manera, tenemos: $x^* \in I(y) \subseteq I(x)$.

Pero además, como $x \neq y$ entonces

$$\frac{x}{\|x\|} \neq \frac{y}{\|y\|}$$

y

$$x^*\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = x^*\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \|x^*\|.$$

Luego, se tiene que x^* alcanza su norma en dos puntos distintos de la esfera unitaria.

Así, X no es estrictamente convexo, lo cual es una contradicción.

(2) $\rightarrow$ (3) Obvio.

(3) $\rightarrow$ (1) Supongamos que X no es estrictamente convexo.
Dado que todo elemento de la esfera unitaria es un punto extremal de la bola unitaria, entonces en el conjunto $\{x : \|x\| = 1\}$ existe un segmento $L \in S_{\mathrm{X}}$ no trivial. Consideremos sobre éste segmento $\{x, y, z, w\}$ elementos distintos.

Supongamos además que:

$$y = \frac{1}{2}(x + w) \qquad x = \frac{1}{2}(y + z)$$

Tomemos ahora $x^* \in I(y)$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} &\left|x^*(x)\right| \leq \|x^*\|\|x\| = \|x^*\| \\ \Rightarrow \qquad &-\|x^*\| \leq x^*(x) \leq \|x^*\| \end{aligned}$$

de la segunda desigualdad tenemos

$$x^*(x) \leq \|x^*\| \tag{3.2}$$

Por otro lado

$$\left|x^*(x) - 2\|x^*\|\right| \leq \|x^*\|$$

$$-\|x^*\| \leq x^*(x) - 2\|x^*\| \leq \|x^*\|$$

tomando la primera desigualdad tenemos

$$-\|x^*\| \leq x^*(x) - 2\|x^*\|$$

$$\|x^*\| \leq x^*(x) \tag{3.3}$$

luego, de (3.2) y (3.3) se tiene que

$$x^*(x) = \|x^*\|$$

y así $x^* \in I(x)$, lo que implica que $I(y) \subseteq I(x)$.
De manera similar se muestra que $I(x) \subseteq I(y)$ y así $I(x) = I(y)$.
Además, $y = cx$ para algún $c \geq 0$; ya que de otra manera $w = dx$ para algún $d \in \mathbb{R}$.
Entonces, como $\|w\| = \|x\| = 1$ tenemos $w = x$ ó $w = -x$.
Pero, como $w \neq x$, entonces $w = -x$ y $y = 0$ lo cual es una contradicción y así $3 \rightarrow 1$.

∎

Ahora usaremos el teorema 3.5 para probar otras caracterizaciones de convexidad estricta.

Definición 3.4. *Una función semipositiva ϕ es una aplicación*

$$\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

que satisface $\phi(\lambda) = 0$ si y solo si $\lambda = 0$.

Definición 3.5. *Una función $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ se llama una pseudogauge si ésta es estrictamente creciente y $\varphi(t) = 0$ si y sólo si $t = 0$.*

Las funciones Psedogauge generalizan las funciones gauge, donde además, φ debe ser continua y $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$. Si φ es una función semipositiva, definimos la aplicación dualidad

$$\mathrm{J}_\varphi : \mathrm{X} \longrightarrow 2^{\mathrm{X}^*}$$

$$\mathrm{J}_\varphi(x) = \{x^* \in \mathrm{X}^* : x^*(x) = \|x\|\|x^*\|, \|x^*\| = \varphi(\|x\|)\}.$$

Si φ es la aplicación $\varphi(t) = t$, llamaremos J_φ la aplicación dualidad normalizada y la denotaremos por J. Nótese que si φ es una función semipositiva, entonces

$$I(x) = \bigcup_{a\geq 0} a\mathrm{J}(x) \qquad \text{para todo} \quad x \in \mathrm{X}$$

Teorema 3.6. *(S.P Gudder y D. Strawther, 1976)[19]*
Sean $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y φ, ψ dos funcionales continuos, semipositivos y decrecientes y además $\varphi(t) = \psi(t) = 0$ si y sólo si $t = 0$. Entonces

(1) Si X *es estrictamente convexo entonces* $\mathrm{J}_{\varphi}(x) \cap \mathrm{J}_{\psi}(y) \neq \emptyset$ *implica que* $y = cx$*, para algún* $c \geq 0$.

(2) Si existe $a > 0$ *tal que* $\varphi(a) = \psi(a)$ *y* $\mathrm{J}_{\varphi}(x) = \mathrm{J}_{\psi}(y)$ *implica que* $y = cx$*, para algún* $c \geq 0$*, entonces* X *es estrictamente convexo.*

Demostración.

(1) Supongamos que X es estrictamente convexo y que $\mathrm{J}_{\varphi}(x) \cap \mathrm{J}_{\psi}(y) \neq \emptyset$ y $y \neq cx$ para $c \geq 0$.

Sea $x^* \in \mathrm{J}_{\varphi}(x) \cap \mathrm{J}_{\psi}(y)$. Ahora, $x^* \neq 0$ pues en el caso contrario tendríamos $x = y = 0$. Así mismo, $x \neq 0 \neq y$, pues de otra manera se tendría

$$\|x^*\| = \psi(\|y\|) = \varphi(\|x\|) = 0.$$

Además,

$$\frac{y}{\|y\|} \neq \frac{x}{\|x\|}$$

y de esta manera tenemos

$$x^* \left(\frac{x}{\|x\|} \right) = x^* \left(\frac{y}{\|y\|} \right)$$

y como $y \neq cx$ para algún $c \geq 0$ tenemos que x^* alcanza su máximo en dos puntos distintos de la bola unitaria cerrada, pero esto contradice la convexidad estricta de X.

Así, tenemos que (1) se cumple.

(2) Supongamos que (2) se cumple y que X no es estrictamente convexo.

Asumemos que $I(x) = I(y)$. Si $x = 0$ ó $y = 0$ entonces el otro es cero. Así podemos suponer sin perdida de generalidad que x e y son elementos de X tales que $x \neq 0 \neq y$.

Tomemos $x^* \in \mathrm{J}_{\psi} \left(\frac{ay}{\|y\|} \right)$.

Entonces

$$x^* \in I(y) = I(x) = I \left(\frac{ax}{\|y\|} \right)$$

Por tanto,

$$\|x^*\| = \varphi(a) = \psi(a) = \varphi\left(\frac{ax}{\|x\|}\right)$$

así,

$$x^* \in \mathrm{J}\varphi\left(\frac{ax}{\|x\|}\right)$$

lo cual implica la inclusión

$$\mathrm{J}\varphi\left(\frac{ay}{\|y\|}\right) \subseteq \mathrm{J}\varphi\left(\frac{ax}{\|x\|}\right)$$

De manera similar podemos ver

$$\mathrm{J}\varphi\left(\frac{ax}{\|x\|}\right) \subseteq \mathrm{J}\psi\left(\frac{ay}{\|y\|}\right)$$

Así, tenemos que los dos conjuntos son iguales y esto implica que $y = cx$ para algún $c \geq 0$.

Luego, por el teorema anterior se tiene que X es estrictamente convexo.

∎

De este teorema se derivan resultados obtenidos por E. Torrance (1970)[51], E. Berkenson(1965)[7] y R. Menaker (1969)[34].

Corolario 3.1. *Sean* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y* φ *una función Pseudogauge. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) X *es estrictamente convexo.*

(2) $\mathrm{J}_\varphi(x) \cap \mathrm{J}_\varphi(y) = \emptyset$ *si* $x \neq y$.

(3) Si $\mathrm{J}_\varphi(x) \subseteq \mathrm{J}_\varphi(y)$ *entonces* $y = cx$.

(4) $\mathrm{J}_\varphi(x) \neq \mathrm{J}_\varphi(y)$ *si* $x \neq y$.

Demostración.

(1) $\rightarrow$ (2) Supongamos que X es EC y que $\mathrm{J}_\varphi(x) \cap \mathrm{J}_\varphi(y) \neq \emptyset$. Entonces, por el teorema

anterior (3.6), $y = cx$ con $c > 0$.

Si $x^* \in \mathrm{J}_\varphi(x) \cap \mathrm{J}_\varphi(y)$ entonces

$$\varphi(\|x\|) = \|x^*\| = \varphi(\|x\|).$$

Si $x = 0$ entonces $y = 0$.

Si $x \neq 0$; como φ es inyectiva,

$$\|y\| = \|x\|.$$

Por lo tanto $c = 1$ y así $x = y$.

(2 $\longrightarrow$ 3) y (3 $\longrightarrow$ 4) son obvias.

(4 $\longrightarrow$ 1) Sigue del teorema (3.6).

■

Corolario 3.2. *(Berkson [7]) Si $\langle x, y\rangle$ es un semi-producto interno en un espacio de Banach entonces,* X *es estrictamente convexo si y sólo si $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$ entonces $y = cx$ para algún $c \geq 0$.*

Demostración. Supongamos primero que X es estrictamente convexo y que para algunos $x, y \in \mathrm{X}$,

$$\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|.$$

En este caso tenemos

$$\begin{aligned}
\Big(\|x\| + \|y\|\Big)\|y\| &\geq \|x + y\|\|y\| \\
&\geq \langle x + y, y\rangle \\
&= \Big(\|x\| + \|y\|\Big)\|y\|
\end{aligned}$$

y podemos suponer sin perdida de generalidad que $x \neq 0 \neq y$.

Así,

$$\|x\| + \|y\| = \|x + y\|$$

y además, de la convexidad estricta de X tenemos $y = cx$ para algún $c \geq 0$.

Recíprocamente, supongamos que X no es estrictamente convexo. Entonces, por el teorema 3.5 existen $x \neq 0$ y $y \neq cx$, con $c \geq 0$, tales que $I(y) \subseteq I(x)$. Como $y \neq 0$ entonces $y \neq cx$

con $c \geq 0$. Consideremos $x^*(z) = \langle z, y\rangle$ para todo $z \in \mathrm{X}$. Entonces $x^* \in \mathrm{J}(y)$ y por tanto $x^* \in I(x)$. Así,

$$\langle x, y\rangle = x^*(x) = \|x^*\|\|x\| = \|x\|\|y\|.$$

∎

Teorema 3.7. *(Torrance E., [51])* X *es estrictamente convexo si y sólo si* $\langle x, y\rangle = \|y\|^2$, *con* $x \neq y$ *entonces* $\|x\| > \|y\|$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que X es estrictamente convexo y que para $x, y \in \mathrm{X}$, con $x \neq y$, $\langle x, y\rangle = \|y\|^2$.

Del resultado anterior tenemos que $y = cx$ lo cual, de la desigualdad

$$\|x\|\|y\| \geq \langle x, y\rangle = \|y\|^2$$

se tiene que

$$\|x\| > \|y\|.$$

$\Leftarrow$) Se procede de manera similar que el corolario anterior (3.2). ∎

Anteriormente se mostró en el teorema (1.3) que el Teorema de extensión de Hahn-Banach no asegura la unicidad de la extensión ya que para algunos funcionales lineales $f : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathbb{K}$ definidos en subespacios $\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}$, es posible construir más de una extensión que preserve la norma.

Usando la noción de convexidad estricta podemos caracterizar la clase de espacios de Banach en donde la extensión es única. El siguiente teorema nos da una caracterización de los espacios de Banach estrictamente convexos para los cuales cualquier funcional definido sobre un subespacio tiene una única extension al dual del espacio mayor preservando la norma.

Teorema 3.8. *(Phelps, R. [43]) Sean* X *un espacio normado,* $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$, *entonces cada* $f \in \mathrm{Y}^*$ *admite una única extensión a* X *que preserva la norma si y sólo si* X^* *es estrictamente convexo*

Demostración.

$\Leftarrow]$ Supongamos que X^* es estrictamente convexo y que $f \neq 0$ admite dos extensiones distintas; f_1 y f_2, que preservan la norma.

Entonces $f_1, f_2 \in X^*$ y además $\|f_1\|_X = \|f_2\|_X = \|f\|_Y$.

Definamos $g_1 = \dfrac{f_1}{\|f\|_Y}$ y $g_2 = \dfrac{f_2}{\|f\|_Y}$ y veamos que g_1 y g_2 son extensiones de $\dfrac{f}{\|f\|_Y}$ y que además preservan la norma.

1.- $\left\| \dfrac{f}{\|f\|_Y} \right\|_Y = \dfrac{\|f\|_Y}{\|f\|_Y} = 1$

2.- $g_\imath(y) = \dfrac{f_\imath(y)}{\|f\|_Y} = \dfrac{f(y)}{\|f\|_Y}$ para todo $y \in Y$ y para $\imath = 1, 2$.

3.- $\|g_\imath\|_X = \left\| \dfrac{f_\imath}{\|f\|_Y} \right\|_X = \dfrac{\|f_\imath\|_X}{\|f\|_Y} = 1.$

Además; $g' = \dfrac{g_1 + g_2}{2}$ es una combinación convexa de g_1 y g_2 por lo tanto, también es extensión de $\dfrac{f}{\|f\|_Y}$

y

$$\left\| \frac{g_1 + g_2}{2} \right\| = 1 \qquad \text{y} \quad g_1 \neq g_2, \quad \|g_1\| = \|g_2\| = 1$$

es decir, X^* no es estrictamente convexo, lo cual es una contradicción.

$\Rightarrow]$ Supongamos que hay unicidad en las extensiones y que X^* no es estrictamente convexo.

Sean $f_1, f_2 : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tales que:

$$f_1 \neq f_2, \|f_1\|_X = \|f_2\|_X = 1 \qquad \text{y} \qquad \left\| \frac{f_1 + f_2}{2} \right\| = 1.$$

entonces existe $c \in X$ tal que $c \neq 0$, $f_1(c) \neq 0$ y $f_1(c) \neq f_2(c)$, porque de lo contrario tendríamos que

1.− $f_1(c) = 0$ para todo $c \in X$ y por tanto $\|f_1\|_X = 0$ lo cual no es posible.

ó

2.– $f_1(c) = f_2(c)$ para todo $c \in$ X lo cual tampoco es posible.

Así que para $a = \dfrac{c}{f_1(c)}$ se tiene que $f_1(a) = 1 \neq f_2(a)$.

Sea Y $:= \{x \in \text{X} : f_1(x) - f_2(x) = 0\}$. Entonces, Y es un subespacio de X, más precisamente Y es el subespacio nulo del funcional lineal acotado $f = f_1 - f_2 \in$ X. Por lo tanto

$$f_1 = f_2 = f \qquad \text{en} \qquad \text{Y}.$$

Puesto que

$$\|f_1 + f_2\|_{\text{X}} = \sup_{\|x\|=1} |f_1(x) + f_2(x)| = 2$$

entonces, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que

$$\|x_n\| = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{\imath\to\infty} |f_1(x_n) + f_2(x_n)| = 2.$$

Como

$$|f_1(x_n)| \leq 1 \qquad \text{y} \qquad |f_2(x_n)| \leq 1$$

pues

$$\|f_1\|_{\text{X}} = \|f_2\|_{\text{X}} = 1$$

entonces la sucesión $\{f_1(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\{f_1(x_{n_\imath})\}_{\imath\in\mathbb{N}}$ convergente.

Sea $\alpha = \lim\limits_{\imath\to\infty} f_1(x_{n_\imath})$ y veamos que $|\alpha| = 1$:

1.– Si $|\alpha| > 1$ entonces $\|f_1\| > 1$, lo cual no es posible.

2.– Si $|\alpha| < 1$ entonces

$$\begin{aligned} 2 &= \lim_{\imath\to\infty} |f_1(x_{n_\imath}) + f_2(x_{n_\imath})| \\ &\leq \lim_{\imath\to\infty} \left[|f_1(x_{n_\imath})| + |f_2(x_{n_\imath})|\right] \\ &\leq |\alpha| + 1 \\ &< 2 \end{aligned}$$

lo cual tampoco es posible.

Por lo tanto, haciendo $\hat{x}_\imath = \dfrac{x_{n_\imath}}{\alpha}$ tenemos que

$$\lim_{\imath\to\infty} f_1(x_{n_\imath}) = 1$$

y como

$$\lim_{\imath\to\infty} |f_1(x_{n_\imath}) + f_2(x_{n_\imath})| = 2$$

entonces

$$\lim_{\imath\to\infty} f_2(\hat{x}_\imath) = 1$$

ya que

$$\begin{aligned}
\lim_{\imath\to\infty} \frac{|f_1(x_{n_\imath}) + f_2(x_{n_\imath})|}{|\alpha|} &= \lim_{\imath\to\infty} |f_1(\frac{x_{n_\imath}}{\alpha}) + f_2(\frac{x_{n_\imath}}{\alpha})| \\
&= \lim_{\imath\to\infty} |f_1(\hat{x}_\imath) + f_2(\hat{x}_\imath)| \\
&= 2
\end{aligned}$$

Ahora, sea

$$ak_\imath = \frac{f_1(\hat{x}_\imath) - f_2(\hat{x}_\imath)}{1 - f_2(a)}$$

entonces

$$k_\imath \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad \imath \to \infty.$$

Sea

$$y_\imath = \frac{\hat{x}_\imath - ak_\imath}{\|\hat{x}_\imath - ak_\imath\|}$$

entonces

$$\begin{aligned}
f_1(y_\imath) &= \frac{f_1(x_\imath) - ak_\imath}{\|\hat{x}_\imath - ak_\imath\|} \\
&= \frac{f_1(\hat{x}_\imath) - \dfrac{f_1(\hat{x}_\imath) - f_2(\hat{x}_\imath)}{1 - f_2(a)}}{\|\hat{x}_\imath - ak_\imath\|} \\
&= \frac{-f_2(a)ak_\imath}{\|\hat{x}_\imath - ak_\imath\|} + \frac{f_2(\hat{x}_\imath)}{\|\hat{x}_\imath - ak_\imath\|} \\
&= f_2(y_\imath)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\{y_\imath\}_\imath \in \mathbb{N}$ es una sucesión en Y con $\|y_\imath\| = 1$ y

$$\begin{aligned}
\lim_{\imath\to\infty} |f_1(y_\imath)| &= \lim_{\imath\to\infty} |f_2(y_\imath)| \\
&= \lim_{\imath\to\infty} |f(y_\imath)| \\
&= \frac{f_1(x_\imath) - ak_\imath}{\|\hat{x_\imath} - ak_\imath\|} \\
&= |\alpha| \\
&= 1
\end{aligned}$$

entonces

$$1 \leq \|f_1\|_{\mathrm{Y}} = \|f_2\|_{\mathrm{Y}} = \|f\|_{\mathrm{Y}}.$$

Además sabemos que

$$|f_1(y)| = |f_2(y)| = |f(y)| \leq \|y\| \qquad \text{para todo} \quad y \in \mathrm{Y}$$

por lo tanto $\|f\|_{\mathrm{Y}} \leq 1$.

Con esto concluimos que $\|f\|_{\mathrm{Y}} = 1$ y como f_1 y f_2 son extensiones de f que preservan la norma entonces por unicidad de las extensiones se tiene que $f_1 = f_2$ en X lo cual es una contradicción.

■

En el año 1993, Pavle M. Miličić [36] introdujo la noción de g-ángulo para caracterizar los espacios con producto interno. Posteriormente, en el año 2002 dicha noción le sería de gran utilidad en la caracterización de los espacios E.C. [35].

Definición 3.6. *Sea* X *un espacio normado real. Sobre* X^2 *definamos las siguientes funciones:*

$$\tau_{\pm}(x,y) := \lim_{t\to\pm 0} t^{-}1(\|x+ty\| - \|x\|),$$

$$g(x,y) := \frac{\|x\|}{2}(\tau_{-}(x,y) + \tau_{-}(x,y)), \quad \textit{para todo} \quad x,y \in \mathrm{X}.$$

El funcional g es visto como una generalización natural de un producto interno y en cualquier espacio normado tiene las siguientes propiedades:

(1) $g(x,x) = \|x\|^2 \quad x \in \mathrm{X}$.

(2) $g(\alpha x, \beta y) = \alpha\beta g(x,y) \quad x, y \in \mathrm{X}; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(3) $g(x, x+y) = \|x\|^2 + g(x,y) \quad x, y \in \mathrm{X}$.

(4) $|g(x,y)| \leq \|x\|\|y\| \quad x, y \in \mathrm{X}$.

Por medio del funcional g definimos las siguientes nociones:

Definición 3.7. *Sean $x, y \in \mathrm{X} \setminus \{0\}$. El número*

$$\sphericalangle(x,y) := \arccos \frac{g(x,y) + g(y,x)}{2\|x\|\|y\|} \qquad (5)$$

se llama el g-ángulo entre x e y.

En lo que sigue, usaremos la notación $\cos(x,y)$ en lugar de $\sphericalangle(x,y)$. Entre algunas propiedades del funcional g podemos mencionar las siguientes:

Lema 3.1. *Sean* X *un espacio normado y $x, y \in \mathrm{X}$. Entonces*

$$-\|x\|\|y\| \leq \|x\|(\|x\| - \|x-y\|) \leq g(x,y) \leq \|x\|(\|x+y\| - \|x\|) \leq \|x\|\|y\| \qquad (6)$$

Demostración. Usando las propiedades (2),(3) y (4) del funcional g, obtenemos

$$g(x, x \pm y) = \|x\|^2 \pm g(x,y) \leq \|x\|\|x \pm y\|$$

de donde se tiene luego que (6) se verifica.

∎

Podemos decir ahora que para $x, y \in S_{\mathrm{X}}$, de (5) y la desigualdad (6) del Lema anterior tenemos que

$$1 - \|x-y\| \leq \cos(x,y) \leq \|x+y\| - 1 \qquad (7).$$

Lema 3.2. *Para $x, y \in \mathrm{X} \setminus \{0\}$, si $\cos(x,y) = 1$ entonces*

$$g(x,y) = g(y,x) = \|x\|\|y\| \qquad (8).$$

Demostración. por hipótesis, tenemos que

$$\cos(x, y) = \frac{g(x, y) + g(y, x)}{2\|x\|\|y\|} = 1$$

de donde,

$$g(x, y) + g(y, x) = 2\|x\|\|y\|.$$

Luego, aplicando la propiedad (4) se verifica la afirmación.

∎

Lema 3.3. *Sea* X *un espacio normado. Entonces*

($\imath$) *Si* $\|x \pm y\| \leq 1$ *entonces* $g(x, y) = 0$ *y* $\|x + ty\| = 1$ *para* $x \in S_{\mathrm{X}}$, $y \in \mathrm{X}$ *y* $t \in [-1, 1]$.

($\imath\imath$) *Si* $\|x \pm y\| \leq 1$ *entonces* $g(x, y) = g(y, x) = 0$ *y* $\|x + ty\| = \|y + tx\| = 1$ *para* $x, y \in S_{\mathrm{X}}$ *y* $t \in [-1, 1]$.

Demostración. Sea $x \in S_{\mathrm{X}}$ y $\|x \pm y\| \leq 1$. Usando la propiedad (3) y (4) obtenemos

$$g(x, x \pm y) = 1 \pm g(x, y) \leq 1.$$

De aquí tenemos que $g(x, y) = 0$ y además

$$|g(x, x + ty)| = 1 \leq \|x + ty\| \quad \text{para cualquier} \quad t \in [-1, 1].$$

Dado que

$$\|x \pm y\| = 1.$$

Además, para $t \in [-1, 1]$ tenemos

$$\begin{aligned}
g(x, x \pm ty) &= 1 \\
&\leq \|x \pm ty\| \\
&= \|x - tx + tx \pm ty\| \\
&= \|(1 - t)x + t(x \pm y)\| \qquad \text{(resp. } \|(1 - t)x + (-t)(x \pm y)\|) \\
&\leq (1 - t) + t \\
&= 1 \quad , \quad \text{si} \ \ 0 \leq t \leq 1 \ \ (\text{resp. } (1 - t) + (-t) = 1 \quad , \quad \text{si} \quad -1 \leq t \leq 0)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|x \pm ty)\| = 1 \quad$ para $\quad t \in [-1, 1]$.

Si en lo anterior asumimos que $y \in S_{\mathrm{X}}$, entonces podemos utilizar los mismos argumentos para x e y, lo que significa que ($\imath\imath$) se verifica también.

∎

Ya es conocido que la convexidad estricta se puede caracterizar por puntos extremales. Si cada punto $x \in S_{\mathrm{X}}$ es un punto extremal de la bola B_{X}, entonces X es estrictamente convexo. El recíproco de esta afirmación también es válido, como también se mostró. Daremos en el siguiente Lema una demostración de la afirmación anterior en términos de la noción de g-ángulo.

Lema 3.4. *Sea* X *un espacio de Banach. Entonces* $x \in S_{\mathrm{X}}$ *es un punto extremal de* B_{X} *si y sólo si para todo* $y \in \mathrm{X}$

$$\|x \pm y\| \leq 1 \qquad \Rightarrow \qquad y = 0. \tag{9}$$

Demostración. sea $x \in S_{\mathrm{X}}$ un punto extremal de la bola B_{X} y sea $\|x \pm y\| \leq 1$. Sea $u = x + y, v = x - y$. Entonces $u, v \in \mathrm{B}_{\mathrm{X}}$ y además $x = \dfrac{u+v}{2}$, así $u = v = x$. De acá tenemos que $y = 0$.

Recíprocamente, sea ahora $x \in S_{\mathrm{X}}$,

$$x = \frac{(x_1 + x_2)}{2} \quad \text{con} \quad x_1, x_2 \in \mathrm{B}_{\mathrm{X}}.$$

Tomemos

$$y = \frac{(x_1 - x_2)}{2}$$

entonces $x + y = x_1$ y $x - y = x_2$ y así

$$\|x \pm y\| \leq 1.$$

Por lo tanto por (9) tenemos que $y = 0$ lo que significa que $x_1 = x_2 = x$.

∎

Lema 3.5. *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

($\imath$) *Si* $x \neq y$ *entonces* $g(x, y) < 1$ *para todo* $x, y \in S_{\mathrm{X}}$.

($\imath\imath$) *Si* $x \neq y$ *entonces* $\cos(x, y) < 1$ *para todo* $x, y \in S_{\mathrm{X}}$.

Demostración.

$(\imath) \Rightarrow (\imath\imath)$ Para todo $x, y \in S_{\mathrm{X}}$ y $x \neq y$, de $g(x,y) < 1$ y $g(y,x) < 1$ tenemos que $\cos(x,y) < 1$ por (5). Así, tenemos $(\imath\imath)$

$(\imath\imath) \Rightarrow (\imath)$ Supongamos por el contrario que $(\imath)$ no se cumple. Esto significa que existen $x, y \in \mathrm{B_X}$ con $x \neq y$ tales que $g(x,y) = 1$. Para estos x y y tenemos que

$$\|x+y\| \leq 2 \qquad \text{y} \qquad g(x, x+y) = 1+1 \leq \|x+y\| = 2$$

de donde

$$\|x+y\| = 2$$

colocando $\quad x+y = u, \quad x-y = v \quad$ tenemos

$$x = \frac{u+v}{2}, \qquad y = \frac{x-y}{2},$$

y así

$$\left\|\frac{u}{2} \pm \frac{v}{2}\right\| = 1$$

y además $\quad \dfrac{u}{2} \in S_{\mathrm{X}}$.

Por lo tanto por (3) tenemos

$$g(x+y, x-y) = g(x+y, x+y-2y) = \|x+y\|^2 - 2g(x+y, y) = 0$$

y

$$g(x+y, y) = 2.$$

Por tanto,

$$g(x+y, x) = g(x+y, x+y-y) = \|x+y\|^2 - g(x+y, y) = 2.$$

Así tenemos que

$$\cos\left(x, \frac{(x+y)}{2}\right) = 1.$$

En vista de que $x \neq \dfrac{(x+y)}{2}$ tenemos que $(\imath\imath)$ no se cumple. ∎

Teorema 3.9. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) X *es estrictamente convexo,*

(b) Si $x \neq y$ *entonces* $g(x,y) < 1$ *para todo* $x, y \in S_{\mathrm{X}}$.

(c) Si $x \neq y$ *entonces* $\cos(x,y) < 1$ *para todo* $x, y \in S_{\mathrm{X}}$.

Demostración. Es suficiente mostrar que X es estrictamente convexo si y sólo si (b) se verifica ya que por el Lema anterior (3.5), se tiene que $(b) \Leftrightarrow (c)$.

$(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que X es $E.C.$ y que por el contrario (b) no se cumple. Entonces existen $x, y \in S_{\mathrm{X}}$ tal que $x \neq y$ y $g(x,y) = 1$. Luego, por (7) tenemos que

$$g(x,y) \leq \|x+y\| - 1$$

de donde tenemos que

$$\|x+y\| = 2$$

dejando, $x + y = u$, $x - y = v$ tenemos que

$$x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}, \frac{u}{2} \in S_{\mathrm{X}}$$

y

$$\left\|\frac{u}{2} \pm \frac{v}{2}\right\| = 1.$$

Del Lema (3.4) concluimos que $v = 0$, es decir que $x = y$, lo que contradice la hipótesis.

$(b) \Rightarrow (a)$ Supongamos que (b) se cumple y que X no es estrictamente convexo. Entonces, por el Lema (3.4) existen $x \in S_{\mathrm{X}}$ y $y \neq 0$ tal que

$$\|x \pm y\| \leq 1.$$

Aplicando el Lema (3.3) concluimos que $g(x,y) = 0$ y $\|x - y\| = 1$. Por lo tanto de (1) tenemos $g(x, x-y) < 1$. Por otra parte tenemos que

$$g(x, x-y) = g(x,x) - g(x,y) = 1$$

lo cual da que $1 < 1$ lo que implica una contradicción. Por tanto, (1) implica la convexidad estricta de X

∎

Corolario 3.3. X *es estrictamente convexo si y sólo si las siguientes dos implicaciones se cumplen:*

($\imath$) *Sean* $x, y \in S_{\mathrm{X}}$. *Si* $\cos(x, y) = 1$ *entonces* $x = y$,

($\imath\imath$) *Sean* $x, y \in S_{\mathrm{X}}$. *Si* $g(x, y) = 1$ *entonces* $x = y$.

Para la siguiente caracterización de convexidad estricta seguiremos la teoría preliminar de Jörg Blatter [9].

Definición 3.8. *Sean* X *un espacio lineal normado y* $\mathrm{D} \subseteq \mathrm{X}$. *Para cada* $x \in \mathrm{X}$, *llamaremos la función distancia de* X *asociada a* D *y a la aplicación*

$$dist(\cdot, \mathrm{D}) : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$dist(x, \mathrm{D}) = inf\{\|x - y\| : y \in \mathrm{D}\}, \quad x \in \mathrm{X}.$$

El número real $dist(x, \mathrm{D})$ se llama *distancia* de x a D. La aplicación $\pi(\ \cdot\ , L) : \mathrm{X} \to 2^{\mathrm{X}}$ definida por

$$\pi(x, L) = \{y \in L : \|x - y\| = dist(x, L)\} \qquad x \in \mathrm{X},$$

se llama la proyección métrica de X en L y para cada $x \in \mathrm{X}$, el subconjunto $\pi(x, L)$ de L se llama el conjunto de las mejores aproximaciones de x en L. L se llama E-subespacio, U-subespacio o EU-subespacio de X si cada $x \in \mathrm{X}$ tiene respectivamente al menos una, a lo sumo una o precisamente una mejor aproximación en L. En el caso que L sea un EU-subespacio de X, a menudo consideraremos $\pi(x, L)$ como la aplicación de X en X en vez de X en 2^{X}.

Teorema 3.10. *Sea* X *un espacio lineal normado. Entonces* X *es estrictamente convexo si y sólo si todos sus subespacios lineales de dimensión finita son U-subespacios.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea D un subespacio lineal de X el cual no es U-subespacio. Así, existe $x \in \mathrm{X}$ que tiene dos mejores aproximaciones $y_1, y_2 \in \mathrm{D}$ con $y_1 \neq y_2$. Entonces

$$\begin{aligned} 2dist(x, \mathrm{Y}) &= dist(2x, \mathrm{Y}) \\ &\leq \|2x - (y_1 + y_2)\| = \|(x - y_1) + (x - y_2)\| \\ &\leq \|x - y_1\| + \|x - y_2\| = 2dist(x, \mathrm{Y}) \end{aligned}$$

y así

$$\|(x - y_1) + (x - y_2)\| = \|x - y_1\| + \|x - y_2\|$$

como $x - y_1, x - y_2 \in \mathrm{X} \setminus \{0\}$, entonces X no es estrictamente convexo.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora, que X no es estrictamente convexo. Entonces existen $x, y \in \mathrm{X}$ tales que

$$\|x\| = \|y\| = \left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| = 1.$$

Sea D la capsula convexa de $(x - y)$. Afirmemos que D no es un U-subespacio de X. Para probar esta afirmación, es suficiente mostrar que

$$\|x - \alpha(x - y)\| \geq 1 \quad \text{para todo} \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

ya que, como

$$\|x - 0\| = \|x - (x - y)\| = 1,$$

0 y $(x - y)$ son las mejores aproximaciones distintas de $x \in \mathrm{D}$. De esta manera, tomemos $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha \geq \frac{1}{2}$, entonces

$$\frac{1}{2}(x - y) = \frac{1}{2\alpha}\Big(x - \alpha(x - y)\Big) + \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right)x$$

y así

$$\begin{aligned} 1 = \left\| \frac{1}{2}(x - y) \right\| &\leq \frac{1}{2\alpha}\|x - \alpha(x - y)\| + \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right)\|x\| \\ &= \frac{1}{2\alpha}\|x - \alpha(x - y)\| + \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) \end{aligned}$$

es decir, $\|x - \alpha(x - y)\| \geq 1$.

Como la situación es simétrica en x y y, se tiene que

$$\|y - \alpha(y - x)\| \geq 1 \quad \text{para} \quad \alpha \geq \frac{1}{2}.$$

Puesto que

$$y - \alpha(y - x) = x - \alpha(x - y)$$

y como

$$\alpha \geq \frac{1}{2} \qquad \text{si y sólo si} \qquad (1 - \alpha) \leq \frac{1}{2}$$

se sigue que

$$\|x - \alpha(x - y)\| \geq 1 \qquad \text{también para} \qquad \alpha \leq \frac{1}{2}$$

$\blacksquare$

Capítulo 4

Propiedades de los Espacios Estrictamente Convexos (EC)

4.1. Introducción

En este capítulo nuestro propósito es estudiar algunas propiedades de los espacios estrictamente convexos; además, estudiaremos cómo se comportan los espacios cociente y producto con respecto a esta propiedad geométrica.

Un hecho interesante que debemos mencionar en las propiedades de los espacios de Banach lo expone A.J. Clarkson [12] en su trabajo sobre convexidad uniforme y es el siguiente:

Si $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ **es un espacio de Banach, entonces, si** X **posee una propiedad topológica y cambiamos la norma del espacio por otra norma equivalente, la propiedad topológica no se pierde, lo que no ocurre; en general, con una propiedad geométrica.**

Por último, estudiaremos lo relacionado a los espacios $\ell_p(\mathrm{X})$ siendo X un espacio de Banach.

4.2. Propiedades de los Espacios Estrictamente Convexos.

Proposición 4.1. *Sea* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach.* X *es estrictamente convexo si y sólo si cada uno de sus subespacios bidimencionales es estrictamente convexo.*

Demostración. Es evidente que si X es estrictamente convexo entonces cada uno de sus subespacios de dimensión dos es estrictamente convexos. Para ver la otra dirección, supongamos que X no es EC. Es suficiente hallar un subespacio $\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}$ de dimensión dos que no sea EC.

Sean $x_1, x_2 \in S_{\mathrm{X}}$ con $x_1 \neq x_2$ tales que

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \in S_{\mathrm{X}}.$$

Si x_1 y x_2 no son linealmente independientes entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_1 = \alpha x_2.$$

Luego

$$\begin{aligned} \|\alpha x_2\| &= \|x_1\| \\ |\alpha|\|x_2\| &= \|x_1\| \end{aligned}$$

como $x_1, x_2 \in S_{\mathrm{X}}$ tenemos

$$|\alpha| = |1|$$

$$\alpha = \pm 1 \qquad (1)$$

Además,

$$\begin{aligned} \left\|\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)\right\| &= 1 \\ \left\|\tfrac{1}{2}(\alpha x_2 + x_2)\right\| &= 1 \\ \left|\tfrac{1}{2}(\alpha + 1)\right| \|x_2\| &= 1 \\ \Rightarrow \qquad |\alpha + 1| &= 2 \end{aligned}$$

y así

$$1 + \alpha = 2 \qquad y \qquad 1 + \alpha = -2$$

luego, de lo anterior y de (1) se tiene que

$$\alpha = 1$$

entonces, x_1 y x_2 son linealmente independientes. Por lo tanto, $\{x_1, x_2\}$ es un subespacio de X de dimensión 2 que no es EC. ∎

En lo siguiente estudiaremos el problema de la convexidad estricta del producto de dos (o un número finito) espacios estrictamente convexos; para, ello sea $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios de Banach, con $1 \leq p < \infty$ y consideremos el producto $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{X}_n$, definido como,

$$\prod \mathrm{X}_n := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathrm{X}_n \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}\}$$

y, en éste producto, consideremos la sucesión $((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ tal que:

$$\|(x_n)_n\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{\mathrm{X}_n}^p\right)^{1/p} < +\infty.$$

Proposición 4.2. *Si* $(\mathrm{X}_\imath, \|\cdot\|_\imath)$, $\imath = 1,2$ *son E.C. entonces* $\mathrm{X} = \prod\limits_{\imath=1}^{2} \mathrm{X}_\imath$ *es E.C.*

Demostración. Sean $x, y \in \mathrm{X}$, con $x = (x_1, x_2)$; $y = (y_1, y_2)$ donde $x_1, y_1 \in \mathrm{X}_1$ y $x_2, y_2 \in \mathrm{X}_2$. Supongamos que para $x, y \in S_\mathrm{X}$ y $\|x+y\|_2 = 2$ con $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$

$$\|x+y\|_2 = \left(\sum_{\imath=1}^{2}(x_\imath + y_\imath)^2\right)^{1/2} \tag{4.1}$$

y veamos que $x = y$.

Tenemos que de (4.1) se tiene que

$$\begin{aligned}
4 = \|x+y\|_2^2 &= \sum_{\imath=1}^{2} |x_\imath + y_\imath|^2 \\
&= \sum_{\imath=1}^{2} |x_\imath^2 + 2x_\imath y_\imath + y_\imath^2| \\
&\leq \sum_{\imath=1}^{2} |x_\imath|^2 + 2\sum_{\imath=1}^{2} |x_\imath y_\imath| + \sum_{\imath=1}^{2} |y_\imath|^2 \\
&\leq 2 + 2\sum_{\imath=1}^{2} |x_\imath y_\imath|
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad 1 \leq \sum_{\imath=1}^{2} |x_\imath y_\imath|$$

Ahora, si tuviéramos que $x_\imath \neq y_\imath$ para $\imath = 1,2$ entonces

$$\begin{aligned}
x_\imath x_\imath &\neq x_\imath y_\imath \\
\sum_{\imath=1}^{2} x_\imath^2 &\neq \sum_{\imath=1}^{2} x_\imath y_\imath \\
1 &\neq 1 \qquad (\Rightarrow\Leftarrow)
\end{aligned}$$

luego, $x_\imath = y_\imath$. Por lo tanto $x = y$. ∎

De manera similar se puede mostrar lo siguiente:

Proposición 4.3. *Si* $(\mathrm{X}_\imath, \|\cdot\|_\imath)$, $\imath = 1, \ldots, n$ *son E.C. entonces* $\mathrm{X} = \prod_{\imath=1}^{n} \mathrm{X}_\imath$ *es E.C.*

Beauzamy en [5] mostró lo siguiente:

Proposición 4.4. *Si* $1 < p < \infty$ *y si cada* X_n, $n \in \mathbb{N}$ *son E.C. entonces,* $\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{X}_n\right)_p$ *es estrictamente convexo.*

Demostración. Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$; $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementos distintos de $\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{X}_n\right)_p$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ para el cual $x_{n_0} \neq y_{n_0}$. Dado que para ese mismo n_0 existe un X_{n_0} que es $E.C.$ entonces, por la proposición (3.2) se tiene

$$\left\|\frac{x_{n_0} + y_{n_0}}{2}\right\|_{\mathrm{X}_{n_0}}^{p} < \frac{1}{2}\left(\|x_{n_0}\|_{\mathrm{X}_{n_0}}^{p} + \|y_{n_0}\|_{\mathrm{X}_{n_0}}^{p}\right) \tag{4.2}$$

luego; para $n \neq n_0$, tenemos de manera similar por la proposición (3.2)

$$\left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\|_{\mathrm{X}_n}^{p} \leq \frac{1}{2}\left(\|x_n\|_{\mathrm{X}_n}^{p} + \|y_n\|_{\mathrm{X}_n}^{p}\right)$$

y así,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\|_{\mathrm{X}_n}^{p} < \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_{\mathrm{X}_n}^{p} + \sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|_{\mathrm{X}_n}^{p}\right)$$

∎

La proposición anterior muestra en particular (tomando $\mathrm{X}_n = \mathbb{R}$ para todo n) que los espacios ℓ_p, $1 < p < \infty$, son estrictamente convexos. Si tomamos todos los X_n como el espacio de Banach X, entonces $\left(\prod \mathrm{X}_n\right)_p$ es el espacio de las sucesiones p-sumables en X y se denota $\ell_p(\mathrm{X})$. De esta manera, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.1. *Sea* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach. Entonces si* X *es estrictamente convexo entonces para* $1 < p < \infty$, *el espacio de Banach* $\ell_p(\mathrm{X})$ *es estrictamente convexo.*

Demostración. Supongamos que X es estrictamente convexo y sean $x, y \in \ell_p(\mathrm{X})$ tales que $\|x\| = \|y\| = 1$ y $\|x+y\| = 2$. Consideremos además que $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$.

Si $p = 2$, ℓ_2 es E.C. pues del ejemplo 2.2 tenemos que ℓ_2 es E.C., luego así lo es $\ell_2(\mathrm{X})$.

Consideremos $p > 2$. Del teorema 2.2 de las desigualdades de Clarkson para sucesiones se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i+y_i\|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i-y_i\|^p\right)^{1/p} &\leq 2^{p-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|y_i\|^p\right)^{1/p}\right]\\
2^p+\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i-y_i\|^p\right)^{1/p} &\leq 2^p\\
\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i-y_i\|^p\right)^{1/p} &\leq 0\\
\Rightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i-y_i\|^p\right)^{1/p} &= 0\\
\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{\infty}\|x_i-y_i\|^p &= 0\\
\Rightarrow \quad x_i = y_i.
\end{aligned}
$$

Así, $x=y$, con lo cual se tiene que $\ell_p(\mathrm{X})$ es E.C.

■

Consideremos ahora el problema cuando la convexidad estricta de X es trasmitida al espacio cociente.

Definición 4.1. *Sean* X *un espacio vectorial y* $\mathrm{M}\subseteq\mathrm{X}$ *un subespacio cerrado. Definimos el espacio cociente como*

$$\mathrm{X}/\mathrm{M} := \{\, x+\mathrm{M} : x\in\mathrm{X} \,\}.$$

Definición 4.2. *Sean* $(\mathrm{X},\|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y* $\mathrm{M}\subseteq\mathrm{X}$ *un subespacio cerrado. La norma del espacio cociente esta dada por*

$$\|x+\mathrm{M}\| = d(x,\mathrm{M}) = \text{ínf}\{\, \|x-z\| : z\in\mathrm{M} \,\} = \text{ínf}\{\, \|x+z\| : z\in\mathrm{M} \,\}$$

donde $x\in\mathrm{X}$.

Teorema 4.2. *Sea* $(\mathrm{X},\|\cdot\|)$ *un espacio de Banach. Si* $\mathrm{M}\subseteq\mathrm{X}$ *es cerrado entonces* $\|x+\mathrm{M}\|$ *es una norma.*

Demostración. Ver [25]

Teorema 4.3. *Sea* $(\mathrm{X},\|\cdot\|)$ *un espacio de Banach. Si* $\mathrm{M}\subseteq\mathrm{X}$ *es cerrado entonces* X/M *es también un espacio de Banach.*

Demostración. Ver [25]

Definición 4.3. *Sean* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y* $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{X}$ *cerrado. Definimos la aplicación cociente como*

$$\pi : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}/\mathrm{M}$$

$$x \longmapsto x + \mathrm{M}$$

Recordemos que la norma de x es exactamente $d(x, \mathrm{M})$, donde $d(x, \mathrm{M})$ es la distancia de x al subconjunto M. Además, tenemos que existe un isomorfismo entre X/M y $\mathrm{M} := \{x^* : x^* \in \mathrm{X}^*, x^*(m) = 0, m \in \mathrm{M}\}$.

Lema 4.1. *Sean* X, Y *espacios de Banach cualesquiera. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

ı) *Existe un subespacio cerrado* M *de* X *tal que* Y *es equivalente (isométricamente isomorfo) a* X/M.

ıı) *Existe una aplicación lineal* $\mathrm{T} : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ *tal que*

$$\mathrm{T}(\mathrm{B}_{\mathrm{X}}(0,1)) = \mathrm{B}_{\mathrm{Y}}(0,1)$$

Demostración.

$(\imath) \Rightarrow (\imath\imath)$ Supongamos que es cierta la afirmación $(\imath\imath)$, consideremos $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{X}$ y sean $S_{\mathrm{X}/\mathrm{M}}(0,1)$ y la aplicación canónica

$$\pi : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}/\mathrm{M} \qquad \text{definida por}$$

$$\pi(x) = x + \mathrm{M}.$$

Es claro que

$$\pi(\mathrm{B}_{\mathrm{X}}(0,1)) \subseteq \mathrm{B}_{\mathrm{X}/\mathrm{M}}(0,1)$$

entonces, por hipótesis, para $x + \mathrm{M} \in \mathrm{B}_{\mathrm{X}/\mathrm{M}}(0,1)$ existe algún $m_1 \in \mathrm{M}$ con $x + m_1 \in \mathrm{B}_{\mathrm{X}}(0,1)$.

Pero $x + m_1 + \mathrm{M} = x + \mathrm{M}$ y así tenemos la afirmación $(\imath\imath)$.

$(\imath\imath) \Rightarrow (\imath)$ Supongamos que la afirmación $(\imath\imath)$ es cierta, es decir, existe T que cumple con la propiedad mencionada y consideremos $\mathrm{M} = Ker\mathrm{T} = \{x : \mathrm{T}(x) = 0\}$, recordemos que T y la aplicación canónica tienen el mismo Kernel, y entonces $\pi(\mathrm{T}^{-1})$ es una aplicación lineal de Y en X/M.

Veamos que esto es, en efecto, una isometría. Para ello es suficiente mostrar que para todo $x \in \mathrm{X}$, $\pi(x) \in \mathrm{B}_{\mathrm{X/M}}(0,1)$ para algún m_1, con $x + m_1 \in \mathrm{B}_x(0,1)$ si y sólo si $\mathrm{T}(x) \in \mathrm{B}_{\mathrm{Y}}(0,1)$.

Supongamos que $\pi(x) \in \mathrm{B}_{\mathrm{X/M}}(0,1)$ y para algún $m_1 \in \mathrm{M}$, $x+m_1 \in \mathrm{B}_{\mathrm{X}}(0,1)$. Entonces, $\mathrm{T}(x) = \mathrm{T}(x+m_1) \in \mathrm{B}_{\mathrm{Y}}(0,1)$. Ahora, si $\mathrm{T}(x) \in \mathrm{B}_{\mathrm{Y}}(0,1)$ entonces $\mathrm{T}(x) = \mathrm{T}(y)$ para algún $y \in \mathrm{B}_{\mathrm{X}}(0,1)$ y de ésta manera

$$\pi(x) = \pi(y) \in \mathrm{B}_{\mathrm{X/M}}(0,1)$$

■

Proposición 4.5. *Sean* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$, $(\mathrm{Y}, \|\cdot\|)$ *espacios de Banach y* $\mathrm{T} : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ *una aplicación lineal, continua y sobreyectiva. Si* X *es* (*EC*) *entonces* Y *es* (*EC*)

Demostración. Sean $a, b \in S_{\mathrm{Y}}$ tal que $\|a+b\| = 2$. Veamos que $a = b$.
Como T es sobre, existen $x, y \in S_{\mathrm{X}}$ tales que

$$a = \mathrm{T}(x) \quad y \quad b = \mathrm{T}(y)$$

entonces

$$\begin{aligned} 2 = \|a+b\| &= \|\mathrm{T}(x) + \mathrm{T}(y)\| \\ &= \|\mathrm{T}(x+y)\| \\ &\leq \|\mathrm{T}\|\|x+y\| \\ &\leq \|x+y\| \\ &\leq \|x\| + \|y\| \\ &= 2 \end{aligned}$$

luego, se tiene que

$$2 \leq \|x+y\| \leq 2$$

$$\Rightarrow \qquad \|x+y\| = 2$$

$$\Rightarrow \qquad x = y$$

así, $\mathrm{T}(x) = \mathrm{T}(y)$ y esto implica que

$$a = \mathrm{T}(x) = \mathrm{T}(y) = b$$

$$\Rightarrow \qquad a = b.$$

■

Es natural que; de la proposición (4,1) surja la interrogante de si el espacio cociente X/M formado por espacios E.C. sea E.C. En general, lo anterior no es cierto ya que es necesario que X sea reflexivo como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 4.4. ($V.Klee, 1958$) *Sean* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach reflexivo y* $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{X}$ *cerrado. Si* X *es estrictamente convexo entonces* X/M *es estrictamente convexo.*

Demostración. Consideremos el espacio cociente X/M y la aplicación canónica

$$\pi : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X/M}.$$

Dado que todo subespacio cerrado de un espacio normado reflexivo es reflexivo, se tiene que M es reflexivo y así tenemos que

$$\pi(\mathrm{B_X}(0,1)) = \overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{X/M}}(0,1).$$

Es obvio que

$$\pi(\mathrm{B_X}(0,1)) \subseteq \overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{X/M}}(0,1).$$

Ahora, sea $\mathrm{X}' \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{X/M}}(0,1)$ y así

$$\text{ínf}\{\ \|x\| : x' \in \mathrm{X}'\} = 1$$

de donde se tiene

$$(\imath) \quad d(\overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{X}}(0,1), \mathrm{X}') = 0 \qquad \text{y} \qquad (\imath\imath) \quad d(\mathrm{B_X}(0,1), 2\overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{X}}(0,1) \cap \mathrm{X}') = 0$$

puesto que $(\imath)$ es débilmente cerrado y $(\imath\imath)$ como subconjunto de X/M, es débilmente compacto, entonces $(\imath)$ y $(\imath\imath)$ deben tener un punto en común y así;

$$\pi(x) = \mathrm{X}'$$

luego, por la proposición anterior se tiene que la aplicación π preserva la convexidad estricta y de esta manera X/M es estrictamente convexo. ■

Bourgain J. en [10] mostró el siguiente teorema dando así un ejemplo en el cual el espacio cociente $\ell_\infty/\mathcal{C}_0$ no admite una norma equivalente estrictamente convexa.

Teorema 4.5. *Sea* $|||\cdot|||$ *una norma equivalente en* $\ell_\infty/\mathcal{C}_0$*. Entonces,* $|||\cdot|||$ *no es estrictamente convexa.*

Demostración. Ver [10]

Capítulo 5

Relación de los Espacios E.C. con otras Propiedades Geométricas de los Espacios de Banach

5.1. Introducción

En 1936 J.A. Clarkson [12] introdujo la noción de convexidad uniforme (UC) de la norma en un espacio de Banach. Demostró que para $p > 1$ los espacios ℓ_p y L_p son uniformemente convexos. Además, en ese mismo trabajo Clarkson introdujo también la noción de convexidad estricta (EC) y mostró que todo espacio de Banach separable admite una norma equivalente estrictamente convexa y que esta propiedad no implica la de Radón-Nikodyn.

Recordemos que un espacio de Banach X se dice que tiene la propiedad Radón-Nikodyn si para cada espacio de probabilidad (Ω, Σ, μ) y cada medida vectorial numerablemente aditiva de variación acotada $m : \Sigma \to \mathrm{X}$ que sea absolutamente continua con respecto a μ, existe una función $f \in L^1(\mu, \mathrm{X})$, tal que

$$m(E) = \int_E f d\mu \qquad \text{para todo} \quad E \in \Sigma$$

Posteriormente, en 1955 A.R. Lovaglia [32] introdujo la noción de espacio de Banach Local Uniformemente Convexo (LUC) y estudió el comportamiento de esta propiedad en relación con el producto de espacios de Banach del tipo ℓ_p .

El objetivo de este capitulo es estudiar la manera en que estas tres propiedades geométricas se relacionan. Veremos que, en general, los espacios de Banach LUC y UC

sólo se relacionan entre si en una dirección y de igual manera con los espacios de Banach EC.

5.2. Los Espacios de Banach UC y LUC.

Comenzaremos dando las definiciones de espacios de Banach UC y LUC.

Definición 5.1. *Un espacio de Banach* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *es uniformemente convexo* (UC) *si y sólo si, para todas las sucesiones* $(x_n), (y_n) \subset S_{\mathrm{X}}$ *y* $\lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.

Esta propiedad, geométricamente nos dice que el punto medio de un segmento variable en la bola unitaria no puede acercarse a la esfera, a menos que la longitud del segmento tienda a cero.

Definición 5.2. *Sea* X *un espacio normado. Definimos el* ***módulo de convexidad uniforme*** *de* X *como la función*

$$\delta : [0,2] \longmapsto [0,1]$$

tal que

$$\delta(\epsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2} : \quad x, y \in S_{\mathrm{X}}, \quad \|x-y\| = \epsilon\right\}$$

Con ésta definición tenemos que, otra forma de caracterizar los espacios (UC) es usando el módulo de Convexidad Uniforme definido por M.M. Day [15] en 1955.

Este módulo de convexidad surge al considerar en la definición de espacio (UC) el mejor δ para cada ϵ dado. La importancia de esta función, δ_E, es hacer más manejable las definiciones de uniforme convexidad y estricta convexidad.

Definición 5.3. *Un espacio de Banach* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *es Uniformemente Convexo* (UC) *si, dado* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta = \delta(\epsilon) > 0$*, tal que*

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta \qquad \textit{siempre} \quad \textit{que} \qquad \|x-y\| \geq \epsilon \quad \textit{y} \quad x, y \in S_{\mathrm{X}}.$$

donde $\delta(\epsilon)$ *denota el módulo de convexidad del espacio* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$.

Lema 5.1 (Kazimierz and Kirk, [26]). *Sea* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach, entonces* X *es estrictamente convexo si y sólo si* $\delta(2) = 1$.

Demostración.

$\Leftarrow$) Sea $\delta(2) = 1$ y supongamos que $x, y \in S_{\mathrm{X}}$ tales que

$$\|x - y\| = 2 \tag{5.1}$$

nótese que

$$\|x + y\| = \|x - (-y)\| = 2$$

ahora,

$$\begin{aligned} 1 = \delta(2) &= \delta(\|x+y\|) \quad \text{por (5.1)} \\ &= \text{ínf}\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2} : x, y \in S_{\mathrm{X}}, \|x-y\| = 2\right\} \\ &\leq 1 - \frac{\|x-y\|}{2} \end{aligned}$$

entonces

$$1 = \delta(2) = \delta(\|x+y\|) \leq 1 - \frac{\|x-y\|}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad 1 \leq 1 - \frac{\|x-y\|}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \|x - y\| = 0$$

Así, $x = y$ y de esta manera tenemos que X es estrictamente convexo.

$\Rightarrow$) Sean $x, y \in S_{\mathrm{X}}$ cualesquiera tales que $\|x\| = \|y\| = 1$ con

$$\|x - y\| = 2$$

Si X es estrictamente convexo, tenemos que $x = -y$ pues

$$\|x - y\| = \|x + x\| = 2\|x\| = 2$$

y así

$$\|x + y\| = 0$$

luego

$$\delta(2) = \text{ínf}\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2} : x, y \in S_{\mathrm{X}}, \|x-y\| = 2\right\} = 1$$

∎

Del *Lema* anterior podemos concluir que la definición de espacios espacios de Banach estrictamente convexos la podemos expresar también en términos del módulo de convexidad uniforme.

Con el resultado dado anteriormente, podemos ver la relación que existe entre convexidad estricta y convexidad uniforme.

Teorema 5.1. *Todo espacio de Banach uniformemente convexo* (UC) *es estrictamente convexo* (EC).

Demostración. Sean $x, y \in S_{\mathrm{X}}$ tal que

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| = 1$$

hemos de ver que $x = y$.

Supongamos que $x, y \in S_{\mathrm{X}}$ y que por el contrario $x \neq y$, entonces existe $0 < \epsilon \leq 2$ tal que $\|x - y\| \geq \epsilon$. Como X es UC, para este ϵ existe un $\delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta(\epsilon)$$

lo cual es una contradicción con el hecho de que $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| = 1$, por lo tanto se tiene que cumplir que $x = y$. Así, X es estrictamente convexo. ∎

A continuación mostraremos un resultado mediante el cual podemos ver que en espacios de dimensión finita, la convexidad uniforme y la convexidad estricta son equivalentes.

Teorema 5.2. *Sea* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach de dimensión finita, entonces convexidad estricta y convexidad uniforme son equivalentes.*

Demostración. Por el teorema anterior se tiene una dirección, sólo hay que mostrar que si X es de dimensión finita y estrictamente convexo entonces X es uniformemente convexo. Para ello, sean $\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathrm{B}_{\mathrm{X}}$ tales que

$$\|x_n + y_n\| \longrightarrow 2 \tag{5.2}$$

y mostremos que $\|x_n - y_n\| \longrightarrow 0$. Como por hipótesis X es de dimensión finita se tiene que B_{X} es compacto y así, existen subsucesiones $\{x_{n_k}\}, \{y_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ respectivamente y además $x, y \in \mathrm{B}_{\mathrm{X}}$ tales que

$$x_{n_k} \longrightarrow x \qquad \text{y} \qquad y_{n_k} \longrightarrow y$$

lo cual implica que

$$\|x_{n_k} + y_{n_k}\| \longrightarrow \|x + y\|$$

luego, por (5.2) se tiene que $\|x + y\| = 2$. Usando la desigualdad triangular y puesto que el espacio X es estrictamente convexo, se tiene que

$$\|x + y\| = \|y\| + \|y\| = 2$$

y como $x, y \in \mathrm{B}_{\mathrm{X}}$ entonces

$$\|x\| = \|y\| = 1.$$

y así, $x, y \in S_{\mathrm{X}}$ y además $\|x + y\| = 2$. Nuevamente, como X es EC, se tiene que $x = y$ lo cual implica que

$$\|x_n - y_n\| \longrightarrow 0$$

es decir, el único punto límite de la sucesión $\{x_n - y_n\}$ es cero, así,

$$\|x_n - y_n\| \longrightarrow 0$$

Por lo tanto, X es uniformemente convexo. ■

Seguidamente daremos algunos ejemplos en los cuales se relaciona la convexidad estricta y la convexidad uniforme.

Ejemplo 5.1. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, *donde* $\|\cdot\|_2$ *denota la norma euclídea, es un espacio* UC *y por lo tanto también es* EC.

Ejemplo 5.2. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, *donde* $\|\cdot\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x - n) \in \mathbb{R}^n$ *es un espacio que no es* EC *y por tanto no es* UC.

Clarkson [12] mostró el siguiente teorema el cual sera de gran utilidad para el ejemplo que posteriormente haremos mención.

Teorema 5.3. ***J.A. Clarkson, [12]*** *Cualquier espacio de Banach separable admite una norma equivalente a la norma original, con la cual el espacio es estrictamente convexo.*

Ejemplo 5.3. *Los espacios de Banach* $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ *con* $1 < p < \infty$ *son espacios* UC *y por lo tanto* EC. *Esto es deducible como consecuencia del teorema 5.1.*

En el caso en que $p = 1$, *se tiene que* $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ *es un espacio de Banach que no es estrictamente convexo, pero como dicho espacio es separable, se tiene que; por el teorema anterior, existe una norma* $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ *equivalente a* $\|\cdot\|_1$ *tal que* $(\ell_1, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$ *es un espacio estrictamente convexo.*

Ahora, si $p = \infty$, *se tiene que* $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ *es un espacio de Banach que no es separable como se vio en el capitulo* 1 *y por tanto no es* EC.

El hecho de cómo la convexidad uniforme induce una propiedad topológica como lo es la reflexividad fue demostrada por primera vez por Milman (1938) y Pettis (1939) de manera independiente y que se enuncia en el siguiente teorema, cuya prueba la podemos ver en [41].

Teorema 5.4. *Todo espacio uniformemente convexo es reflexivo.*

A continuación daremos un ejemplo construido por J. Lindenstrauss - L. Tzafriri [31], que nos muestra que existen espacios de Banach (EC) que no son (UC).

Ejemplo 5.4. *Existe un espacio de Banach Estrictamente Convexo que no es Uniformemente Convexo.*

Sea $(\mathcal{C}_{[0,1]}, \|\cdot\|_\infty)$, *donde*

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]}\{|f(t)|\},$$

y consideremos la norma $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ *sobre* $\mathcal{C}_{[0,1]}$ *definida por*

$$|\!|\!|f|\!|\!| = \|f\|_\infty + \|f\|_2, \qquad f \in \mathcal{C}_{[0,1]},$$

donde

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Se puede probar que, $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ *es una norma equivalente a* $\|\cdot\|_\infty$ *en* $\mathcal{C}_{[0,1]}$. *No es difícil probar que* $(\mathcal{C}_{[0,1]}, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$ *es un espacio* (EC) *pero no es* (UC), *puesto que* $(\mathcal{C}_{[0,1]}, \|\cdot\|_\infty)$ *no es un espacio reflexivo, así* $(EC) \not\Rightarrow (UC)$.

Como mencionamos anteriormente, A.R. Lovaglia [32] introduce una generalización de los espacios (UC), la cual es de carácter local y que denominó los espacios Localmente Uniformemente Convexos (LUC).

Definición 5.4. *Un espacio de Banach* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *es Localmente Uniformemente Convexo* (LUC) *si, dados* $x \in S_{\mathrm{X}}$ *y* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta(\epsilon, x) > 0$ *tal que para todo* $y \in S_{\mathrm{X}}$ *y* $\|x - y\| \geq \epsilon$ *se tiene que*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta(\epsilon, x).$$

Geométricamente, esta definición difiere de la los espacios (UC) en que se requiere que uno de los puntos extremos de la cuerda variable en la esfera permanezca fijo.

Al igual que los espacios (UC), los espacios (LUC) también pueden ser definidos en términos de sucesiones como sigue:

Definición 5.5. *Un espacio de Banach* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *es* (LUC)*, si y sólo si para todo* $x \in S_{\mathrm{X}}$ *y* $\{x_n\} \in S_{\mathrm{X}}$ *tales que*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n + x\| = 2 \qquad \textit{entonces} \qquad \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Es claro que, a partir de las definiciones anteriores

$$(UC) \quad \Rightarrow \quad (LUC) \quad \Rightarrow \quad (EC).$$

Veamos algunos ejemplos de espacios (LUC) y otros que relacionan tales espacios con los espacios (UC).

Ejemplo 5.5. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ *es un espacio* (LUC)*, pero* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ *y* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *son ejemplos de espacios que no son* (LUC).

Ejemplo 5.6. $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$, $1 < p < \infty$ *es un espacio* (LUC)*, pero* $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ *y* $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ *son ejemplos de espacios que no son* (LUC).

Ejemplo 5.7. *Existe un espacio de Banach* (LUC) *que no es* (UC)*. Consideremos el espacio* $(\ell_2, \|\cdot\|_1)$ *construido por M.A. Smith [47].*

Tomando la norma equivalente en $\mathcal{C}_0$ *definida por M.M. Day [14] : Para* $\mu \in \mathcal{C}_0$*, enumeremos el soporte de* μ *como* $\{n_k\}$ *tal que*

$$|\mu(n_k)| \geq |\mu(n_{k+1})|, \quad k \in \mathbb{N}$$

y se define $D\mu$ en ℓ_2 como

$$D\mu(n) = \begin{cases} \dfrac{\mu(n_k)}{2} & \textit{si } n{=}nk \textit{ para algún } k \\ 0 & \textit{de otra forma} \end{cases}$$

y

$$|||\mu||| \ = \|D\mu\|_{\ell_2}.$$

Entonces, $|||\cdot|||$ es una norma equivalente estrictamente convexa en $\mathcal{C}_0$.
Además, Rainwater [38] mostró que $(\mathcal{C}_0, |||\cdot|||)$ es un espacio (LUC). Ahora, para $x = (x^1, x^2, \dots) \in \ell_2$, sea

$$\mu = \left(\frac{1}{2}\|x\|_2, x^1, x^2, x^2, \dots, x^5, \overset{j \ veces}{\dots}, x^5, \dots\right)$$

un elemento de $\mathcal{C}_0$ asociado con x y se define $\|x\|_1 = |||\mu|||$. Entonces, $\|\cdot\|_1$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|_2$ en ℓ_2 y Smith [47] probó que $(\ell_2, \|\cdot\|_1)$ es un espacio (LUC) que no es (UC), por tanto tenemos

$$(LUC) \quad \not\Rightarrow \quad (UC).$$

El siguiente ejemplo sirve para mostrar que la propiedad (LUC) no implica la propiedad (EC), más aún, muestra que (LUC) es más fuerte que (EC).

Ejemplo 5.8. *Existe un espacio de Banach (EC) que no es (LUC).*
Consideremos el ejemplo dado por A. R. Lovaglia [32]. Tomemos nuevamente el espacio $(\mathcal{C}_{[0,1]}, \|\cdot\|_\infty)$. Sea $\{t_n\}$ una sucesión densa en $[0,1]$ que no incluye al 0.
se define una nueva norma $|||\cdot|||$ equivalente a $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathcal{C}_{[0,1]}$ por,

$$|||f||| = \left(\|f\|_\infty^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} |f(t_n)|^2\right)^{1/2} \qquad \textit{para} \quad \textit{toda} \quad f \in \mathcal{C}_{[0,1]}.$$

Entonces

$$\|f\|_\infty \leq |||f||| \leq \frac{2}{3^{1/2}} \|f\|_\infty \quad \textit{para} \quad \textit{toda} f \in \mathcal{C}_{[0,1]}.$$

Por lo tanto,$|||\cdot|||$ es equivalente a $\|\cdot\|_\infty$. Más aún, Clarkson [12] mostró que $(\mathcal{C}_{[0,1]}, |||\cdot|||)$ es (EC). Mostremos ahora que $(\mathcal{C}_{[0,1]}, |||\cdot|||)$ no es (LUC).

consideremos la función g, *donde* $g(t) = \dfrac{3^{1/2}}{2}$, *para todo* $t \in [0,1]$ *y la sucesión de funciones* $\{f_p\}, \quad p \in \mathbb{N}$, *donde*

$$f_p(t) = \begin{cases} \dfrac{3^{1/2}}{2} & si \quad \frac{1}{p} \leq t \leq 1 \\ \\ \dfrac{3^{1/2}}{2}.pt & si \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{p}. \end{cases}$$

Entonces, $\|g\| = 1, \quad \lim\limits_{p\to\infty} \|f\| = 1$ *y* $\lim\limits_{p\to\infty} \|f_p + g\| = 2$. *Pero,* $\|f_p - g\|_\infty = \dfrac{3^{1/2}}{2}$, *para todo* p. *Por lo tanto,* $\|f_p - g\| \geq \dfrac{3^{1/2}}{2}$ *para todo* p. *Así,* $(\mathcal{C}_{[0,1]}, \|\cdot\|)$ *no es* (LUC).
De esta manera tenemos que

$$(EC) \quad \not\Rightarrow \quad (LUC)$$

Capítulo 6

Convexidad Estricta y la Teoría de la Aproximación

6.1. Introducción

La teoría de aproximación está relacionada con el problema de describir los elementos de un espacio topológico X que pueden aproximarse por los de un subespacio M de X, es decir, de caracterizar la clausura de M en X. Tales problemas son especialmente simples en los espacios de Banach reflexivos ya que en dichos espacios todo subconjunto convexo cerrado es proximinal.

Aunque la teoría de aproximación es rica en sus aplicaciones, en este trabajo nos orientaremos naturalmente a la relación de ésta con los espacios estrictamente convexos en el que mostraremos resultados obtenidos por I. Singer [21] y otros mencionados en la literatura de Istratescu [21].

6.2. Teoría de la Aproximación

Comenzaremos dando la definición de la mejor aproximación.

Definición 6.1. *Sea* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y* M *un subespacio lineal cerrado de* X*. Para cualquier* $x \in \mathrm{X}$ *definimos*

$$d(x, \mathrm{M}) = \text{ínf}\{\ \|x - m\| : m \in \mathrm{M}\}$$

y un elemento $m_0 \in \mathrm{M}$ *se llama la mejor aproximación de* x *por medio de los elementos de* M *si*

$$d(x, \mathrm{M}) = \|x - m_0\|.$$

El conjunto $\{m_0 : d(x, \mathrm{M}) = \|x - m_0\|\} = P_{\mathrm{M}}(x)$ es cerrado, acotado y convexo (posiblemente vacío). Además, el conjunto M se llama un *conjunto Chebyshev* si la aplicación

$$P : \mathrm{X} \longrightarrow 2^{\mathrm{M}} \qquad \text{definida por}$$
$$x \longmapsto P_{\mathrm{M}}(x)$$

es univaluada y se llama la proyección métrica en M. Es evidente que la aplicación antes mencionada debe definirse en forma similar para otras clases de subconjuntos de X.
En este sentido nos referimos a que $x \longmapsto P_{\mathrm{X}}(x)$ algunas veces se llama la *aplicación Chebyshev*, la *aplicación proximidad* o el *operador de la mejor aproximación*.

Definición 6.2. *Sean* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y* $\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}$*, no vacío. Diremos que* Y *es un conjunto de unicidad si, para todo* $x \in \mathrm{X}$ *no existe más que un elemento* $y \in \mathrm{Y}$ *tal que* $d(x, y) = d(x, \mathrm{Y})$.

Teorema 6.1. *[33] Supongamos que* X *es un espacio normado. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

$(a.-)$ X *es estrictamente convexo.*

$(b.-)$ *Todo subconjunto convexo no vacío de* X *es un conjunto de unicidad.*

$(c.-)$ *Todo subconjunto convexo cerrado no vacío de* X *es un conjunto de unicidad.*

Demostración.
$(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que X es EC, que C es un subconjunto convexo no vacío de X y que $x_0 \in \mathrm{X}$. Nuestro objetivo es mostrar que no hay dos o más puntos de C más cercanos a x_0. Como y es un punto de C mas cercano a x_0 si y sólo si $y - x_0$ es un punto de $-x_0 + \mathrm{C}$ más cercano a 0, se puede asumir que $x_0 = 0$. Se puede asumir también que $d(0, \mathrm{C}) > 0$ y entonces, luego de multiplicar cada elemento de C por la misma constante positiva, se tiene que $d(0, \mathrm{C}) = 1$. Supongamos que c_1 y c_2 son los puntos de C más cercanos a 0. Entonces $\|c_1\| = \|c_2\| = 1$, y así

$$\{tc_1 + (1-t)c_2 : 0 \leq t \leq 1\} \subseteq \mathrm{C} \cap \mathrm{B}_x \subseteq S_x.$$

Como X es EC se sigue que $c_1 = c_2$, y así se tiene que $(a) \Rightarrow (b)$.
$(b) \Rightarrow (c)$ Obvio.

$(c) \Rightarrow (a)$ Supongamos por el contrario que X no es EC. Entonces hay un segmento en S_{X} de la forma $\{tx_1 + (1-t)x_2 : 0 \leq t \leq 1\}$ donde $x_1 \neq x_2$. Este segmento es un subconjunto cerrado convexo no vacío de X tal que cada uno de sus infinitos puntos está a la misma distancia del origen. Esto contradice el hecho de haber afirmado que X no es EC y así $(c) \Rightarrow (a)$. ∎

Corolario 6.1. *Sea* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach estrictamente convexo y reflexivo. Entonces cada uno de sus subconjuntos convexos cerrados no vacíos es un conjunto Chebyshev.*

Demostración. Sea C un subconjunto convexo cerrado no vacío de un espacio reflexivo EC. Entonces existe una sucesión $(y_n) \in \mathrm{C}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_0\| = d(x_0, \mathrm{C})$$

por la reflexividad de X existe alguna subsucesión (y_{n_j}) de la sucesión acotada (y_n) que converge débilmente a algún y_0. Entonces $y_0 \in \mathrm{C}$ puesto que C es débilmente cerrado y y_0 es el punto de C más cercano a x_0 ya que

$$d(x_0, \mathrm{C}) \leq \|y_0 - x_0\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|y_{n_j} - x_0\| = d(x_0, \mathrm{C}).$$

Por lo tanto, existe un punto de C más cercano a x_0. Luego, de la convexidad estricta de X se tiene que C es un conjunto de unicidad. De esta manera no existe otro punto de C además de y_0 más cercano a x_0. Así, el conjunto C es *Chebyshev*. ∎

Damos ahora algunas propiedades de la proyección métrica para algunos tipos de subespacios relacionados con la convexidad.

Lema 6.1. *Sean* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y los elementos* $(x_1, \ldots, x_n)$ *con* $n < \infty$. *Si*

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \to \infty$$

entonces, para cada $x \in \mathrm{X}$ *fijo,*

$$f_x(a_1, \ldots, a_n) = \|x - a_1x_1 - \ldots - a_nx_n\| \to \infty \quad \textit{cuando} \quad a_i \to \infty.$$

Demostración. Como

$$f_x(a_1, \ldots, a_n) \geq \|a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n\| - \|x\|$$

y la función

$$(a_1, \ldots, a_n) \to \|a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n\| \tag{6.1}$$

es continua, entonces (6.1) tiene un mínimo, digamos μ, sobre el conjunto

$$\left\{ (a_1, \cdots, a_n) : \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \geq 1 \right\}.$$

Ahora, si $\mathrm{M} > 0$ y

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 > \mathrm{M}^2 \frac{1}{\mu^2} \|x\|^2$$

entonces

$$\begin{aligned} f_x(a_1, \cdots, a_n) &= \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - x \right\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right)^{1/2} \left\| \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2} (x_i - x) \right\| \\ &\geq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right)^{1/2} \mu - \|x\| \\ &> \mathrm{M} \end{aligned}$$

y como el M es arbitrario, se sigue que la afirmación del Lema se cumple. ∎

Lema 6.2. *Sean* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y* M *un subespacio lineal cerrado de dimensión finita, entonces* $P_{\mathrm{M}}(x)$ *es no vacío para cada* $x \in \mathrm{X}$.

Demostración. Tomemos $\{x_1, \cdots, x_n\}$ como una base de M y consideremos la función $f_x(a_1, \cdots, a_n)$ como en el Lema anterior. Dado que la afirmación es obvia cuando x esta en M podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x \notin \mathrm{M}$. Ahora tenemos la desigualdad

$$
\begin{aligned}
|f_x(a_1,\cdots,a_n)-f_x(b_1,\cdots,b_n)| &= \left|\left\|x-\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|-\left\|x-\sum_{i=1}^{n} b_i x_i\right\|\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |(a_i-b_i)|\, \|x_i\| \\
&\leq \text{máx}_i\, |(a_i-b_i)| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|
\end{aligned}
$$

y nuevamente de acuerdo al lema anterior,

$$f_x(a_1,\cdots,a_n) \geq \|x\|$$

fuera de alguna bola

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 = k.$$

Pero esta bola es un conjunto compacto y f_x es una función continua. Así, f alcanza su mínimo $\hat{\mu}$ en algún punto, digamos, $(a_1^*,\cdots,a_n^*)$.

Como

$$\hat{\mu} \leq f_x(0,\cdots,0) = \|x\|$$

tenemos que $\hat{\mu}$ es el menor valor de f_x en todo el espacio M. ■

Ahora vamos a dar una condición suficiente para que la aplicación $x \to P_{\mathrm{M}}(x)$ sea univaluada.

Lema 6.3. *Sea* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach estrictamente convexo. Entonces la proyección* P_{M} *es univaluada para cada subespacio* M *de* X *de dimensión finita*

Demostración. Supongamos que la afirmación del lema es falsa. Entonces, para algún $x \in \mathrm{X}$ existen al menos dos elementos m_1 y $m-2$ tales que

$$d(x,\mathrm{M}) = \|x-m_1\| = \|x-m_2\|.$$

Es obvio que de lo anterior tenemos que

$$(\frac{1}{2})(m_1-m_2) \in\ P_{\mathrm{X}}(x)$$

y así

$$\left\|x-\frac{1}{2}(m_1-m_2)\right\| = \left\|\frac{1}{2}(x-m_1)\right\| + \left\|\frac{1}{2}(x-m_2)\right\|$$

y esto, de acuerdo a la convexidad estricta de X, implica que $m_1 = m_2$. ■

En lo que sigue, daremos resultados obtenidos por Ivan Singer [[21]] en sus trabajos sobre la mejor aproximación.

Definición 6.3. *Sea* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach. Entonces* X *se llama k-estrictamente convexo si y sólo si para cualesquiera* $k+1$ *elementos* $x_0, \cdots, x_k$ *de* X *la relación*

$$\|x_0 + x_1 + \cdots + x_k\| = \|x_0\| + \|x_1\| + \cdots + \|x_k\|$$

implica que $x_0, \cdots, x_k$ *son linealmente dependientes.*

Cabe señalar lo siguiente: Si k=1 la definición anterior es equivalente a espacios (EC).

Teorema 6.2. *(I. Singer(1960)) Sea* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes a k-convexidad estricta:*

(1) *Para cualesquiera* $k+1$ *elementos* $x_0, \cdots, x_k$ *de* X*, tales que* $\|x_i\| = 1$ *y* $\left\|\sum_{i=0}^{k} x_i\right\| = \sum_{i=0}^{k} \|x_i\|$ *entonces* $x_0, \cdots, x_k$ *son linealmente dependientes.*

(2) *Para cualesquiera* $k+1$ *elementos* $x_0, \cdots, x_k$ *de* X *linealmente dependientes con* $\|x_i\| = 1$,

$$\left\|\sum_{i=0}^{k} a_i x_i\right\| < 1 \qquad \textit{para} \quad \textit{todo} \quad 0 < a_i < 1, \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = 1.$$

(3) *el conjunto* $S(\mathrm{X}) = \{x : x \in \mathrm{X}, \|x\| = 1\}$ *no contiene ningún subconjunto convexo de dimensión* $> k+1$.

(4) *Para cualquier* $x_0 \in \mathrm{X}$ *y* $r > 0$ *el conjunto*

$$S(x_0, r) = \{x : x \in \mathrm{X}, \|x - x_0\| = r\}$$

no contiene ningún subconjunto convexo de dimensión $> k+1$.

Demostración. Es claro que la definición de k-estricta convexidad implica (1).

(1) $\Rightarrow$ (2) supongamos que la afirmación (2) no es cierta, entonces existen $x_0, \cdots, x_k$, con $\|x_i\| = 1$; $i = 0, \cdots, k$, tales que para algún $a_i \in (0,1)$ cuya suma sea 1, se tiene que

$$\|a_0 x_0 + \cdots + a_k x_k\| = 1.$$

Podemos asumir, sin pérdida de generalidad que

$$\frac{1}{a_0} = \max\left\{\frac{1}{a_i} : 1 \leq i \leq k\right\}$$

y así

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k} \|x_i\| + \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_i}\right) \|a_i x_i\| &= \frac{1}{a_0} \left\|\sum_{i=0}^{k} a_i x_i\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{i=0}^{k} x_i\right\| + \left\|\sum_{i=0}^{k} \left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_i}\right) a_i x_i\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{i=0}^{k} x_i\right\| + \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_i}\right) \|a_i x_i\|
\end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$\left\|\sum_{i=0}^{k} x_i\right\| = \sum_{i=0}^{k} \|x_i\|$$

y esto contradice la hipótesis de (1).

(2) $\Rightarrow$ (3) Supongamos de manera similar al anterior que (3) no se cumple. Así, S(X) contiene un conjunto convexo C de dimensión $k-1$. Luego, tenemos que existen $x_0, \cdots, x_k$, en C tales que

$$x_1 - x_0 \qquad x_2 - x_0 \qquad \cdots \qquad x_k - x_0$$

son linealmente independientes. Entonces

$$\frac{1}{k+1}(x_0 + \cdots + x_k) \in \mathrm{C}$$

y esto contradice (2).

(3) $\Rightarrow$ (4) Supongamos que la afirmación (3) es cierta pero que no se cumple (4). De manera similar a la anterior se puede obtener una contradicción con (3).

Ahora veamos que la afirmación (4) implica la k-convexidad estricta de X. Supongamos por el contrario que X no es $k - EC$, entonces existen puntos $x_0, \cdots, x_k$ tales que

1. $\|x_0 + x_1 + \cdots + x_k\| = \|x_0\| + \|x_1\| + \cdots + \|x_k\|$.

2. $x_0, \cdots, x_k$ son linealmente independientes.

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k}\left\|\frac{x_i}{\|x_i\|}\right\| + \sum_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{\|x_0\|}-\frac{1}{\|x_i\|}\right)\|x_i\| &= \frac{1}{\|x_0\|}\sum_{i=0} k\|x_i\| \\
&= \left\|\frac{x_i}{\|x_i\|} + \sum_{j=0} k\left(\frac{1}{\|x_0\|}-\frac{1}{\|x_j\|}\right)x_j\right\| \\
&\leq \left\|\frac{x_i}{\|x_i\|}\right\| + \sum_{i=0} k\left(\frac{1}{\|x_0\|}-\frac{1}{\|x_i\|}\right)\|x_i\|
\end{aligned}$$

de donde

$$\left\|\frac{x_i}{\|x_i\|}\right\| = k+1.$$

Ahora, cada elemento $\dfrac{x_i}{\|x_i\|}$ es de norma 1 y el conjunto $S(0,1)$ contiene mas de $k-1$ elementos linealmente independientes. Esto es una contradicción y así tenemos que X es *EC*. ∎

Usando la noción de $k - EC$ podemos probar el siguiente resultado para $\dim P_{\mathrm{M}}(x)$.

Teorema 6.3. *(I. Singer (1960)). Una condición necesaria y suficiente para que*

$$\dim P_{\mathrm{M}}(x) \leq k \qquad \textit{para} \quad \textit{todo} \quad x \in \mathrm{X}$$

es que X *sea k-estrictamente convexo.*

Demostración. La prueba la podemos encontrar en [Singer (1960)]

Supongamos ahora que el espacio de Banach $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ es un espacio de Hilbert H. En este caso la proyección métrica tiene un propiedad muy útil y que se establece en el siguiente Lema.

Lema 6.4. *Sean H un espacio de Hilbert y $\mathrm{M} \subseteq H$ convexo y cerrado. Entonces $P_{\mathrm{M}}(x)$ es no vació, univaluada y tal que*

$$\|P_{\mathrm{M}}(x) - P_{\mathrm{M}}(y)\| \leq \|x-y\|$$

Demostración. Como M es un subconjunto convexo cerrado de un espacio de Hilbert, no es difícil ver que $P_{\mathrm{M}}(x)$ no es vacío y univaluada. Dado que $P_{\mathrm{M}}(x)$ y $P_{\mathrm{M}}(y)$ son la mejor aproximación de x y y, respectivamente; tenemos

$$\langle P_{\mathrm{M}}(x) - x, P_{\mathrm{M}}(y) - P_{\mathrm{M}}(x)\rangle \geq 0 \tag{6.2}$$

$$\langle y - P_{\mathrm{M}}(y), P_{\mathrm{M}}(y) - P_{\mathrm{M}}(x)\rangle \geq 0 \tag{6.3}$$

sumando (6.2) y (6.3) tenemos que

$$\langle y - x, P_{\mathrm{M}}(y) - P_{\mathrm{M}}(x)\rangle + \langle P_{\mathrm{M}}(x) - P_{\mathrm{M}}(y), P_{\mathrm{M}}(y) - P_{\mathrm{M}}(x)\rangle \geq 0$$

o equivalentemente

$$\langle y - x, P_{\mathrm{M}}(y) - P_{\mathrm{M}}(x)\rangle \geq \|P_{\mathrm{M}}(x) - P_{\mathrm{M}}(y)\|^2$$

Ahora, aplicando la desigualdad de Cauchy al lado izquierdo, tenemos que

$$\|x - y\| \, \|P_{\mathrm{M}}(x) - P_{\mathrm{M}}(y)\| \geq \|P_{\mathrm{M}}(x) - P_{\mathrm{M}}(y)\|^2$$

y así

$$\|P_{\mathrm{M}}(x) - P_{\mathrm{M}}(y)\| \leq \|x - y\|$$

■

Bibliografía

[1] Bachman, G. - Narici L. *Funtional Analysis*, (1981).

[2] Baker, J. A. *Isometries in Normed Spaces*.

[3] Barbu, V. and Precupanu Th. *Convexity and Optimization in Banach Spaces*, Editura Academiei, (1986).

[4] Barcenas, D. - Sánchez, L. *Algunas Notas Sobre el Módulo de Convexidad*, Divulgaciones Matemáticas, Vol.(6), N^{o}1,(1998), 21-29.

[5] Beauzamy, B. *Introduction to Banach Spaces and Their Geometry*,(1982), Math. Studies, North-Holland.

[6] Beauzamy, B. and Morey, B. *Les pointes minimus et les ensembles optimuns dans les espaces de Banach*, J. Funct. Anal., 24 (1977), 107-139.

[7] Berksom, E. *Some types of Banach spaces, Hermitian operators and Bade functionals*, Trans. Amer. Math. Soc., 116 (1965), 376-385.

[8] Beurling, A. and Livingston, A. *A theorem on duality mappings*, Arkiv. Math., 4 (1962), 405-411.

[9] Blatter, Jörg. *Best uniform approximation in the linear space of continuos realvalued functions on a compact interval by elements of a finite-dimensional linear subspace*, Instituto de Matemática- U.F.R.J.,(1974).

[10] Bourgain, J. $\ell_\infty/\mathcal{C}_0$ *has no equivalent strictly convex norm*, Proc. Amer. Math. Soc. 78 (1980), 225-226.

[11] Carlen, Eric. *Notes on Uniform Convexity.*

[12] Clarkson, J.A. *Uniformly Convex Spaces*,Trans. Amer. Math. Soc.,(1936), 396-414.

[13] Day, Mahlon M. *Every L-space is isomorphic to a strictly convex space*, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 415-417.

[14] Day, Mahlon M., *Normed Linear Space*, Springer (1973).

[15] Day, Mahlon M., *Strictly Convexity and Smoothness of Normed Spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 78 (1955), 516-528.

[16] Delboso, Doménico. *Spazi lineari normati strettamente convessi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politc. Torino. Vol. 35 (1976-77), 239-242.

[17] Diestel, J. *Geometry of Banach space*, Springer Verlag, (1975).

[18] Goebel, Kazimierz and Kirk, W.A. *Topics in metrics fixed point theory*, Cambridge University Press, New York (1990).

[19] Gudder, S. and Strawther, D. *Strictly convex normed linear spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 59 (1976), 263-267.

[20] Hewitt, Edwin. *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, New York, (1965).

[21] Istratescu, V.I. *Strict Convexity and Complex Strict Convexity: Theory and Applications*, Lecture Notes in Pure and Aplied Math,89,(1984), Marcel - Deker.

[22] Izumino, Saichi. *Khalil's theorem and a property of uniformly convex spaces*, Math. Rep. Toyama Univ., Vol. 6, (1983), 41-46.

[23] James, Robert C. *Orthogonality and linear functionals in normed spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 61 (1947), 265-292.

[24] Kadets, M. and Fonf, V. *Subspaces of ℓ_1 with strictly convex norm*, Matematicheskie Zametki, Vol. 33, N^o 3 (1983), 417-422.

[25] King's College London. *Functional Analysis.*

[26] Klee, Erwin. *Introductory Functional Analysis with Applications*, New York, (1987).

[27] Kreyszig, Erwin. *Introductory Functional Analysis with Applications*, New York, (1987).

[28] Kumar Sen Dilip. *Characterizations of strict convexity*, Bull. Cal. Math. Soc., 73 (1981) 93-97.

[29] Larsen, Ronald. *Functional Analysis an Introduction*, New York, (1973).

[30] Lima, Asvald. *Uniqueness of Hahn-Banach extensions and liftings of linear dependences*, Math. Scand. 53 (1983), 97-113.

[31] Lindenstrauss J. and Tzafriri L. *Classical Banach Spaces II*, Springer-Verlag, (1979).

[32] Lovaglia, A. R. *Locally Uniformly Convex Banach Spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 78 (1955), 225-238.

[33] Megginson, R., *An Introduction to Banach Space Theory*, Graduate Text in Math, Springer - Verlag.

[34] Menaker, M. *Semi inner-product spaces*, University of Maryland, (1969).

[35] Miličić, Pavle. *Characterizations of convexities of normed spaces by means of g-angles*, MATEMATNYKN BECHNK, 59 (2002), 37-44.

[36] Miličić, Pavle. *Sur le g-angle dans un space normé*, Math. Vesnik, 45 (1993), 43-48.

[37] Montesinos V. y Torregrosa J. *Sobre espacios de Banach localmente uniformemente rotundos*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisica y Matemáticas, Tomo XXXVI, (1992), 263-277.

[38] Morales M., José R. *Algunas propiedades geométricass de los espacios de Banach*, Notas de Matemáticas, U.L.A., (1994).

[39] Morales M., José R. *La propiedad (k-M) en espacios de Banach*, U.L.A., (1991).

[40] Morales M., José R. *Sobre la propiedad (ω-M)*, U.L.A., (1999).

[41] Munoz P., Dirwin A. *Los Espacios Uniformemente Convexos*, U.L.A., 2003.

[42] Murkherjea, A. and Pothoven K. *Real and Functional Analysis*, New York, (1978).

[43] Phelps, Robert. *Uniqueness of Hahn-Banach extensions and unique best aproximation*, Trans. Amer. Math. Soc., 95 (1960b), 238-255.

[44] Rojas Edixon *Reflexividad en espacios de Banach*,T.E.G., U.L.A.,(2003)

[45] Ruston, A.F. *A note on convexity in Banach spaces*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 45 (1949), 157-159.

[46] Sánchez, Luisa. *Algunas observaciones sobre el módulo de convexidad*, U.L.A., (1995).

[47] Smith, Mark A. *A reflexive Banach space that is LUC and not $2R$*, Can. Math. Bull., 21, (1978), 628-636.

[48] Smith, Mark A. *Rotundity and extremity in $\ell_p(\mathrm{X}_\imath)$ y $L_p(\mu, \mathrm{X}_\imath)$*, Contemporary Mathematics, 52 (1986).

[49] Smith, Mark A. *Some examples concerning rotundity in Banach spaces*, Math. Ann., 233(1978),155-161.

[50] Strawther, D. and Gudder, S. *A characterization of strictly convex Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 47(1975) 268.

[51] Torrance, E. *Strictly convex spaces via semi-inner product space orthogonality*, Proc. Amer. Math. soc., 26 (1970), 108-110.

[52] Unni, K.R. and Puttamadaiah, C. *Some remarks on strictly convex semi inner-products spaces*, Bull. Cal. Math. Soc., 77 (1985), 261-265.

[53] Varela, Leonardo. *Teoría del Punto fijo para aplicaciones no-expansivas*, T.E.G., U.L.A., (2002).

[54] Zagreb, Franić. *A note on the k-strictly convex normed linear spaces*, Glasnick Matematički, 25 (1990), 83-85.