Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Grupo de Álgebra

Agregación de juicios: El enfoque basado en premisas

Br. Fernando Vargas Rangel

Requisito Especial de Grado
Para Optar al Título de
Licenciado en Matemáticas
Tutor: Dr. Ramón Pino Pérez

Mérida-Venezuela
abril 2011

ÍNDICE

Introducción **3**

1. Prolegómeno **5**

2. Enfoque basado en premisas **11**

3. Pruebas **21**

Bibliografía **33**

INTRODUCCIÓN

Este trabajo concierne la agregación de conjuntos de juicios que los individuos de un grupo hacen sobre ciertas aserciones. Estas aserciones están generalmente interconectadas lógicamente. Se quiere encontrar métodos para que los miembros del grupo aprueban individualmente, formando un conjunto colectivo de juicios que aprueban o no dichas propuestas.

En este trabajo veremos cómo tratar de conciliar la mayoría con un poco de lógica produce la llamada *Paradoja Doctrinal*. Esto en realidad es un teorema de imposibilidad en este marco.

Es importante distinguir la agregación de juicios de dos tareas similares estudiadas en Inteligencia Artificial y en Economía. La primera de ellas es la fusión lógica de conjuntos de creencias (ver por ejemplo [4]). La otra, es la tarea de agregación de preferencias la cual es uno de los temas centrales en Teoría de Elección Social [1]. Los juicios son representados como actos de aceptación o rechazo (afirmación o negación de las proposiciones). Difieren de las creencias en no permitir grados de confianza. Los juicios son binarios. En cuanto a la diferencia entre agregación de preferencias ordenadas y agregación de conjuntos de juicios podemos citar primero que los juicios no son graduados a diferencia de las preferencias y segundo los juicios tienen interconexiones lógicas, lo cual en principio está ausente de las preferencias.

Ya hemos mencionado que agregar juicios interconectados lógicamente conlleva a paradojas. Nosotros estudiaremos precisamente el significado matemático de esta paradoja como un teorema de imposibilidad de tener métodos de agregación de juicios que tengan ciertas propiedades. Este resultado es debido a List y Pettit [5]. Nosotros lo expondremos en el primer capítulo.

Un estudio sistemático de estos resultados de imposibilidad ha sido recientemente llevado cabo por Dietrich y Mongin [2]. El estudio de este artículo será el objeto de los capítulos 2 y 3 de este trabajo.

CAPÍTULO 1

PROLEGÓMENO

Sea $N = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ un conjunto de individuos (nosotros asumimos $n \geq 2$). Sea $X = \{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ un conjunto de fórmulas bien formadas del calculo proposicional. Se interpreta como el conjunto de proposiciones sobre el cual se harán juicios simultáneos.

Nosotros asumimos que X contiene al menos dos proposiciones atómicas distintas P y Q y la conjunción $(P \wedge Q)$. Además asumimos que X contiene pares proposición–negación, es decir, cuando $\phi \in X$, entonces $\neg\phi \in X$ (la negación de ϕ esta en X) o $\psi \in X$ donde $\phi \equiv \neg\psi$ (ϕ es la negación de otra proposición contenida en X). Para cualquier $S \subseteq X$, nosotros ponemos $S^{\pm} = \{\varphi, \neg\varphi : \varphi \in S\}$ y decimos que S es cerrado por negación si $S = S^{\pm}$. Una subagenda de X es algún subconjunto $P \subseteq X$ no vacío y cerrado por negación.

Un conjunto de juicios es un conjunto $B \subseteq X$ de fórmulas representando las proposiciones aceptadas por un individuo o el colectivo.

A cada individuo i en N, le corresponde un conjunto personal de juicios $A_i \subseteq X$, donde A_i es interpretado como el conjunto de todas estas proposiciones sobre X con las cuales el individuo i está de acuerdo.

Un perfil de conjuntos de juicios es una n-upla $(A_i)_{i \in N}$ conteniendo un conjunto personal de juicios A_i para cada individuo i en N y lo denotaremos por $\overrightarrow{A}$ en vez de $(A_i)_{i \in N}$.

Definición 1.1 *Un conjunto de juicios A se dice completo si, para todo ϕ en X, al menos una de $\phi \in A$, $\neg\phi \in A$, o bien $\psi \in A$, donde $\phi \equiv \neg\psi$ se cumple.*

Definición 1.2 *Un conjunto de juicios A se dice consistente si a partir de él no se prueba (clásicamente) una contradicción lógica.*

Definición 1.3 *Un conjunto de juicios A se dice deductivamente cerrado si, para toda $\psi \in X$ tal que A implica lógicamente ψ, se tiene $\psi \in A$*

Definición 1.4 *Nosotros definimos a D como el conjunto de todos los conjuntos de juicios que son consistentes y completos. Definimos a D^* como el conjunto de todos los conjuntos de juicios que son consistentes y deductivamente cerrados.*

Lema 1.1 $D \subseteq D^*$.

Prueba: Sea $A \in D$, A consistente y completo. Supongamos que $A \vdash \alpha$, mostraremos que $\alpha \in A$. Supongamos que $\alpha \notin A$ por ser A completo tenemos que $\neg\alpha \in A$ o $\exists\psi \in A$ tal que $\alpha = \neg\psi$.
Si $\neg\alpha \in A \Rightarrow A \vdash \neg\alpha$ y como $A \vdash \alpha$ necesariamente $A \vdash \neg\alpha \wedge \alpha$ lo que contradice la consistencia de A.
Si existe $\psi \in A$ tal que $\alpha = \neg\psi$ se tiene $A \vdash \neg\psi$ y como $A \vdash \psi$ porque $\psi \in A$. Así, $A \vdash \psi \wedge \neg\psi$ lo cual es una contradicción por ser A consistente. ∎

Una función de agregación de juicios es una función F cuya entrada es un perfil de conjuntos de juicios y cuya salida es un conjunto colectivo de juicios $A \subseteq X$, $F : (2^X)^N \to 2^X$, donde A es interpretado como el conjunto de todas esas proposiciones en X para el cual el grupo N está de acuerdo.

Definición 1.5 *Una función de agregación de juicios F tal que cada elemento de la imagen sea un conjunto consistente (respectivamente completo, deductivamente cerrado) se llamará consistente (respectivamente completa, deductivamente cerrada).*

Diremos que un perfil $\overrightarrow{A}$ es deductivamente cerrado, completo y consistente si cada A_i es deductivamente cerrado, completo y consistente.

Definición 1.6 (Dominio Universal (U)) *: El dominio de F es el conjuntos de todos los perfiles donde cada conjunto individual es completo, consistente y deductivamente cerrado.*

Definición 1.7 (Anonimato (A)) *: Para cualquier $\overrightarrow{A}$ en el dominio de F y toda permutación $\sigma : N \to N$, $F(\overrightarrow{A}) = F(\overrightarrow{A}_{\sigma(i)})$.*

Definición 1.8 (Sistematicidad (S)) *: Diremos que F satisface sistematicidad si existe una función $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ tal que, para cualquier $\overrightarrow{A}$ en el dominio de F,*

$F(\overrightarrow{A}) = \{\phi \in X : f(\delta_1(\phi), \delta_2(\phi), \ldots, \delta_n(\phi)) = 1\}$, *donde, para cada* $i \in N$ *y cada* $\phi \in X$, $\delta_i(\phi) = 1$ *si* $\phi \in A_i$ *y* $\delta_i(\phi) = 0$ *si* $\phi \notin A_i$

Proposición 1.1 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) F *satisface sistematicidad.*

(ii) Para cualesquiera par de formulas $\alpha, \beta \in X$ *y perfiles* $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{A'}$ *en el dominio de* F, *si para cada* $i \in N$, $\alpha \in A_i$ *si y solo si* $\beta \in A'_i$, *entonces* $\alpha \in F(\overrightarrow{A})$ *si y solo si* $\beta \in F(\overrightarrow{A'})$.

Prueba:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Existe una función $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ tal que, para cualquier $\overrightarrow{A}$ en el dominio de F, $F(\overrightarrow{A}) = \{\phi \in X : f(\delta_1(\phi), \delta_2(\phi), \ldots, \delta_n(\phi) = 1)\}$, donde, para cada $i \in N$ y cada $\phi \in X$, $\delta_i(\phi) = 1$ si $\phi \in A_i$ y $\delta_i(\phi) = 0$ si $\phi \notin A_i$.

sean $\alpha, \beta \in X$ y perfiles $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{A'}$ en el dominio de F

Supongamos que para cada $i \in N$ $\alpha \in A_i \Leftrightarrow \beta \in A'_i$ entonces para todo $i \in N$, $\delta_i(\alpha) = \delta_i(\beta)$, luego, por la hipótesis, $\alpha \in F(\overrightarrow{A}) \Leftrightarrow f(\delta_1(\alpha), \delta_2(\alpha), \ldots, \delta_n(\alpha)) = 1 \Leftrightarrow 1 = f(\delta_1(\beta), \delta_2(\beta), \ldots, \delta_n(\beta)) \Leftrightarrow \beta \in F(\overrightarrow{A'})$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Para cada $A \subseteq X$, sea $\delta_A : X \to \{0,1\}$ la función definida por

$$\delta_A(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \in A \\ 0 & \text{si } \alpha \notin A \end{cases}$$

Consideremos $(k_1, \ldots, k_n) \in \{0,1\}^n$ y mostraremos que existe $\alpha \in X$ y $\overrightarrow{A}$ un perfil tal que $(k_1, \ldots, k_n) = (\delta_{A_1}(\alpha), \ldots, \delta_{A_n}(\alpha))$.

Sea α una fórmula consistente de X tal que $\neg\alpha$ también sea consistente.
Consideremos para cada $i \in N$:
Si $k_i = 1$, A_i es una extensión completa y consistente de α.
Si $k_i = 0$, A_i es una extensión completa y consistente de $\neg\alpha$.

Así, si $k_i = 1$, $\alpha \in A_i \Rightarrow \delta_{A_i}(\alpha) = 1$
Por otro lado si $k_i = 0$, $\alpha \notin A_i \Rightarrow \delta_{A_i}(\alpha) = 0$
Por lo tanto $\forall i \in N$, $\delta_{A_i}(\alpha) = k_i$
Así $(k_1, \ldots, k_n) = (\delta_{A_1}(\alpha), \ldots, \delta_{A_n}(\alpha))$

Sea $f : \{0,1\}^N \to \{0,1\}$, f definida por:

$$f(\delta_{A_1}(\alpha), \ldots, \delta_{A_n}(\alpha)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \in F(\overrightarrow{A}) \\ 0 & \text{si } \alpha \notin F(\overrightarrow{A}) \end{cases}$$

Veamos que f no depende de α y $\overrightarrow{A}$.
Sean $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{A'}$ dos perfiles y $\alpha, \beta \in X$ tales que $(\delta_{A_1}(\alpha), \ldots, \delta_{A_n}(\alpha)) = (\delta_{A'_1}(\beta), \ldots, \delta_{A'_n}(\beta))$ y mostraremos que $f(\delta_{A_1}(\alpha), \ldots, \delta_{A_n}(\alpha)) = f(\delta_{A'_1}(\beta), \ldots, \delta_{A'_n}(\beta))$

Como $\delta_{A_i}(\alpha) = \delta_{A'_i}(\beta), \quad \forall i \in N$, entonces $\alpha \in A_i \Leftrightarrow \beta \in A'_i$ luego por (ii) $\alpha \in F(\overrightarrow{A}) \Leftrightarrow \beta \in F(\overrightarrow{A'})$ es decir $f(\delta_{A_1}(\alpha), \ldots, \delta_{A_n}(\alpha)) = 1 \Leftrightarrow f(\delta_{A'_1}(\beta), \ldots, \delta_{A'_n}(\beta)) = 1$. Por lo tanto, $f(\delta_{A_1}(\alpha), \ldots, \delta_{A_n}(\alpha)) = f(\delta_{A'_1}(\beta), \ldots, \delta_{A'_n}(\beta))$. Luego por la definición de f se tiene $F(\overrightarrow{A}) = \{\phi \in X : f(\delta_1(\phi), \delta_2(\phi), \ldots, \delta_n(\phi)) = 1\}$. ∎

Teorema 1.1 *No existe una función de agregación de juicios F completa, consistente y deductivamente cerrada que satisface (U), (A) y (S).*

Prueba: Supongamos que Fsatisface (U), (A) y (S) y es completa, consistente y deductivamente cerrada. Tenemos que $P, Q, (P \wedge Q), \neg(P \wedge Q) \in X$

Como F satisface (S), existe una función $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ tal que, para cualquier $\overrightarrow{A}$ en el dominio de F, $F(\overrightarrow{A}) = \{\phi \in X : f(\delta_1(\phi), \delta_2(\phi), \ldots, \delta_n(\phi) = 1)\}$, donde, para cada $i \in N$ y cada $\phi \in X$, $\delta_i(\phi) = 1$ si $\phi \in A_i$ y $\delta_i(\phi) = 0$ si $\phi \notin A_i$.

Como F satisface (A), para cualquier $(d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \{0,1\}^n$ y cualquier permutación $\sigma : N \to N$, $f(d_1, d_2, \ldots, d_n) = f(d_{\sigma(1)}, d_{\sigma(2)}, \ldots, d_{\sigma(n)})$. Luego para cualquier $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ en $\{0,1\}^n$ $f(d_1, d_2, \ldots, d_n) = f(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ ssi
$|\{i \in N : d_i = 1\}| = |\{i \in N : e_i = 1\}|$.
Para cada $\phi \in X$, definimos $N_\phi := \{i \in N : \phi \in A_i\}$. Entonces, para cualquier, $\phi, \psi \in X$, si $|N_\phi| = |N_\psi|$, entonces $\phi \in F(\overrightarrow{A})$ si y solo si $\psi \in F(\overrightarrow{A})$

Por suposición $n \geq 2$. Consideremos un perfil $\overrightarrow{A}$ con las siguientes propiedades:

	$\delta_i(P)$	$\delta_i(Q)$	$\delta_i((P \wedge Q))$	$\delta_i(\neg(P \wedge Q))$
$i = 1$	1	1	1	0
$i = 2$	1	0	0	1
$i = 3$	0	1	0	1
$i > 3$ i es par	1	1	1	0
$i > 3$ i es impar	0	0	0	1

Sea $A = F(\overrightarrow{A})$.

Caso n par. Nosotros tenemos $|N_{(P \wedge Q)}| = |N_{\neg(P \wedge Q)}|$, luego

$$P \wedge Q \in A \quad \Leftrightarrow \quad \neg(P \wedge Q) \in A \qquad (*)$$

Por la completitud de A, al menos una de $P \wedge Q \in A$ o bien $\neg(P \wedge Q) \in A$. Así, por $(*)$ tenemos $P \wedge Q \in A$ y $\neg(P \wedge Q) \in A$ la cual contradice la consistencia de A.

Caso n impar. Nosotros tenemos $|N_P| = |N_Q| = |N_{\neg(P\wedge Q)}|$. Por lo tanto, $P \in A \Leftrightarrow Q \in A \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \in A$.
Si $P \in A$ entonces $Q \in A$ y $\neg(P \wedge Q) \in A$, como $P, Q \in A$, A implica lógicamente $P \wedge Q$ y por ser A deductivamente cerrado, $(P \wedge Q) \in A$, pero entonces ambas $\neg(P \wedge Q) \in A$ y $(P \wedge Q) \in A$ lo que contradice la consistencia de A.

Si $P \notin A$ entonces $Q \notin A$ y $\neg(P \wedge Q) \notin A$ entonces por la completitud de A, $(P \wedge Q) \in A$, pero como $(P \wedge Q)$ implica lógicamente P, y A es deductivamente cerrado, nosotros tenemos $P \in A$ una contradicción. ∎

Definición 1.9 *Un perfil $\overrightarrow{A}$ es unidimensionalmente alineado si los individuos involucrados pueden ser reordenados por una permutación $\rho : N \longrightarrow N$ tal que que para cada proposición α existe un $k_\alpha \in N$ tal que para todo $i \leq k_\alpha$, $\alpha \in A_{\rho(i)}$ y para todo $i > k_\alpha$, $\alpha \notin A_{\rho(i)}$ o bien para todo $i \leq k_\alpha$, $\alpha \notin A_{\rho(i)}$ y para todo $i > k_\alpha$, $\alpha \in A_{\rho(i)}$.*

Un ejemplo de este tipo de perfiles puede verse en la tabla siguiente donde $\rho(1) = 3$, $\rho(2) = 1$, $\rho(3) = 2$, $\rho(4) = 5$ y $\rho(5) = 4$:

	individuo 3	individuo 1	individuo 2	individuo 5	individuo 4
α	verdad	verdad	verdad	falso	falso
β	falso	falso	falso	verdad	verdad
$\alpha \wedge \beta$	falso	falso	falso	falso	falso
$\neg(\alpha \wedge \beta)$	verdad	verdad	verdad	verdad	verdad

Teorema 1.2 *Supongamos que N es impar. Entonces existe una función F de agregación de juicios, la cual es completa, consistente y deductivamente cerrada definida sobre perfiles lógicamente cerrados, consistentes, completos y unidemensionalmente alineados. Además F satisface sistematicidad y anonimato.*

Prueba:
Sea $\overrightarrow{A}$ un perfil unidemensionalmente alineado y cerrado.
Sea $F(\overrightarrow{A}) = \{\phi \in X : |\{i \in N : \phi \in A_i\}| > |\{i \in N : \phi \notin A_i\}|\}$ Veamos que $F(\overrightarrow{A})$ es completa. Sea $\alpha \in X$ y supongamos que $\alpha \notin F(\overrightarrow{A})$ entonces se tiene que $\neg\alpha \in F(\overrightarrow{A})$ por ser N impar y cada perfil cerrado. De manera análoga se verifica que F es consistente. Veamos que F es deductivamente cerrada. Recordemos que el lenguaje L es generado por $\{\neg, \vee, \wedge\}$, así solo verificaremos que F es deductivamente cerrado para

$\vee, \wedge$, y $\neg$. sean $\alpha, \beta \in F(\overrightarrow{A})$ y verifiquemos que $\alpha \wedge \beta \in F(\overrightarrow{A})$, para ello tomaremos $i = \text{mín}\{k_\alpha, k_\beta\}$. Como $\alpha, \beta \in F(\overrightarrow{A})$ necesariamente $i > \frac{n}{2}$ y para todo $j \leq i$, $\alpha \wedge \beta \in A_j$ por ser A_j deductivamente cerrado. Luego $\alpha \wedge \beta \in F(\overrightarrow{A})$. El caso de la disyunción se trata de manera análoga.
El anonimato y la sistematicidad son evidentes por la definición de F. ∎

La tabla siguiente ilustra el fenómeno con $N = 5$

	$\rho(1)$	$\rho(2)$	$\rho(3)$	$\rho(4)$	$\rho(5)$
α	1	1	1	1	0
β	1	1	1	0	0
$\alpha \wedge \beta$	1	1	1	0	0
$\alpha \vee \beta$	1	1	1	1	0

En la tabla anterior podemos observar que $i = 3$ F y que para $j \leq 3$, $\alpha \wedge \beta \in A_j$ luego $\alpha \wedge \beta \in F(\overrightarrow{A})$.

CAPÍTULO 2

ENFOQUE BASADO EN PREMISAS

Nosotros consideramos un conjunto de individuos N de cardinalidad $|N| \geq 2$ y funciones de agregación de juicios del tipo $F : D^N \to 2^X$ con codominio D y D^* como casos particulares y denotaremos a los perfiles $(A_i)_{i \in N}$ por $\overrightarrow{A}$.

Vamos a asumir que $P \subseteq X$ es una subagenda cerrada por negación.

Definición 2.1 (Independecia sobre P) *Para todo $\rho \in P$ y todo $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{A^*} \in D^N$, si para todo $i \in N$, $\rho \in A_i \Leftrightarrow \rho \in A_i^*$, entonces*

$$\rho \in F(\overrightarrow{A}) \Leftrightarrow \rho \in F(\overrightarrow{A^*})$$

Definición 2.2 (Preservación de Unanimidad sobre P) *Para todo $\varphi \in P$ y todo $\overrightarrow{A}$, si para todo $i \in N$, $\varphi \in A_i$, entonces $\varphi \in F(\overrightarrow{A})$*

Definición 2.3 *Sea $F : D^N \to 2^X$. Decimos que F es basado en premisas, si y sólo si, F es independiente sobre P y preserva unanimidad sobre X.*

Definición 2.4 *Sea $F : D^N \to 2^X$. Decimos que F es basado en conclusiones, si y sólo si, F preserva unanimidad sobre $X \backslash P$.*

Para ver ejemplos de los dos enfoques, consideremos la función F_{MP} la función que se basa en la mayoría de votos sobre las premisas y la función F_{MC} que se basa en la mayoría de votos sobre las conclusiones. Más precisamente, dado N de cardinalidad finita, para cada perfil $\overrightarrow{A} \in D^N$, nosotros definimos $F_{MP}(\overrightarrow{A})$ de la manera siguiente: $P_{maj} = \{\rho \in P : |\{i : \rho \in A_i\}| > |N|/2\}$, y entonces ponemos

$$F_{MP}(\overrightarrow{A}) = P_{maj} \cup \{\varphi \in X \backslash P : P_{maj} \vdash \varphi\} \cup (\cap A_i).$$

F_{MC}, se define de la siguiente manera

$$F_{MC}(\overrightarrow{A}) = \{\varphi \in X \backslash P : |\{i : \varphi \in A_i\}| > |N|/2\}$$

para cada perfil $\overrightarrow{A} \in D^N$.

Ilustremos el comportamiento de estas funciones con el ejemplo de la paradoja doctrinal. Una corte de 3 jueces tiene para decidir si un acusado es responsable (culpable) de violación de contrato. Según la doctrina legal, la corte hayará al acusado culpable si y solo si el contrato es válido y hubo la violación del contrato. Ahora imagine los tres jueces 1,2 y 3, votan como se indica en la tabla siguiente sobre esos dos hechos y sobre la materia derivable de si el acusado es en efecto culpable. El 'sí' o 'no' sobre alguna fila representa el juicio de cada juez sobre el hecho en cuestión.

	P	Q	$P \wedge Q$
	¿contrato válido?	¿violación de contrato?	¿culpable?
1	si	no	no
2	no	si	no
3	si	si	si

Si consideramos las premisas como $P, \neg P, Q, \neg Q$ (donde P representa 'contrato válido' y Q representa 'violación del contrato') y las conclusiones $P \wedge Q, \neg(P \wedge Q)$ (donde $P \wedge Q$ representa 'culpable'), la s funciones F_{MP} y F_{MC} son dos formas muy naturales de agregar los juicios para tomar la decisión. Los jueces podrían hacer razonamientos individuales y entonces agregar los votos sobre la conclusión, la propuesta 'culpable'. Si se toma la función F_{MC} la proposición 'culpable' no sería mayoritaria, y el acusado saldría libre. Esto es el enfoque basado en la conclusión.
La corte podría hacer que los jueces agreguen sus votos sobre las premisas individuales ('contrato válido' y 'violación de contrato') y dejar que el resultado sobre esas premisas determine la conclusión. Ese es el funcionamiento de F_{MC}. Como mayoritarimente se tiene 'contrato válido' y 'violación de contrato', el resultado en este caso es que el acusado sería hallado culpable. Esto es justamente el enfoque basado en premisas.

Definición 2.5 *Decimos que F es una oligarquía sobre P si existe un conjunto no vació $M \subseteq N$ (los oligarcas) tal que, para todo $\overrightarrow{A} \in D^N$, $F(\overrightarrow{A}) \cap P = \cap_{i \in M}(A_i \cap P)$. Decimos que F es una dictadura sobre P, si F es una oligarquía sobre P con $M = \{i\}$ para algún i. Un tal i se llama el dictador sobre P.*

Cuando F es una oligarquía [resp. dictadura] sobre X (es decir, el conjunto P son todas las proposiciones) decimos que F es una oligarquía (global) [resp. dictadura (global)]

Definición 2.6 (Sistematicidad sobre P) *Decimos que F es sistemática sobre P si para todo $\rho, \rho^* \in P$ y perfiles cualesquiera $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{A^*} \in D^N$, si para todo $i \in N$, $\rho \in A_i \Leftrightarrow \rho^* \in A_i^*$, entonces $\rho \in F(\overrightarrow{A}) \Leftrightarrow \rho^* \in F(\overrightarrow{A^*})$*

Definición 2.7 (Monotonía sobre P) *Decimos que F cumple monotonía sobre P si para todo $\rho \in P$ y perfiles cualesquiera $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{A^*} \in D^N$, si para todo $i \in N$, $\rho \in A_i \Rightarrow \rho \in A_i^*$, y para algún $j \in N$, $\rho \notin A_j$ y $\rho \in A_j^*$, entonces $\rho \in F(\overrightarrow{A}) \Rightarrow \rho \in F(\overrightarrow{A^*})$*

Definición 2.8 *A un subconjunto $C \subseteq N$ lo llamaremos una coalición. Diremos que un conjunto de coaliciones $\mathcal{D} \subseteq 2^N$ es:*

i) cerrado por super conjunto si para coaliciones cualesquiera C, C^* si $C \in \mathcal{D}$ y $C \subseteq C^*$ entonces $C^* \in \mathcal{D}$;

ii) cerrada por intersección si para coaliciones cualesquiera C, C^* si $C, C^* \in \mathcal{D}$ entonces $C \cap C^* \in \mathcal{D}$;

iii) completo si para toda coalición C se tiene que $C \in \mathcal{D}$ o bien $N - \{C\} \in \mathcal{D}$.

Definición 2.9 *Decimos que $\mathcal{D}$ es un filtro si es cerrado por super conjunto, cerrado por intersección, $\emptyset \notin \mathcal{D}$ y $\mathcal{D} \neq \emptyset$.*

Definición 2.10 *Decimos que $\mathcal{D}$ es un ultrafiltro si es un filtro completo.*

Para cualquier función de agregación de juicios $F : D^N \to 2^X$, nosotros decimos que $\mathcal{D} \subseteq 2^N$ determina F sobre $\rho \in P$ si

$$\forall \overrightarrow{A}, \quad \rho \in F(\overrightarrow{A}) \Leftrightarrow \{i : \rho \in A_i\} \in \mathcal{D} \qquad (1)$$

En tal caso denotaremos $\mathcal{D}$ por $\mathcal{C}_P^F$. Si además el mismo $\mathcal{D}$ determina F sobre cada $\rho \in P$, diremos que $\mathcal{D}$ determina F sobre P y denotamos a ese conjunto por $\mathcal{C}_P^F$.

Definición 2.11 *Para cualquiera $\varphi, \psi \in X$, diremos que φ implica condicionalmente ψ, denotado $\varphi \mid\!\sim \psi$, si existe un conjunto (posiblemente vació) $Y \subseteq X$ tal que $Y \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ y ambos $Y \cup \{\varphi\}$ y $Y \cup \{\neg\psi\}$ son consistentes.*

Definición 2.12 *Sea $Z \subseteq X$. Definimos $Y_{\neg Z}$ como el conjunto $(Y \backslash Z) \cup \{\neg\varphi : \varphi \in Z\}$, es decir el conjunto obtenido de Y quitándole Z y agregándole la negación de las fórmulas de Z*

Ejemplo 2.1 *Sea $X = \{p, q, p \to q, \ldots\}$ finito y cerrado por negación, y veamos que $(p \to q) \mid\!\sim q$, para ello basta tomar $Y = \{p\}$ ya que $\{p\} \cup \{p \to q\} \vdash q$ y Y es consistente con $p \to q$ y con $\neg q$*

Condiciones sobre las premisas P.

a) Existe un conjunto minimal inconsistente $Y \subseteq X$ tal que $|Y \cap P| \geq 3$.

b) Existe un conjunto minimal inconsistente $Y \subseteq X$ tal que $Y_{\neg Z}$ es consistente para algún conjunto $Z \subseteq Y \cap P$ de cardinalidad par.

c) Para todo $p, q \in P$, existe una sucesión $p_1, \ldots, p_k \in P \quad (k \geq 2)$ tal que $p = p_1 \mid\!\sim p_2 \mid\!\sim \ldots \mid\!\sim p_k = q$.

Ejemplo 2.2 *Sea $X = \{p, q, p \to q, \ldots\}$ finito y cerrado por negación. Sea $P = \{p, q, p \to q, \neg p, \neg q, \neg(p \to q)\}$. Veamos que P cumple las condiciones anteriores.*
Para la parte (a) sea $Y = \{p, p \to q, \neg q\}$, claramente Y es inconsistente y notemos que cualquier fórmula proposicional que extraigamos de Y lo hace consistente, y $|Y \cap P| \geq 3$.
Para la parte (b) sea $Z = \{p, \neg q\} \subseteq Y \cap P$ y $Y_{\neg Z} = \{p \to q, q, \neg p\}$ es consistente, ya que $Y_{\neg Z} = \{p \to q\} \cup \{\neg p, q\}$.
Para la parte (c) veamos que $p \mid\!\sim \neg p$, en efecto $p \mid\!\sim \neg q \mid\!\sim \neg p$, y sea $Y = \{p \neg q\}$ y $Y \cup \{q\}$ es consistente. De manera análoga se hace la prueba para los otros elementos de P.

Teorema 2.1 *Suponga que N es finito con $|N| \geq 3$. Entonces,*

1. *P satisface (a), (b) y (c), si, y sólo si, para cada $F : D^N \to D^*$, función de agregación de juicios, si F es basada en premisas sobre P, entonces F es una oligarquía sobre P.*

2. *P satisface (a), (b) y (c), si, y sólo si, para cada $F : D^N \to D$, función de agregación de juicios, si F es basada en premisas sobre P, entonces F es dictatorial sobre P.*

La demostración del teorema precedente necesitará de 9 lemas que enunciamos más abajo y cuyas pruebas se realizarán posteriormente.

Lema 2.1 *Una función de agregación de juicios $F : D^N \to 2^X$ es*

(i) independiente sobre P, si y sólo si, para cada $\rho \in P$, existe $\mathcal{C}_\rho^F \subseteq 2^N$ generando F sobre ρ;

(ii) sistemática sobre P, si y sólo si, existe $\mathcal{C}_P^F \subseteq 2^N$ generando F sobre P

Lema 2.2 *Sea $F : D^N \to D^*$ una función de agregación de juicios independiente sobre P. Entonces, para todo $\rho \in P$ y todo $C \subseteq N$, si $C \in \mathcal{C}^F_\rho$, entonces $N \backslash C \notin \mathcal{C}^F_{\neg\rho}$, y si además $F : D^N \to D$, vale el recíproco. Además, $N \in \mathcal{C}^F_\rho$ y $\emptyset \notin \mathcal{C}^F_\rho$ si F preserva unanimidad.*

Lema 2.3 *Supongamos que (b) se cumple. Entonces, si una función de agregación de juicios $F : D^N \to D^*$ es sistemática sobre P y preserva unanimidad, $\mathcal{C}^F_P$ es cerrado por super conjunto.*

Lema 2.4 *Supongamos que (a) y (b) se cumplen. Entonces, si una función de agregación de juicios $F : D^N \to D^*$ es sistemática sobre P y preserva unanimidad, $\mathcal{C}^F_P$ es cerrada por intersección.*

Lema 2.5 *Supongamos que (a) y (b) se cumplen. Entonces,*

1. *Si una función de agregación de juicios $F : D^N \to D^*$ es sistemática sobre P y preserva unanimidad, $\mathcal{C}^F_P$ es un filtro, y para N finito, F es una oligarquía sobre P.*

2. *Si una función de agregación de juicios $F : D^N \to D$ es sistemática sobre P y preserva unanimidad, $\mathcal{C}^F_P$ es ultrafiltro, y para N finito, F es una dictadura sobre P.*

Lema 2.6 *Si una función de agregación de juicios $F : D^N \to D^*$ es independiente sobre P y preserva unanimidad, entonces para todo $p, q \in P$, si $p \mid\!\sim q$ entonces $\mathcal{C}_p \subseteq \mathcal{C}_q$. Si además (c) se cumple, F es sistemática sobre P.*

Lema 2.7 *Si $|N| \geq 3$ y (a) no se cumple, entonces existe una función de agregación de juicios $F : D^N \to D$ que es sistemática (por tanto independiente) sobre P, monótona sobre P y preservando unanimidad, y tal que $\mathcal{C}^F_P$ no es un filtro.*

Lema 2.8 *Si $|N| \geq 3$ y (b) no se cumple, entonces existe una función de agregación de juicios $F : D^N \to D$ que es sistemática (por tanto independiente) sobre P y preservando unanimidad, y tal que $\mathcal{C}^F_P$ no es un filtro.*

Lema 2.9 *Supongamos que (c) no se cumple, entonces existe una función de agregación de juicios $F : D^N \to D$ que es independiente sobre P y preservando unanimidad, y tal que $\mathcal{C}^F_\rho$ no es el mismo para todo $\rho \in P$.*

Demostración del Teorema 2.1

Supongamos que P satisface (a), (b) y (c). Supongamos además que F es basada en premisas. Por el lema 2.6 F es sistemática. Por el Lema 2.1 $\mathcal{C}^F_P$ determina F sobre P. Por el Lema 2.5, $\mathcal{C}^F_P$ es un filtro en el caso en que el codominio de la función es D^* y cuando N es finito F es una oligarquía. Esto prueba la dirección *sólo si* de la parte 1 del teorema. Si el codominio es D por el Lema 2.5, $\mathcal{C}_P^F$ es un ultrafiltro y cuando N es finito F es una dictadura. Esto prueba la dirección *sólo si* de la parte 2 del teorema.

Ahora veamos la dirección *si* de ambas partes. Razonando por el absurdo, supongamos que P no satisface alguna de las condiciones (a), (b) y (c).
Si (a) falla, por el lema 2.7 existe una función de agregación de juicios sistemática y basada en premisas de tipo $F : D^N \longrightarrow D$ tal que $\mathcal{C}_P^F$ no es un filtro, y por el lema 2.5 se tiene que F no es oligarquía (resp. no es dictatorial) lo cual es una contradicción.
Si (b) no se cumple aplicamos el lema 2.8 para mostrar que existe una función de agregación de juicios sistemática y basada en premisas de tipo $F : D^N \longrightarrow D$ tal que $\mathcal{C}_P^F$ no es un filtro, y por el lema 2.5 se tiene que F no es oligarquía (resp. no es dictatorial) lo cual es una contradicción.
Si (c) no se cumple aplicamos el lema 2.9 para mostrar que existe una función de agregación de juicios basada en premisas de tipo $F : D^N \longrightarrow D$ que no puede ser representada por un conjunto $\mathcal{C}_P^F$ y luego tiene que F no puede ser oligarquía lo cual es una contradicción. ∎

A continuación enunciamos otra condición sobre las premisas P que permite refinar el Teorema 2.1:

(d) Para todo $S \subseteq P$ que es consistente y completo con respecto a P, y todo $\varphi \in X$, $S \vdash \varphi$ o $S \vdash \neg\varphi$.

Teorema 2.2 *Suponga que N es finito con $|N| \geq 3$. Entonces, P satisface (a), (b), (c) y (d) si y sólo si para toda función $F : D^N \to D$, si F es basada en premisas sobre P entonces F es globalmente dictatorial.*

Este teorema se prueba con la ayuda del Teorema 2.1 y los lemas que a continuación enunciamos.

Lema 2.10 *Supongamos que (d) se cumple. Si una función de agregación de juicios $F : D^N \to D$ es una dictadura sobre P, esta es una dictadura (global).*

Lema 2.11 *Sea N finito y (d) no se cumple, entonces existe una función de agregación de juicios $F : D^N \to D$ que es sistemática (por tanto independiente) sobre P y preserva unanimidad, pero no es una dictadura.*

Prueba del teorema 2.2
$\Rightarrow$) Por el teorema 2.1 y el lema 2.10 se tiene que F es una dictadura.
$\Leftarrow$) Por el teorema 2.1 ya sabemos que (a), (b) y (c) se cumplen. Falta ver que (d)

se cumple. Si no fuese así, entonces, por el lema 2.11, se puede construir F del tipo $F : D^N \to D$ no dictatorial y basada en premisas, lo cual es una contradicción. ∎

Tenemos también algunas variantes del Teorema 2.1.

Teorema 2.3 *Suponga que N es finito con $|N| \geq 3$, entonces,*

1. *P satisface (a) y (b) si, y sólo si, para cada $F : D^N \to D^*$ función de agregación de juicios si es sistemática sobre P y preserva unanimidad sobre P entonces F es una oligarquía.*

2. *P satisface (a) y (b) si, y sólo si, para cada $F : D^N \to D$ función de agregación de juicios si es sistemática sobre P y preserva unanimidad sobre P entonces F es una dictadura.*

Prueba: Parte (1)
($\Rightarrow$) Por el lema 2.5 $\mathcal{C}_P^F$ es un filtro y como N es finito F es una oligarquía.
($\Leftarrow$) Supongamos que (a) o (b) no se cumplen.
Si (a) falla, por el lema 2.7 existe una función de agregación de juicios sistemática y basada en premisas de tipo $F : D^N \longrightarrow D$ tal que $\mathcal{C}_P^F$ no es un filtro, y por el lema 2.5 se tiene que F no es oligarquía lo cual es una contradicción.
Si (b) no se cumple aplicamos el lema 2.8 para mostrar que existe una función de agregación de juicios sistemática y basada en premisas de tipo $F : D^N \longrightarrow D$ tal que $\mathcal{C}_P^F$ no es un filtro, y por el lema 2.5 se tiene que F no es oligarquía lo cual es una contradicción.

Parte (2):
($\Rightarrow$) Por la segunda parte del lema 2.5 $\mathcal{C}_P^F$ es un ultrafiltro y como N es finito F es una dictadura.
($\Leftarrow$) Supongamos que (a) o (b) no se cumplen.
Si (a) falla, por el lema 2.7 existe una función de agregación de juicios sistemática y basada en premisas de tipo $F : D^N \longrightarrow D$ tal que $\mathcal{C}_P^F$ no es un filtro, y por el lema 2.5 se tiene que F no es oligarquía por lo tanto no es dictatorial, lo cual es una contradicción.
Si (b) no se cumple aplicamos el lema 2.8 para mostrar que existe una función de agregación de juicios sistemática y basada en premisas de tipo $F : D^N \longrightarrow D$ tal que $\mathcal{C}_P^F$ no es un filtro, y por el lema 2.5 se tiene que F no es oligarquía por lo tanto no es dictatorial, lo cual es una contradicción. ∎

La segunda variante del Teorema 2.1 es la siguiente:

Teorema 2.4 *Suponga que N es finito con $|N| \geq 3$, entonces,*

1. *P satisface (a) si, y sólo si, para cada $F : D^N \to D^*$ función de agregación de juicios que es sistemática sobre P, monótona sobre P y preserva unanimidad sobre P, es necesariamente una oligarquía sobre P.*

2. *P satisface (a) si, y sólo si, para cada $F : D^N \to D$ función de agregación de juicios que es sistemática sobre P, monótona sobre P y preserva unanimidad sobre P, es necesariamente una dictadura sobre P*

Para probar este teorema necesitamos unos lemas más, a saber:

Lema 2.12 *Supongamos que P cumple (a) y que $F : D^N \to D^*$ es monótona. Entonces, Si una función de agregación de juicios F es sistemática sobre P y preserva unanimidad, $\mathcal{C}_P^F$ es cerrada por intersección.*

Lema 2.13 *Supongamos que (a) se cumple y que F es monótona.*

1. *Si una función de agregación de juicios $F : D^N \to D^*$ es sistemática sobre P y preserva unanimidad, $\mathcal{C}_P^F$ es un filtro, y para N finito, F es una oligarquía sobre P*

2. *Si una función de agregación de juicios $F : D^N \to D$ es sistemática sobre P y preserva unanimidad, $\mathcal{C}_P^F$ es un ultrafiltro, y para N finito, F es una dictadura sobre P*

Prueba del teorema 2.4

Para la parte (1) tenemos:
($\Rightarrow$) Por el lema 2.12 $\mathcal{C}_P^F$ es cerrada por intersección y por el lema 2.13 $\mathcal{C}_P^F$ es un filtro y por tanto una oligarquía.
($\Leftarrow$) Se deduce inmediatamente del Lema 2.7.

La parte (2) se hace de manera totalmente análoga. ∎

Finalmente consideramos la siguiente variante del Teorema 2.1

Teorema 2.5 *Suponga que N es finito con $|N| \geq 3$, entonces*

1. *P satisface (a) y (c) si, y sólo si, para cada $F : D^N \to D^*$ función de agregación de juicios es independiente sobre P y monótona sobre P y preserva unanimidad sobre P entonces F es una oligarquía sobre P.*

2. *P satisface (a) y (c) si, y sólo si, para cada $F : D^N \to D$ función de agregación de juicios es independiente sobre P y monótona sobre P y preserva unanimidad sobre P entonces F es una dictadura sobre P.*

Prueba: Parte (1).

($\Rightarrow$) Por el lema 2.6 F es sistemática. Por el lema 2.12 $\mathcal{C}_P^F$ es cerrada por intersección y por el lema 2.13 parte 1, $\mathcal{C}_P^F$ es un filtro y por tanto una oligarquía.

$\Leftarrow$) La demostración es análoga a la demostración ($\Leftarrow$) del Teorema 2.1.

Parte (2) del teorema 2.4:

$\Rightarrow$) Por el lema 2.6 F es sistemática. Por el lema 2.12 $\mathcal{C}_P^F$ es cerrada por intersección y por el lema 2.12 parte 2, $\mathcal{C}_P^F$ es un ultrafiltro y por tanto una dictadura.

$\Leftarrow$) La demostración es análoga a la demostracción ($\Leftarrow$) del Teorema 2.1. ∎

CAPÍTULO 3

PRUEBAS

Notación: Dado (A_i) un perfil cualquiera lo denotaremos por $\overrightarrow{A}$, y para cada $\rho \in P$, $N_\rho^{\overrightarrow{A}}$ denotará al conjunto $\{i \in N : \rho \in A_i\}$. Para cada $Z \subseteq X$, $\neg Z$ será determinado por el conjunto $\{\neg\rho : \rho \in Z\}$.

Recordemos que $P \subseteq X$ es una subagenda cerrada por negación y que F sea sistemática sobre P quiere decir que, para todo $\rho, \rho^* \in P$ y perfiles cualesquiera $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{A^*} \in D^N$, si para todo $i \in N$, $\rho \in A_i \Leftrightarrow \rho^* \in A_i^*$, entonces $\rho \in F(\overrightarrow{A}) \Leftrightarrow \rho^* \in F(\overrightarrow{A^*})$.
Y que F sea independiente sobre P si para todo $\rho \in P$ y todo $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{A^*} \in D^N$, si para cada $i \in N$ $\rho \in \overrightarrow{A} \Leftrightarrow \rho \in \overrightarrow{A^*}$, entonces $\rho \in F(\overrightarrow{A}) \Leftrightarrow \rho \in F(\overrightarrow{A^*})$.

Dados $F : D^N \to 2^X$ una función de agregación de juicios y ρ una fórmula, consideremos los siguientes conjuntos de coaliciones, determinados por ellos:

$$\mathcal{D}_\rho := \{C \subseteq N : \exists \overrightarrow{A},\ \{i : \rho \in A_i\} = C \ \wedge\ \rho \in F(\overrightarrow{A})\}$$

$$\overline{\mathcal{D}_\rho} := \{C \subseteq N : \forall \overrightarrow{A} \in D^N,\ \{i : \rho \in A_i\} = C \ \Rightarrow \rho \in F(\overrightarrow{A})\}$$

$$\mathcal{D} := \{C \subseteq N : \forall \rho \in P\ \ \forall \overrightarrow{A} \in D^N,\ \{i : \rho \in A_i\} = C \ \Rightarrow \rho \in F(\overrightarrow{A})\}$$

En los siguientes dos resultados mostraremos que estos conjuntos caracterizan, en cierto modo, la independencia y la sistematicidad de F sobre una subagenda P.

Proposición 3.1 *Sea $F : D^N \to 2^X$ una función de agregación de juicios y P una subagenda. Entonces:*

(i) F independiente sobre P si, y sólo si, para cada $\rho \in P$ se tiene que $\mathcal{D}_\rho = \overline{\mathcal{D}_\rho}$.

(ii) F es sistemática sobre P si, sólo si, para cada $\rho \in P$ se tiene que $\mathcal{D}_\rho = \mathcal{D}$.

Prueba:

(i) Supongamos que F es independiente sobre P y consideremos $\rho \in P$, arbitrario. Si $C \in \mathcal{D}_\rho$, entonces existe $\overrightarrow{A} \in D^N$, tal que $C = \{i : \rho \in A_i\}$ y $\rho \in F(\overrightarrow{A})$. Consideremos $\overrightarrow{B}$ un perfil cualquiera tal que $C = \{i : \rho \in B_i\}$, y notemos que, para cada $i \in N$, $\rho \in A_i$ si, y sólo si $\rho \in B_i$. De esta forma, como $\rho \in F(\overrightarrow{A})$, y en virtud de que F es independiente sobre P, se tiene que $\rho \in F(\overrightarrow{B})$, mostrándose que $C \in \overline{\mathcal{D}_\rho}$. Por otro lado, si $C \in \overline{\mathcal{D}_\rho}$ entonces para cada perfil $\overrightarrow{A}$, con $C = \{i : p \in A_i\}$, se tiene que $\rho \in F(\overrightarrow{A})$. Así, basta considerar $\overrightarrow{A}$ un perfil tal que para cada $i \in N$, $\rho \in A_i$ siempre y cuando $i \in C$.

Recíprocamente, supongamos para cada $\rho \in P$ se tiene que $\mathcal{D}_\rho = \overline{\mathcal{D}_\rho}$, y mostremos que F es independiente sobre P. Sean $\rho \in P$, y (A_i), (B_i) perfiles cualesquiera, y supongamos que para cada $i \in N$, se tiene que $\rho \in A_i$ si, y sólo si, $\rho \in B_i$. Supongamos que $\rho \in F(A_i)$ y sea $C = \{i : \rho \in A_i\}$. De esta manera $C \in \mathcal{D}_\rho = \overline{\mathcal{D}_\rho}$, y puesto que $C = \{i : \rho \in B_i\}$ se tiene que $\rho \in F(B_i)$. Análogamente se demuestra que si $\rho \in F(B_i)$ entonces $\rho \in F(A_i)$. Luego F es independiente sobre P.

(ii) Supongamos que F es sistemática sobre P y consideremos $\rho \in P$, arbitrario. Si $C \in \mathcal{D}_\rho$, entonces existe $\overrightarrow{A} \in D^N$, tal que $C = \{i : \rho \in A_i\}$ y $\rho \in F(\overrightarrow{A})$. Consideremos $\sigma \in P$ y $\overrightarrow{B}$ cualesquiera, tales que $C = \{i : \sigma \in B_i\}$, y notemos que, para cada $i \in N$, $\rho \in A_i$ si, y sólo si $\sigma \in B_i$. De esta forma, como $\rho \in F(\overrightarrow{A})$, y en virtud de que F es sistemática sobre P, se tiene que $\sigma \in F(\overrightarrow{B})$, mostrándose que $C \in \mathcal{D}$. Por otro lado, si $C \in \mathcal{D}$, para cada perfil $\overrightarrow{A}$, con $C = \{i : \rho \in A_i\}$, se tiene que $\rho \in F(\overrightarrow{A})$. Así, basta considerar $\overrightarrow{A}$ un perfil tal que para cada $i \in N$, $\rho \in A_i$ si y sólo si $i \in C$, lo cual muestra que $C \in \mathcal{D}_\rho$.

Recíprocamente, supongamos para cada $\rho \in P$ se tiene que $\mathcal{D}_\rho = \mathcal{D}$, y mostremos que F es sistemática sobre P. Sean $\rho, \rho^* \in P$, y $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ perfiles cualesquiera, y supongamos que para cada $i \in N$, se tiene que $\rho \in A_i$ si, y sólo si, $\rho^* \in B_i$. Si $\rho \in F(\overrightarrow{A})$, considerando $C = \{i : \rho \in A_i\}$ tenemos que $C \in \mathcal{D}_\rho = \mathcal{D}$, y puesto que $C = \{i : \rho* \in B_i\}$ se tiene que $\rho^* \in F(\overrightarrow{B})$. De manera similar se demuestra que si $\rho* \in F(\overrightarrow{B})$ entonces $\rho \in F(\overrightarrow{A})$. Luego F es sistemática sobre P.

∎

Lema 3.1 *Una función de agregación de juicios $F : D^N \to 2^X$ es*

1. *independiente sobre P, si y sólo si, para cada $\rho \in P$, existe $\mathcal{C}_\rho^F \subseteq 2^N$ generando F sobre ρ;*

2. *sistemática sobre P, si y sólo si, existe $\mathcal{C}_P^F \subseteq 2^N$ generando F sobre P*

Prueba: Para la parte (i), para cada $\rho \in P$ basta considerar $C_\rho^F = \mathcal{D}_\rho$, donde $\mathcal{D}_\rho$ es el conjunto de la proposición anterior, mientras que para la parte (ii) basta considerar $\mathcal{C}_P^F = \mathcal{D}$, donde $\mathcal{D}$ es el conjunto de la proposición anterior. ∎

Lema 3.2 *Sea $F : D^N \to D^*$ una función de agregación de juicios independiente sobre P. Entonces, para todo $\rho \in P$ y todo $C \subseteq N$, si $C \in \mathcal{C}_\rho^F$, entonces $N \backslash C \notin \mathcal{C}_{\neg\rho}^F$, y si además $F : D^N \to D$, vale el recíproco. Además, $N \in \mathcal{C}_\rho^F$ y $\emptyset \notin \mathcal{C}_\rho^F$ si F preserva unanimidad.*

Prueba: Como $C \in \mathcal{C}_\rho^F$, existe un perfil $\overrightarrow{A}$ tal que :
$\rho \in A_i$ si $i \in C$ y $\rho \notin A_i$ si $i \notin C$ y $\rho \in F(\overrightarrow{A})$

Veamos que $N \backslash C \notin \mathcal{C}_{\neg\rho}^F$.
Por reducción al absurdo, supongamos que $N \backslash C \in \mathcal{C}_{\neg\rho}^F$. Así $\neg\rho \in F(\overrightarrow{A})$. Luego $\rho, \neg\rho \in F(\overrightarrow{A})$, pero $F(\overrightarrow{A})$ es consistente. Contradicción.
Recíprocamente, supongamos que $N \backslash C \notin \mathcal{C}_{\neg\rho}^F$, y sea $\overrightarrow{A}$ un perfil tal que $N \backslash C = \{i : \neg\rho \in A_i\}$.
$\{i : \neg\rho \in A_i\} \notin \mathcal{C}_{\neg\rho}^F$, entonces $\neg\rho \notin F(\overrightarrow{A})$.
Notemos que $F(\overrightarrow{A}) \in D$. Así $F(\overrightarrow{A})$ es consistente y completo, y como $\neg\rho \notin F(\overrightarrow{A})$, se tiene que $\rho \in F(\overrightarrow{A})$ i.e $C \in \mathcal{C}_\rho^F$. Supongamos que $\emptyset \in \mathcal{C}_P^F$ y que $\rho \in P$ y para cada $\overrightarrow{A} \in D^N$ si para cada $i \in N$ $\rho \notin A_i$ entonces se tiene que $\neg\rho \in A_i$, así por unanimidad $\neg\rho \in F(\overrightarrow{A})$ y por tanto $N \in \mathcal{C}_P^F$. ∎

Proposición 3.2 *Sea $Y \subseteq X$ un conjunto minimal inconsistente y sea $\rho \in Y$ entonces $Y_{\neg\{p\}}$ es consistente.*

Prueba: Supongamos que $Y_{\neg\{\rho\}} = Y \backslash \{\rho\} \cup \{\neg\rho\}$ es inconsistente, entonces se tiene que $Y \backslash \{\rho\} \cup \{\neg\rho\} \vdash \neg\rho$. Así $Y \backslash \{\rho\} \vdash \rho \vdash \neg\rho$ y por tanto $Y \backslash \{\rho\} \vdash \neg\rho$ lo cual es una contradicción ya que $Y \backslash \{\rho\}$ es consistente.

Proposición 3.3 *Asuma (b). Entonces existe un conjunto minimal inconsistente $Y \subseteq X$ y distintas premisas $p, q \in Y \cap P$ tal que $Y_{\neg\{p,q\}}$ es consistente.*

Prueba:

Por (b), existe al menos un par (Y, Z) formado por un conjunto minimal inconsistente $Y \subseteq X$ y un conjunto de premisas de tamaño par $Z \subseteq Y \cap P$ tal que $Y_{\neg Z}$ es consistente. Entre esos pares escojamos un (Y, Z) tal que Z tenga el menor tamaño. Si $|Z| = 2$, esta listo, ya que $Z \neq \emptyset$, si no se tendría que $Y_{\neg\{\emptyset\}} = Y$ y seria consistente lo cual es una contradicción, ya que Y es inconsistente.

Así asumamos que $|Z| > 2$. Tomemos dos elementos distintos $p, q \in Z$. Por la condición de minimalidad en la elección de Y y Z, vamos a ver que, el conjunto $Y_{\neg\{p,q\}}$ es inconsistente, ya que si no $Z = \{p, q\}$ seria de tamaño mínimo una contradicción. De hecho vamos a ver que $Y_{\neg\{p,q\}}$ es minimal inconsistente. En efecto este es minimal inconsistente por el siguiente argumento. Existe un subconjunto minimal inconsistente $W \subseteq Y_{\neg\{p,q\}}$ por definición de inconsistente (ya que todo conjunto inconsistente posee un subconjunto finito minimal inconsistente), y deseamos mostrar que $W = Y_{\neg\{p,q\}}$. Ambos $\neg p$ y $\neg q$ están en W de lo contrario W podría ser incluido en los conjuntos consistentes $Y_{\neg\{q\}}$ y $Y_{\neg\{p\}}$.
En efecto si $\neg p \notin W$ entonces $W \subseteq Y\backslash\{p, q\} \cup \{\neg q\} \subset Y_{\neg\{q\}}$ que es consistente por la proposición 3.2, de manera similar se prueba que si $\neg q \notin W$ entonces $W \subset Y_{\neg\{p\}}$.
El conjunto $W_{\neg\{\neg p,\neg q\}}$ es inconsistente por la condición de minimalidad sobre la elección de Y y Z. De esto se deduce que $Y = W_{\neg\{\neg p,\neg q\}}$, si no se tendría que $W_{\neg\{\neg p,\neg q\}} \subseteq Y$ que es inconsistente lo cual contradice la elección de que Y es minimal inconsistente.
Sea $Y = Y' \cup \{p, q\}$ donde $Y' = Y - \{p, q\}$,
$W = W' \cup \{\neg p, \neg q\}$ donde $W' \subseteq Y'$
$W_{\neg\{\neg p,\neg q\}} = W' \cup \{p, q\} = Y' \cup \{p, q\}$, por tanto $Y_{\neg\{p,q\}} = W$ como deseamos.

Ahora, en el conjunto minimal inconsistente $Y_{\neg\{p,q\}}$, negamos los miembros de $Z\backslash\{p, q\}$; es decir, sea $Y' = Y_{\neg\{p,q\}} = Y\backslash\{p, q\} \cup \{\neg p, \neg q\}$, sea $Z' = Z\backslash\{p, q\}$ entonces $Y'_{\neg Z'} = Y\backslash\{p, q\}\backslash(Z\backslash\{p, q\}) \cup \{\neg p, \neg q\} \cup \{\neg t : t \in Z\backslash\{p, q\}\} = Y\backslash Z \cup \{\neg t : t \in Z\} = Y_{\neg Z}$ esto nos conduce a $Y_{\neg Z}$ que es un conjunto consistente por las elecciones de Y, Z. Pero esto contradice la condición de minimalidad de Z en esta elección, porque $Z\backslash\{p, q\} \subseteq Y_{\neg\{p,q\}} \cap P$ es par y tiene menor cardinalidad que Z.

Lema 3.3 *Supongamos que (b) se cumple. Entonces, si una función de agregación de juicios $F : D^N \to D^*$ es sistemática sobre P y es unánime, $\mathcal{C}_P^F$ es cerrada por super conjuntos.*

Prueba: Sea F como se especifica. sea Y, p, q como en la proposición anterior. Consideremos con $C \in \mathcal{C}_P^F$ y $C \subseteq C^*$. Mostraremos que $C^* \in \mathcal{C}_P^F$. Ahora por el lema 3.1 es suficiente para la prueba seleccionar un $\overrightarrow{A}$ y un $r \in P$ tal que $C = N_r^{\overrightarrow{A}}$ y $r \in F(\overrightarrow{A})$.

Extenderemos los conjuntos consistente $Y_{\neg\{p\}}, Y_{\neg\{q\}}$ y $Y_{\neg\{p,q\}}$ a conjuntos de juicios en D, resp $A_{Y_{\neg\{p\}}}, A_{Y_{\neg\{q\}}}$ y $A_{Y_{\neg\{p,q\}}}$ y consideramos el perfil $\overrightarrow{B} \in D^N$ definido por

$$B_i = \begin{cases} A_{Y_{\neg\{p\}}} & \text{si } i \in C \\ A_{Y_{\neg\{p,q\}}} & \text{si } i \in C^*\backslash C \\ A_{Y_{\neg\{q\}}} & \text{si } i \in N\backslash C^* \end{cases}$$

Ahora, $F(\overrightarrow{B})$ contiene a q pues $N_q^{\overrightarrow{A}} = C \in \mathcal{C}_P^F$, y todo $\varphi \in Y \backslash \{p, q\}$, pues $N_\varphi = N$,el lema 3.2 luego $Y \backslash \{p\} \subseteq F(\overrightarrow{B})$. La inconsistencia de Y asegura que $Y \backslash \{p\} \vdash \neg p$, por lo tanto $\neg p \in F(\overrightarrow{B})$ por la suposición de que $F(\overrightarrow{B}) \in D^*$. Así $\{i : \neg p \in B_i\} \in \mathcal{C}_P^F$. Ahora bien note que $\neg p \in A_{Y_{\neg\{p\}}}$, $\neg p \in A_{Y_{\neg\{p,q\}}}$ y $\neg p \notin A_{Y_{\neg\{q\}}}$. Así $\{i : \neg p \in B_i\} = C^*$. Luego $C^* \in \mathcal{C}_P^F$ como queríamos.

Lema 3.4 *Supongamos que (a) y (b) se cumplen. Entonces, si una función de agregación de juicios $F : D^N \to D^*$ es sistemática sobre P y es unánime sobre X, $\mathcal{C}_P^F$ es cerrada por intersección.*

Prueba: Supongamos que se cumple (a) y (b). Sea F sistemática y unánime sobre P, y sea $\mathcal{C}_P^F$ el conjunto que determina F , y tomemos $C, C^* \in \mathcal{C}_P^F$. Tomamos $Y \subseteq X$ satisfaciendo la condición (a), entonces existe al menos tres formulas distintas $p, q, r \in Y \cap P$, tales que los conjuntos $Y_{\neg\{p\}}, Y_{\neg\{q\}}, Y_{\neg\{r\}}$ son consistente por la inconsistencia minimal de Y y la proposición 3.2

Por tanto, existe $\overrightarrow{A} \in D^N$ como sigue:

- Para todo $i \in C \cap C^*$, A_i extiende $Y_{\neg\{p\}}$
- para todo $i \in C^* \backslash C$, A_i extiende a $Y_{\neg\{r\}}$
- para todo $i \in N \backslash C^*$, A_i extiende a $Y_{\neg\{q\}}$

La unanimidad asegura que $Y \backslash \{p, q, r\} \subseteq F(\overrightarrow{A})$. Notemos que $q \in F(\overrightarrow{A})$ porque $N_q^{\overrightarrow{A}} = (C \cap C^*) \cup (C^* \backslash C) = C^* \in \mathcal{C}_P^F$ y también $r \in F(\overrightarrow{A})$ porque $N_r^{\overrightarrow{A}} = (C \cap C^*) \cup (N \backslash C^*) \supseteq C \in \mathcal{C}_P^F$ y $\mathcal{C}_P^F$ es cerrado por super conjunto por el lema 3.3. Así, $Y \backslash \{p\} \subseteq F(\overrightarrow{A})$, como Y es minimal inconsistente y $p \in Y$, $Y \backslash p \vdash \neg p$. Así $\neg p \in F(\overrightarrow{A})$ pues $F(\overrightarrow{A}) \in D^*$, i.e es cerrado por deducción. Por lo tanto $N^{\overrightarrow{A}_p} = C \cap C^*$ esta en $\mathcal{C}_P^F$, como deseamos probar.

Observación: Si N es finito cada filtro es generado por algún $M \subseteq N$. Sea $\mathcal{F}$ un filtro y sean $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$, luego por inducción tenemos que si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ entonces $M = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{F}(*)$. y cada ultrafilto es el conjunto de super conjunto de $\{i\}$ para algún $i \in N$.Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro y sea $M \subseteq N$ sea $\{a\} \in M$ si $\{a\} \in \mathcal{U}$ esta listo, supongamos que $\{a\} \notin \mathcal{U}$ entonces por (*) se tiene que $\{a\} \notin M$ lo cual es una contradicción.

Lema 3.5 *Supongamos que (a) y (b) se cumplen. Entonces,*

1. *Si una función de agregación de juicios $F : D^N \to D^*$ es sistemática sobre P y es unánime, $\mathcal{C}_P^F$ es un filtro, y para N finito, F es una oligarquía sobre P.*

2. *Si una función de agregación de juicios $F : D^N \to D$ es sistemática sobre P y es unánime, $\mathcal{C}_P^F$ es ultrafiltro, y para N finito, F es una dictadura sobre P.*

Prueba: Supongamos que (a) y (b) se cumplen. Sea F sistemática sobre P, y unánime. Sea $\mathcal{C}_P^F$ el conjunto que determina F. Del lema 3.2, $\mathcal{C}_P^F$ no contiene al $\emptyset$, y del lema 3.3 y 3.4, $\mathcal{C}_P^F$ es cerrado por super conjunto e intersección. Por tanto $\mathcal{C}_P^F$ es un filtro. Si además $F : D^N \to D$, el lema 3.2 implica que $\mathcal{C}_P^F$ es un ultrafiltro. Si N es finito por la observación anterior tenemos que, cada filtro es el super conjunto de algún $M \subseteq N$, y cada ultrafiltro el conjunto de super conjuntos de $\{i\}$ para algún $i \in N$; así F es una oligarquía o una dictadura respectivamente.

Lema 3.6 *Si una función de agregación de juicios $F : D^N \to D^*$ es independiente sobre P y es unánime, entonces para todo $p, q \in P$, si $p \mathrel{|\!\sim} q$ entonces $\mathcal{C}_p^F \subseteq \mathcal{C}_q^F$. Si además (c) se cumple, F es sistemática sobre P.*

Prueba: Sea F independiente sobre P y unánime. Consideremos $p, q \in P$ y los generadores $\mathcal{C}_p^F$, $\mathcal{C}_q^F$. Supongamos que $p \mathrel{|\!\sim} q$, y sea $C \in \mathcal{C}_p^F$. Por definición de $\mathrel{|\!\sim}$, existe $Y \subseteq X$ tal que $Y \cup \{p\}$ y $Y \cup \{\neg q\}$ son consistentes, y $Y \cup \{p, \neg q\}$ es inconsistente, en efecto tenemos que $p \mathrel{|\!\sim} q$ entonces existe $Y \subseteq X$ tal que $Y \cup \{p\} \vdash q$ y $Y \cup \{p\}$ y $Y \cup \{\neg q\}$ son consistente es decir que $Y \cup \{p\}$ pertenece a los modelos de q por tanto no puede pertenecer al mismo tiempo a los modelos de $\neg q$, por tanto $Y \cup \{p, \neg q\}$. Además la ultima afirmación implica que $Y \cup \{p, q\}$ y $Y \cup \{\neg p, \neg q\}$ son consistentes. Sea $\overrightarrow{A} \in D^N$ como sigue:
- Para todo $i \in C$, A_i extiende a $Y \cup \{p, q\}$. Así podemos definir si $i \notin C$ A_i extiende a $Y \cup \{\neg p, \neg q\}$.
Con este perfil, $Y \subseteq F(\overrightarrow{A})$, por unanimidad, y $p \in F(\overrightarrow{A})$ porque $\{i : p \in A_i\} = C \in \mathcal{C}_q^F$. También $q \in F(\overrightarrow{A})$ ya que $Y \cup \{p\} \vdash q$ $F(\overrightarrow{A})$ es cerrada por deducción ($F(\overrightarrow{A}) \in D^*$). Porque $N_q^{\overrightarrow{A}} = C$, tenemos que $C \in \mathcal{C}_p^F$, como queríamos probar.
Suponga que (c) se cumple. Entonces, para todo $p, q \in P$, la sucesión de implicaciones condicionales $p \mathrel{|\!\sim} p_2, \ldots, p_{k-1} \mathrel{|\!\sim} q$ por esta condición que conlleva por lo anterior a una sucesión de inclusiones, $\mathcal{C}_p^F \subseteq \mathcal{C}_{p_2}^F, \ldots, \mathcal{C}_{p_{k-1}}^F \subseteq \mathcal{C}_q^F$, y entonces para $\mathcal{C}_p^F = \mathcal{C}_q^F$ analogamente se prueba que $\mathcal{C}_q^F \subseteq \mathcal{C}_p^F$, por el lema 3.1, F es sistemática sobre P

Lema 3.7 *Si $|N| \geq 3$ y (a) no se cumple, entonces existe una función de agregación de juicios $F : D^N \to D$ que es sistemática (por tanto independiente) sobre P, monótona sobre P y es unánime, y tal que $\mathcal{C}_P^F$ no es un filtro.*

Prueba: Sea $|N| \geq 3$, y supongamos que no se cumple (a). Entonces existe una coalición $M \subseteq N$ de cardinalidad impar con $|M| \neq 1$. Para cualquier $\overrightarrow{A} \in D^N$, definimos el conjunto $B = (\cap_{i \in N} A_i) \cup \{\rho \in P : |\{i \in M : \rho \in A_i\}| > |M|/2\}$, (En palabras, B es la colección de todas las fórmulas unanimente aceptadas y todas las premisas aceptadas

por una mayoría en M). Nosotros mostraremos que B es consistente. Si no, por compacidad, B tiene un conjunto minimal inconsistente $Y \subseteq B$. Y como además (a) no se cumple, se tiene que $|Y \cap P| \leq 2$, y veamos que $Y \cap P \neq \emptyset$, ya que si suponemos que $Y \cap P = \emptyset$, se tiene que como $Y \subseteq \cap_{i \in N} A_i \cup \{\rho \in P : |\{i \in M : \rho \in A_i\}| > |M|/2\}$ y por la consistencia de los perfiles y que son completos, se tiene que $Y \neq \emptyset$, por tanto $Y \cap P \neq \emptyset$, y ahora si suponemos que $|Y \cap P| = 1$, note que $Y = Y_1 \cup Y_2$ con $Y_1 \subseteq A_i$ y $Y_2 \subseteq \{\rho \in P : |\{i \in M : \rho \in A_i\}| > |M|/2\}$, como Y es inconsistente y Y_1 es consistente necesariamente Y_2 es diferente de $\emptyset$. si $|Y_2| = 1$; i.e $Y_2 = \{p\}$ con $|N_p^{\overrightarrow{A}} \cap M| > |M|/2$, se tiene que $Y_1 \cup Y_2$ es consistente pues $Y_1 \subseteq A_i$ con $i \in N_p^{\overrightarrow{A}} \cap M$ lo cual es una contradicción pues Y es inconsistente.
Por tanto $|Y \cap P| = 2$. Decimos que $Y \cap P = \{p, q\}$. Una mayoría acepta p y una mayoría acepta q en M. Como las dos mayorías se solapan, existen un $j \in M$ tal que $\{p, q\} \subseteq A_j$. Además $Y \cup \{p, q\} = Y$ con $Y_1 = \cap A_i$ y p, q están en Y_2, como $\{p, q\} \subseteq A_j$ y $Y \subseteq A_j$, pues A_j es consistente lo cual es una contradicción, así B es consistente.

Como B es consistente, nosotros podemos extender B a un conjunto en D; sea $F(\overrightarrow{A})$ tal extensión. Note que B ya es completo con respecto a P. En efecto sea $\rho \in P$ y supongamos que $\rho \notin B$ entonces por definición de B y que los perfiles son consistente tenemos que $|\{i \in M : \neg\rho \in A_i\}| > |M|/2$, así $\neg\rho \in B$ y se verifica que es completo.
$F(\overrightarrow{A}) \cap P = B \cap P = \{\rho \in P : |\{i \in M : \rho \in A_i\}| > |M|/2\}$.
Tenemos definida una función de agregación de juicios $F : D^N \to D$ que es generada sobre P por $\mathcal{C}_P^F = \{C \subseteq M : |C| > |M|/2\}$. Por el lema 3.1 tenemos que F es sistemática. Además F preserva unanimidad por construcción y $\mathcal{C}$ no es un filtro, no siendo cerrada por intersección (tomando por ejemplo dos mayorías de $\frac{|M|+1}{2}$ que intersectados es un singleton).

Sea $M = \{a_1, a_2, a_3\}$, sean $C = \{a_1, a_2\}$, $C' = \{a_2, a_3\}$, $C, C' \in \mathcal{C}_P^F$ y $|C \cap C'| = |\{a_2\}| = 1 \ngtr |M|/2$, por tanto $C \cap C' \notin \mathcal{C}_P^F$

Lema 3.8 *Si $|N| \geq 3$ y (b) no se cumple, entonces existe una función de agregación de juicios $F : D^N \to D$ que es sistemática (por tanto independiente) sobre P y preservando unanimidad, y tal que $\mathcal{C}^F$ no es un filtro.*

Prueba: Sea $|N| \geq 3$. Así N contiene al menos tres distintos individuos que serán etiquetados por 1, 2, 3. Supongamos que (b) no se cumple. Para cualquiera $\overrightarrow{A} \in D^N$, definimos $B = B_1 \cup B_2$, donde $B_1 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ y
$B_2 = \{p \in P : p \text{ esta en exactamente uno de los conjuntos } A_1, A_2, A_3\}$
Probaremos que B es consistente. Supongamos que no, entonces por compacidad existe un subconjunto minimal inconsistente $Y \subseteq B$. Definimos $Y^* = Y \cap P$ y $A_i^* = A_i \cap P$ para todo $i \in N$. Tenemos que $Y^* \neq \emptyset$, de otra forma $Y \subseteq B_1 \subseteq A_1$, lo cual es imposible

pues Y es inconsistente y A_1 es consistente. Ahora Y^* puede ser expresado como la unión disjunta de pares de los siguientes conjuntos(los cuales son disjuntos dos a dos):

$Z_0 = Y^* \cap A_1^* \cap A_2^* \cap A_3^*$
$Z_1 = Y^* \cap [A_1^* \backslash (A_2^* \cup A_3^*)]$
$Z_2 = Y^* \cap [A_2^* \backslash (A_1^* \cup A_3^*)]$
$Z_3 = Y^* \cap [A_3^* \backslash (A_1^* \cup A_2^*)]$
Debe existir dos conjuntos entre Z_1, Z_2, Z_3, sin perdida de generalidad supongamos Z_1, Z_2, tal que $|Z_1 \cup Z_2|$ es par y $Z_1 \cup Z_2 \neq \emptyset$. (la primera afirmación es combinatoria simple, ya que debemos considerar seis casos verifiquemos que si $|Z_1 \cup Z_2|$ es par entonces Z_1, Z_2 son pares o son impares y si $|Z_1 \cup Z_2|$ es impar entonces Z_1 es par y Z_2 es impar o viceversa de manera análoga se verifica los otros casos y la segunda una sigue por contradicción de la consistencia de A_3, pues si $Z_1 \cup Z_2 = \emptyset$ se tiene que $Y^* \subseteq A_3$, ya que como $Z_1 = \emptyset$ se tiene que $Y^* \nsubseteq A_1$ ya que Z_1 no esta en B_2,de manera similar se verifica que $Y^* \nsubseteq A_2$, por tanto $Y \subseteq A_3$ lo cual es una contradicción.) pongamos $Z = Z_1 \cup Z_2$. Como (b) no ocurre, obtenemos una contradicción si probamos $Y_{\neg Z} = (Y \backslash Z) \cup \neg Z$, es consistente. Ahora, $Y_{\neg Z}$ puede ser obtenido como la unión
$Y = (Y \backslash Y^*) \cup (Y^* \backslash Z) \cup \neg Z$ donde:
(i) $Y \backslash Y^* \subseteq B_1 \subseteq A_3$
(ii) $Y^* \backslash Z = Y^* \cap A_3^* \subseteq A_3^*$ y
(iii)$\neg Z = \{\neg p : p \in Y^*, p \notin A_3^*\} \subseteq \{\neg p : p \in P, p \notin A_3^*\} = A_3^*$ la ultima igualdad se cumple como $A_3^* = A_3 \cap P$ contiene exactamente un miembro de cada par $p, \neg p \in P$. Poniendo (i), (ii) y (iii) juntos, vemos que $Y_{\neg Z}$ pertenece a A_3 y por tanto consistente. Teniendo que B es consistente, nosotros podemos extender B para ser un conjunto en D; Este conjunto es nuestra $F((A_i)_{i \in N})$.
Como B ya es completo con respecto a P, ya que si para todo $\rho \in P$ si $\rho \notin B$ entonces se tiene que $\neg \rho$ esta en B_1, o en B_2 por ser los perfiles consistentes. Por tanto se verifica que B es completo con respecto a P.

$$F((A_i)_{i \in N}) \cap P = B \cap P = \{p \in P : |N_p \cap \{1, 2, 3\}| \text{ es impar}\}.$$

La función de agregación de juicios recién definida $F : D^N \to D$ es determinada sobre P por
$\mathcal{C}_P^F = \{C \subseteq N : |C \cap \{1, 2, 3\}| \text{ es impar}\}$

Por tanto F es sistemática sobre P por el lema 3.1; también es unánime pues $\cap_{i \in N} A_i \subseteq B_1 \subseteq F((A_i)_{i \in N})$. Pero $\mathcal{C}^F$ no es un filtro, claramente no es cerrado por super conjuntos.
Por ejemplo sea $C, C' \subseteq N$ con $C = \{1\}$, $C' = \{1, 2\}$, $C \subset C'$ y claramente $C \in \mathcal{C}_P^F$ y $C' \notin \mathcal{C}_P^F$ ya que $|C' \cap \{1, 2, 3\}|$ es par, por tanto $\mathcal{C}_P^F$ no es cerrado por super conjuntos.

Lema 3.9 *Supongamos que (c) no se cumple, entonces existe una función de agregación de juicios $F : D^N \to D$ que es independiente sobre P y es unánime, y tal que $\mathcal{C}_p^F$ no es el mismo para todo $p \in P$.*

Prueba: Supongamos que (c) no se cumple. Supongamos que N contiene dos individuos distintos, digamos 1 y 2. Para $p, q \in P$, definimos pRq si existe una sucesión de implicaciones condicionales de p hasta q, como en la condición (c). Como (c) no se cumple, hay $\overline{p}, \overline{q} \in P$ tal que $\neg(\overline{p}R\overline{q})$, y P puede ser particionado en dos conjuntos no vacíos
$S_1 = \{p \in P : \overline{p}Rp\}$ y $S_2 = \{p \in P : \neg(\overline{p}Rp)\}$, son no vacíos, ya que para S_1 si consideramos $\overline{p} = p$ se tiene que $p \in S_1$ y para S_2 consideramos $p = \overline{q}$ y se verifica que ambos son no vacíos.

Note que $p \not\mid\!\sim q$ para todo $p \in S_1$ y todo $q \in S_2$. (2)
Ya que si no fuera así por definición de $\mid\!\sim$ tenemos que existe $Y \subseteq X$ tal que $Y \cup \{p\} \vdash q$ es decir que los modelos de $Y \cup \{p\}$ pertenece a los modelos de q y por tanto se tendría que $S_1 = S_2$ lo cual es una contradicción.

Ahora haremos una partición de S_1 en los conjuntos:

$S_{11} = \{p \in S_1 : \neg p \in S_1\}$ y $S_{12} = \{p \in S_1 : \neg p \in S_2\}$
y similarmente para S_2, en los conjuntos
$S_{21} = \{p \in S_2 : \neg p \in S_1\}$ y $S_{22} = \{p \in S_2 : \neg p \in S_2\}$.

Ahora consideramos un perfil cualquiera $\overrightarrow{A} \in D^N$. Primero definimos $B \subseteq P$ como sigue: para todo $p \in P$,

$$p \in B \Leftrightarrow \begin{cases} p \in A_1 & \text{si } p \in S_{11} \\ p \in A_2 & \text{si } p \in S_{22} \\ p \in A_1 \cup A_2 & \text{si } p \in S_{12} \\ p \in A_1 \cap A_2 & \text{si } p \in S_{21} \end{cases}$$

Ahora veamos que $B \cup (A_1 \cap A_2)$ es un conjunto consistente. Supongamos que no; entonces por compacidad existe un subconjunto minimal inconsistente $Y \subseteq B \cup (A_1 \cap A_2)$. Por tanto
$p \mid\!\sim \neg q$ para todo $p, q \in Y$ distintos. (3)
En efecto, por definición de $\mid\!\sim$, tomamos $Y' = Y \backslash \{p, q\}$ y vemos que $Y' \cup \{p\} = Y \backslash \{q\}$ y $Y' \cup \{q\} = Y \backslash \{p\}$ son consistente por la condición de minimalidad de Y, solo falta probar que $Y' \cup \{p\} \vdash \neg q$ si, y sólo si, los modelos de $Y \backslash \{q\}$ están contenido en los modelos de $\neg q$, y como Y es inconsistente, luego todo modelo de $Y \backslash \{q\}$ tiene que ser modelo de $\neg q$, porque si no tendríamos un modelo de $Y \backslash \{q\}$ y de q es decir que Y seria consistente lo cual es una contradicción pues Y es inconsistente por hipótesis. Sea $Y^* = Y \cap P$

(i) $Y^* \nsubseteq S_{11} \cup S_{21}$. Si no, la definición de B implica que $Y^* \subseteq A_1$, y $Y \subseteq A_1$, un conjunto consistente.

(ii) $Y^* \nsubseteq S_{22} \cup S_{21}$ por un argumento similar al anterior.

(iii) $Y^* \cap S_{12} \neq \emptyset$. Si no, $Y^* \subseteq S_{11} \cup S_{22} \cup S_{21}$, y por (i) y (ii), existen $p, q \in Y^*$ con $p \in S_{11}$ y $q \in S_{22}$, por tanto también $\neg q \in S_{22}$, por (3), $p {\mid\!\sim} \neg q$, lo cual contradice (2).

(iv) $Y^* \cap S_{12} = \{r\}$. Si no existieran $r, s \in Y^* \cap S_{12}$, $r \neq s$, (3) implicaría que $s {\mid\!\sim} \neg r$ lo cual contradice (2).

(v) $Y^* \cap S_{11} = \emptyset$. Si no, sea $p \in Y^* \cap S_n$ entonces por (3) $p {\mid\!\sim} \neg r$, lo cual contradice (2).

(vi) $Y^* \cap S_{22} = \emptyset$ por un argumento similar.

De (iv), (v) y (vi), $Y^* \subseteq \{r\} \cup S_{21} \subseteq \{r\} \cup (A_1 \cap A_2)$, donde la segunda inclusión se sigue de la definición de B.
Como $Y \subseteq Y^* \cup (A_1 \cap A_2)$, además se cumple que $Y \subseteq \{r\} \cup (A_1 \cap A_2)$.
La definición de B implica que $r \in A_1$ o $r \in A_2$, donde $Y \subseteq A_1$ o $Y \subseteq A_2$, lo cual es una contradicción con la consistencia de A_1 y A_2

Para todo $\overrightarrow{A} \in D^N$, uno puede extender el conjunto consistente $B \cup (A_1 \cap A_2)$ para uno en D. Definimos la función de agregación de juicios $F : D^N \to D$. Además B ya seria completo con respecto a P, ya que si para cada $\rho \in P$ suponemos que $\rho \notin B$, entonces tenemos que $\neg\rho \in A_1$ si $\neg\rho \in S_{11}$, o $\neg\rho \in A_2$ si $\neg\rho \in S_{22}$, o $\neg\rho \in A_1 \cup A_2$ si $\neg\rho \in S_{12}$, o $\neg\rho \in A_1 \cap A_2$ si $\neg\rho \in S_{21}$, en consecuencia $\neg\rho \in B$, tenemos $F(\overrightarrow{A}) \cap P = B \cap P$ para todo $\overrightarrow{A} \in D^N$.

De esto se deduce que, para cada $\rho \in P$, F es determinada sobre ρ por algún $\mathcal{C}_\rho^F$, por $\mathcal{C}_\rho^F$ es $\{C \subseteq N : 1 \in C\}$ o $\{C \subseteq N : 1 \in C \acute{o}\ 2 \in C\}$ si $\rho \in S_1$, mientras si $\rho \in S_2$ entonces $\mathcal{C}_\rho^F$ es $\{C \subseteq N : 2 \in C\}$ o $\{C \subseteq N : \{1, 2\} \subseteq C\}$, por tanto por el lema 3.1 F es independiente sobre P. F es unánime pues $\cap_{i \in N} A_i \subseteq A_1 \cap A_2 \subseteq F(\overrightarrow{A})$, se verifica que $\mathcal{C}_\rho^F$ no es el mismo para cada $\rho \in P$

Lema 3.10 *Supongamos que (d) se cumple. Si una función de agregación de juicios $F : D^N \to D$ es una dictadura sobre P, esta es una dictadura (global).*

Prueba: Supongamos que (d) se cumple y $F : D^N \to D$ es una dictadura sobre P. Sea j el dictador sobre P. Sea $G : D^N \to D$ una dictadura sobre X con dictador j. Para mostrar que $F = G$, consideramos algún $\overrightarrow{A} \in D^N$ y mostramos que $F(\overrightarrow{A}) = G(\overrightarrow{A})$. Como $F(\overrightarrow{A})$ y $G(\overrightarrow{A})$ están en D, esto es suficiente para mostrar que $F(\overrightarrow{A}) \subseteq G(\overrightarrow{A})$. En efecto sea $\rho \in P$ y supongamos que $\rho \in G(\overrightarrow{A})$ y $\rho \notin F(\overrightarrow{A})$ entonces $\neg\rho \in F(\overrightarrow{A}) \subseteq G(\overrightarrow{A})$, es decir que $\rho, \neg\rho \in G(\overrightarrow{A})$ lo cual es una contradicción pues $G(\overrightarrow{A})$ es consistente.

Consideremos algún $\varphi \in F(\overrightarrow{A})$. Sea $S := F(\overrightarrow{A}) \cap P$. Por (d), tenemos que $S \vdash \varphi$ o $S \vdash \neg\varphi$. Esto no puede ser que $S \vdash \neg\varphi$, pues de otra forma $F(\overrightarrow{A})$ contendría $\neg\varphi$ por ser deductivamente cerrado, por tanto ser inconsistente. Así $S \vdash \varphi$. Por definición de G, $G(\overrightarrow{A}) \cap P = F(\overrightarrow{A}) \cap P$, donde $G(\overrightarrow{A}) \cap P = S$. Así también $G(\overrightarrow{A})$ implica φ. Como $G(\overrightarrow{A})$ es deductivamente cerrado, $\varphi \in G(\overrightarrow{A})$, como deseamos.

Lema 3.11 *Sea N finito y (d) no se cumple, entonces existe una función de agregación de juicios $F : D^N \to D$ que es sistemática (por tanto independiente) sobre P y preserva unanimidad, pero no es una dictadura.*

Prueba: Si (d) no se cumple, existe un conjunto S que es completo con respecto a P y tal que para algún $\varphi \in X \backslash P$, ambos $S \cup \{\varphi\}$ y $S \cup \{\neg\varphi\}$ son consistentes. Estos dos conjuntos pueden ser extendidos, así que existen $B, B' \in D$ con $B \cap P = B' \cap P$, pero $B \neq B'$. Sea $F : D^N \to D$ definida por la condición que para todo $\overrightarrow{A} \in D^N$,

$$F(\overrightarrow{A}) = \begin{cases} B \text{ si } A_1 = B' \text{ y } A_i = B \text{ para todo } i \in N\backslash\{1\} \\ \qquad\qquad A_1 \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta F es unánime, pues para todo $\varphi \in X$ si para cada $\overrightarrow{A} \in D^N$, si para cada $i \in N$, $\varphi \in A_i$ tenemos que $\varphi \in B$ o $\varphi \in A_i$, en consecuencia, $\varphi \in F(\overrightarrow{A})$, pero no es una dictadura, veamos primero que 1 es un dictador sobre P, pero no es un dictador global. Consideramos $F(\overrightarrow{A}) \cap P = A_1 \cap P = B \cap P = B' \cap P$, es cualquier caso, así 1 es el dictador sobre P, pero no es un dictador global ya que si consideramos los siguientes perfiles, $F(B', B, \ldots, B) = B$ y $F(B, B', \ldots, B') = B$ notamos que 1 no es dictador y para $i \neq 1$ tampoco es dictador, así F no es una dictadura, F es sistemática sobre P por el lema 3.1 con el generador $\mathcal{C}_P^F = \{1\}$ y por tanto independiente sobre P.

Lema 3.12 *Supongamos que $F : D^N \to D^*$ es monótona y sistemática sobre P entonces $\mathcal{C}_P^F$ es cerrada por super conjuntos.*

Prueba: Sea $C \in \mathcal{C}_\rho^F$ si, y sólo si, existe $\overrightarrow{A}$ tal que $N_P^{\overrightarrow{A}}$.
Sea $C \subseteq C^*$ $\overrightarrow{A}$ es tal que para todo $i \in C^* \backslash C$ pasa que $\rho \notin A_i$.

Consideremos el siguiente perfil $B_i = \begin{cases} A_i \quad \text{si} \quad i \in C \\ A_\rho \quad \text{si} \quad i \in C^* \backslash C \\ A_i \quad \text{si } i \in N \backslash C^* \end{cases}$

donde A_ρ es consistente y completo.

para todo $i \in N$ $\rho \in A_i \Rightarrow \rho \in B_i$

Luego por monotonía tenemos que existe un $j \in N$ con $\rho \notin A_j$, y $\rho \in B_j$, entonces $\rho \in F(\overrightarrow{A}) \Rightarrow \rho \in F(\overrightarrow{B})$. Así por sistematicidad tenemos que $N_\rho^{\overrightarrow{B}} = C^* \in \mathcal{C}_P^F$ y se verifica que es cerrado por super conjuntos.

Lema 3.13 *Supongamos que (a) se cumplen y F es monótona. Entonces, si una función de agregación de juicios $F : D^N \to D^*$ es sistemática sobre P y es unánime sobre P, $\mathcal{C}_P^F$ es cerrada por intersección.*

Prueba: Supongamos que se cumple (a). Tomamos F como se especifica, y sea $\mathcal{C}^F$ el asociado a F , y algunos $C, C^* \in \mathcal{C}_P^F$. Tomamos $Y \subseteq X$ como en (a), entonces existe al menos tres pares distintos de formulas $p, q, r \in Y \cap P$, tales que los conjuntos $Y_{\neg\{p\}}, Y_{\neg\{q\}}, Y_{\neg\{r\}}$ son consistente por la inconsistencia minimal de Y

Por tanto, existe $(A_i)_{i\in N} \in D^N$ como sigue:

- Para todo $i \in C \cap C^*$, A_i extiende $Y_{\neg\{p\}}$
- para todo $i \in C^* \backslash C$, A_i extiende a $Y_{\neg\{r\}}$
- para todo $i \in N \backslash C^*$, A_i extiende a $Y_{\neg\{q\}}$

Por unanimidad asegura que $Y \backslash \{p, q, r\} \subseteq A$. Por tanto $q \in A$ porque $N_q = (C \cap C^*) \cup (C^* \backslash C) = C^* \in \mathcal{C}_P^F$ y $r \in A$ porque $N_r = (C \cap C^*) \cup (N \backslash C^*) \supseteq C \in \mathcal{C}_P^F$ y $\mathcal{C}_P^F$ es cerrado por super conjunto por el lema 3.12. Así, $Y \backslash \{p\} \subseteq A$ y $\neg p \in A$ como Y es inconsistente y $A \in D^*$. Esto implica que $C \cap C^* \in \mathcal{C}_P^F$, como deseamos probar.

Lema 3.14 *Supongamos que (a) se cumplen y F es monótona. Entonces,*

1. *Si una función de agregación de juicios $F : D^N \to D^*$ es sistemática sobre P y es unánime, $\mathcal{C}_P^F$ es un filtro, y para N finito, F es una oligarquía sobre P.*
2. *Si una función de agregación de juicios $F : D^N \to D$ es sistemática sobre P y es unánime, $\mathcal{C}_P^F$ es ultrafiltro, y para N finito, F es una dictadura sobre P.*

Prueba: Supongamos que (a) se cumplen. Tomamos F como se especifica, y sea $\mathcal{C}_P^F$ el asociado a F. Del lema 3.2, $\mathcal{C}_P^F$ no contiene al $\emptyset$, y del lema 3.12 y 3.13, $\mathcal{C}_P^F$ es cerrado por super conjunto e intersección. Por tanto $\mathcal{C}_P^F$ es un filtro. Si además $F : D^N \to D$, el lema 3.2 implica que $\mathcal{C}_P^F$ es un ultrafiltro. Si N es finito, cada filtro es el super conjunto de algún $M \subseteq N$, y cada ultrafiltro el conjunto de super conjuntos de $\{i\}$ para algún $i \in N$; así F es una oligarquía o una dictadura respectivamente.

BIBLIOGRAFÍA

[1] K. J. Arrow. *Social choice and individual values.* Yale University Press, 1963.

[2] Franz Dietrich and Philippe Mongin. The premiss-based approach to judgment aggregation. *Journal of Economic Theory*, 145(2):562 – 582, 2010.

[3] J. S. Kelly. *Social choice Theory: An introduction.* Springer-Verlag, 1988.

[4] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. Propositional belief base merging or how to merge beliefs/goals coming from several sources and some links with social choice theory. *European Journal of Operational Research*, 160(3):785–802, 2005.

[5] Christian List and Phillip Pettit. Aggregating sets of judgments : an impossibility result. *Economics and Philosophy*, 18(1):89–110, 2002.