Universidad de Los Andes

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

ESTABILIDAD DE MATRICES Y APLICACIONES.

Jackson J. Cegarra A.

Trabajo especial de grado: Modalidad Seminario-Monografía

Tutor: Dr. Cosme Duque.

Mérida, Junio del 2010

Índice general

Introducción

En cualquier fenómeno natural, las variables involucradas y sus razones de cambio están relacionadas entre sí por medio de los principios científicos básicos que gobiernan dicho proceso. Al expresar tal conexión en el lenguaje matemático, el resultado es con frecuencia una ecuación diferencial.

Pocas ecuaciones diferenciales tienen una solución analítica sencilla, la mayor parte de las veces es necesario realizar aproximaciones o estudiar el comportamiento del sistema bajo ciertas condiciones. Un problema importante para discutir es la estabilidad de estas soluciones, para el estudio de la estabilidad de equlibrios de sistemas de ecuaciones diferenciales de tipo parabólico es fundamental conocer cuando una matriz $\mathcal{A}$ y sus perturbaciones tienen todos sus autovalores con parte real negativa.

En este trabajo nos vamos a concentrar en el siguiente problema, dada una matriz $\mathcal{A}$ de dimensión $n \times n$, vamos hallar las condiciones necesarias y suficientes para que todos los autovalores de la matriz $(\mathcal{A} - \mathcal{D})$ tengan parte real negativa, para cualquier matriz diagonal $\mathcal{D} \geq 0$.

Ahora, dado un sistema de ecuaciones diferenciales

$$X' = F(X) \quad \text{con} \quad F(X) = (f_1(X), \ldots, f_m(X)) \quad \text{y} \quad X = (x_1, \ldots, x_n),$$

sabemos que la estabilidad de $X{=}0$ viene caracterizada por los autovalores de la matriz Jacobiana $J = \left(\dfrac{\partial f_i(0)}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq m}$

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(0) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_m}(0) \end{pmatrix}.$$

El objetivo principal de esta tesis es encontrar las condiciones necesarias y suficientes para las cuales esta matriz jacobiana es estable, semiestable, fuertemente estable, Volterra-Lyapunov estable y exitable, estudiando sus submatrices principales y los autovalores de dicha matriz.

Para esto, primero vamos a presentar algunos resultados básicos de algebra lineal que dan condiciones sobre los autovalores de una matriz y definiciones de los tipos de matrices, también vamos a presentar algunos teoremas como el de estabilidad de Routh-Hurwitz, el de Lyapunov y uno importante de análisis complejo como es el teorema de Rouché.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introduciremos algunos conceptos básicos que nos servirán para el desarrollo de este trabajo.

Definición 1.1 *Sea $\mathcal{D}$ una matriz real de dimensión $n \times n$, $\mathcal{D}$ es una matriz diagonal si todas sus entradas son cero excepto las de la diagonal.*

Definición 1.2 *Sea $\mathcal{A}$ una matriz de dimensión $n \times n$ con entradas en $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}$ es una matriz hermitiana si $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, donde $\mathcal{A}^*$ es la transpuesta cojugada de $\mathcal{A}$.*

Definición 1.3 *Sea $\mathcal{A}$ una matriz hermitiana de dimensión $n \times n$, entonces:*

- *$\mathcal{A}$ es definida positiva, si $x^T \mathcal{A} x > 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ (ó $\mathbb{C}^n$, denotada por $\mathcal{A} > 0$).*
- *$\mathcal{A}$ es definida negativa, si $x^T \mathcal{A} x < 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ (ó $\mathbb{C}^n$, denotada por $\mathcal{A} < 0$).*
- *$\mathcal{A}$ es semidefinida positiva, si $x^T \mathcal{A} x \geq 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ (ó $\mathbb{C}^n$, denotada por $\mathcal{A} \geq 0$).*
- *$\mathcal{A}$ es semidefinida negativa, si $x^T \mathcal{A} x \leq 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ (ó $\mathbb{C}^n$, denotada por $\mathcal{A} \leq 0$).*

Donde x^* es el vector transpuesto conjugado de x.

Proposición 1.4 *Sea $\mathcal{B}$ una matriz real de dimensión $n \times n$. Si $\mathcal{B}$ es simétrica entonces todos sus autovalores son reales.*

Demostración:
Sea λ un autovalor de $\mathcal{B}$, entonces se cumple que para un vector $x \neq 0$ en $\mathbb{C}^n$,

$$\mathcal{B}x = \lambda x. \tag{1.1}$$

Como $\mathcal{B}$ es simétrica y real $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}^T = \mathcal{B}$. Ahora

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}x, x\rangle &= \langle x, \mathcal{B}^T x\rangle \\ \langle \lambda x, x\rangle &= \langle x, \lambda x\rangle \\ \lambda\langle x, x\rangle &= \bar{\lambda}\langle x, x\rangle, \end{aligned}$$

así $\langle x, x\rangle(\lambda - \bar{\lambda}) = 0$ y como $x \neq 0$ entonces $\lambda = \bar{\lambda}$, por lo tanto λ es real. ■

Proposición 1.5 *Si $\mathcal{B}$ es una matriz real, simétrica y de dimensión $n \times n$, entonces $\mathcal{B}$ es definida positiva si, y sólo si, todos sus autovalores son positivos.*

Demostración:

Supongamos primero que $\mathcal{B}$ es una matriz real, simétrica, de dimensión $n \times n$ y definida positiva entonces por la proposición anterior todos sus autovalores son reales, ahora si λ es un autovalor de $\mathcal{B}$ y denotemos por $x = (x_1, \ldots, x_n)$ su autovector asociado, etonces, tenemos que $\mathcal{B}x = \lambda x$, de esto y como $\mathcal{B}$ es definida positiva se tiene que $x^T\mathcal{B}x = x^T\lambda x$ $= \lambda(x_1^2 + \ldots + x_n^2) > 0$, por lo tanto $\lambda > 0$.

Reciprocamente, como $\mathcal{B}$ es simétrica todos sus autovalores son reales, es más, existe una base ortonormal formada por autovectores de $\mathcal{B}$, sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ dicha base y sea $x \neq 0$ en $\mathbb{R}^n$, como $x = (a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)$ entonces

$$\begin{aligned} x^T\mathcal{B}x &= a_1^2\lambda_1^2\|x_1\|^2 + \ldots + a_n^2\lambda_n^2\|x_n\|^2 \\ &= a_1\lambda_1^2 + \ldots + a_n^2\lambda_n^2 > 0. \end{aligned}$$

■

Teorema 1.6 (Teorema de Lyapunov)(Lema 1.15, pag 295, [6])

Suponga que $\mathcal{A}$ es una matriz real de dimensión $n \times n$. La ecuación matricial

$$\mathcal{A}^T\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{A} = -\mathcal{C}$$

tiene una solución definida positiva $\mathcal{B}$ para cada matriz definida positiva $\mathcal{C}$ si, y sólo si, $Re\lambda(\mathcal{A}) < 0$.

Definición 1.7 *Para $z \in \mathbb{R}$, diremos que*

$$P_n(z) = z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n,$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, es un polinomio de Hurwitz, si todas sus raíces tienen parte real negativa.

Lema 1.8 *Si $P_n(z)$ es un polinomio de Hurwitz, entonces $a_i > 0$, para todo $i = 1 \ldots n$.*

Demostración: Sean $z_1, \ldots, z_p$ las raíces reales de $P_n(z)$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sus correspondientes multiplicidades. Denotemos con $z_{p+1}, \ldots, z_{p+q}$ las raíces complejas de $P_n(z)$ y $\beta_1, \ldots, \beta_q$ sus respectivas multiplicidades. Por hipótesis la parte real de z_k es negativa para cada $k = 1, 2, \ldots, p+q$.
Sabemos que

$$P_n(z) = \prod_{k=1}^{p}(z - z_k)^{\alpha_k} \prod_{k=1}^{q}(z - z_{p+k})^{\beta_k}(z - \bar{z}_{p+k})^{\beta_k}.$$

Pongamos z_k=$-b_k$, con b_k >0, $k = 1, \ldots, p$ y z_{j+p}=$-b_{j+p} + ic_j$, con $b_{j+p} > 0$, $j = 1, \ldots, q$. Así

$$P_n(z) = \prod_{k=1}^{p}(z + b_k)^{\alpha_k} \prod_{k=1}^{q}(z^2 + 2b_{j+p}z + b_{j+p}^2 + c_j^2)^{\beta_j};$$

lo cual implica que todos los coeficientes de $P_n(z)$ son mayores que cero. ■

Corolario 1.9 *En el caso $n \leq 2$ la condición anterior es suficiente; es decir, todo polinomio de segundo grado es de Hurwitz si, y sólo si, $a_i > 0$,i=1,2.*

Demostración:
($\Rightarrow$)Es consecuencia inmediata del lema anterior.
($\Leftarrow$)Sea $P_2(z)$=$z^2 + a_1z + a_2$ con $a_i > 0$, $i = 1, 2$. Ahora vamos a buscar las raíces de $P_2(z)$ por medio de la ecuación:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

así las raíces de $P_2(z)$ son:

$$z_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}.$$

- Caso(1): Si $a_1^2 < 4a_2$, entonces la raíces serian complejas y estarían dadas así:

  $$\frac{-a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}i}{2}.$$

  Como a_1 es positivo entonces $\frac{-a_1}{2}$ es negativo, por lo tanto para este caso las raíces son complejas con parte real negativa, es decir $P_2(z)$ es un polinomio de Hurwitz.

- Caso(2): Si $a_1^2 > 4a_2$, entonces $a_1^2 > a_1^2 - 4a_2 > 0$, ya que a_2 es positivo, por lo tanto

$$\frac{a_1}{2} > \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2},$$

  y de esto es inmediato ver que para este caso $P_2(z)$ es un polinomio de Hurwitz.

- Caso(3): Si $a_1^2 = 4a_2$ entonces la raíz de $P_2(z)$ es $\frac{-a_1}{2} < 0$, ya que a_1 es positivo, en consecuencia $P_2(z)$ es un polinomio de Hurwitz. ■

Denotemos por H_n al conjunto de todos los polinomios de Hurwitz de grado n.

Definición 1.10 *Diremos que $F(z)$ es un polinomio asociado a $P_n(z)$ si existe $\alpha > 0$ tal que $F(z) = (1 + \alpha z)P_n(z) - P_n(-z)$.*

Lema 1.11 (Lema 4.8, pag 63, [9])
Sea $P_n(z) \in H_n$.Entonces su asociado $F(z) \in H_{n+1}$.

Lema 1.12 (Lema 4.9, pag 64, [9])
Si $F(z) \in H_{n+1}$, entonces existe $\alpha > 0$ y $P_n \in H_n$ tal que F es el asociado de P_n.

Ahora consideremos el polinomio $P_n(z)$ y supongamos que los $a_i > 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Formemos la matriz

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdot & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdot & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

y sean

$$\triangle_1 = a_1,\ \triangle_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \ldots, \triangle_n = a_n \triangle_{n-1} .$$

Teorema 1.13 (Criterio de Routh - Hurwitz)
Las raíces de $P_n(z)$ poseen parte real negativa si, y sólo si, $\triangle_i > 0,\ i = 1, \ldots, n$.

Demostración:

($\Rightarrow$) Asumamos que $P_n \in H_n$. Realicemos la prueba por inducción. Sea $P_1(z) = z + a_1$. Así $z = -a_1 < 0$ y $\triangle_1 = a_1 > 0$. Consideremos $P_2(z) = z^2 + a_1 z + a_2$. Luego por el corolario 1.8, $\triangle_1$ y $\triangle_2$ son positivas.

Supongamos que para todo $P_n \in H_n$, se verifica que $\triangle_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$. Sea $F \in H_{n+1}$. De acuerdo con el lema 1.12, existe $\alpha > 0$ y $P_n \in H_n$ tal que

$$F(z) = (1 + \alpha z) P_n(z) + P_n(-z).$$

Por comodidad pongamos $\alpha = 2c$, donde $c > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} F(z) &= 2cz^{n+1} + (1 + (-1)^n + 2ca_1)z^n + (a_1 + (-1)^{n-1}a_1 + 2ca_2)z^{n-1} \\ &\quad + \ldots + (a_{n-2} + (-1)^2 a_{n-2} + 2ca_{n-1})z^2 + (a_{n-1} + (-1)a_{n-1} + 2ca_n)z + 2a_n. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Supongamos por ejemplo que n es par, el caso n impar se analiza en forma similar. De (1.3) obtenemos que:

$$F(z) = 2cz^{n+1} + (2 + 2ca_1)z^n + 2ca_2 z^{n-1} + \ldots + (2a_{n-2} + 2ca_n)z^2 + 2ca_n z + 2a_n;$$

de donde sigue:

$$H_F = \begin{pmatrix} 2 + 2ca_1 & 2c & 0 & \cdot & 0 \\ 2a_2 + 2ca_3 & 2ca_2 & 2 + 2ca_1 & \cdot & \cdot \\ 2a_4 + 2ca_5 & 2ca_4 & 2a_2 + 2ca_3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 2a_n \end{pmatrix}.$$

Multiplicando la segunda columna por $-1/c$ y sumándola a la primera; la cuarta la multiplicamos por $-1/c$ y la sumamos a la tercera; y así sucesivamente hasta arribar a la $n-$ésima columna, obtenemos

$$H_F = \begin{pmatrix} 2ca_1 & 2c & 0 & \cdot & 0 \\ 2ca_3 & 2ca_2 & 2ca_1 & \cdot & \cdot \\ 2ca_5 & 2ca_4 & 2ca_3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 2a_n \end{pmatrix}.$$

De donde se sigue que:

$$\begin{aligned} \widetilde{\triangle}_1 &= 2ca_1 = 2c\triangle_1, \\ \widetilde{\triangle}_2 &= (2c)^2 \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = (2c)^2\triangle_2, \\ &\vdots \\ \widetilde{\triangle}_n &= (2c)^n\triangle_n, \\ \widetilde{\triangle}_{n+1} &= 2a_n\widetilde{\triangle}_n. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\triangle_j > 0,\ \forall\, j = 1,\ldots,n$, se sigue que $\widetilde{\triangle}_j > 0,\ \forall\, j = 1,\ldots,n+1$.

($\Leftarrow$) Sea $P_n(z)$ un polinomio dado, con $a_j > 0,\ \forall\, j = 1,\ldots,n$ y $\triangle_j > 0$, $\forall\, j = 1,\ldots,n$. La prueba la realizaremos por inducción.

Sea $P_1(z) = z + a_1$. Como $\triangle_1 = a_1 > 0$, entonces $z_1 = -a_1 < 0$. Para $n = 2$ nuestra afirmación sigue del corolario 1.9.

Sea $F(z)$ un polinomio de grado $(n+1)$ con coefientes positivos tal que $\widetilde{\triangle}_j > 0$, $\forall\, j = 1,\ldots,n+1$. Por hipótesis todo polinomio de grado n con coefientes positivos que verifique la condición de Hurwitz, es un polinomio de Hurwitz.

Realizando un cálculo análogo al que hicimos en la prueba de la necesidad, obtenemos que $\widetilde{\triangle}_j = (2c)^j\triangle_j,\ \forall\, j = 1,\ldots,n$. Sabemos que dado $F(z)$, el polinomio $P_n(z)$ se elige de la siguiente igualdad

$$\alpha^2 z^2 P_n(z) = (\alpha z - 1)F(z) + F(-z).$$

Puesto que $\widetilde{\triangle}_j > 0,\ \forall\, j = 1, \ldots, n+1$, tendremos que $\triangle_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$. Así, por la hipótesis inductiva $P_n(z)$ es un polinomio de Hurwitz y por el lema 1.11 concluimos que $F \in H_{n+1}$. ■

Definición 1.14 *Consideremos el conjunto $Z_n = \{\mathcal{B} \in \mathcal{M}_{n\times n} : b_{ij} \leq 0, \forall i \neq j\}$, decimos que $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{M}$-matriz si $\mathcal{A} \in Z_n$ y además posee todos sus autovalores con parte real positiva.*

Definición 1.15

- *$\mathcal{A}$ es estrictamente diagonal dominante por fila si*

$$|a_{ii}| > \sum_{i\neq j} |a_{ij}|,$$

  para $i = 1, \ldots, n$.

- *Decimos que $\mathcal{A}$ es estrictamente diagonal dominante por columna si $\mathcal{A}^T$ es estrictamente diagonal dominante por fila.*

Proposición 1.16 (Corolario 7.2.3, pag 403, [7]). *Sea $\mathcal{A}$ una matriz real, simétrica y estrictamente diagonal dominante. Si $a_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ entonces $\mathcal{A}$ es definida positiva.*

Proposición 1.17 (Teorema 2.5.3, pag 144, [8]). *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *$\mathcal{B}$ es una $\mathcal{M}$ -matriz.*
- *$\mathcal{B} = \alpha I - P$, $P \geq 0$, y $\alpha > \rho(P)$; donde $\rho(P)$es el radio espectral de P.*
- *Existe $x > 0$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{B}x > 0$.*
- *Los elementos de la diagonal de $\mathcal{B}$ son todos mayores que cero y existe $E > 0$ diagonal tal que $\mathcal{B}E$ es digonal dominante por fila.*
- *Existen $E, \mathcal{D}$ diagonales tales que $\mathcal{D}\mathcal{B}E$ es diagonal dominate por fila y columna.*

Teorema 1.18 (Teorema de Rouché)(Corolario, pag 152, [1])

Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada simple y sea $\mathcal{J}$ su interior. Si f y g son funciones analíticas definidas en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{J}$, con:

$$f(z), g(z) \neq 0, \text{ para todo } z \in \mathcal{C} \text{ y}$$

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \text{ para todo } z \in \mathcal{J} \cup \mathcal{C}.$$

Entonces f y g poseen el mismo número de ceros en $\mathcal{J}$.

Teorema 1.19 *Sea $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ una sucesión de funciones analíticas definidas sobre D un subconjunto de $\mathbb{C}$, la cual converge uniformemente a $f \neq 0$ sobre compactos. Entonces dada una curva γ que no contenga ceros de f, existe n_0 tal que f_n y f tienen la misma cantidad de ceros en la region acotada por γ, para todo $n \geqslant n_0$.*

Demostración: Sea $\mu = min|f(z)| > 0$. Luego $|f_n(z) - f(z)| < \mu \leqslant |f(z)|$, para todo $n \geqslant n_0$ y todo $z \in \gamma$. Poniendo $g(z){=}f_n(z) - f(z)$, el teorema de Rouché implica $f_n(z)$ y $f(z)$ tienen la misma cantidad de ceros en la región acotada por γ. ■

Teorema 1.20 *Las raíces de un polinomio dependen continuamente de sus coeficientes.*

Demostración: Consideremos $P_m(x){=}a_m x^m{+}\ldots{+}a_1 x{+}a_0$ con $a_i \in \mathbb{R}$, para $i{=}1, \ldots, m$. Sean $z_1, \ldots, z_m$ las raíces de P_m.

Definamos

$$F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{C}^m$$

por

$$F(a_0, \ldots, a_m) = (z_1, \ldots, z_m).$$

Consideremos ahora la sucesión $\{(a_{0n}, \ldots, a_{mn})\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $(a_{0n}, \ldots, a_{mn}) \to (a_0, \ldots, a_m)$, $n \to \infty$. Definamos

$$Q_m^n(z) = a_{mn} z^m + \ldots + a_{1n} z + a_{on}.$$

Como los ceros z_i de $P_m(z)$ son aislados, entonces para $0 < \epsilon \lll 1$, $\overline{B_\epsilon}(z_i)$ contiene solo una raíz de $P_m(z)$ para $i = 1, \ldots, m$.

Por otro lado $Q_m^n(z) \to P_m(z)$ uniformrmente sobre compactos, lo cual implica por el teorema 1.19 que existe n_0 tal que $Q_m^n(z)$ y $P_m(z)$ tienen la misma cantidad de ceros en la región acotada por $\partial\overline{B_\epsilon}(z_i)$.

Por lo tanto, si $(z_{1n}, \ldots, z_{mn})$ son los ceros de $Q_m^n(z)$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|(z_{1n}, \ldots, z_{mn}) - (z_1, \ldots, z_m)\| < \epsilon,$$

si $n \geq n_0$. ■

Capítulo 2

Estabilidad de Matrices

En este capítulo vamos a presentar los tipos de estabilidad para matrices reales, así como las condiciones necesarias y suficientes para caracterizar a las matrices estables en terminos de sus submatrices principales.

Definición 2.1 *Sea $\mathcal{D}$ una matriz diagonal con entradas en $\mathbb{R}$. Se dice que una matriz $\mathcal{A}$ es:*

1. *Estable si todos sus autovalores poseen parte real negativa.*

2. *Semiestable si todos sus autovalores poseen parte real menor o igual a cero.*

3. *Fuertemente Estable (Fuertemente semiestable) si $\mathcal{A} - \mathcal{D}$ es estable (semiestable) para toda $\mathcal{D}$ no definida negativa.*

4. *$\mathcal{D}$-estable ($\mathcal{D}$-semiestable) si $\mathcal{D}\mathcal{A}$ es estable (semiestable) para toda $\mathcal{D}$ definida positiva.*

5. *Volterra-Lyapunov estable si existe una matriz $\mathcal{D}$ definida positiva, tal que la matriz $\mathcal{A}\mathcal{D} + \mathcal{D}\mathcal{A}^T$ es definida negativa.*

6. *Exitable si $\mathcal{A}$ es estable pero no es fuertemente estable.*

Proposición 2.2 *Si $\mathcal{A}$ es Volterra-Lyapunov estable entonces también es fuertemente estable y $\mathcal{D}$-estable.*

Demostración:

Sea $\mathcal{A}$ una matriz real y Volterra-Lyapunov estable, entonces existe una matriz $\mathcal{D}_0$ diagonal, real y definida positiva tal que $\mathcal{A}\mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_0\mathcal{A}^T < 0$, luego para todo $\mathcal{D} \geq 0$ se tiene que $(\mathcal{A} - \mathcal{D})\mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_0(\mathcal{A}^T - \mathcal{D}) = \mathcal{A}\mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_0\mathcal{A}^T - 2\mathcal{D}_0\mathcal{D}$, como $\mathcal{A}\mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_0\mathcal{A}^T < 0$ y $-2\mathcal{D}_0\mathcal{D} < 0$ entonces $(\mathcal{A} - \mathcal{D})\mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_0(\mathcal{A}^T - \mathcal{D}) < 0$ y esto implica que $\mathcal{A} - \mathcal{D}$ es Volterra-Lyapunov estable, así por el Teorema de Lyapunov se tiene que $A - D$ es estable, por lo tanto $\mathcal{A}$ es fuertemente estable.

Ahora veamos que si $\mathcal{A}$ es Volterra-Lyapunov estable entonces es $\mathcal{D}$-estable. Si $\mathcal{A}$ es Volterra-Lyapunov estable entonces $\mathcal{A}\mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_0\mathcal{A}^T < 0$ para algún $\mathcal{D}_0 > 0$, como el producto de una matriz definida positiva con una matriz definida negativa es una matriz definida negativa, entonces para todo $\mathcal{D} > 0$ se cumple que:

$$(\mathcal{D}\mathcal{A})(\mathcal{D}_0\mathcal{D}) + (\mathcal{D}\mathcal{D}_0)(\mathcal{A}^T\mathcal{D}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_0\mathcal{A}^T)\mathcal{D} < 0,$$

por tanto $\mathcal{D}\mathcal{A}$ es Volterra-Lyapunov estable, de lo cual se tiene por el Teorema de Lyapunov que $\mathcal{D}\mathcal{A}$ es estable y así $\mathcal{A}$ es $\mathcal{D}$-estable. ■

Definición 2.3 *Para algún subconjunto $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq n$ de enteros $1, 2, \ldots, n$, la submatriz principal $\mathcal{A}_{i_1}, \ldots, \mathcal{A}_{i_j}$ de $\mathcal{A}$, es obtenida omitiendo las filas y columnas excepto las de índices $i_1, i_2, \ldots, i_j$. El menor principal correspondiente es $\mathcal{M}_{i_1,\ldots,i_j} = det(\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_j})$.*

Para fijar ideas sobre como se obtienen las submatrices principales de una matriz veamos el siguiente ejemplo:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

luego algunas submatrices principales de $\mathcal{A}$ son:

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix} \qquad \mathcal{A}_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \mathcal{A}_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Definición 2.4 *Los menores principales signados de $\mathcal{A}$ son las cantidades $(-1)^j\mathcal{M}_{i_1,\ldots,i_j}$. El polinomio característico de $\mathcal{A}$ es:*

$$det(\lambda I - \mathcal{A}) = \lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + \ldots + C_{n-1}\lambda + C_n$$

donde,

$$C_j = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_j\leq n} (-1)^j \mathcal{M}_{i_1,\ldots,i_j}$$

es la suma de todos los menores principales signados de orden j.

Teorema 2.5 *Sea $\mathcal{A}$ una matriz real:*

(a) Si $\mathcal{A}$ es fuertemente estable, entonces toda submatriz principal de $\mathcal{A}$ es fuertemente semiestable.

(b) Si $\mathcal{A}$ es D-estable, entonces toda submatriz principal de $\mathcal{A}$ es $\mathcal{D}$-semiestable.

(c) Si $\mathcal{A}$ es Volterra-Lyapunov estable, entonces toda submatriz principal de $\mathcal{A}$ es Volterra-Lyapunov estable.

Demostración:
(a) Sea $\mathcal{A}$ fuertemente estable. Supongamos que existe una submatriz $\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_j}$ que no es fuertemente semiestable, es claro que $\mathcal{A} \neq \mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_j}$ ya que $\mathcal{A}$ es fuertemente estable. Si $\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_j}$ no es fuertemente semiestable, entonces existe $\mathcal{D}_0 \geq 0$ tal que $(\mathcal{A}-\mathcal{D}_0)_{i_1,\ldots,i_j}$ posee al menos un autovalor λ_0 con parte real positiva. Sea $\mathcal{D}$ una matriz diagonal con ceros en las posiciones $i_1,\ldots,i_j$ y $d>0$ en las demás posiciones.

Luego,

$$det(\lambda I - \mathcal{A} + \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}) = \sum_{k=0}^{n-j} P_k(\lambda) d^k$$

donde $P_k(\lambda)$ son polinomios en λ y $P_{n-j}(\lambda) = det(\lambda I - \mathcal{A} + \mathcal{D}_0)_{i_1,\ldots,i_j}$. Como λ_0 posee parte real positiva podemos suponer que existe C un círculo con centro λ_0 y totalmente contenido en el semiplano positivo. Definamos

$$f(d) = \sum_{k=0}^{n-j} P_k(\lambda) d^k$$

y

$$g(d) = P_{n-j}(\lambda) d^{n-j}.$$

Sea $\mathcal{J}$ el interior de C, luego el conjunto $\mathcal{J} \cup C$ es compacto entonces, por ser $P_k(\lambda)$ un polinomio, él es continuo para cada k y además tiene máximo y mínimo en $\mathcal{J} \cup C$, sean $M_k = max\{P_k(\lambda)\}$ y $m_k = min\{P_k(\lambda)\}$.

Entonces
$$\begin{aligned} |f(d)-g(d)| &= \left|\sum_{k=0}^{n-j} P_k(\lambda)d^k - P_{n-j}(\lambda)d^{n-j}\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{n-j-1} P_k(\lambda)d^k\right|, \end{aligned}$$
así,
$$\left|\sum_{k=0}^{n-j-1} P_k(\lambda)d^k\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{n-j-1} M_k d^k\right| \tag{2.1}$$
y
$$\left|m_{k-j}(\lambda)d^{k-j}\right| \leq |P_{k-j}(\lambda)d^{k-j}| = |g(d)|. \tag{2.2}$$

Como $|m_{k-j}(\lambda)d^{k-j}|$ es un polinomio positivo de un grado mayor que $\left|\sum_{k=0}^{n-j-1} M_k d^k\right|$ entonces, para d suficientemente grande se tiene que
$$\left|\sum_{k=0}^{n-j-1} M_k d^k\right| < \left|m_{k-j}(\lambda)d^{k-j}\right|. \tag{2.3}$$

Por (2.1), (2.2) y (2.3) tenemos que $|f(d)-g(d)| < |g(d)|$ y aplicando el Teorema de Rouché, se concluye que f y g tienen la misma cantidad de ceros en $\mathcal{J} \cup C$, como λ_0 es un cero de g en $\mathcal{J} \cup C$, entonces f tiene también una raíz en $\mathcal{J} \cup C$, esto es una contradicción, ya que por hipótesis $\mathcal{A}$ es fuertemente estable y esto implica que todas las raíces de f poseen parte real negativa, por tanto, todas las submatrices principales de $\mathcal{A}$ son fuertemente semiestables.

(b) Para fijar ideas, consideremos:
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$$
$$\mathcal{DA} = \begin{pmatrix} d_1a_{11} & d_1a_{12} & d_1a_{13} \\ d_2a_{21} & d_2a_{22} & d_2a_{23} \\ d_3a_{31} & d_3a_{32} & d_3a_{33} \end{pmatrix}$$
entonces consideremos la submatriz A_{23}, luego,

$L = \lim_{d_1 \to 0} \mathcal{DA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_2a_{21} & d_2a_{22} & d_2a_{23} \\ d_3a_{31} & d_3a_{32} & d_3a_{33} \end{pmatrix}$. Ahora el polinomio característico de L viene dado por:

$$\begin{aligned} det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ d_2a_{21} & \lambda - d_2a_{22} & d_2a_{23} \\ d_3a_{31} & d_3a_{32} & \lambda - d_3a_{33} \end{pmatrix} &= \lambda^3 + \lambda d_2a_{22}d_3a_{33} - \lambda^2(d_2a_{22} + d_3a_{33}) - \lambda d_2a_{33}d_3a_{32} \\ &= \lambda^3 - \lambda^2(d_2a_{22} + d_3a_{33}) - \lambda(d_2a_{23}d_3a_{32} - d_2a_{22}d_3a_{33}) \\ &= \lambda(\lambda^2 - \lambda(d_2a_{22} + d_3a_{33}) - (d_2a_{23}d_3a_{32} - d_2a_{22}d_3a_{33})). \end{aligned}$$

El polinomio característico de $\mathcal{DA}_{23}$ es:

$$det(\lambda I - \mathcal{DA})_{12} = \lambda^2 - \lambda(d_2a_{22} + d_3a_{33}) - (d_2a_{23}d_3a_{32} - d_2a_{22}d_3a_{33}) = 0$$

De donde se puede observar que las raíces del polinomio característico de la matriz $\mathcal{DA}_{23}$ son tambien las de L, ahora como $\mathcal{A}$ es $\mathcal{D}-$estable, entonces L es semiestable y además como los autovalores dependen continuamente de los d_i entonces $\mathcal{DA}_{23}$ es semiestable.

Caso General: Sea $\mathcal{A}$ una matriz real de dimensión $n \times n$ y $\mathcal{D}$ una matriz diagonal de la misma dimensión y definida positiva, sea una submatriz principal de $\mathcal{A}$, tenemos que probar que $\mathcal{A}_{i_1,\dots,i_j}$ es semiestable. Sea

$$L = \lim_{d_i \to 0} \mathcal{DA}$$

con $i \notin \{i_1, \dots, i_j\}$. Como cada autovalor de $(\mathcal{DA})_{i_1,\dots,i_j}$ es autovalor de L, y además $\mathcal{A}$ es $\mathcal{D}$-estable entonces L es semiestable, ahora como todos los autovalores $\mathcal{DA}$ dependen continuamente de los d_i, entonces se tiene que $(\mathcal{DA})_{i_1,\dots,i_j}$ es semiestable.

(c) Para fijar ideas, consideremos:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \mathcal{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

Con $\mathcal{A}$ Volterra Lyapunov estable, y supongamos que para la matriz diagonal $\mathcal{D}$ se tiene que que $\mathcal{AD} + \mathcal{DA}^T < 0$, entonces:

$$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_2 & a_{13}d_3 \\ a_{21}d_1 & a_{22}d_2 & a_{23}d_3 \\ a_{31}d_1 & a_{32}d_2 & a_{33}d_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_1 & a_{13}d_1 \\ a_{21}d_2 & a_{22}d_2 & a_{23}d_2 \\ a_{31}d_3 & a_{32}d_3 & a_{33}d_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} < 0, \tag{2.4}$$

para todo vector $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. En particular, para vectores de tipo $(x_1, x_2, 0); (x_1, 0, x_3);$ $(0, x_2, x_3); (x_1, 0, 0); (0, x_2, 0); (0, 0, x_3)$. Tenemos que probar que cada submatriz principal de $\mathcal{A}$ es Volterra Lyapunov estable, ahora si sustituimos el vector $(x_1, 0, 0)$ en (2.4) se tiene que $a_{11}d_1{x_1}^2 + a_{11}d_1{x_1}^2 < 0$, y de esto, tenemos que dado un vector cualquiera x ahora de tamaño 1, entonces (a_{11}) es Volterra Lyapunov estable. De igual manera se demuestra que (a_{22}) y (a_{33}) son volterra Lyapunov estable haciendo el mismo procedimiento con $(0, x_2, 0)$ y $(0, 0, x_3)$.

Para probar que $\mathcal{A}_{12}$ es Volterra Lyapunov estable sustituimos el vector $(x_1, x_2, 0)$ en (2.4) se tiene que:

$${x_1}^2a_{11} + {x_2}^2a_{22} + 2x_1x_2a_{21} + 2x_1x_2a_{12} + {x_1}^2a_{11} + {x_2}^2a_{22} < 0,$$

y con esto probamos que $\mathcal{A}_{12}$ es Volterra Lyapunov estable, de la misma manera se demuestra que $\mathcal{A}_{13}$ y$\mathcal{A}_{23}$ son Volterra Lyapunov estables, así tenemos para este caso que si $\mathcal{A}$ es Volterra Lyapunov estable todas sus submatrices principales son Volterra Lyapunov estables.

Caso General: Para probar esta proposición consideremos A una matriz real de dimensión $n \times n$ y Volterra Lyapunov estable entonces se cumple que: $\mathcal{AD} + \mathcal{DA}^T$ es definida negativa, es decir, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que:

$$x\mathcal{AD}x^T + x\mathcal{DA}^Tx^T < 0.$$

Ahora sea $A_{i_1,i_2,\ldots,i_j}$ una subamtriz principal de $\mathcal{A}$, veamos que es Volterra Lyapunov estable, consideremos $x \in \mathbb{R}^n$ tal que los $x_{i_1}, \ldots, x_{i_j} \neq 0$ y 0 los otros elementos de x, al hacer el producto

$$x\mathcal{AD}x^T + x\mathcal{DA}^Tx^T = x_j\mathcal{A}_{i_1,i_2,\ldots,i_j}\mathcal{D}_{1,2,\ldots,j}x_j^T + x\mathcal{D}_{1,2,\ldots,j}\mathcal{A}^T_{i_1,i_2,\ldots,i_j}x_j^T < 0,$$

de esto se tiene que $A_{i_1,i_2,\ldots,i_j}$ es Volterra Lyapunov estable. ∎

Definición 2.6 *Sea P la clase de las matrices cuyos signos de los menores principales son todos positivos y P_0^+ la clase de las matrices cuyos signos de los menores principales son no negativos con al menos uno de cada orden positivo.*

Corolario 2.7 *Si $\mathcal{A}$ es fuertemente estable o $\mathcal{D}$-estable, entonces $\mathcal{A} \in P_0^+$. Si $\mathcal{A}$ es Volterra-Lyapunov estable, entonces $\mathcal{A} \in P$.*

Demostración: Sea $\mathcal{A}$ fuertemente estable o $\mathcal{D}$-estable, ahora por el teorema previo, cada submatriz principal $\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_j}$ es semiestable, por tanto $(-1)^j\mathcal{M}_{i_1,\ldots,i_j} \geq 0$ donde $\mathcal{M}_{i_1,\ldots,i_j}$ es el producto de los autovalores de $\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_j}$, y de los autovalores complejos con sus respectivas conjugadas de esto se tiene que $\mathcal{A} \in P_0^+$. Otra forma de ver esta demostración es la siguiente, como $\mathcal{A}$ es estable, entonces los coeficientes del polinomio característico son positivos por Hurwitz, así todos los menores principales signados de $\mathcal{A}$ son no negativos, por tanto, $\mathcal{A} \in P_0^+$.

Sea $\mathcal{A}$ Volterra-Lyapunov estable, entonces por el teorema anterior se cumple que todas sus submatrices principales $\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_j}$ son Volterra-Lyapunov estable, de lo que se deduce que $(-1)^j\mathcal{M}_{i_1,\ldots,i_j} > 0$ y de aqui se desprende que $\mathcal{A} \in P$. ■

Teorema 2.8 *Sea $\mathcal{A}$ una matriz real de dimensión $n \times n$, entonces se tienen que son ciertas las siguientes equivalencias:*

1. *Si $\mathcal{A}$ es normal entonces estabilidad fuerte, $\mathcal{D}$-estale y Volterra Lyapunov estable son equivalentes a estabilidad.*

2. *Si $\mathcal{A} \in F$, donde $F = \{\mathcal{B} : b_{ij} \geq 0, \forall i \neq j\}$, entonces se tiene que estabilidad fuerte, $\mathcal{D}$-estable y Volterra Lyapunov estable son equivalentes a estabilidad.*

3. *Si $\mathcal{A}$ es simétrica y en F, $\mathcal{A}$ es estable si, y sólo si, $\mathcal{A} \in P$.*

Demostración:

(1) Veamos que si $\mathcal{A}$ es normal, fuertemente estable, $\mathcal{D}$-estable y Volterra Lyapunov estable son equivalentes a estabilidad.

($\Rightarrow$) Es claro que si $\mathcal{A}$ es fuertemente estable, $\mathcal{A}$ es estable, ya que para $\mathcal{D} = (0)_{ij}$ se cumple que $\mathcal{A} - \mathcal{D} = \mathcal{A}$ es estable. Del mismo modo se tiene que si $\mathcal{A}$ es $\mathcal{D}$-estable, entonces $\mathcal{A}$ es estable ya que para $\mathcal{D} = I$, $\mathcal{D}\mathcal{A} = \mathcal{A}$ es estable. Y si $\mathcal{A}$ es Volterra Lyapunov estable, entonces por la proposicion (2.2), se tiene que $\mathcal{A}$ es fuerte y $\mathcal{D}$-estable y esto implica inmediatamente que $\mathcal{A}$ es estable.

($\Leftarrow$) Ahora supongamos que $\mathcal{A}$ es una matriz normal y estable, veamos que $\mathcal{A}$ es Volterra-Lyapunov estable. Como $\mathcal{A}$ es normal se cumple que existe una base ortonormal $v_1, \ldots, v_n$ de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de $\mathcal{A}$, los cuales también son autovectores de $\mathcal{A}^T$.

Veamos que $\mathcal{A}+\mathcal{A}^T$ es definida negativa, es decir, dado $x \in \mathbb{R}^n$, entonces se cumple que $x^T(\mathcal{A}+\mathcal{A}^T)x < 0$. Como $v_1, \ldots, v_n$ es una base ortonormal se tiene que

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
x^T(\mathcal{A}+\mathcal{A}^T)x &= x^T\left(\mathcal{A}\sum_{i=1}^{n} a_i v_i + \mathcal{A}^T\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) \\
&= x^T(a_1\lambda_1 v_1 + a_2\lambda_2 v_2 + \ldots + a_n\lambda_n v_n + a_1\overline{\lambda}_1 v_1 + \ldots + a_n\overline{\lambda}_n v_n) \\
&= x^T(2a_1 Re(\lambda_1)v_1 + 2a_2 Re(\lambda_2)v_2 + \ldots + 2a_n Re(\lambda_n)v_n) \\
&= (a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n)(2a_1 Re(\lambda_1)v_1 + 2a_2 Re(\lambda_2)v_2 + \ldots + 2a_n Re(\lambda_n)v_n) \\
&\quad (2a_1^2 Re(\lambda_1)v_1^2 + 2a_1 a_2 Re(\lambda_2)v_2 v_1 + \ldots + 2a_n^2 Re(\lambda_n)v_n^2).
\end{aligned}$$

Como cada v_i es un vector ortonormal, se tiene que $v_i v_j = 0$ si $i \neq j$ y $v_i^2 = 1$, asi se tiene que

$$x^T(\mathcal{A}+\mathcal{A}^T)x = (2a_1^2 Re(\lambda_1) + 2a_2^2 Re(\lambda_2) + \ldots + 2a_n^2 Re(\lambda_n)),$$

como cada $Re(\lambda_i) < 0$ entonces $x^T(\mathcal{A}+\mathcal{A}^T)x < 0$, por tanto, $\mathcal{A}+\mathcal{A}^T$ es definida negativa y asi Volterra-Lyapunov estable con $\mathcal{D}$ igual a la matriz identidad.

(2) Veamos que si $\mathcal{A} \in F$, $F = \{\mathcal{B} : b_{ij} \geq 0, \forall i \neq j\}$ estabilidad Fuerte, $\mathcal{D}$ estable y VolterraLyapunov estable son equivalentes a estabilidad.

($\Rightarrow$) Sea $\mathcal{A} \in F$ y estable, entonces $-\mathcal{A}$ y $-\mathcal{A}^T$ son $\mathcal{M}$-matrices; por la proposición 1.16 se tiene que existen $\mathrm{E}, \mathcal{D} > 0$ matrices diagonales tal que $\mathcal{D}(-\mathcal{A})\mathrm{E}$ y $\mathrm{E}(-\mathcal{A}^T)\mathcal{D}$ son diagonal dominante por fila y columna, además, los elementos de la diagonal de cada una son positivos, entonces la matriz $\mathcal{D}(-\mathcal{A})\mathrm{E} + (\mathcal{D}(-\mathcal{A})\mathrm{E})^T$ es diagonal dominante por filas y columnas y todos los elementos de su diagonal son positivos.

Ahora, $\mathcal{D}(-\mathcal{A})E+(\mathcal{D}(-\mathcal{A})E)^T$ es simétrica, así que todos sus autovalores son reales y por la proposición 1.16 $\mathcal{D}(-\mathcal{A})E + (\mathcal{D}(-\mathcal{A})E)^T$ es definida positiva.

Como E es diagonal y definida positiva entonces E^{-1} diagonal, definida positiva y $(E^{-1})^T = E^{-1}$. Por lo tanto como $\mathcal{D}(-\mathcal{A})E+(\mathcal{D}(-\mathcal{A})E)^T$ definida positiva entonces

$$\begin{aligned} E^{-1}[\mathcal{D}(-\mathcal{A})E + (\mathcal{D}(-\mathcal{A})E)^T]E^{-1} &= E^{-1}\mathcal{D}(-\mathcal{A})EE^{-1} + E^{-1}E(-\mathcal{A})^T\mathcal{D}E^{-1} \\ &= (E^{-1}\mathcal{D})(-\mathcal{A}) + (-\mathcal{A})^T\mathcal{D}E^{-1} \end{aligned}$$

es definida positiva, luego $E^{-1}\mathcal{D}\mathcal{A}+\mathcal{A}^T\mathcal{D}E^{-1}$ es definida negativa para $E^{-1}, D > 0$, tomemos D_0=$E^{-1}\mathcal{D}$, por lo tanto para $\mathcal{D}_0$ se tiene que $\mathcal{A}$ es Volterra-Lyapunov estable.

($\Leftarrow$) El resultado se sigue del Teorema de Lyapunov.

(3) Para matrices simétricas y en la clase F, $\mathcal{A}$ es estable si, y sólo si, $\mathcal{A} \in P$.

($\Rightarrow$) Sea $\mathcal{A}$ una matriz simétrica en F y estable, entonces por lo probado en el iteral anterior $\mathcal{A}$ es Volterra-Lyapunov estable, y por el corolario (2.7), se tiene que $\mathcal{A} \in P$.

($\Leftarrow$) Si $\mathcal{A} \in P$ entonces todos los coeficientes del polinomio característico son mayores que cero, por tanto, por el Criterio de Routh Hurwitz se cumple que todos los autovalores de $\mathcal{A}$ poseen parte real negativa y por tanto $\mathcal{A}$ es estable. ■

Proposición 2.9 *Sea $\mathcal{A}$ una matriz real de dimensión $n \times n$ entonces para toda matriz $\mathcal{D} \geq 0$ se cumplen las siguientes condiciones:*

- *Si $\mathcal{A} \in P$ entonces $\mathcal{A} - \mathcal{D} \in P$.*
- *Si $\mathcal{A} \in P_0^+$ entonces $\mathcal{A} - \mathcal{D} \in P_0^+$.*

Demostración: Para fijar ideas, sea

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ \mathcal{A} \in P \ \text{y} \ \mathcal{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

con $d_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3$. Probemos que $\mathcal{A} - \mathcal{D} \in P$.

$$\mathcal{A} - \mathcal{D} = \begin{pmatrix} a_{11} - d_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - d_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - d_3 \end{pmatrix}.$$

Ahora como $\mathcal{A} \in P$ sus menores principales signados son positivos entonces $-det\mathcal{A}_1$, $-det\mathcal{A}_2, -det\mathcal{A}_3, det\mathcal{A}_{12}, det\mathcal{A}_{13}, det\mathcal{A}_{23}$ y $-det\mathcal{A}$ son positivos. Luego veamos que todos los menores principales signados de $\mathcal{A} - \mathcal{D}$ son positivos.

$$(-1)^1 det(\mathcal{A} - \mathcal{D})_1 = (-1)(a_1 - d_1),$$

como $-(a_{11}) > 0$ ya que $-det\mathcal{A}_1 > 0$, y además $d_1 > 0$ entonces $-(a_1 - d_1) > 0$. De la misma manera se prueba que los menores principales $-det(\mathcal{A} - \mathcal{D})_2$ y $-det(\mathcal{A} - \mathcal{D})_3$ son positivos.Veamos que el menor principal $det(\mathcal{A} - \mathcal{D})_{12}$ es positivo:

$$\begin{aligned} det(\mathcal{A} - \mathcal{D})_{12} &= det \begin{pmatrix} a_{11} - d_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - d_2 \end{pmatrix} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{11}d_2 - a_{22}d_1 - a_{12}a_{21} + d_1 d_2 \\ &= det(\mathcal{A}_{12}) - det(\mathcal{A}_1)d_2 - det(\mathcal{A}_2)d_1 + d_1 d_2. \end{aligned}$$

Como $-det(\mathcal{A}_1), -det(\mathcal{A}_2), det(\mathcal{A}_{12})$,son positivos por hipótesis, y $d_i \geq 0$, entonces $(-1)^2 det(\mathcal{A} - \mathcal{D})_{12} > 0$. El mismo razonamiento análogo se usa para probar que $(-1)^2 det(\mathcal{A} - \mathcal{D})_{13}$ y $(-1)^2 det(\mathcal{A} - \mathcal{D})_{23}$ son positivos.

Caso General: Sea $\mathcal{A}$ una matriz real de dimensión $n \times n$ y $\mathcal{A} \in P$, ahora vamos a demostrar que toda submatriz principal de $\mathcal{A} - \mathcal{D}$ está en P, para esto probemos que $(-1)^n det(\mathcal{A} - \mathcal{D})_{i_1,\ldots,i_n}$ es positivo.

$$\begin{aligned} (-1)^n det(\mathcal{A} - \mathcal{D})_{i_1,\ldots,i_n} &= (-1)^n det(\mathcal{A}_{1,\ldots,n}) + (-1)^{n-1} det(\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_{n-1}})d_n + \\ &+ (-1)^{n-1} det(\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_{n-2},i_n})d_{n-1} + \ldots + \\ &+ det(\mathcal{A}_{i_1,i_2})d_3 d_4 \ldots d_n + \ldots - det(\mathcal{A}_1)d_2 \ldots d_n - \\ &- \ldots - det(\mathcal{A}_n)d_1 \ldots d_{n-1} + (-1)^n d_1 \ldots d_n. \end{aligned}$$

Como por hipótesis $\mathcal{A} \in P$ y además cada d_i es positivo, entonces $(-1)^n det(\mathcal{A} - \mathcal{D})_{i_1,\ldots,i_n}$ es positivo, utilizando el mismo razonamiento análogo para cualquier submatriz principal de $\mathcal{A} - \mathcal{D}$ se tiene que $(\mathcal{A} - \mathcal{D}) \in P$. ■

Proposición 2.10 *Sea $\mathcal{A}$ una matriz real de dimensión $n \times n$ entonces para toda matriz $\mathcal{D} \geq 0$ se cumplen las siguientes condiciones:*

- *Si $\mathcal{A} \in P$ entonces $\mathcal{D}\mathcal{A} \in P$.*

- *Si* $\mathcal{A} \in P_0^+$ *entonces* $\mathcal{DA} \in P_0^+$.

Demostración: Para cada menor principal de $\mathcal{DA}$ se cumple

$$det(\mathcal{DA})_{i_1,\ldots,i_j} = d_{i_1}d_{i_2}\ldots d_{i_j} det\,\mathcal{A}_{i_1,\ldots,i_j},$$

ahora, como $(-1)^j\, det\,\mathcal{A}_{i_1\ldots i_j} > 0$ y $d_{i_1}\ldots d_{i_j}$ son mayores que cero, entonces todos los menores principales signados de $\mathcal{DA}$ son positivos para todo $\mathcal{D} > 0$.

El mismo razonamiento se aplica cuando $\mathcal{A} \in P_0^+$. ∎

Teorema 2.11 *Para una matriz real* 2×2 *se cumplen las siguientes condiciones:*

1. $\mathcal{A}$ *es Fuertemente estable y D-estable si, y sólo si,* $\mathcal{A} \in P_0^+$.
2. $\mathcal{A}$ *es Volterra Lyapunov estable si, y sólo si,* $\mathcal{A} \in P$.

Demostración:

1. ($\Rightarrow$)Se desprende del Corolario 2.7.

   ($\Leftarrow$)Por la Proposición 2.9 y 2.10 $\mathcal{A} - \mathcal{D} \in P_0^+$ y $\mathcal{AD} \in P_0^+$, ahora por el corolario 1.8 se tiene que $\mathcal{A} - \mathcal{D}$ y $\mathcal{AD}$ son estables, y en consecuencia $\mathcal{A}$ es Fuertemente estable y D-estable.

2. ($\Rightarrow$)Esto es consecuencia inmediata del Corolario 2.7.

   ($\Leftarrow$) Sea $\mathcal{A} \in P$, veamos que $\mathcal{A}$ es Volterra Lyapunov estable.

   Como $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in P$ entonces $a_{11} < 0, a_{22} < 0$ y $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$.

   Consideremos la matriz

   $$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ & \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$ donde d_1 fijo y $d_2 \in (d_{22}, d_{21})$, donde:

   $$d_{21} = \left(\frac{4a_{11}a_{22}d_1 - 2a_{12}a_{21}d_1 + 4\sqrt{a_{11}a_{22}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{a_{12}^2}\right) d_1 > 0.$$

   $$d_{22} = \left(\frac{4a_{11}a_{22}d_1 - 2a_{12}a_{21}d_1 - 4\sqrt{a_{11}a_{22}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{a_{12}^2}\right) d_1 > 0.$$

Como

$$\mathcal{A}\mathcal{D} + \mathcal{D}\mathcal{A}^T = \begin{pmatrix} 2a_{11}d_1 & a_{12}d_2 + a_{21}d_1 \\ a_{21}d_1 + a_{12}d_2 & 2a_{22}d_2 \end{pmatrix},$$

de aquí se sigue que el polinomio característico asociado a esta matriz es

$$= \lambda^2 - (2a_{11}d_1 + 2a_{22}d_2)\lambda + 4a_{11}a_{22}d_1d_2 - (a_{12}d_2 + a_{21}d_1)^2$$

De 1 y 2 se sigue que $d_1a_{11} + d_2a_{22} < 0$ y $4d_1d_2a_{11}a_{22} - (d_1a_{21} + d_2a_{12})^2 > 0$.

Por lo tanto $\mathcal{A}$ es Volterra Lyapunov estable. ■

En otras palabras, una matriz $\mathcal{A}$ real, 2×2 es fuertemente estable si las siguientes condiciones se cumplen:

1. $a_{11} + a_{22} < 0$.
2. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$.
3. $a_{11} \leq 0$, $a_{22} \leq 0$.

Y es exitable si 2,3 y $a_{11} > 0$ o $a_{22} > 0$.

Capítulo 3

Aplicaciones

En este capítulo nos concentraremos en aplicar los resultados vistos en los capítulos precedentes para el estudio de la estabilidad del punto de equlibrio no trivial de dos modelos depredador-presa en concreto. Primero vamos a dar unos conceptos básicos para desarrollar y entender mejor lo que vamos a presentar posteriormente.

Modelo de Reacción y Difusión. Consideremos el siguiente sistema:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = D\triangle X + F(X), \quad X \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \, y \; F = (f_1, \ldots, f_m), \tag{3.1}$$

con Ω abierto, conexo y con frontera suave, $D = diag(D_1, \ldots, D_n), D_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, $X = (x_1, \ldots, x_n)$ el cual está sujeto a condiciones de frontera del tipo Newman homogéneas, es decir,

$$\frac{\partial X}{\partial \eta}(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \qquad t > 0,$$

y condición inicial

$$X(x, 0) = \phi(x) \geq 0, paratodox \in \Omega.$$

Supongamos que $x = 0$ es un punto de equilibrio del sistema

$$X' = F(X) \tag{3.2}$$

y nótese que X=0 también satisface el sistema (3.1).

Sean $\{\lambda_0, \ldots, \lambda_m, \ldots\}$ los autovalores del operador laplaciano $\triangle$ y $\{\phi_0, \ldots, \phi_m, \ldots\}$ sus respectivas autofunciones, es decir, $\triangle\, \phi_i = -\lambda_i\, \phi_i$. Para el sistema (3.1) los autovalores

λ_i satisfacen que: $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ y los ϕ_i forman una base ortonormal de $L_2(\Omega)$, donde

$$L_2 = \left\{ g : \Omega \to \mathbb{R} \, : \, \int_\Omega |g|^2 < \infty \right\},$$

y la norma $\|g\|_2 = \left(\int_\Omega |g|^2 dx \right)^{1/2}$, por lo tanto, si $u \in L_2(\Omega)$ entonces $u = \sum_{n\geq 0} a_i \phi_i(x)$.

Sabemos que la estabilidad de $X = 0$ para el sistema (3.2) viene caracterizada por los autovalores de la matriz Jacobiana $J = \left(\frac{\partial f_i(0)}{\partial x_i} \right)_{1\leq i,\, j \leq m}$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(0) \end{pmatrix}.$$

Consideremos ahora el sistema lineal

$$\frac{\partial X}{\partial t} = D \triangle X + J\, X. \tag{3.3}$$

Ahora podemos resolver el sistema (3.3) haciendo una expansión en series de Fourier o en autofunciones.

$$X(x,t) = \sum_{j\geq 0} s_j(t)\phi_j(x), \qquad s_j(t) \in \mathbb{R}^n.$$

Sustituyendo en (3.3) se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{j\geq 0} s'_j(t)\phi_j(x) &= \sum_{j\geq 0} D s_j(t) \triangle \phi_j(x) + J \sum_{j\geq 0} s_j(t)\phi_j(x) \\ &= \sum_{j\geq 0} s_j(t)(-\lambda D\phi_j(x) + J\phi_j(t)). \end{aligned}$$

Igualando coeficientes se tiene que:

$$\frac{\partial s_j}{\partial t} = [J - \lambda_j D] s_j. \tag{3.4}$$

Ahora $X = 0$ es asintóticamente estable para el sistema (3.3) si, y sólo si, cada solución de (3.4) decae a cero cuando $t \to \infty$, o equivalentemente si cada autovalor de la matriz $J - \lambda_j D$ tiene parte real negativa para cada j. Nótese que $\lambda_j D$ es una matriz definida positiva para cada j.

Definición 3.1 *Sea X=0 un punto de equilibrio del sistema* (3.1)*, se dice que X=0 es un punto difuncionalmente Turing inestable si es asintóticamente estable para el sistema* (3.2) *y es inestable respecto al sistema* (3.1)*.*

Modelo Depredador Presa con repuesta funcional del tipo Holling II.
Sea

$$\begin{aligned} N' &= \varepsilon\left(1 - \frac{N}{k}\right)N - a\frac{PN}{\beta + N} \\ P' &= -dP + \frac{bPN}{\beta + N} \end{aligned}$$

donde
N - densidad de la Presa.
P - densidad del Depredador.
ε - Tasa de crecimiento de la presa en ausencia de depredadores.
k - Capacidad de carga del sistema.
d - Tasa de mortalidad del Depredador.
a,β - Constantes de Conversión.

Vamos a estudiar la estabilidad de este sistema, primero veamos cuales son los puntos de equilibrio, es decir, cuando $N' = 0$ y $P' = 0$.

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon\left(1 - \frac{N}{k}\right)N - aPN &= 0, \\ -dP + \frac{bPN}{\beta + N} &= 0, \end{aligned} \right.$$

Reacomodando estas expresiones se tiene que:

$$\begin{cases} \left(\varepsilon - \dfrac{\varepsilon N}{k} - \dfrac{aP}{\beta + N}\right) N &= 0, \\ \\ \left(-d + \dfrac{bN}{\beta + N}\right) P &= 0. \end{cases}$$

Ahora los puntos $(0,0)$ y $(K,0)$ son puntos de equilibrio triviales del sistema, vamos a hallar otro punto de equilibrio distinto de los triviales haciendo lo siguiente:

$$\begin{cases} \varepsilon - \dfrac{\varepsilon N}{k} - \dfrac{aP}{\beta + N} &= 0 \qquad (1) \\ \\ -d + \dfrac{bN}{\beta + N} &= 0 \qquad (2) \end{cases}$$

Despejando N en (2) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{bN}{\beta + N} &= d \\ bN &= d\beta + dN \\ N &= \frac{d\beta}{b-d} \end{aligned}$$

sustituyendo (2) en (1)

$$\begin{aligned} \varepsilon - \frac{\varepsilon}{k}\left(\frac{d\beta}{b-d}\right) - \frac{aP}{\beta + \left(\frac{d\beta}{b-d}\right)} &= 0 \\ \varepsilon\left(1 - \frac{\beta d}{k(b-d)}\right) - \frac{aP(b-d)}{\beta b} &= 0 \\ \frac{\beta b \varepsilon}{a(b-d)}\left(1 - \frac{\beta d}{k(b-d)}\right) &= P \\ P &= \varepsilon\beta b\frac{(kb - kd - \beta d)}{(ka)(b-d)^2} \\ (N^*, P^*) &= \left(\frac{d\beta}{b-d}, \frac{\varepsilon\beta b(kb - kd - \beta d)}{(ka)(b-d)^2}\right). \end{aligned}$$

Veamos quien es el Jacobiano de $E^* = (N^*, P^*)$.

Sea $F_1(N,P) = \varepsilon\left(1 - \frac{N}{k}\right)N - a\frac{PN}{\beta + N}$ y $F_2(N,P) = -dP + b\frac{PN}{\beta - N}$.

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial N}(E^*) & \frac{\partial F_1}{\partial P}(E^*) \\ \\ \frac{\partial F_2}{\partial N}(E^*) & \frac{\partial F_2}{\partial P}(E^*) \end{pmatrix}.$$

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{k}[k - 2N^*] - a\frac{P^*\beta}{(\beta + N^*)^2} & -\frac{aN^*}{\beta + N^*} \\ \\ \frac{bP^*\beta}{(\beta + N^*)^2} & -d + \frac{bN^*}{\beta + N^*} \end{pmatrix}.$$

Utilizando el hecho de que E^* es un punto de equilibrio del sistema se tiene que:

$$\varepsilon\left(1 - \frac{N^*}{k}\right) - \frac{aP^*}{\beta + N^*} = 0 \qquad \text{y} \qquad -d + b\frac{PN^*}{\beta - N^*} = 0,$$

así $J(E^*)$ la podemos escribir de la siguiente manera:

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{k}(k - \beta + 2N^*) - \frac{aP^*\beta}{(\beta + N^*)} & -\frac{da}{b} \\ \\ \frac{\varepsilon b}{ak}\frac{[k - N^*]}{(\beta + N^*)} & 0 \end{bmatrix}.$$

Si $f(N) = \frac{\varepsilon}{k}(k - N)(\beta + N)$ entonces $f'(N) = \frac{2\varepsilon}{k}\left(\frac{k - \beta}{2} - N\right)$, así la traza de $J(E^*)$ es negativa si $f'(N^*) \leq 0$. Entonces $\frac{k - \beta}{2} - N^* \leq 0$, es decir, $\frac{k - \beta}{2} \leq N^*$ luego $\frac{k - \beta}{2} \leq \frac{d\beta}{d - b}$.

Por lo tanto la configuración de los signos de $J(E^*)$ es

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} - & - \\ & \\ + & 0 \end{bmatrix}$$

De esto se tiene que traza $(J(E^*)) < 0$ y $det(J(E^*)) > 0$, ya que

$$det(J(E^*)) = \frac{da}{b}\frac{\varepsilon b}{ak}\frac{[k - N^*]}{[\beta + N^*]} > 0.$$

Luego, por el Teorema 2.11, $J(E^*) \in P_0^+$, por tanto el sistema es fuertemente estable y por lo tanto $J - \lambda_i \mathcal{D}$ es estable para todo i, en consecuencia el sistema no presenta inestabilidad de Turing. ■

Modelo depredador presa con respuesta funcional de tipo Cociente-Dependiente.
Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} N' &= N(1-N) - \frac{sNP}{N+P} \\ P' &= \delta P\left(-r + \frac{N}{N+P}\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

primero hallaremos los puntos de equilibrio del sistema (3.5), que viene dado por las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} N\left(1 - N - \dfrac{sP}{P+N}\right) = 0 \\ \delta P\left(-r + \dfrac{N}{P+N}\right) = 0 \end{cases}$$

Los puntos de equilibrio del sistema (3.5) estan todos en el primer cuadrante, y son $(0,0)$ obtenido por la condicion de que $N + P \neq 0$ y $(1,0)$. Ahora si $0 < r < 1$ y $0 < s < 1/(1-r)$, el sistema (3.5) admite una solución no trivial (N^*, P^*) y se halla resolviendo los siguientes sistemas:

(1) $1 - N - \dfrac{sP}{P+N} = 0$ (2) $-r + \dfrac{N}{P+N} = 0.$

despejemos N de (2) entonces

$$-r + \frac{N}{P+N} = 0 \Rightarrow -rP - rN + N = 0 \Rightarrow N(1-r) = rP \Rightarrow N = \frac{rP}{(1-r)}$$

Sustituyendo el valor de N en (1) se tiene

$$1-\frac{rP}{(1-r)}-\frac{sP}{p+\frac{rP}{1-r}} = 0$$

$$1-\frac{rP}{(1-r)}-\frac{s\cancel{P}}{\frac{\cancel{P}}{1-r}} = 0 \Rightarrow 1-\frac{rP}{(1-r)}-s(1-r)=0 \Rightarrow \frac{rP}{1-r}=s(r-1)+1$$

$P=\dfrac{(1-r)[s(r-1)+1]}{r}$, luego $N=\dfrac{r(1-r)[s(r-1)+1]}{\frac{r}{(1-r)}}$

$N=s(r-1)+1$

Así $(N^*,P^*)=(s(r-1)+1,\frac{(1-r)[s(r-1)+1]}{r})$ cuando $r=1,(N^*,P^*)=(0,1)$

La matriz Jacobiana en $E^*=(N^*,P^*)$ viene dada por

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial N'}{\partial N}(E^*) & \dfrac{\partial N'}{\partial P}(E^*) \\ \\ \dfrac{\partial P'}{\partial N}(E^*) & \dfrac{\partial P'}{\partial P}(E^*) \end{pmatrix}$$

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} (1-N^*)-N^*-\dfrac{sP^{*2}}{(N^*+P^*)^2} & -\dfrac{sN^{*2}}{(N^*+P^*)^2} \\ \\ \dfrac{\delta P^{*2}}{(P^*+N^*)^2} & -r\delta+\dfrac{\delta N^{*2}}{(P^*+N^*)^2} \end{pmatrix}.$$

Utilizando el hecho de que E^* es un punto de equilibrio del sistema, se tiene que:

$$-r+\frac{N^*}{N^*+P^*}=0 \qquad \text{y} \qquad 1-N^*-\frac{sP^*}{(P^*+N^*)^2}=0.$$

Como $\dfrac{N^*}{N^*+P^*}=r$ entonces $\dfrac{N^{*2}}{(N^*+P^*)^2}=r^2$, luego

$$-r\delta+\frac{\delta N^{*2}}{(N^*+P^*)^2}=-r\delta+\delta r^2=-r\delta(1-r) \tag{3.6}$$

$$r^2=\frac{N^{*2}}{(P^*+N^*)^2} \Rightarrow \frac{-sN^{*2}}{(N^*+P^*)^2}=-sr^2. \tag{3.7}$$

Ahora $1-N = \dfrac{sP^*}{P^*+N^*}$ entonces $\dfrac{[1-N]^2}{s} = s\left[\dfrac{P^*}{P^*+N^*}\right]^2$ por lo tanto

$$\begin{aligned}
1-2N^*-s\left[\frac{P^*}{P^*+N^*}\right]^2 &= 1-2N^*-\frac{(1-N^*)^2}{s}, \qquad \text{sustituyendo } N^* \\
&= 1-2[s(r-1)+1]-\frac{[1-s(r-1)-1]^2}{s} \\
&= 1-2[s(r-1)+1]-s(r-1)^2 \\
&= 1-2s(r-1)-2-s(r-1)^2 \\
&= -1-2sr+2s-sr^2+2sr-s \\
&= -1-sr^2+s \\
&= s(1-r^2)-1,
\end{aligned}$$

por último

$$\frac{\delta[1-N^*]^2}{s^2} = \delta\left[\frac{N^*}{P^*+N^*}\right]^2,$$

así

$$\begin{aligned}
\frac{\delta[1-N^*]^2}{s^2} &= \frac{\delta}{s^2}[s(r-1)]^2 = \delta(r-1)^2 \\
&= \delta(1-r)^2.
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en $J(E^*)$ nos queda

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} s(1-r^2)-1 & -sr^2 \\ \delta(1-r)^2 & -\delta r(1-r) \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que la parte real de los autovalores de $J(E^*)$ es negativa si, y sólo si, la traza de $J(E^*) < 0$ y $det(J(E^*)) > 0$, entonces obtenemos que N^* es localmente asintóticamente estable si, y sólo si,

$$s(1-r^2)-1-\delta r(1-r) < 0 \qquad \text{y} \qquad (s(1-r^2)-1)(-\delta r(1-r)) + sr^2(\delta(1-r)^2) > 0.$$

De las condiones puestas sobre r y s y además de las obtenidas por estas dos anteriores se tiene que:

$$0 < s < \frac{1}{1-r^2} + \frac{\delta r}{1+r}, 0 < r < 1, s < \frac{1}{1-r}, \delta > 0.$$

Ahora sabemos por el Teorema 2.11 que $J(E^*)$ es fuertemente estable si, y sólo si, $J(E^*) \in P_0^+$, es decir, todos los menores principales signados de $J(E^*)$ no son negativos con al menos uno de orden positivo. Si vemos

$$\begin{aligned} J(E^*)_{1_1} &= (-1)^1(s(1-r^2)-1) \\ &= -(s(1-r^2)-1) < 0. \end{aligned}$$

Así, $J(E^*)$ con las condiciones dada, no es fuertemente estable. La configuracion de signos para esta matriz queda

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} + & - \\ & \\ + & - \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto con esta configuración de signos el sistema es exitable, y en consecuencia el punto de equilibrio es difusionalmente Turing inestable. Es más, Lizana y Marín demostraron, en [10], que el sistema (3.5) con difusión presenta una bifurcación de Turing, surgiendo así patrones, es decir, emergen soluciones que son independientes del tiempo y no constantes. ■

Conclusiones:

Con lo mostrado en este capítulo y en el capítulo 2 podemos concluir que dada una matriz

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

real y estable, con alguna de las siguientes configuraciones de signos

$$\begin{bmatrix} - & - \\ + & - \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} - & + \\ - & - \end{bmatrix},$$

entonces $\mathcal{A}$ es Fuertemente estable, y en consecuencia $\mathcal{A}$ no sería Turing inestable.

Ahora si por el contrario $\mathcal{A}$ presentara alguna de las siguientes configuración de signos

$$\begin{bmatrix} + & + \\ - & - \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} - & - \\ + & + \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} + & - \\ + & - \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} - & + \\ - & + \end{bmatrix},$$

entonces $\mathcal{A}$ es Exitable, y por consiguiente es difunsionalmente Turing inestable.

En consecuencia verificando la configuración de los signos de la matriz Jacobiana de una ecuación diferencial, evaluada en un punto de equilibrio no trivial, podemos inmediatamente determinar la estabilidad del mismo punto de equilibrio pero ahora al sistema con difusión asociado a la ecuación diferencial.

Bibliografía

Bibliografía

[1] Ahlfors L.V., Complex Analysis, Mc. Graw-Hill., Nueva York 1966.

[2] Casten Richard G. and Holland Charles J., Stability Properties of Solutions to Ecuations, SIAM J. Appl. Math., Vol. 33, No. 2, September 1977, pp. 353-364.

[3] Cross G.W., Three types of matrix stability, Linear Álgebra and Aplications,(1972),253-263.

[4] Curtis Charles, Linear Algebra, Berlin 1984.

[5] Hadeler Karl P. and Ruan Shingui, Interaction of Diffusion and Delay, Volume 8, Number 1, July 2007, pp. 95-105.

[6] Hale Jack. Ordinary Differential Equations, Vol. XXI, Wiley - Interscience, 1969, New York.

[7] Johnson C. Horn R. Matriz analysis. Cambridge University Press. 1985.

[8] Johnson C. Horn R. Topics in matriz analysis. Cambridge University Press. 1991.

[9] Lizana Marcos,Estudio Cualitativo de E.D.O.

[10] Lizana Marcos and Marín V. Julio J. Pattern formation in a Reaction-Diffusion Ratio-Dependent Predator-Prey Model.