Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Satisfacción global e individual en repartición de recursos indivisibles

Br. Candida Rosa Muñoz Argonis

Trabajo Especial de Grado
Para Optar al Título de
Licenciada en Matemáticas
Tutor: Dr. Ramón Pino Pérez

Mérida-Venezuela
Junio de 2010

AGRADECIMIENTOS

A Dios por por darme la fe y fortaleza en los momentos difíciles, guiando mi camino.

A mis padres Pablo y María Estefana y a mis hermanos Yohander y Milesvy por su apoyo incondicional.

Agradezco enormemente a la Universidad de Los Andes, a la Facultad de Ciencias y al Departamento de Matemáticas por abrir sus puertas y permitir mi formación profesional con sus excelentes profesores.

A mi tutor el profesor Ramón Pino por su tiempo, ayuda y recomendaciones.

A Diómedes Bárcenas quien en los momentos difíciles dejó de ser profesor para convertirse en amigo, donde quiera que se encuentre muchas gracias.

A todas y cada una de aquellas personas que me acompañaron durante el camino para alcanzar este logro.

A todos ustedes muchas gracias.

Candida Muñoz Argonis.

RESUMEN

En este trabajo estudiamos el problema de distribuir un número finito de recursos indivisibles entre los miembros de una sociedad integrada por un número finito de agentes mediante negociaciones entre los mismos. Inicialmente los agentes expresarán sus preferencias mediante la valoración que cada uno de ellos le da a cada recurso o conjunto de recursos. Las negociaciones seguirán adelante mientras ciertos pagos sean hechos entre los agentes para compensar a los otros por aceptar un trato desventajoso. Durante las mismas se intercambian conjuntos de recursos y en algunas situaciones intercambiar un solo recurso será suficiente para alcanzar una situación de máximo bienestar social. Específicamente queremos hallar aquellas situaciones a las cuales se asocia un pago que bajo ciertas condiciones de racionalidad y restricciones sobre las utilidades terminan en un estado de máximo bienestar social y al mismo tiempo cada uno de los agentes estará satisfecho con el conjunto de recursos que posee y el pago que se le hace en comparación con lo que les corresponde al resto de miembros de la sociedad.

Índice general

Introducción

Las matemáticas de las reparticiones es un área que estudia los métodos de repartir bienes divisibles o indivisibles entre individuos. Un aspecto importante en los métodos que se consideran es que los únicos árbitros son los individuos involucrados en la repartición.

El problema de la división justa ha sido estudiado desde diferentes perspectivas. Originalmente se comenzó a considerar en Economía y Ciencias Políticas con un número importante de contribuciones hechas por grandes matemáticos como Banach y Steinhaus. Recientemente ha llamado la atención de investigadores en *Inteligencia Artificial, Sistemas de Multiagentes y Ciencias de la Computación*. Las razones por las cuales esto ocurre es debido a que, por un lado los conceptos de división justa son inmediatamente relevantes a esas disciplinas y por otro lado, las herramientas y técnicas de éstas pueden abrir paso a nuevas ideas sobre división justa, es decir, se van complementando.

En este trabajo nos centraremos en las negociaciones que engloban a un conjunto finito de personas o agentes (al menos 2) y un número finito de recursos (o bienes indivisibles) a ser repartidos entre estos agentes de manera tal que todos esten satisfechos con el bien que les sea otorgado. Los bienes serán concedidos mediante las asignaciones, que son particiones del conjunto de recursos entre los miembros de la sociedad. Los agentes atribuiran un valor (utilidad) al bien que les corresponda en cada uno de los casos posibles de repartición que se consideren. Las utilidades deben ser públicamente conocidas. En caso de no estar de acuerdo con la utilidad obtenida pueden entonces negociar con cada uno de los otros agentes a fin de llegar a un trato en la redistribución de algunos de esos recursos para beneficiar a cualquiera de ellos. Para compensar a aquellos agentes que no sean favorecidos en una negociación éstos recibirán por parte de sus otros compañeros un pago a cambio de que éste acepte la misma. Suponemos que los agentes son racionales en el sentido que nunca aceptan un trato que podría resultar en un pago que disminuya su utilidad.

Estamos interesados en asignaciones donde ningún agente envidie a algún otro. Mostraremos cómo cierta clase de tratos considerando el intercambio de recurso nos permite garantizar que una asignación que beneficie a la mayoría será alcanzada en algún momento. Como una limitación a este hecho tenemos que los agentes tienen que ser capaces de aceptar cualquier trato.

Una asignación en la que cada agente tenga una porción de los bienes con utilidad individual mayor o igual a la utilidad individual calculada con las porciones de los otros agentes se llamará de satisfacción total.

Estudiaremos propiedades de convergencia a estados ideales para mecanismos de distribución de recursos indivisibles. Más específicamente estamos interesados en alcanzar un estado que sea de satisfacción total y al mismo tiempo que sea de máxima satisfacción social en algún sentido que será precisado más adelante. Esto se hará de una forma interactiva mediante una sucesión de tratos que negocian los agentes conducidos por sus propios intereses.

1

Repartición de recursos indivisibles

1.1. Agentes, bienes, asignaciones y utilidades

Consideremos un conjunto finito de agentes y un conjunto finito de recursos (o bienes) indivisibles. Ellos seran denotados respectivamente $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, ..., r_m\}$. Comenzaremos definiendo algunos conceptos importantes:

Definición 1.1 *Una **asignación** de recursos es una función A de $\mathcal{A}$ en los subconjuntos de $\mathcal{R}$ tal que $A(i) \cap A(j) = \emptyset$ para $i \neq j$ y $\bigcup_{i \in \mathcal{A}} A(i) = \mathcal{R}$. Es decir una partición del conjunto $\mathcal{R}$ en n pedazos. El pedazo $A(i)$ es lo que le corresponde al agente i.*

Ejemplo 1.1: Consideremos una sociedad integrada por dos agentes y dos recursos, digamos r_1, r_2, a repartir entre éstos. Una asignación es:

$$\begin{aligned} A(1) &= \emptyset \\ A(2) &= \{r_1, r_2\} \end{aligned}$$

Observe que esa no es la única asignación posible, existen otras tres asignaciones más.
Denotaremos por $2^{\mathcal{R}}$ al conjunto de subconjuntos de $\mathcal{R}$.

Definición 1.2 *Las **utilidades** se definen para cada agente $i \in \mathcal{A}$ como funciones u_i de $2^{\mathcal{R}}$ en los números reales.*

Las funciones utilidad se utilizan para modelar los intereses individuales de los agentes. Todas estas funciones son normalizadas en el sentido de que $u_i(\emptyset) = 0$

Definición 1.3 *Consideremos las siguientes clases de funciones utilidad:*

* u_i *es **aditiva** si, y sólo si,* $u_i(R) = \sum_{r \in R} u_i(\{r\})$ *para todo* $R \subset \mathcal{R}$.

* u_i *es **supermodular** si, y sólo si,* $u_i(R_1 \cup R_2) \geq u_i(R_1) + u_i(R_2) - u_i(R_1 \cap R_2) \forall R_1, R_2 \subset \mathcal{R}$.

Proposición 1.1 *Si u es aditiva entonces $u(R_1 \cup R_2) = u(R_1) + u(R_2) - u(R_1 \cap R_2)$.*

Demostración: Sean R_1, R_2 dos subconjuntos de recursos. Como u es aditiva se tiene que

$$u(R_1 \cup R_2) = \sum_{r \in R_1 \cup R_2} u(\{r\})$$

Por el principio de inclusión-exclusión

$$\sum_{r\in R_1\cup R_2} u(\{r\}) = \sum_{r\in R_1} u(\{r\}) + \sum_{r\in R_2} u(\{r\}) - \sum_{r\in R_1\cap R_2} u(\{r\})$$

Por la definición de utilidad aditiva

$$\sum_{r\in R_1} u(\{r\}) + \sum_{r\in R_2} u(\{r\}) - \sum_{r\in R_1\cap R_2} u(\{r\}) = u(R_1) + u(R_2) - u(R_1\cap R_2)$$

por lo tanto, se cumple que $u(R_1\cup R_2) = u(R_1) + u(R_2) - u(R_1\cap R_2)$ ■

De aquí se tiene que todas las utilidades aditivas son supermodulares.

Ejemplo 1.2: Consideremos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{R}$ como en el ejemplo 1.1 y las funciones utilidades dadas por:

$$u_i : 2^{\mathcal{R}} \to \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{ll} u_1(\emptyset) = 0 & u_2(\emptyset) = 0 \\ u_1(\{r_1\}) = 1 & u_2\{(r_1\}) = 4 \\ u_1(\{r_2\}) = 3 & u_2(\{r_2\}) = 2 \\ u_1(\{r_1, r_2\}) = 4 & u_2(\{r_1, r_2\}) = 6 \end{array}$$

Fácilmente se verifica que cada u_i es aditiva y por consiguiente supermodular.

1.2. Tratos, bienestar social y pago

Definición 1.4 *Un **trato** es un par $\delta = (A, A^{'})$ donde A y $A^{'}$ son asignaciones de recursos con $A \neq A^{'}$.*

El conjunto de agentes involucrados en un trato δ se denota por $\mathcal{A}^{\delta}$. Formalmente
$\mathcal{A}^{\delta} = \{i \in \mathcal{A} | A(i) \neq A^{'}(i)\}$.

Observe que *un trato* a secas puede involucrar la reasignación de cualquier número de recursos entre cualquier número de agentes.
$A \neq A^{'}$ indica que al menos un recurso se "movió"de un agente a otro. Así en un trato hay al menos 2 agentes involucrados. Los tratos especifican la situación antes y después de una negociación.

Definición 1.5 *Un $1-$**trato** es un trato involucrando la reasignación de exactamente un recurso y por consiguiente sólo dos agentes.*

Ejemplo 1.3: Consideremos una sociedad formada por tres agentes y 3 recursos a repartir entre estos. Consideremos las asignaciones:

$$\begin{array}{lllllllll} A_1(1) & = & \{r_1, r_2, r_3\} & A_2(1) & = & \{r_1\} & A_3(1) & = & \{r_2, r_3\} \\ A_1(2) & = & \emptyset & A_2(2) & = & \{r_2\} & A_3(2) & = & \{\emptyset\} \\ A_1(3) & = & \emptyset & A_2(3) & = & \{r_3\} & A_3(3) & = & \{r_1\} \end{array}$$

El trato de pasar r_1 del agente 1 al agente 3, es decir, $\delta_1 = (A_1, A_3)$ es un $1-$trato. Mientras que $\delta_2 = (A_1, A_2)$ no lo es.
Los conjuntos de agentes que intervienen en los tratos δ_1 y δ_2 estan dados por: $\mathcal{A}^{\delta_1} = \{1, 3\}$ y
$\mathcal{A}^{\delta_2} = \{1, 2, 3\}$.

Definición 1.6 *El **bienestar social** de una asignación A está dado por:*

$$BS(A) = \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i(A(i))$$

Maximizando el bienestar social obtenemos una clase particular de asignaciones y en las que centraremos nuestra atención en lo que sigue.

Una medida común para eficiencia es el bienestar social.

Definición 1.7 *Una asignación con máximo bienestar social se llama **Eficiente**.*

Ejemplo 1.4: Sean $\mathcal{A} = \{1, 2\}$ y $\mathcal{R} = \{r_1, r_2\}$. Las asignaciones son:

$$\begin{array}{lllllllllllll} A_1(1) & = & \{r_1\} & A_2(1) & = & \{r_2\} & A_3(1) & = & \{\emptyset\} & A_4(1) & = & \{r_1, r_2\} \\ A_1(2) & = & \{r_2\} & A_2(2) & = & \{r_1\} & A_3(2) & = & \{r_1, r_2\} & A_4(2) & = & \{\emptyset\} \end{array}$$

Y consideremos las utilidades como en el ejemplo 1.2.
Así,

$$BS(A_1) = 1 + 2 = 3 \quad BS(A_2) = 3 + 4 = 7 \quad BS(A_3) = 0 + 6 = 6 \quad BS(A_4) = 4 + 0 = 4$$

La asignación A_2 es eficiente.

Definición 1.8 *Una **función pago** es una función p de $\mathcal{A}$ en los números reales satisfaciendo la siguiente condición:*

$$\sum_{i \in \mathcal{A}} p(i) = 0$$

Aquí $p(i) > 0$ indica que el agente i *paga* la cantidad de $p(i)$, mientras que $p(i) < 0$ significa que el agente i *recibe* la cantidad $-p(i)$.

1.3. Estados y funciones pago específicas

Definición 1.9 *Un **Estado** es un par (A, π) de una asignación A y una función pago π.*

Definición 1.10 *Una **transición** es una sucesión de estados.*

Definición 1.11 *A partir de una asignación inicial A_0 definimos la función:*

$$\pi_0(i) = u_i(A_0(i)) - \frac{BS(A_0)}{|\mathcal{A}|}$$

*esto es, se busca dar un pago a los agentes menos favorecidos en la asignación inicial A_0 y la llamaremos **Pago equitativo inicial**.*

Definición 1.12 *Consideremos el estado (A_0, π_0) donde π_0 es una función pago. Para obtener el estado (A_1, π_1) de la transición, al trato $\delta_1 = (A_0, A_1)$ se asocia un pago p_1 de manera que se compense a aquellos agentes que salgan desfavorecidos al aceptar el trato (i.e., $u_i(A_1(i)) < u_i(A_0(i)) \quad \forall i \in \mathcal{A}^{\delta_1}$). La función pago π_1 que determina el estado (A_1, π_1) se obtiene de la siguiente manera: $\pi_1(i) = \pi_0(i) + p_1(i)$, y así sucesivamente. En general, al trato $\delta_{k+1} = (A_k, A_{k+1})$ se asocia un pago p_{k+1}. La función pago π_{k+1}*

que determina el estado (A_{k+1}, π_{k+1}) se llama ***pago equilibrado*** *y se obtiene de la siguiente manera:* $\pi_{k+1}(i) = \sum_{j=0}^{k+1} p_j(i)$.

Definición 1.13 *Dado un trato $\delta = (A, A^{'})$, la función:*

$$p(i) = u_i(A^{'}(i)) - u_i(A(i)) - \left[\frac{BS(A^{'}) - BS(A)}{|\mathcal{A}|}\right]$$

se llama ***función pago globalmente uniforme (FPGU).***

Definición 1.14 *Una* ***función utilidad de un estado*** $u_i : 2^{\mathcal{R}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función tal que:*

$$u_i(A(i), \pi(i)) = u_i(A(i)) - \pi(i) \quad \forall i \in \mathcal{A}.$$

En otras palabras, una función utilidad asigna a pares de conjuntos de recursos y pagos previos con números reales.
Por ejemplo, $u_i(A(i), \pi(i))$ es la utilidad del agente i en el estado (A, π), en tanto que $u_i(A(j), \pi(j))$ es la utilidad que i podría experimentar si cambiara lugares con j (en terminos de ambos, el conjunto poseído y la suma de los pagos hechos hasta ahora).

Note que definir el bienestar social en terminos de asignaciones o de estados es irrelevante ya que el bienestar social de un estado (A, π) se definiría de forma análoga como:

$$BS(A, \pi) = \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i(A(i), \pi(i)) = \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i(A(i) - \sum_{i \in \mathcal{A}} \pi(i))$$

Pero recordemos que π es una función pago y así, $\sum_{i \in \mathcal{A}} \pi(i) = 0$ y por tanto,

$$BS(A, \pi) = \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i(A(i)).$$

Así, en adelante también hablaremos de estados eficientes.

1.4. Racionalidad individual

El desenvolvimiento individual de los agentes en un trato es predeterminante para que el resultado obtenido después de ciertas negociaciones (convenientes) sea el más adecuado para cada uno de los participantes.
Se supone que cada agente negocia sólo tratos que son *individualmente racional* (IR), i.e., tratos que benefician a cada uno de los involucrados.

Definición 1.15 *Un trato $\delta = (A, A^{'})$ es llamado* ***individualmente racional (IR)*** *si, y sólo si, para todo $i \in \mathcal{A}$ existe una función pago p tal que:*

1. *Si $A'(i) \neq A(i)$ Entonces $u_i(A^{'}(i)) - u_i(A(i)) > p(i)$.*

2. *Si $A'(i) = A(i)$ entonces $u_i(A^{'}(i)) - u_i(A(i)) \geq p(i)$.*

Esto quiere decir que el agente i estará dispuesto a aceptar el trato δ si, y sólo si, éste tiene que pagar menos que su ganancia en la utilidad o se le paga más que su pérdida de utilidad respectivamente. Sólo para agentes i no afectados por el trato, i.e., en caso $A(i) = A^{'}(i)$ puede haber ningún pago en absoluto.

Ejemplo 1.5: Si $u_i(A) = 8$ y $u_i(A^{'}) = 5$ entonces la utilidad del agente i podría ser reducida en tres unidades si hubiera aceptado el trato $\delta = (A, A^{'})$. El agente i sólo estará de acuerdo con este trato si éste es acompañado por un pago de más de tres unidades; esto es si la función pago cumple que $-3 > p(i)$.

1.5. Satisfacción total

En esta sección, introducimos dos definiciones de satisfacción total: la primera de ellas se ajusta a las asignaciones de bienes, mientras que la otra toma pagos previos en cuenta.

1.5.1. Asignación de bienes de satisfacción total

La satisfacción total (o envy-free) juega un importante rol con respecto a la estabilidad de un grupo. Desafortunadamente, las asignaciones de satisfacción total no siempre existen.

Definición 1.16 *Una asignación A es llamada de* ***Satisfacción total*** *si, y sólo si,*
$u_i(A(i)) \geq u_i(A(j))$ *para todos los agentes* $i, j \in \mathcal{A}$.

Ejemplo 1.6: Consideremos $\mathcal{A} = \{1, 2\}$ y $\mathcal{R} = \{r\}$. Las asignaciones posibles son:

$$\begin{array}{rclcrcl} A_1(1) & = & \{\emptyset\} & \quad & A_2(1) & = & \{r\} \\ A_1(2) & = & \{r\} & \quad & A_2(2) & = & \{\emptyset\} \end{array}$$

En cualquier caso el agente que no obtenga el recurso envidiará al otro, si la utilidad
$u_i(\{r\}) > 0 \quad$ para $\quad i = 1, 2$.

La satisfacción total tiene como única base las preferencias individuales de los agentes i.e., no es necesario tomar en cuenta las funciones utilidad de los otros agentes.

1.5.2. Satisfacción total para estados

Definición 1.17 *Un estado (A, π) es llamado de* ***Satisfacción total*** *si, y sólo si,*
$u_i(A(i), \pi(i)) \geq u_i(A(j), \pi(j))$ *para todos los agentes* $i, j \in \mathcal{A}$.

Ejemplo 1.7: Consideremos $\mathcal{A} = \{1, 2\}$ y $\mathcal{R} = \{r\}$. Las asignaciones posibles son:

$$\begin{array}{rclcrcl} A_1(1) & = & \{\emptyset\} & \quad & A_2(1) & = & \{r\} \\ A_1(2) & = & \{r\} & \quad & A_2(2) & = & \{\emptyset\} \end{array}$$

Las utilidades están dadas por:

$$\begin{array}{rclcrcl} u_1(\{\emptyset\}) & = & 0 & \quad & u_2(\{\emptyset\}) & = & 0 \\ u_1(\{r\}) & = & 3 & \quad & u_2(\{r\}) & = & 8 \end{array}$$

Supongamos que en la asignación A_1 se tiene la función pago:

$$\begin{array}{rcl} p_1 : \mathcal{A} & \rightarrow & \mathbb{R} \quad \text{tal que} \\ p_1(1) & = & -2 \\ p_1(2) & = & 2 \end{array}$$

Supongamos que en la asignación A_2 se tiene la función pago:

$$\begin{array}{rcl} p_2 : \mathcal{A} & \rightarrow & \mathbb{R} \quad \text{tal que} \\ p_2(1) & = & -2 \\ p_2(2) & = & 2 \end{array}$$

y por tanto la función pago equilibrado asociada a la asignación A_1 es:

$$\begin{array}{rcl} \pi_1 : \mathcal{A} & \rightarrow & \mathcal{R} \quad \text{tal que} \\ \pi_1(1) & = & -2 \\ \pi_1(2) & = & 2 \end{array}$$

y así obtenemos el estado (A_1, π_1) donde $\pi_1 = p_1$

y la función pago equilibrado asociada a la asignación A_2 es:

$$\begin{array}{rcl} \pi_2 : \mathcal{A} & \rightarrow & \mathbb{R} \quad \text{tal que} \\ \pi_2(1) & = & -2 - 2 = -4 \\ \pi_2(2) & = & 2 + 2 = 4 \end{array}$$

y así obtenemos el estado (A_2, π_2) donde $\pi_2 = p_1 + p_2$

Consideremos el estado (A_1, π_1) y veamos si los agentes son envidiosos.

$$\begin{array}{rcl} u_1(A_1(1), \pi_1(1)) & = & u_1(A_1(1)) - \pi_1(1) \\ & = & 0 - (-2) \\ & = & 2 \\ & \geq & 1 \\ & = & 3 - 2 \\ & = & u_1(A_1(2)) - \pi_1(2) \\ & = & u_1(A_1(2), \pi_1(2)) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} u_2(A_1(2), \pi_1(2)) & = & u_2(A_1(2)) - \pi_1(2) \\ & = & 8 - 2 \\ & = & 6 \\ & \geq & 2 \\ & = & 0 - (-2) \\ & = & u_2(A_1(1)) - \pi_1(1) \\ & = & u_2(A_1(1), \pi_1(1)) \end{array}$$

por tanto, se cumple

$$u_1(A_1(1), \pi_1(1)) \geq u_1(A_1(2), \pi_1(2))$$

y

$$u_2(A_1(2), \pi_1(2)) \geq u_2(A_1(1), \pi_1(1))$$

asi no hay envidiosos y (A_1, π_1) es un estado de satisfacción total.

Ahora bien, (A_2, π_2) no es un estado de satisfacción total puesto que:

$$\begin{array}{rcl} u_2(A_2(2), \pi_2(2)) & = & u_2(A_2(1)) - \pi_2(1) \\ & = & 0 - 4 \\ & = & -4 \\ & < & 12 \\ & = & 8 - (-4) \\ & = & u_2(A_2(1)) - \pi_2(1) \\ & = & u_2(A_2(1), \pi_2(1)) \end{array}$$

se cumple.

En general, hay asignaciones de bienes que son eficientes pero no necesariamente son de satisfacción total.

Ejemplo 1.8: Sean $\mathcal{A} = \{1, 2\}$ y $\mathcal{R} = \{r\}$. Consideremos las asignaciones:

$$\begin{array}{rclcrcl} A(1) & = & \{\emptyset\} & \quad & A^{'}(1) & = & \{r\} \\ A(2) & = & \{r\} & & A^{'}(2) & = & \{\emptyset\} \end{array}$$

y las utilidades dadas por:

$$\begin{array}{rclcrcl} u_1(\{\emptyset\}) & = & 0 & \quad & u_2(\{r\}) & = & 8 \\ u_1(\{r\}) & = & 6 & & u_2(\emptyset) & = & 0 \end{array}$$

A es eficiente $BS(A) = 0 + 8 = 8$ y $BS(A^{'}) = 6 + 0 = 6$ pero no es de satisfacción total puesto que:

$$\begin{array}{rcl} u_1(A(1)) & = & 0 \\ & < & 6 \\ & = & u_1(A(2)) \end{array}$$

y hay asignaciones de satisfacción total que no necesariamente son eficientes.

Ejemplo 1.9: Sean $\mathcal{A} = \{1, 2\}$ y $\mathcal{R} = \{r_1, r_2\}$. Consideremos las asignaciones:

$$\begin{array}{rclcrcl} A(1) & = & \{r_2\} & \quad & A^{'}(1) & = & \{r_1, r_2\} \\ A(2) & = & \{r_1\} & & A^{'}(2) & = & \{\emptyset\} \end{array}$$

y las utilidades dadas por:

$$\begin{array}{rclcrcl} u_1(\{r_1\}) & = & 3 & \quad & u_2(\{r_1\}) & = & 4 \\ u_1(\{r_2\}) & = & 7 & & u_2(\{r_2\}) & = & 2 \\ u_1(\{r_1, r_2\}) & = & 20 & & u_2(\{r_1, r_2\}) & = & 10 \end{array}$$

A es de satisfacción total ya que:

$$\begin{array}{rclcrcl} u_1(A(1)) & = & 7 & \quad & u_2(A(2)) & = & 4 \\ & > & 3 & & & > & 2 \\ & = & u_1(A(2)) & & & = & u_2(A(1)) \end{array}$$

pero no es eficiente, puesto que $BS(A) = 7 + 4 = 11$ y $BS(A^{'}) = 20 + 0 = 20$.

Ejemplo 1.10:
Aquí mostramos que no todas las sucesiones de tratos IR llegan a ser eficientes y de satisfacción total.

Sean $\mathcal{A} = \{1, 2\}$ y $\mathcal{R} = \{r\}$. La utilidad está dada por:

$$u_1(\{r\}) = 4 \quad u_2(\{r\}) = 7$$

Sea A_0 una asignación inicial tal que:

$$\begin{array}{rcl} A_0(1) & = & \{r\} \\ A_0(2) & = & \emptyset \end{array}$$

Y la otra asignación posible en esta situación es:

$$\begin{array}{rcl} A^*(1) & = & \emptyset \\ A^*(2) & = & \{r\} \end{array}$$

El único trato posible es $\delta = (A_0, A^*)$. A^* es en una asignación eficiente de bienes pues $BS(A^*) > BS(A_0)$.
Para asegurar que el trato δ sea IR para ambos agentes debe ocurrir que:

$$\begin{array}{rcl} u_1(A^*(1)) - u_1(A_0(1)) & = & 0 - 4 \\ & = & -4 \\ & > & p(1) \end{array}$$

es decir, $p(1) < -4 \quad (*)$

y

$$\begin{array}{rcl} u_2(A^*(2)) - u_2(A_0(2)) & = & 7 - 0 \\ & = & 7 \\ & > & p(2) \end{array}$$

es decir, $p(2) < 7$

Además por ser p una función pago se tiene $p(1) = -p(2) \quad (**)$.

sustituyendo $(**)$ en $(*)$:

$$\begin{array}{rrcl} & -p(2) & < & -4 \\ \iff & p(2) & > & 4 \end{array}$$

de aquí se tiene que el agente 2 debe pagar al agente 1 cualquier cantidad en el intervalo abierto $(4, 7)$.
Para asegurar que el estado final sea de satisfacción total debe ocurrir que:

$$\begin{array}{rcl} u_1(A^*(1)) - \pi(1) & = & 0 - \pi(1) \\ & = & -\pi(1) \\ & \geq & 4 - \pi(2) \\ & = & u_1(A^*(2)) - \pi(2) \end{array}$$

es decir,

$$-\pi(1) \geq 4 - \pi(2) \tag{1.1}$$

y además

$$\begin{array}{rcl} u_2(A^*(2)) - \pi(2) & = & 7 - \pi(2) \\ & \geq & -\pi(1) \\ & = & 0 - \pi(1) \\ & = & u_2(A^*(1)) - \pi(1) \end{array}$$

es decir,

$$7 - \pi(2) \geq -\pi(1) \tag{1.2}$$

y como π es una función de pago debe ocurrir que:

$$-\pi(1) = \pi(2) \tag{1.3}$$

sustituyendo (1.3) en (1.1)

$$\begin{aligned} \pi(2) &\geq 4 - \pi(2) \\ \iff 2\pi(2) &\geq 4 \\ \iff \pi(2) &\geq 2 \end{aligned}$$

sustituyendo (1.3) en (1.2)

$$\begin{aligned} 7 - \pi(2) &\geq \pi(2) \\ \iff 7 &\geq 2\pi(2) \\ \iff \frac{7}{2} &\geq \pi(2) \end{aligned}$$

así, el agente 2 debe pagar al agente 1 cualquier cantidad en el intervalo cerrado $[2, \frac{7}{2}]$.
Los dos intervalos no coinciden, y por tanto el estado no puede ser de satisfacción total.

Conclusión: Alcanzar estados de satisfacción total por medio de un proceso que sea completamente IR no siempre es posible en todos los casos.

En vista de que pasar de un trato IR a otro no garantiza que la asignación final sea eficiente y de satisfacción total queremos considerar estructuras más complejas: los estados, y demostrar que bajo ciertas condiciones sobre los pagos, efectivamente los tratos razonables convergen a estados eficientes y de satisfacción total. Más específicamente queremos demostrar:

Teorema 1.1 (Chevaleyre et al., 2007) *Si todas las utilidades son supermodulares y si los pagos equitativos han sido hechos, entonces cualquier sucesión de tratos IR usando la función pago globalmente uniforme resultará eventualmente en un estado eficiente y de satisfacción total.*

Teorema 1.2 (Chevaleyre et al., 2007) *Si todas las utilidades son supermodulares y si los pagos equitativos han sido hechos, entonces cualquier sucesión de $1-$tratos IR usando la función pago globalmente uniforme resultará eventualmente en un estado eficiente y de satisfacción total.*

El primer teorema es más general que el segundo, pero el segundo es más fuerte ya que dice que con sólo ir moviendo un recurso de un trato a otro podemos obtener eficiencia y satisfacción total.

2

Individualidad racional y eficiencia

En este capítulo mostramos cómo se relacionan la individualidad racional y el bienestar social. El siguiente resultado es el corazón de este capítulo ya que se emplea para demostrar los teoremas de convergencia.

Lema 2.1 (Acuerdos individualmente racional y bienestar social.) *Un trato $\delta = (A, A^{'})$ es individualmente racional si, y sólo si, $BS(A) < BS(A^{'})$.*

Demostración:
Como $\delta = (A, A^{'})$ es IR, por definición existe una función pago p tal que
$u_i(A^{'}(i)) - u_i(A(i)) > p(i)$ si, $A(i) \neq A^{'}(i)$.
y si $A'(i) = A(i)$ entonces $u_i(A^{'}(i)) - u_i(A(i)) \geq p(i)$. Sumando todas las desigualdades para cada agente $i \in \mathcal{A}$ obtenemos:

$$\sum_{i \in \mathcal{A}} (u_i(A^{'}(i)) - u_i(A(i))) > \sum_{i \in \mathcal{A}} p(i) \tag{2.1}$$

Ahora bien, por definición de función pago se tiene que $\sum_{i \in \mathcal{A}} p(i) = 0$. De esto y (2.1) tenemos:

$$\sum_{i \in \mathcal{A}} (u_i(A^{'}(i)) - u_i(A(i))) > 0 \tag{2.2}$$

Por otro lado, por la linealidad de la sumatoria tenemos:

$$\sum_{i \in \mathcal{A}} (u_i(A^{'}(i)) - u_i(A(i))) = \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i(A^{'}(i)) - \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i(A(i)) \tag{2.3}$$

sustituyendo (2.3) en (2.2) se tiene que:

$$\sum_{i \in \mathcal{A}} u_i(A^{'}(i)) - \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i(A(i)) > 0$$

De esto último y la definición de bienestar social

$$BS(A^{'}) - BS(A) > 0$$

y así, $BS(A^{'}) > BS(A)$.

Ahora, supongamos que $BS(A) < BS(A^{'})$.
Debemos mostrar que $\delta = (A, A^{'})$ es un trato IR, es decir, debemos mostrar que existe una función pago $p : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, tal que $u_i(A^{'}(i)) - u_i(A(i)) > p(i) \quad \forall i \in \mathcal{A}$.

Definimos una función p como sigue:

$$p(i) = u_i(A^{'}(i)) - u_i(A(i)) - \frac{BS(A^{'}) - BS(A)}{|\mathcal{A}|} \quad (\text{ para } i \in \mathcal{A})$$

Veamos que $\sum_{i \in \mathcal{A}} p(i) = 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \mathcal{A}} p(i) &= \sum_{i \in \mathcal{A}} \left(u_i(A^{'}(i)) - u_i(A(i)) - \left(\frac{BS(A^{'}) - BS(A)}{|\mathcal{A}|} \right) \right) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i(A^{'}(i)) - \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i(A(i)) - \sum_{i \in \mathcal{A}} \left(\frac{BS(A^{'}) - BS(A)}{|\mathcal{A}|} \right) \quad \text{linealidad de la sumatoria} \\
&= \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i(A^{'}(i)) - \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i(A(i)) - \left(\frac{BS(A^{'}) - BS(A)}{|\mathcal{A}|} \right) \sum_{i \in \mathcal{A}} 1 \quad \text{por ser una constante} \\
&= \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i(A^{'}(i)) - \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i(A(i)) - \left(\frac{BS(A^{'}) - BS(A)}{|\mathcal{A}|} \right) |\mathcal{A}| \\
&= BS(A^{'}) - BS(A) - BS(A^{'}) + BS(A) \quad \text{simplificando y por definición de bienestar social} \\
&= 0
\end{aligned}$$

luego, $\sum_{i \in \mathcal{A}} p(i) = 0$ y por lo tanto p es una función pago.

Ahora bien, por como se definió la función pago p se tiene que:

$$p(i) + \left(\frac{BS(A^{'} - BS(A))}{|\mathcal{A}|} \right) = u_i(A^{'}(i)) - u_i(A(i)) \quad \forall i \in \mathcal{A} \tag{2.4}$$

por otro lado, por hipótesis sabemos que:

$BS(A) < BS(A^{'})$ es decir, $BS(A^{'}) - BS(A) > 0$

entonces,

$$\frac{BS(A^{'}) - BS(A)}{|\mathcal{A}|} > 0 \tag{2.5}$$

Como (2.5) ocurre se tiene que:

$$p(i) + \frac{BS(A^{'}) - BS(A)}{|\mathcal{A}|} > p(i) \quad \forall i \in \mathcal{A}$$

y así de esto último y (2.4) se tiene:

$$u_i(A^{'}(i)) - u_i(A(i)) > p(i) \quad \forall i \in \mathcal{A}$$

y por consiguiente δ es un trato IR. ■

Lema 2.2 *Si la asignación A no es eficiente y todas las utilidades son aditivas, entonces existe una asignación A' tal que $\delta = (A, A')$ es un $1-$trato IR.*

Demostración: Para cualquier asignación A sea f_A la función que asigna un recurso $r \in \mathcal{R}$ al agente $i \in \mathcal{A}$ que tiene r en la asignación A, es decir,

$$\begin{array}{rcccl} f_A & : & \mathcal{R} & \rightarrow & \mathcal{A} \quad \text{definida por} \\ f_A(r) & = & i & \Leftrightarrow & r \in A(i) \end{array} \tag{2.6}$$

Como por hipótesis las utilidades son aditivas se tiene que $BS(A)$ esta determinado por:

$$BS(A) = \sum_{r \in \mathcal{R}} u_{f_A(r)}(\{r\}) \tag{2.7}$$

En efecto, si $|\mathcal{A}| = n$

$$BS(A) \;=\; \sum_{i=1}^{n} u_i(A(i)) \tag{2.8}$$

Como las utilidades son aditivas se tiene: $u_i(A(i)) = \sum_{r \in A(i)} u_i(\{r\}) \quad \forall i \in \mathcal{A}$ así sustituyendo esto en (2.8) se tiene:

$$BS(A) = \sum_{r \in A(1)} u_1(\{r\}) + \cdots + \sum_{r \in A(n)} u_n(\{r\})$$

Ahora bien, como $\forall i \in \mathcal{A}, \quad r \in A(i)$ y en sólo un $A(i)$ y por la caracterización (2.6) se tiene que

$$BS(A) \;=\; \sum_{r \in A(1)} u_{f_A(r)}(\{r\}) + \cdots + \sum_{r \in A(n)} u_{f_A(r)}(\{r\})$$

y así

$$BS(A) = \sum_{r \in \mathcal{R}} u_{f_A(r)}(\{r\})$$

por lo tanto (2.7) se cumple.

Sea A la asignación final y supongamos que no es eficiente.
así existe otra asignación $A^{'}$ tal que $BS(A) < BS(A^{'})$, de esto y por (2.7) debe existir al menos un recurso $r' \in \mathcal{R}$ tal que:

$$u_{f_A(r')}(\{r'\}) < u_{f_{A'}(r')}(\{r'\}) \tag{2.9}$$

ya que si esto no ocurre, es decir, $u_{f_A(r')}(\{r'\}) \geq u_{f_{A'}(r')}(\{r'\})$ se obtiene:

$$\sum_{r \in \mathcal{R}} u_{f_A(r')}(\{r'\}) \geq \sum_{r \in \mathcal{R}} u_{f_{A'}(r')}(\{r'\})$$

y en consecuencia $BS(A) \geq BS(A'')$ lo cual no es cierto y por lo tanto (2.9) se cumple.

Para simplicar la notación sean $f_A(r') = i$ y $f_{A'}(r') = j$.
Consideremos la asignación $A^{''}$ tal que:

$$A''(k) = \begin{cases} A(k) & \text{si} \quad k \neq i, j \\ A(i) - \{r'\} & \text{si} \quad k = i \\ A(j) \cup \{r'\} & \text{si} \quad k = j \end{cases}$$

Ahora bien, $\delta = (A, A'')$ es un $1-$trato.

Por otra parte, como $r' \in A''(j)$ se tiene que $f_{A''}(r') = j = f_{A'}(r') \quad (*)$
Veamos que δ incrementa el bienestar social.
Ahora bien, por (2.7) se tiene:

$$\begin{aligned} BS(A) &= \sum_{r \in \mathcal{R}} u_{f_A(r)}(\{r\}) \\ &= \sum_{r \in \mathcal{R}-\{r'\}} u_{f_A(r)}(\{r\}) + u_{f_{A(r')}}(\{r'\}) \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$BS(A) = \sum_{r \in \mathcal{R}-\{r'\}} u_{f_A(r)}(\{r\}) + u_{f_{A(r')}}(\{r'\}) \tag{2.10}$$

Notemos que si $r \neq r'$ necesariamente ocurre que

$$f_A(r) = f_{A''}(r) \quad (**)$$

lo cual se debe a como esta definida A'' y por la definición de la función f_A.

$$\begin{aligned} BS(A'') &= \sum_{r \in \mathcal{R}} u_{f_{A''}(r)}(\{r\}) \qquad \text{por (2.7)} \\ &= \sum_{r \in \mathcal{R}-\{r'\}} u_{f_{A''}(r)}(\{r\}) + u_{f_{A''(r')}}(\{r'\}) \\ &= \sum_{r \in \mathcal{R}-\{r'\}} u_{f_A(r)}(\{r\}) + u_{f_{A'(r')}}(\{r'\}) \qquad \text{por } (*) \text{ y } (**) \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$BS(A'') = \sum_{r \in \mathcal{R}-\{r'\}} u_{f_A(r)}(\{r\}) + u_{f_{A'(r')}}(\{r'\}) \tag{2.11}$$

De (2.9), (2.10) y (2.11) se tiene que

$$BS(A) < BS(A'')$$

Así, por el Lema 2.1, $\delta = (A, A'')$ es IR. ■

Lema 2.3 *Toda sucesión de tratos IR está acotada en longitud por el número de asignaciones posibles.*

Demostración: Sean $|\mathcal{A}| = n$ y $|\mathcal{R}| = m$. Existen n^m asignaciones posibles, ya que existe una correspondencia biunívoca entre el número de asignaciones y la siguiente función:

$$\begin{aligned} f : \{1, ..., m\} &\rightarrow \{1, ..., n\} \quad \text{dada por} \\ f^{-1}(i) &= A(i) \quad \forall i \in \mathcal{A} \\ f_A(r_i) &= j \Leftrightarrow r_i \in A(j) \quad \forall i \in \{1, ..., m\} \text{ y } j \in \{1, ..., n\} \end{aligned}$$

Sea $A_1, A_2, ..., A_{k-1}, A_k$ una sucesión de asignaciones.
Consideremos $\delta_{i+1} = (A_i, A_{i+1}) \quad i = \{1, 2, ..., k-1\}$ una sucesión de tratos IR.
Por el Lema 1 se tiene:

$$BS(A_i) < BS(A_{i+1}) \quad \forall i = \{1, 2, ..., k-1\} \tag{2.12}$$

Supongamos que la longitud de la suceción de tratos IR es mayor que n^m, así ocurre que para $i > n^m, \exists l \in \mathbb{N}$ tal que $A_i = A_{i+l}$ y por tanto $BS(A_i) = BS(A_{i+l})$, lo cual es una contradicción con (2.12). ■

Teorema 2.1 (Sandholm, 1998.) *Cualquier sucesión de tratos IR que no se pueda prolongar termina con una asignación eficiente de recursos.*

Demostración: Por el Lema 2.3 el conjunto de tratos IR es finito.

Sea A la asignación final y supongamos que ésta no tiene máximo bienestar social, así existe otra asignación $A^{'}$ tal que $BS(A) < BS(A^{'})$.

Ahora bien, por el Lema 2.1 se tiene que el trato $\delta = (A, A^{'})$ es IR y es posible lo cual contradice el hecho de que A era la asignación final.

En consecuencia tenemos que A es eficiente. ■

La noción de un trato multilateral sin ninguna restricción estructural (número de agentes, número de recursos) es muy poderosa.
A este Teorema también se le conoce como Teorema de Convergencia.

El siguiente teorema muestra que cuando las utilidades son aditivas los $1-$tratos IR son suficientes para negociar asignaciones y obtener máximo bienestar social. Debido a que en las negociaciones se trabajan con $1-$tratos a éste se le conoce como Teorema de Convergencia Simple aunque su resultado es fuerte desde el punto de vista del aporte que hace a las negociaciones.

Teorema 2.2 (Endriss et ál., 2006) *Si todas las utilidades son aditivas, entonces cualquier sucesión de* $1-$*tratos IR que no se pueda extender termina con una asignación eficiente de recursos.*

Demostración: Sea $\delta_1, ..., \delta_k$ una sucesión de $1-$tratos IR, la cual es finita por el Lema 2.3.
Supongamos que la asignación final A no es eficiente, así por el Lema 2.2 existe un $1-$trato IR posible, digamos $\delta = (A, A')$, pero esto contradice el hecho que A es la asignación final y que a partir de ella no habían más $1-$tratos IR posibles.
En consecuencia la asignación final es eficiente. ■

Este resultado no es cierto cuando las utilidades son supermodulares.

Ejemplo 2.1: Sean $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$ y $\mathcal{R} = \{r_1, r_2\}$ y las utilidades dadas por:

$$\begin{array}{ccc} u_1(\{\emptyset\}) = 0 & u_2(\{\emptyset\}) = 0 & u_3(\{\emptyset\}) = 0 \\ u_1(\{r_1\}) = 6 & u_2(\{r_1\}) = 1 & u_3(\{r_1\}) = 1 \\ u_1(\{r_2\}) = 1 & u_2(\{r_2\}) = 6 & u_3(\{r_2\}) = 1 \\ u_1(\{r_1, r_2\}) = 7 & u_2(\{r_1, r_2\}) = 7 & u_3(\{r_1, r_2\}) = 10 \end{array}$$

Las utilidades son supermodulares ya que:

$$\begin{array}{rcl} u_1(\{r_1, r_2\}) = 7 & \geq & u_1(\{r_1\}) + u_1(\{r_2\}) = 6 + 1 \\ u_2(\{r_1, r_2\}) = 7 & \geq & u_2(\{r_1\}) + u_2(\{r_2\}) = 1 + 6 \\ u_3(\{r_1, r_2\}) = 10 & \geq & u_3(\{r_1\}) + u_3(\{r_1\}) = 1 + 1 \end{array}$$

Consideremos la asignación A que le da ambos recursos al agente 3, la cual tiene $BS = 10$. No se puede hacer un $1-$trato que incremente el bienestar social, ya que si se le da r_1 o r_2 a alguno de los agentes 1 ó 2 el bienestar social disminuirá a 7. Esta asignación A no es eficiente ya que si consideramos la asignación A' que le da r_1 al agente 1 y r_2 al agente 2 el bienestar social es 12.

Teorema 2.3 (Chevaleyre et ál., 2007) *Si todas las utilidades son supermodulares entonces un estado eficiente y de satisfacción total siempre existe.*

Demostración: Una asignación eficiente siempre existe ya que alguna asignación debe originar una suma máxima de las utilidades individuales.

Sea $A^\star$ una asignación eficiente.
Mostraremos que un pago equilibrado $\pi^\star$ puede ser arreglado de tal manera que el estado $(A^\star, \pi^\star)$ sea eficiente y de satisfacción total.
Sea $\pi^\star(i)$ para cada agente i como sigue:

$$\pi^\star(i) = u_i(A^\star) - \frac{BS(A^\star)}{|\mathcal{A}|}$$

Efectivamente, $\pi^\star$ así definida es una función pago, pues note que esta se define de igual forma que la función pago inicial sólo que aquí se toma desde la asignación $A^\star$ que no necesariamente es una asignación inicial.

Ahora, sean $i, j \in \mathcal{A}$ cualesquiera 2 agentes en la sociedad.
Mostremos que i no envidia a j en el estado $(A^\star, \pi^\star)$ o lo que es lo mismo, que $(A^\star, \pi^\star)$ es de satisfacción total.
Como $A^\star$ es eficiente, al otorgar $A^\star(i)$ y $A^\star(j)$ al agente i, esto no incrementa el bienestar social, es decir, se cumple que:

$$\begin{aligned} u_1(A^\star(1)) + u_2(A^\star(2)) + \cdots + u_i(A^\star(i)) + \cdots + u_j(A^\star(j)) + \cdots + u_n(A^\star(n)) \quad \geq \\ u_1(A^\star(1)) + u_2(A^\star(2)) + \cdots + u_i(A^\star(i) \cup A^\star(j)) + \cdots + u_j(\emptyset) + \cdots + u_n(A^\star(n)) \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$u_i(A^\star(i)) + u_j(A^\star(j)) \geq u_i(A^\star(i) \cup A^\star(j)) \tag{2.13}$$

Como por hipótesis se tiene que cada u_i es supermodular se sigue que:

$$u_i(A^\star(i) \cup A^\star(j)) \geq u_i(A^\star(i)) + u_i(A^\star(j)) \tag{2.14}$$

De (2.13) y (2.14) se obtiene que:

$$u_i(A^\star(i)) + u_j(A^\star(j)) \geq u_i(A^\star(i)) + u_i(A^\star(j)) \tag{2.15}$$

Restando $\dfrac{BS(A^\star)}{|\mathcal{A}|}$ a ambos lados de (2.15) se tiene:

$$[u_i(A^\star(i)) + u_j(A^\star(j))] - \frac{BS(A^\star)}{|\mathcal{A}|} \geq [u_i(A^\star(i)) + u_i(A^\star(j))] - \frac{BS(A^\star)}{|\mathcal{A}|}$$

$\forall i, j \in \mathcal{A}$

Reordenando la ecuación anterior,

$$\left(u_j(A^\star(j) - \frac{BS(A^\star)}{|\mathcal{A}|})\right) + u_i(A^\star(i)) \geq \left(u_i(A^\star(i)) - \frac{BS(A^\star)}{|\mathcal{A}|}\right) + u_i(A^\star(j))$$

Así, de esto último y la definición de $\pi^\star$,

$$\pi^\star(j) + u_i(A^\star(i)) \geq \pi^\star(i) + u_i(A^\star(j))$$

Entonces,

$$u_i(A^\star(i)) - \pi^\star(i) \geq u_i(A^\star(j)) - \pi^\star(j)$$

de esto y por definición de utilidad de un estado se tiene:

$$u_i(A^\star(i), \pi^\star(i)) \geq u_i(A^\star(j), \pi^\star(j)) \quad \forall i, j \in \mathcal{A}$$

En consecuencia, el estado $(A^\star, \pi^\star)$ es de satisfacción total. ■

Este teorema dice que un estado eficiente y de satisfacción total siempre existe pero su demostración dice más que eso, si a una asignación eficiente se le asocia un pago equilibrado definido como $\pi^\star$ efectivamente ese estado formado por esa asignación y ese pago es de satisfacción total.
A este teorema se le conoce como Teorema de existencia de estados eficientes y de satisfacción total.

3

Convergencia a estados eficientes y de satisfacción total

En las secciones previas hemos visto que eficiencia está intimamente ligada a los tratos racionales. Sin embargo también vimos que no todos las asignaciones eficientes son de satisfacción total tal como lo demuestra el ejemplo 1.10 del Capítulo 1. Esto ocurre debido a que la individualidad racional no se relaciona bien con la eficiencia a menos que se consideren estados, es decir estructuras donde hay una asignación y una función de pago.

El siguiente teorema dice que si los agentes hacen sólo tratos IR y usan la función pago globalmente uniforme en cada negociación para determinar el pago específico, entonces las negociaciones eventualmente terminarán en un estado deseado.

Teorema 3.1 (Chevaleyre et ál., 2007) *Si todas las utilidades son supermodulares y si los pagos equitativos han sido hechos, entonces cualquier sucesión de tratos IR que no se pueda prolongar usando la función pago globalmente uniforme terminará en un estado eficiente y de satisfacción total.*

Demostración: Primero mostremos que para cada estado (A, π) y cada agente i, siempre que los agentes negocien tratos IR se cumple, usando la función pago globalmente uniforme, que:

$$\pi(i) = u_i(A(i)) - \frac{BS(A)}{|\mathcal{A}|} \tag{3.1}$$

La demostración procede por inducción en el número de tratos negociados.

Base inductiva: En el estado (A_0, π_0) se cumple:

$$\pi_0(i) = u_i(A_0(i)) - \frac{BS(A_0)}{|\mathcal{A}|}$$

ya que éste es el pago equitativo inicial, que por hipótesis ya se hizo.

Hipótesis inductiva (HI): Sea A_k una asignación cualquiera y supongamos que:

$$\pi_k(i) = u_i(A_k(i)) - \frac{BS(A_k)}{|\mathcal{A}|}$$

es cierto.

Para la asignación siguiente, digamos $A^{'}$, hallemos $\pi^{'}$ el pago asociado a ésta.

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\pi_{k+1}(i) &= \pi_k(i) + [u_i(A_{k+1}(i)) - u_i(A_k(i))] - \left[\frac{BS(A_{k+1}) - BS(A_k)}{|\mathcal{A}|}\right] \quad \text{el pago que tenía} \\
&\quad \text{y la FPGU} \\
&= \pi_k(i) + u_i(A_{k+1}(i)) - \frac{BS(A_{k+1})}{|\mathcal{A}|} - \left(u_i(A_k(i)) - \frac{BS(A_k)}{|\mathcal{A}|}\right) \quad \text{reordenando} \\
&= \pi_k(i) + u_i(A_{k+1}(i)) - \frac{BS(A_{k+1})}{|\mathcal{A}|} - \pi_k(i) \quad \text{HI} \\
&= u_i(A_{k+1}(i)) - \frac{BS(A_{k+1})}{|\mathcal{A}|}
\end{aligned}$$

por lo tanto, $\pi^{'}(i) = u_i(A^{'}(i)) - \dfrac{BS(A^{'})}{|\mathcal{A}|}$ y en consecuencia (3.1) se cumple.
Ahora bien, el Teorema 2.1 muestra que las negociaciones mediante tratos IR (cualquiera sea la función pago usada) debe terminar y esa asignación final será eficiente.
Sea $A^\star$ la asignación final y sea $\pi^\star$ el pago equilibrado asociado.
Como (2.10) es cierto, ocurre que:

$$\pi^\star(i) = u_i(A^\star(i)) - \frac{BS(A^\star)}{|\mathcal{A}|}$$

Para ese estado $(A^\star, \pi^\star)$ que es eficiente. Ahora bien, por la demostración del Teorema 2.3 se tiene que si a una asignación eficiente se le asocia un pago equlibrado definido como $\pi^\star$ el estado que ellos forman será de satisfacción total.
En consecuencia, tenemos que el estado $(A^\star, \pi^\star)$ es eficiente y de satisfacción total. ■

Teorema 3.2 (Chevaleyre et ál., 2007) *Si todas las utilidades son aditivas y si los pagos equitativos han sido hechos, entonces cualquier sucesión de 1-tratos IR que no se pueda prolongar usando la función pago globalmente uniforme terminará en un estado eficiente y de satisfacción total.*

Demostración: Análogamente a como se hizo para el teorema 3.1, excepto que se aplica el teorema 2.2 para convergencia de $1-$tratos IR (en lugar del teorema 2.1). Para finalizar aplique el teorema 2.3. ■

Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado el problema de asignar un conjunto finito de recursos indivisibles a un conjunto finito de personas. Hemos mostrado cómo algunas negociaciones llevan a reparticiones de estos recursos en las cuales se alcanza el máximo bienestar social en la sociedad y el bienestar individual. Para ello es necesario el uso de ciertos pagos específicos para poder llevar a cabo las negociaciones. Hemos visto también cómo las asignaciones de satisfacción total no siempre existen si no hay pagos y que además no puede haber una sucesión infinita de tratos que sean individualmente racionales (tratos en los que no disminuye el bienestar social individual).

Cuando los miembros de la sociedad sólo toman decisiones racionales hemos visto que necesariamente incrementa el bienestar de la sociedad.

La primera contribución de este trabajo es dar condiciones simples bajo las cuales cualquier sucesión de reasignación de recursos puede garantizar convergencia a un resultado de repartición justa.

Específicamente hemos demostrado los siguientes resultados:

1. La clase de tratos individualmente racionales es suficiente para negociar asignaciones con máximo bienestar social.

2. Utilizando utilidades aditivas, la clase de $1-$tratos individualmente irracional es suficiente para alcanzar asignaciones con máximo bienestar social.

3. Utilizando las utilidades supermodulares y haciendo el pago inicial equilibrado a cada uno de los miembros involucrados podemos garantizar usando un pago específico (función pago globalmente uniforme) que se alcanza un estado de máximo bienestar social y de satisfacción total al mismo tiempo mediante tratos racionales.

4. Utilizando las utilidades aditivas y haciendo el pago inicial equilibrado a cada uno de los miembros involucrados podemos garantizar usando un pago específico (función pago globalmente uniforme) que se alcanza un estado de máximo bienestar social y de satisfacción total al mismo tiempo mediante $1-$tratos racionales.

Bibliografía

[1] Yann Chevaleyre, Ulle Endriss, Sylvia Estivie y Nicolas Maudet. Reaching Envy-free States in Distributed Negotiation Settings. In *Proceedings of the International joint Conference in Artificial Intelligence*, 2007, pp 1239–1244.

[2] Endriss, U., Maudet, N., Sadri, F. y Toni, F. Negotiating Soicially Optimal Allocations of Resources. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 2006, pp 315–348

[3] Tuomas Sandholm. Contract Types for satisficing task allocation: I Theoretical reults. In *Proceedings of of the AAAI Spring Symposium: Satisficing Models*, 1998.