Universidad de Los Andes

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

El Teorema de Müntz - Szász

José Luis Dávila Albarran

Trabajo especial de grado: Modalidad Seminario-Monografía

Tutor: José Gimenez.

Mérida, Octubre de 2009

El Teorema de Müntz - Szász

Requisito Especial de Grado, presentado por:

José L. Dávila A.

en la modalidad de Seminario-Monografía para optar al título de:

Licenciado en Matemáticas

Tutor: Dr. JOSÉ GIMENEZ[1]

[1]Universidad de Los Andes, Departamento de Matemáticas, Grupo de Análisis Funcional, Edificio Teórico de la Facultad de Ciencias, La Hechicera, Mérida 5101, Mérida - Venezuela, jgimenez@ula.ve.

A mis padres, hermanos.
A Mary y a Raúl. ✓

AGRADECIMIENTO

Quisiera expresar mis más sinceros agradecimientos a todas aquellas personas que hicieron posible la elaboración de esta monografía.

A los profesores José Giménez, Luis Gonzáles y Diómedes Bárcenas quienes fueron los responsables de mi formación para prepararme y salir adelante con este trabajo.

Al profesor Ernesto Jaimes por su predisposición permanente e incondicional.

Y muy especialmente a los profesores José Giménez (nuevamente) y Carlos Uzcátegui por el gran apoyo demostrado en la culminación de mi carrera.

Finalmente agradecer a todas aquellas personas que me acompañaron y siempre estuvieron ahí para apoyarme.

A todos .... gracias!!

Índice general

Introducción

Uno de los resultados mejor conocidos en el análisis es el Teorema de Weierstrass el cual afirma que el conjunto de los polinomios es denso en el espacio de las funciones continuas $C[0,1]$ (con la topología uniforme). Este teorema fue demostrado por Karl Weierstrass en 1985. Más tarde, Marshall Stone enfocándose en algunas propiedades funcionales de la familia de los polinomios, notó que si un conjunto de funciones en $C[0,1]$ contaba con esas propiedades entonces este debía de ser denso en $C[0,1]$. Dicho resultado es conocido como el teorema ó generalización de Stone - Weierstrass.

Esta generalización nos permite dar numerosos ejemplos de familias densas en $C[0,1]$ distintas de la familia de los polinomios; sin embargo, al considerar una sucesión de números reales positivos $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ creciente, y la familia $\mathcal{F}$ que surge al hacer combinaciones lineales de las funciones

$$1,\, t^{\lambda_1},\, t^{\lambda_2},\, \ldots, t^{\lambda_n}, \ldots$$

dicho teorema no es lo "suficientemente general" para poder afirmar que $\mathcal{F}$ es denso en $C[0,1]$. La pregunta que surge entonces es: ¿ Cuál es la condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{F}$ sea denso en $C[0,1]$?, esta interrogante la hizo Berstein [3], que a su vez sugirió que dicha condición fuese que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}$ divergiese. Este no estaba equivocado, pues Herman Müntz [8] logró demostrarlo en el año 1914 y dos años más tarde Otto Szász [11] dió otra manera de demostrarlo, actualmente este resultado es conocido como el Teorema de Müntz - Szász.

El presente trabajo tendrá como finalidad discutir y dar una demsotración de este teorema como aparece en el texto *Real and Complex Analysis* de Walter Rudin [10]. Dicha demostración involucra teoremas del Análisis funcional, teoría de la medida y funciones analíticas, por esto hemos estructurado este trabajo en 4 capítulos:

En el capítulo 1, discutiremos algunos aspectos básicos sobre $\mathbb{C}$ y $C[0,1]$, además de enunciar el teorema de Stone - Weierstrass que será el punto de partida de este trabajo. Así mismo enunciamos el teorema de Hanh - Banach, para poder así presentar una caracterización fundamental de los puntos clausura de un subespacio vectorial de $C[0,1]$ a travéz de funcionales lineales en $C[0,1]^*$.

En el capítulo 2, daremos una breve introducción sobre medidas complejas y reales. Enunciaremos el teorema de Representación de Riesz, el cual nos permitirá caracterizar los funcionales lineales en $C[0,1]^*$ a travéz de ciertas medidas complejas.

En el capítulo 3, trataremos temas y teoremas de las funciones analíticas, así como resultados que nos permitirán construir funciones analíticas a partir de medidas complejas.

En el capítulo 4, definiremos la transformadas de Fourier para funciones en $L^1(\mathbb{R})$ para dar paso a la demostración del teorema de M$\ddot{u}$ntz - Szász y algunas observaciones sobre este.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos algunos aspectos básicos fundamentales sobre el conjunto de los números complejos y sobre el espacio $C[0,1]$. Asumimos que el lector está familiarizado con las principales definiciones y resultados de la teoría de funciones de una variable compleja. El proposito fundamental del capítulo es fijar la notación y presentar algunos resultados que nos permitan establecer el lenguaje y la motivación necesaria para el ulterior planteamiento y discusión de nuestros objetivos fundamentales.

1.1. Discos abiertos y la topología en $\mathbb{C}$

Denotaremos el conjunto de los números complejos mediante $\mathbb{C}$. Si $z \in \mathbb{C}$, entonces podemos expresar z en su descomposición como parte real e imaginaria mediante

$$z = x + yi, \quad x,\, y \in \mathbb{R}.$$

Como es usual, $\overline{z}$ denotará al número complejo $x - yi$ llamado el **conjugado de** z. El **módulo** (o valor absoluto)de z se define como

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Si $r > 0$ y a es un número complejo, denotaremos mediante $\mathrm{D}(a;r)$ al disco abierto de centro a y radio r. Es decir:

$$\mathrm{D}(a;r) = \{z : |z - a| < r\}$$

Al disco abierto de centro 0 y radio 1 lo denotaremos simplemente como U y lo llamaremos **disco unitario**.

$\overline{\mathrm{D}}(a;r) = \{z : |z-a| \leq r\}$ es la adherencia de $\mathrm{D}(a;r)$, y
$\mathrm{D}'(a,r) = \{z : 0 < |z-a| < r\}$ es el disco perforado con centro a y radio r.

La colección de todos los discos abiertos es una base para la, asi llamada, topología usual de $\mathbb{C}$. Cualquier definición topológica (abierto cerrado, compacto, conexo, etc...) sobre $\mathbb{C}$ a que hagamos referencia en este trabajo será con respecto a la topología usual.

Un subconjunto abierto y conexo diferente de vacío en el plano complejo se denomina **región**.

Como cada subconjunto abierto Ω en el plano es una unión de discos, y como todos los discos son conjuntos conexos, cada componente conexa de Ω es abierta. Así, todo conjunto abierto en el plano es unión de regiones disjuntas.

Una función f **se dice compleja** si tiene como codominio al conjunto de los números complejos

Si A es un conjunto no vacío, f y g son funciones complejas definidas en A y $\lambda \in \mathbb{C}$ se define las funciones $f+g$, λf, fg, $\overline{f}$ y $|f|$ como

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$
3. $(fg)(x) = f(x)g(x)$
4. $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$
5. $|f|(x) = |f(x)|$

1.2. El espacio $\mathbb{C}[0,1]$

$C[0,1]$ denotará el conjunto de todas las funciones complejas continuas definidas en $[0,1]$, las operaciones (1) y (2) definidas en $C[0,1]$ hacen de este un **espacio vectorial complejo**.

Recordemos que si $f \in C[0,1]$ el conjunto $\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$ alcanza máximo, pudiendo así definir

$$\|\cdot\|_\infty : C[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

como

$$\|f\|_\infty = \text{máx}\{|f(x)| : x \in [0,1]\} \qquad \text{(llamada norma del supremo).}$$

Esta función define una norma sobre $C[0,1]$; es decir, $\|.\|_\infty$ satisface:

1. $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0 \qquad (f \in C[0,1])$
2. $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty \qquad (\lambda \in \mathbb{C},\ f \in C[0,1])$
3. $\|f+g\| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \qquad (f,g \in C[a,b])$.

Cuando hagamos referencia de $C[0,1]$ como espacio vectorial normado será con respecto a las operaciones ya definidas y a la norma del supremo.

Esta norma sobre $C[0,1]$ induce una topología τ_∞ sobre $C[0,1]$, llamada **topología de la convergencia uniforme** y será esta con la que consideraremos a $C[0,1]$ como espacio topológico

Sea $X \subseteq C[0,1]$ diremos que $f \in$ es una combinación lineal (C.L.) de elementos en X si existen funciones $f_1,\ f_2, \ldots, f_n \in X$ y escalares $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tales que

$$f \equiv \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n.$$

Definimos $Span(X) = \{f \in C[0,1] : f \text{ es una C.L. de elementos en } X\}$

Recordemos que $f_0 \in C[0,1]$ es **punto clausura** de X si para cada $\varepsilon > 0$ existe una función f_1 en X tal que

$$\|f_0 - f_1\|_\infty < \varepsilon.$$

$\overline{X}$ denotará al conjunto de todos los puntos clausura de X. Diremos que X es denso en $C[0,1]$ si $\overline{X} = C[0,1]$

Lema 1.1 *Si $X \subseteq C[0,1]$ satisface que $\alpha f + g \in X$ para cada $f,g \in X$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ entonces $\overline{X}$ también tiene esta propiedad*

Prueba. Sea $f,g \in \overline{X},\ \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ y $\varepsilon > 0$ por definición existen $f,g \in X$ tales que

$$\|f - f_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} \qquad \text{y} \qquad \|g - g_1\|_\infty < \varepsilon/2$$

por lo tanto

$$\|(\alpha f + g) - (\alpha f_1 + g_1)\|_\infty \leq |\alpha|\|f - f_1\|_\infty + \|g - g_1\|_\infty < \varepsilon$$

como $\alpha f_1 + g_1 \in X$ se cumple que $\alpha f + g \in \overline{X}$ ■

Definición 1.2 *Si $K \subseteq \mathbb{C}$, $\{f_n\}_n$ es una sucesión de funciones complejas definidas en K diremos que la sucesión $\{f_n\}_n$ converge uniformemente en K a una función f (y lo denotaremos por $f_n \rightrightarrows f$) si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \qquad \textit{para cada} \qquad z \in K \;\; y \;\; n \geq n_0$$

Teorema 1.3 (M-test de Weierstrass) *Supongamos que $\{f_n\}_n$ es una sucesión de funciones complejas continuas definidas en $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, y que existe una sucesión $\{M_n\}_n \subseteq \mathbb{R}^+$ tal que*

$$|f_n(z)| \leq M_n \qquad (\textit{para cada} \;\; n \in \mathbb{N} \;\; y \;\; z \in \Omega).$$

Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en Ω a una función continua f

Teorema 1.4 (Aproximación de Weierstrass) *Para cada $f \in C[0,1]$ existe una sucesión de polinomios $\{P_n\}_n$ tal que*

$$P_n \rightrightarrows f$$

El teorema de aproximación de Weierstrass nos dice en su forma más sencilla que el conjunto de los polinomios es denso en $C[0,1]$. A continuación presentaremos dos lemas que aunque su demostración es relativamente fácil, nos serán de gran utilidad más adelante.

Lema 1.5 *El disco unitario es homeomorfo al semiplano derecho $\Omega^+ := \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$*

Prueba. Veamos primero que si $z = x + iy \in D(0,1)$, $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $\dfrac{1+z}{1-z} \in \Omega^+$. En efecto:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 < 1 \;\; &\Leftrightarrow \;\; (1-x)(1+x) - y^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \;\; Re\left(\frac{(1+x+iy)(1-x+iy)}{(1-x)^2 + y^2}\right) > 0 \\ &\Leftrightarrow \;\; Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right) > 0 \end{aligned}$$

Ahora podemos definir

$$f: \quad D(0,1) \longrightarrow \Omega^+ \qquad \text{como}$$

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z} \qquad (z \in D(0,1))$$

$I)$ <u>f es inyectiva</u>: si $z_1,\ z_2 \in D(0,1)$ y $f(z_1) = f(z_2)$ entonces

$$\frac{1+z_1}{1-z_1} = \frac{1+z_2}{1-z_2} \Leftrightarrow 1 - z_2 + z_1 - z_1 z_2 = 1 + z_2 - z_1 - z_1 z_2 \Leftrightarrow z_1 = z_2$$

$II)$ <u>f es sobreyectiva</u>: si $z_0 = a + bi \in \Omega^+,\ a, b \in \mathbb{R}$ entonces

$$a > 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 \leq (a+1)^2 + b^2 \Leftrightarrow \frac{z_0 - 1}{z_0 + 1} \in D(0,1)$$

además $$f\left(\frac{z_0-1}{z_0+1}\right) = \frac{1 + \dfrac{z_0-1}{z_0+1}}{1 - \dfrac{z_0-1}{z_0+1}} = \frac{2z_0}{2} = z_0$$

luego por la parte $I)$ y $II)$ existe $f^{-1} : \Omega^+ \longrightarrow D(0,1)$ además

$$f^{-1}(z) = \frac{z-1}{z+1} \qquad (z \in \Omega^+)$$

de más este decir f y f^{-1} son funciones continuas. ■

Lema 1.6 *Si $\{\lambda_n\}$ es una sucesión de números reales positivos tal que $c := \text{ínf}\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} > 0$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{|\lambda_n - 1|}{\lambda_n + 1}\right] = \infty$*

Note que $1 - \dfrac{|\lambda_n - 1|}{\lambda_n + 1} > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$

Prueba. Definimos $A = \{n \in \mathbb{N} : \lambda_n \leq 1\}$ y $B = \mathbb{N} \backslash A$ entonces A es finito o infinito

<u>Caso I</u>: A es finito

En este caso se tiene que por ser la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ divergente, también lo es la serie $\displaystyle\sum_{n \in B} \frac{1}{\lambda_n}$, además

$$\sum_{n\in B}\left[1-\frac{|\lambda_n-1|}{\lambda_n+1}\right]=\sum_{n\in B}\frac{2}{1+\lambda_n} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{\lambda_n}<\frac{2}{1+\lambda_n} \quad \text{para cada } n\in B$$

Por lo tanto

$$\sum_{n\in B}\left[1-\frac{|\lambda_n-1|}{\lambda_n+1}\right]=\infty \qquad \text{y así} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{|\lambda_n-1|}{\lambda_n+1}\right]=\infty$$

Caso II: A es infinito

Como para cada $n\in A$
$0<c<\lambda_n<\dfrac{2\lambda_n}{1+\lambda_n}$ se cumple que

$$\sum_{n\in A}\left[1-\frac{|\lambda_n-1|}{\lambda_n+1}\right]=\sum_{n\in B}\frac{2\lambda_n}{1+\lambda_n}=\infty$$

por lo tanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{|\lambda_n-1|}{\lambda_n+1}\right]=\infty$ ■

1.3. El Teorema de Stone-Weierstrass

En esta sección mostraremos que la conclusión del Teorema de Weierstrass se puede extender a familias de funciones que satisfacen propiedades similares a las del conjunto de los polinomios, para esto definiremos en primer lugar lo siguiente:

Definición 1.7 *Diremos que un conjunto $R\subseteq C[0,1]$ tiene la propiedad de Stone si satisface las siguientes condiciones:*

1. $f+g,\ f\cdot g,\ cf,\ \overline{f}\in R \quad \forall\, f,g\in R$ *y* $c\in\mathbb{C}$
2. *Para cada par de puntos* $x_1,\, x_2\in[0,1]$ *existe* $f\in R$ *tal que* $f(x_1)\neq f(x_2)$
3. *Para cada* $x\in[0,1]$ *existe* $f\in R$ *tal que* $f(x)\neq 0$

Si f es una función compleja definida en $[0,1]$, denotaremos por X_f al conjunto formado por todas las combinaciones lineales de las funciones

$$1,\, f,\, f^2,\, f^3, \ldots, f^n, \ldots$$

Es claro que si $f \in C[0,1]$ es una función a valores reales inyectiva, entonces X_f tiene la propiedad de Stone.

Teorema 1.8 (Stone - Weierstrass) *Todo subconjunto R de $C[0,1]$ que satisface la propiedad de Stone es denso en $C[0,1]$.*

Corolario 1.9 *Si $f \in C[0,1]$ es una función a valores reales inyectiva, entonces X_f es denso en $C[0,1]$.*

El teorema de Stone - Weierstrass nos permite dar numerosos ejemplos de subconjuntos densos en $C[0,1]$. Sin embargo, nuestro interés esta en ciertas colecciones de polinomios que están muy lejos de ser el conjunto de todos los polinomios en $C[0,1]$.

Lema 1.10 *Supongamos que $A \subseteq \mathbb{N}$ es finito, $p \in \mathbb{N}$ y $k_1,\, k_2,\, k_3, \ldots$ es una enumeración de $\mathbb{N}/A$. Definamos*

$$M := span\{1,\, t^{k_1},\, t^{k_2},\, t^{k_3}, \ldots\}$$

y

$$N := span\{1,\, t^{p},\, t^{2p},\, t^{3p}, \ldots\}$$

entonces M y N son densos en $C[0,1]$.

Prueba.

Sea $k = \min\{k_1,\, k_2,\, k_3, \ldots\}$ y definamos $M_k := span\{1,\, t^k,\, t^{2k}, \ldots\}$ Por el corolario 1.9 es evidente que tanto N como M_k son densos en $C[0,1]$, además $M_k \subset M$, concluyendo asi que M también es denso en $C[0,1]$. ■

Si ahora consideramos una sucesión creciente $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de números naturales y el subespacio

$$X(\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}) := Span\{1,\, t^{n_1},\, t^{n_2}, \ldots\}$$

la pregunta que surge es ¿ Cuándo podemos asegurar que X es denso en $C[0,1]$?, evidentemente si $X(\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}})$ posee una subcolección con la propiedad de Stone entonces $X(\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}})$ sería denso, pero esta condición a parte de ser suficiente ¿ será necesaria? La respuesta es NO, para esto, daremos un ejemplo el cual verificaremos en el capítulo 4.

Lema 1.11 *Supongamos que $p_1, p_2, \ldots$ es una enumeración creciente de los número primos, entonces* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty$

La divergencia de esta peculiar serie fue demostrada por primera vez en 1737 por Euler y la siguiente demostración se debe a Clarkson
Prueba.
Supongamos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ converge, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_m} < \frac{1}{2}$$

sea $Q = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$ y definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ $\quad a_n = 1 + nQ$, note que ninguno de los números $p_1, p_2, \ldots, p_k$ divide a a_n y por lo tanto los factores de a_n se encuentran entre los primos $p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots$

Ahora, si $s \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\sum_{n=1}^{s} \frac{1}{a_n} \leq \sum_{t=1}^{\infty} \left(\sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \right)^t \tag{1.1}$$

pues la suma de la derecha contiene todos los términos de la suma izquierda. Como la serie $\displaystyle\sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^t$ es convergente se tiene que la serie $\displaystyle\sum_{t=1}^{\infty} \left(\sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \right)^t$ también lo es y en consecuencia por (1.1) la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ también es convergente.
Si $n \in \mathbb{N}$ es claro que

$$\frac{1}{n} < \frac{2Q}{1+nQ} = \frac{2Q}{a_n}$$

Ya que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Q}{a_n}$ también es convergente se tendría que la serie armónica también lo es, lo que nos lleva a una contradicción (ya que la serie armónica es divergente). Por lo tanto, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ es divergente. ∎

$X(\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}})$ no posee una subcolección con la propiedad de Stone y sin embargo es denso en $C[0,1]$, en realidad la condición necesaria y suficiente para que $X(\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}})$ sea densa en $C[0,1]$ es que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k}=\infty$, como lo veremos en el Capítulo 4.

1.4. El Teorema de Hahn-Banach y consecuencias

En esta sección X denotará a un espacio vectorial complejo con norma $\|\cdot\|$ y M un subespacio vectorial de X el cual consideraremos a su vez como un espacio topológico con respecto a la topología inducida por la norma $\|\cdot\|$.

Diremos que una función f **es un funcional lineal** en M, si f es una función compleja definida en M y además satisface que $f(\alpha x+y)=\alpha f(x)+f(y)$ para cada $x,y\in M$ y $\alpha\in\mathbb{C}$.

Definición 1.12 *Un funcional lineal f definido en M es acotado si lo esta el conjunto*

$$L=\left\{\frac{|f(x)|}{\|x\|}\,:\,x\in M\backslash\{0\}\right\}.$$

En este caso definimos $\|f\|_M$ como el supremo de L y denotaremos por M^* al conjunto de todos los funcionales lineales definidos en M acotados.

Usualmente se le conoce a M^* como el **dual de** M

Teorema 1.13 *Si f es un funcional lineal en el M entonces son equivalentes:*

(i) *f es un funcional lineal acotado*

(ii) *f es una función continua.*

Prueba.
$(i)\Rightarrow(ii)$ Sea $x_0\in M$ por ser f un funcional lineal acotado se cumple que

$$|f(x)-f(x_0)|=|f(x-x_0)|\le\|f\|_M\|x-x_0\|\quad\text{para cada}\quad x\in M$$

lo cual implica que f es continua en x_0.
$(ii)\Rightarrow(i)$ Si f es continua, en particular lo es en el cero, por lo tanto para $\varepsilon=1$ existe $\delta>0$ tal que para cada $x\in M$ con $\|x\|<\delta$ se cumple que $|f(x)|<1$ (1)

Mostraremos que $\dfrac{2}{\delta}$ es cota superior del conjunto

$$\left\{ \frac{|f(x)|}{\|x\|} : x \in M \backslash \{0\} \right\}$$

Sea $x \in M\backslash\{0\}$ ya que $\left\| \frac{x}{\|x\|} \frac{\delta}{2} \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta$ se cumple por (1) que $\left| f\left(\frac{x}{\|x\|} \frac{\delta}{2} \right) \right| < 1$

$\therefore \qquad \frac{\delta}{2\|x\|}|f(x)| < 1$

$\therefore \qquad \frac{|f(x)|}{\|x\|} < \frac{2}{\delta}$ ■

Uno de los teoremas más conocido y básico en el Análisis funcional es el de Hahn - Banach, el cual nos será de gran utilidad más adelante y sólo lo enunciaremos.

Teorema 1.14 (Hahn - Banach) *Si $f \in M^*$ entonces existe $F \in X^*$ tal que $F|_M \equiv f$ y $\|f\|_M = \|F\|_X$*

Teorema 1.15 *Si M es un subespacio vectorial de X y $x_0 \in X$, entonces, $x_0 \in \overline{M}$ si y sólo si para cada $f \in X^*$ que se anule en todo M se cumple que $f(x_0) = 0$*

Prueba.
$(\Rightarrow)$ Si $x_0 \in \overline{M}$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ tal que $\|x_n - x_0\| \longrightarrow 0$. Sea $f \in X^*$ una función que se anule en todo M, por el teorema 3.1 f es continua en x_0, por lo tanto $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$ pero $f(x_n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$

$\therefore \qquad f(x_0) = 0$

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $x_0 \notin \overline{M}$, en tal caso existiría $\delta > 0$ tal que

$$\|x - x_0\| > \delta \qquad \text{para cada} \qquad x \in M \tag{1.2}$$

Sea $L = \{x + \lambda x_0 : x \in M \text{ y } \lambda \in \mathbb{C}\}$, claramente L es un subespacio vectorial de X que contiene a M, definamos

$$g : \quad L \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \text{como}$$

$$g(x + \lambda x_0) = \lambda \qquad\qquad (x \in M, \lambda \in \mathbb{C})$$

Note que si $x \in M$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces

$$x + \lambda x_0 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ y } \lambda = 0$$

y esto nos permite asegurar que g esta bien definido y que además es un funcional lineal en L además si $\lambda \neq 0$

$$\frac{|g(x + \lambda x_0)|}{\|x + \lambda x_0\|} = \frac{|-\lambda|}{\|x + \lambda x_0\|} = \frac{1}{\left\|-\frac{x}{\lambda} - x_0\right\|}$$

por (1.2) $$\frac{1}{\left\|-\frac{x}{\lambda} - x_0\right\|} > \frac{1}{\delta}$$

$$\therefore \quad \frac{|g(x + \lambda x_0)|}{\|x + \lambda x_0\|} < \frac{1}{\delta}$$

$\therefore$ $g \in L^*$, luego por el teorema de Hahn - Banach, existe $G \in X^*$ tal que $G|_L \equiv g$ como para cada $x \in M$ $g(x) = 0$ se concluye que $G|_M \equiv 0$

Sin embargo, $G(x_0) = G(0 + 1x_0) = 1$, lo cual contradice nuestra hipótesis. ■

Lema 1.16 *Si M es un subespacio vectorial de X entonces $\overline{M}$ también lo es*

Prueba. Sean $x, y \in \overline{M}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, para mostrar que $\lambda x + y \in \overline{M}$, bastaría mostrar que todo funcional lineal f en M^* que se anule en M se tiene que anular en $\lambda x + y$.

Sea $f \in M^*$ tal que $f|_M \equiv 0$ como $x, y \in \overline{M}$ se tiene que $f(x) = f(y) = 0$

$\therefore$ $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = 0$ ■

Vale la pena destacar que aunque el Teorema de Hanh - Banach depende del Axioma de Elección, el lema anterior no depende de esté pués se puede demostrar de una forma similar a lo hecho en el lema 1.1.

Capítulo 2

Medidas de Borel reales y complejas

En este capítulo daremos algunas definiciones básicas para poder comprender los enunciados del Teorema de Representación de Riesz y el Teorema de Fubini.

Definición 2.1 *Una colección $\mathcal{L}$ de subconjuntos de un conjunto Y se llama* $\sigma-$**álgebra en** Y *si $\mathcal{L}$ tiene las siguientes propiedades:*

1. $Y \in \mathcal{L}$
2. *Si $A \in \mathcal{L}$, entonces $Y \backslash A \in \mathcal{L}$*
3. *Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección de elementos en $\mathcal{L}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$*

Teorema 2.2 *Si $\mathcal{F}$ es una colección de subconjuntos de Y existe una $\sigma-$álgebra mínima $\mathcal{L}$ en Y que contiene a $\mathcal{F}$*

Prueba. Sea $\Omega = \{\mathcal{L} : \mathcal{L}$ es una $\sigma -$ álgebra en Y que contiene a $\mathcal{F}\}$, Ω es no vacío pues la colección de todos los subconjunto de Y es una $\sigma-$álgebra en Y que contiene a $\mathcal{F}$, definamos

$$\mathcal{L}^* = \bigcap_{\mathcal{L}\in\Omega} \mathcal{L},$$

observemos que

a) $Y \in \mathcal{L}$ para todo $\mathcal{L} \in \Omega$, por lo tanto $Y \in \mathcal{L}^*$

b) Si $A \in \mathcal{L}^*$ entonces $Y \backslash A \in \mathcal{L}$ para cada $\mathcal{L} \in \Omega$ y así $Y \backslash A \in \mathcal{L}^*$

c) Si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $A_n \in \mathcal{L}^*$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $A \in \mathcal{L}$, para cada $\mathcal{L} \in \Omega$, por lo tanto $A \in \mathcal{L}^*$

d) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}$ para cada $\mathcal{L} \in \Omega$, y así $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}^*$

e) Si $\mathcal{L}$ es un $\sigma-$álgebra que contiene a $\mathcal{F}$ entonces $\mathcal{L} \in \Omega$ y así $\mathcal{L}^* \subseteq \mathcal{L}$

por a), b), c) y d) se concluye que $\mathcal{L}^*$ es una $\sigma-$álgebra en Y que contiene a $\mathcal{F}$ y por e) se tiene que $\mathcal{L}^*$ es la menor $\sigma-$álgebra en Y con esta propiedad. ■

En lo que sigue Y denotará un conjunto no vacío y τ una topología sobre Y.

Definición 2.3 *Denotaremos por Σ_τ a la menor $\sigma-$álgebra en Y que contiene a τ, a Σ_τ la llamaremos $\sigma-$***álgebra de Borel en** *Y y a sus elementos conjuntos de Borel en Y.*

Definición 2.4 *Si f es una función compleja definida en Y diremos que*

(a) *f es una* **función medible Borel** *si para todo $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon > 0$ se cumple que*

$$f^{-1}(\{z \in \mathbb{C} \, : \, |z - z_0| \leq \varepsilon\}) \in \Sigma_\tau$$

(b) *Si $f(Y)$ es finito, diremos que f es una* **función simple** *además si $f(Y) \subseteq \mathbb{R}$ se define*

$$f^+, \, f^- : Y \longrightarrow [0, +\infty) \qquad \textit{como}$$

$$f^+(x) = \text{máx}\{f(x), 0\} \qquad y \qquad f^{-1}(x) = -\,\text{mín}\{f(x), 0\} \qquad (x \in Y)$$

Teorema 2.5 *Si f, g son funciones medibles Borel y $f = u + iv$ donde u y v son funciones reales, entonces:*

(a) *Si $f(Y) \subseteq \mathbb{R}$ entonces f^+, f^- son medibles Borel*

(b) *u, v, $f + g$, $f \cdot g$ y $|f|$ son medibles Borel*

Definición 2.6 *Una* **medida de Borel positiva sobre** Y *es una función* μ *definida en* Σ_τ *con recorrido en* $[0,+\infty]$ *con la propiedad de aditividad numerable, es decir que si* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una colección numerable de conjuntos disjuntos en* Σ_τ *entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Si μ *es una función definida en* Σ_τ *con recorrido en* $\mathbb{C}$ *y además por la propiedad de aditividad numerable diremos que* μ *es una* **medida de Borel compleja**

Una medida de borel positiva μ *sobre* Y *es de* **medida de** $\sigma-$**finita** *si existe una sucesión de conjuntos* $\{E_n\}_n$ *en* Σ_τ *tal que* $Y = \cup E_n$ *y* $\mu(E_n) < \infty$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Si f es una función medible Borel simple donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son los distintos valores que toma la función en Y y μ es una medida de Borel positiva en Y definimos

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E \cap A_i),$$

donde $E \in \Sigma_\tau$ y $A_i = \{x \in Y \,:\, f(x) = \alpha_i\}$ para cada $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ del mismo modo, si f tiene recorrido en $[0, +\infty)$ se define

$$\int_E f d\mu = \sup\left\{\int_E s d\mu \,:\, s \text{ es una función medible Borel simple y } 0 \leq s(x) \leq f(x) \quad \forall\, x \in Y\right\}$$

Definición 2.7 *Si* μ *es una medida de borel positiva, definimos* $L^1(\mu)$ *como el conjunto de todas las funciones medibles borel tal que* $\int_Y |f| d\mu < \infty$ *del mismo modo si* $f = u + iv$, *donde* u *y* v *son funciones reales,* $f \in L^1(\mu)$ *y* $E \in \Sigma_\tau$ *definimos*

$$\int_E f d\mu = \int_E u^+ d\mu - \int_E u^- d\mu + i\int_E v^+ d\mu - i\int_E v^- d\mu$$

Teorema 2.8 *[**Teorema de la Convergencia dominada de Lebesgue**]*

Supongamos que $\{f_n\}$ *es una sucesión de funciones medibles complejas sobre* Y *tales que existe*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \textit{para todo } x \in Y$$

si existe una función $g \in L^1(\mu)$ tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots;\ x \in Y)$$

entonces $f \in L^1(\mu)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_Y |f_n - f| d\mu = 0$$

y

$$\int_Y f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_Y f_n d\mu$$

Definición 2.9 *Si μ es una medida de borel compleja, se define $|\mu| : \Sigma_\tau \longrightarrow [0, +\infty]$ mediante*

$$|\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_n)| \ :\ E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \ \text{donde}\ \{E_n\}_n \subseteq \Sigma_\tau \ \text{es una colección disjunta dos a dos} \right\}$$

$|\mu|$ recibe el nombre de **variación total de** *μ.*

Teorema 2.10 *Si μ es una medida de borel compleja sobre Y, entonces la variación total $|\mu|$ de μ es una medida de borel positiva sobre Y, además $|\mu|(Y) < \infty$*

Teorema 2.11 *Si μ es una medida de borel compleja existe una función medible borel sobre Y, h tal que $|h(x)| = 1$ para todo $x \in Y$ y*

$$\mu(E) = \int_E h d|\mu| \qquad \text{para toda} \qquad E \in \Sigma_\tau$$

Teniendo sentido definir la integral de una función medible borel f sobre un subconjunto $E \in \Sigma_\tau$ con respecto a la medida μ como:

$$\int_E f d\mu = \int_E f h d|\mu|$$

Teorema 2.12 *Si μ es una medida de borel positiva sobre Y, $g \in L^1(\mu)$ y*

$$\lambda(E) = \int_E g d\mu \qquad (E \in \Sigma_\tau)$$

se tiene que λ es una medida de borel compleja sobre Y.

Además,

$$\int_E f d\lambda = \int_E fg d\mu \qquad E \in \Sigma_\tau \text{ y } f \text{ medible borel.}$$

2.1. El Teorema Representación de Riesz

Si μ es una medida de borel compleja sobre $[0,1]$, la función $\phi : C[0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\phi(f) = \int_{[0,1]} f d\mu \qquad (f \in C[0,1]) \tag{2.1}$$

determina un funcional lineal que además es acotado por $|\mu|([0,1])$. Lo que Riesz demostró fue que los funcionales lineales en $C[0,1]^*$ son necesisariamente de esta forma. Ahora estamos en condiciones de enunciar el Teorema de Representación de Riesz.

Teorema 2.13 (Representación de Riesz) *A cada funcional lineal acotado ϕ sobre $C[0,1]$ le corresponde una medida de borel compleja μ sobre $[0,1]$ tal que*

$$\phi(f) = \int_{[0,1]} f d\mu \qquad (f \in C[0,1])$$

2.2. El Teorema de Fubini

Sean X, Y conjuntos no vacío y f una función compleja definida en $X \times Y$, para cada $x \in X$ e $y \in Y$ definimos

$$f_x : Y \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \text{y} \qquad f^y : X \longrightarrow \mathbb{C}$$

como

$$f_x(a) = f(x,a) \qquad f^y(b) = f(b,y) \qquad (a \in Y,\ b \in X).$$

El Teorema de Fubini involucra definiciones que no están dentro de nuestro interés para la realización de este trabajo, es por esto que daremos una versión más débil de este teorema.

Teorema 2.14 (Fubini) *Sean X, Y espacios topológicos y μ, λ medidas de borel reales y de medida $\sigma-$finita sobre X e Y respectivamente, sea f una función compleja definida en $X \times Y$ tal que para cada $x \in X$, $y \in Y$*

$$|f|_x,\ f_x \in L^1(\lambda) \qquad y \qquad f^y \in L^1(\mu)$$

definamos

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\lambda, \qquad \varphi^*(x) = \int_Y |f|_x d\lambda, \qquad \psi(y) = \int_X f^y d\mu \qquad (x \in X,\ y \in Y)$$

Entonces

1. *φ^* es una función medible borel en X*
2. *Si $\int_X \varphi^* d\mu < \infty$ se cumple además que $\varphi \in L^1(\mu)$, $\quad \psi \in L^1(\lambda)$ y*

$$\int_X \varphi d\mu = \int_Y \psi d\lambda$$

Ejemplo 2.15 *Sea m la medida de Lebesgue sobre $[0,1]$, definamos $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ como*

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{x^2} & si \quad y < x \leq 1 \\ \\ 0 & si \quad 0 \leq y \leq y \end{cases}$$

en este caso

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_{[0,1]} f(x,y)dm(y) = \int_0^x e^{x^2} dy, \qquad & \psi(y) &= \int_{[0,1]} f(x,y)dm(x) \\ &= \varphi^*(x) & &= \int_y^1 e^{x^2} dx \end{aligned}$$

como f es una función acotada, entonces $\varphi^* \in L^1(m)$. El Teorema de Fubini nos garantiza que φ y ψ son funciones medibles Lebesgue, (pero esto no es de sorprender pues el Teorema Fundamental del Cálculo podemos afirmar que φ y ψ son continuas), además se cumple que

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]} \psi dm &= \int_{[0,1]} \varphi dm \\
\therefore \qquad \int_{[0,1]} \psi dm &= \int_0^1 \left\{ \int_{[0,1]} f(x,y) dm(y) \right\} dx \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 e^{x^2} dy \right\} dx \\
&= \int_0^1 x e^{x^2} dx \\
&= \left[\frac{e^{x^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}
\end{aligned}$$

En el cálculo surgía un problema al tratar de hallar el valor de $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy$ *sin cambiar el orden de integración, pues la función* e^{x^2} *no posee primitiva a través de funciones elementales.*

Capítulo 3

Funciones analíticas y distribución de ceros

En el presente capítulo Ω denotará un subconjunto abierto del plano complejo y U al conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

Definición 3.1 *Diremos que una función compleja f definida en Ω es* **diferenciable en** $z_0 \in \Omega$ *si*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \qquad \text{existe},$$

Del mismo modo si se cumple que f es diferenciable en todo punto de Ω diremos que f **es analítica en** Ω *y denotaremos por $H(\Omega)$ al conjunto de todos las funciones complejas definidas en Ω que sean analíticas en Ω.*

Definición 3.2 *Una* **curva** *en $\mathbb{C}$ es una función compleja γ definida en un intervalo compacto $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ la cual es continua, en donde denotaremos por γ^* al conjunto de todos los puntos $\gamma(t)$ con $a \leq t \leq b$.*
Un **camino** *es una curva en $\mathbb{C}$ continuamente diferenciable a trozos, es decir existen una cantidad finita de puntos $a = \delta_0 < \delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_n = b$ tales que $\gamma|_{[\delta_{i-1}, \delta_i]}$ es diferenciable y con derivada continua $(i = 1, 2, \ldots, n)$.*
Si γ es un camino tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$ diremos que γ es un **camino cerrado**.

Dos de los resultados que nos será bastante útil es el de la fǿrmula integral de Cauchy y el de teorema de Morera, para esto definiremos lo siguiente:

Definición 3.3 *Si γ es una curva en $\mathbb{C}$ definida en $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ y f es una función compleja continua en γ^*, la* **integral de** f **sobre** γ *se define como*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Ejemplo 3.4 *Definamos* $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ *y* $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *como*

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad (z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}),$$

$$\gamma(t) = e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t \quad (t \in [0, 2\pi])$$

Calculemos la integral de f *sobre* γ

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{(-\operatorname{sen} t + i\cos t)}{\cos t + i \operatorname{sen} t}dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t + i\cos t)(\cos t - i\operatorname{sen} t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-sent\cos t + i\operatorname{sen}^2 t + i\cos^2 t + \operatorname{sen} t\cos t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} 0dt + i\int_0^{2\pi} dt = 0 + i2\pi = i2\pi.
\end{aligned}$$

■

Teorema 3.5 *Sea* γ *un camino cerrado, sea* $k = \mathbb{C}\backslash\gamma^*$ *y definimos*

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \qquad (z \in K)$$

entonces Ind_γ *es una función definida sobre* K *a valores enteros que es constante en cada componente de* K *y que es 0 en la componente no acotada de* K

Ejemplo 3.6 *Si* γ *es la circunferencia orientada positivamente con centro en* $a \in \mathbb{C}$ *y radio* r, *se tendría que las componente de* $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$ *son* $D(a, r)$ *y* $\mathbb{C}\backslash D(a, r)$ *siendo está última la componente no acotada, lo cual por el teorema anterior se tendría que*

$$Ind_\gamma(z) = 0 \qquad si \qquad |z - a| < r$$

Ahora para saber el valor que toma la función Ind_γ en la componente $D(a,r)$ basta con saber que valor toma en a

$$Ind_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - a} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}dt}{e^{it}+a-a} = \frac{i}{2\pi i}\int_0^{2\pi} dt = 1$$

por lo tanto

$$Ind_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |z-a|<r \\ \\ 0 & \text{si} \quad |z-a|>r \end{cases}$$

A continuación y con el objeto de demarcar completamente el alcance de nuestra exposición damos una lista de algunos de los principales resultados de la teoría de funciones de una variable compleja.

- [**Teorema Fundamental del Cálculo en** $\mathbb{C}$] Supongamos que $F \in \boldsymbol{H}(\Omega)$ y que F' es continua en Ω. Entonces

  $$\int_\gamma F'(z)dz = 0$$

  para todo camino cerrado γ en Ω.

  ///.

- [**Teorema de Cauchy**][1] Sean: $\Omega \subset \mathbb{C}$, un conjunto abierto y **convexo**, $p \in \Omega$, f una función continua en Ω, tal que $f \in \boldsymbol{H}(\Omega - \{p\})$. Entonces existe $F \in \boldsymbol{H}(\Omega)$ tal que $F' = f$. Por lo tanto

  $$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

  para todo camino cerrado $\gamma \subset \Omega$.

  ///.

- [**Fórmula Integral de Cauchy**] Supongamos que γ es un camino cerrado en un conjunto abierto y convexo Ω, y $f \in \boldsymbol{H}(\Omega)$. Si $z \in \Omega$ y $z \notin \gamma([a,b])$, entonces

  $$f(z)\cdot \mathtt{Ind}_\gamma(z) \ : \ = \ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{3.1}$$

  ///.

[1]Esta versión del clásico teorema es suficiente para nuestros propositos.

- [**Teorema del Valor Medio de Gauss**] El caso en que $\mathtt{Ind}_\gamma(a) = 1$ es de particular interés: Si $f \in \boldsymbol{H}(\mathrm{D}(a,r))$, entonces

$$f(a) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta.$$

$///.$

- [**Analiticidad**] Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto, entonces toda $f \in \boldsymbol{H}(\Omega)$ puede representarse mediante series de potencias en Ω; precisando: Si $a \in \Omega$ entonces existe $r > 0$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad \forall \quad z \in D(a,r) \subset \ \Omega, ;$$

en particular, toda funcón $f \in \boldsymbol{H}(\Omega)$ es infinitamente diferenciable.

Reciprocamente, si f puede representarse mediante series de potencias en Ω, entonces $f \in \boldsymbol{H}(\Omega)$ y f' también se representa mediante series de potencias en Ω.

De hecho si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n\,, \quad z \in \mathrm{D}(a,r),$$

entonces

$$f^k(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1)\, c_n\, (z-a)^{n-k}\,, \quad z \in \mathrm{D}(a,r). \tag{3.2}$$

En consecuencia, (1.1) implica que

$$k!\, c_k = f^k(a) \qquad\qquad (k = 0, 1, 2, ...),$$

de modo que para cada $a \in \Omega$ existe una única sucesión $\{c_n\}$ para la que se verifica (1.1).

$///.$

- [**Ceros de Funciones Analíticas y Unicidad**] Supongamos que Ω es una región, $f \in \boldsymbol{H}(\Omega)$, y pongamos

$$Z(f) := \{a \in \Omega : f(a) = 0\}.$$

Entonces, o bien $Z(f) = \Omega$, o $Z(f)$ no tiene puntos límites en Ω. Si $Z(f) \neq \Omega$, entonces a cada $a \in Z(f)$ le corresponde un único entero positivo $m = m(a)$ tal que

$$f(z) = (z - a)^m g(z) \qquad\qquad (z \in \Omega),$$

donde $g \in \boldsymbol{H}(\Omega)$ y $g(a) \neq 0$; además, $Z(f)$ es a lo sumo numerable. Como consecuencia, se tiene el siguiente **teorema de unicidad** para funciones holomorfas:

- [**Teorema de Unicidad**] *Si f, g son funciones holomorfas en una región Ω y si $f(z) = g(z)$ para todo z de algún conjunto que posea un punto límite en Ω, entonces $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

  ///.

- [**Versión Cuadrática del TVM**]
  Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $z \in \mathrm{D}(a; r)$; y si $0 < r < R$, entonces

$$\sum_{n=o}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 \, d\theta. \tag{3.3}$$

  ///.

- [**Teorema de Morera**] Si f es una función continua en un dominio Ω y

$$\int_\gamma f(z) dz = 0$$

  para todo contorno cerrado γ en Ω, entonces $f \in \boldsymbol{H}(\mathbb{D})$.

  ///.

- [**Teorema de Liouville**] Supongamos que $f \in \boldsymbol{H}(\mathbb{C})$ y que existen constantes reales A, B, $R \in (0, \infty)$ y $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tales que

$$|f(z)| \leq A|z|^N + B \quad \text{para todo } z \text{ tal que } |z| \geq R.$$

  Entonces f es un polinomio de grado menor o igual que N.

  ///.

En el estudio de las funciones analíticas en un conjunto abierto Ω, un tópico de gran importancia es el de la **distribución de los ceros**. El Teorema de Unicidad, mencionado arriba, afirma que los ceros de una función analítica en una región Ω no pueden acumularse en Ω a menos que la función sea identicamente igual a cero. Otro resultado similar a este último (y el cual no se deriva del mismo) es el siguiente:

Teorema 3.7 *Si $f \in H(U)$ tal que f es acotada y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ son ceros de f en U y si además $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |\alpha_n|) = \infty$, entonces $f \equiv 0$*

Definición 3.8 *Supongamos que $\{U_n\}_n$ es una sucesión de números complejos, pongamos*

$$P_n := U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \cdots U_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

y supongamos que existe $P = \lim_{n\to\infty} P_n$. Entonces escribimos

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} U_n \tag{3.4}$$

Los P_n son los productos parciales del producto infinito (3.4).

El teorema que a continuación se presenta nos va a permitir más adelante construir funciones analítica en un conjunto abierto Ω con ceros en puntos preescritos en Ω.

Teorema 3.9 *Supongamos que $f_n \in H(\Omega)$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, que ninguna f_n es identicamente 0 en ninguna componente de Ω, y que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$$

converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω. Entonces se puede definir

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \textit{como}$$

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z) \qquad (z \in \Omega)$$

y se cumple que $f \in H(\Omega)$ además, si $z_0 \in \Omega$ entonces $f(z_0) = 0$, si y sólo si $f_n(z_0) = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$

Hasta los momentos hemos definido conceptos y enunciado teoremas (a los que por obvias razones de exposicion y espacio le hemos omitido su demostración) los cuales son conocidos en distintos ramas de la matemática y que nos servirán para demostrar el teorema de Muntz - Szasz. Resulta muy gratificante obtener y demostrar resultados, con interes propio, que se derivan de aquellos teoremas "básicos", para comenzar veamos como ejemplo el siguiente resultado.

Teorema 3.10 *Sea μ una medida de borel compleja sobre un espacio X, Ω un conjunto abierto de $\mathbb{C}$ y φ una función compleja definida sobre $\Omega \times X$ tal que*

1. *φ es acotada;*
2. *$\varphi\Big|_{\{z\}\times X}$ es una función medible para cada $z \in \Omega$;*
3. *$\varphi\Big|_{\Omega\times\{z\}} \in H(\Omega)$ para cada $t \in X$*

Si definimos $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ como $f(z) = \displaystyle\int_X \varphi(z,t)d\mu(t) \quad (z \in \Omega)$, entonces $f \in H(\Omega)$.

Prueba.
Para demostrar que $f \in H(\Omega)$, basta con ver que f satisface las hipótesis del Teorema de Morera.
I) f es continua en Ω
Sea $z_0 \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$, sin pérdida de generalidad supongamos que μ es una medida no nula, y que $D(z_0,\varepsilon) \subsetneq \Omega$, tomemos $\delta = \min\left\{\varepsilon/2, \dfrac{\varepsilon^2}{2M|\mu|(X)}\right\}$ donde M es una cota en $\mathbb{R}^+$ de la función φ.
Veamos que $f(D(z_0,\delta)) \subseteq D(f(z_0),\varepsilon)$
Si $z \in D(z_0,\delta)\backslash\{z_0\}$ y γ es una circunferencia orientada positivamente con centro z_0 y radio δ.
Por la formula de Cauchy se tiene que:

$$\varphi(z,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\xi,t)}{\xi - z}d\xi \qquad \text{y} \qquad \varphi(z_0,t)\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\xi,t)}{\xi - z_0}d\xi$$

para cada $t \in X$
Luego

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| &= \left|\int_X \frac{1}{2\pi i}\left[\int_\gamma \left(\frac{\varphi(\xi,t)}{\xi-z}-\frac{\varphi(\xi,t)}{\xi-z_0}\right)d\xi\right]\frac{d\mu(t)}{z-z_0}\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_X \left(\int_\gamma \left(\frac{\varphi(\xi,t)}{\xi-z}-\frac{\varphi(\xi,t)}{\xi-z_0}\right)d\xi\right)\frac{d\mu(t)}{z-z_0}\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_X \left|\int_\gamma \frac{\varphi(\xi,t)}{(\xi-z)(\xi-z_0)}d\xi\right| d|\mu|(t)
\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\left|\int_\gamma \frac{\varphi(\xi,t)}{(\xi-z)(\xi-z_0)}d\xi\right| &\leq M\int_\gamma \frac{d\xi}{|\xi-z||\xi-z_0|} = \frac{M}{\varepsilon}\int_\gamma \frac{d\xi}{|\xi-z|} \\
&\leq \frac{M}{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon/2}\int_\gamma d\xi = \frac{4\pi\varepsilon}{\varepsilon^2}M = \frac{4\pi}{\varepsilon}M
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \leq \frac{1}{\varepsilon/2}\frac{4\pi M}{\varepsilon}\int_X d|\mu|(t) = \frac{2}{\varepsilon}|\mu|(X)M$$

y así $\quad |f(z)-f(z_0)| \leq \frac{2}{\varepsilon}|\mu|(X)M|z-z_0| < \varepsilon$

$\therefore\ f(z) \in D(f(z_0),\varepsilon)$

II) Ahora si $\Delta \subseteq \Omega$ es un triángulo cerrado, entonces

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta}\left(\int_X \varphi(z,t)d\mu(t)\right)dz \overset{\text{Teorema de Fubini}}{=} \int_X \left(\int_{\partial\Delta}\varphi(z,t)dz\right)d\mu(t)$$

como $\varphi\Big|_{\Omega\times\{t\}} \in H(\Omega)$ para cada $t\in\Omega$, entonces $\int\limits_{\partial\Delta}\varphi(z,t)dz = 0$ para cada $t\in\Omega$
Luego

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_X 0d\mu(t) = 0$$

$\blacksquare$

Sea $\Omega^+ = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$ y definamos $\varphi : \Omega^+ \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$\varphi(z,t) = t^z = \begin{cases} e^{\ln(t)\cdot z} & \text{si} \quad t > 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases} \qquad (z,t) \in \Omega^+ \times [0,1]$$

note que para cada $t \in [0,1]$ la función $\varphi|_{\Omega\times\{t\}}$ es analítica en Ω^+ y fijado $z \in \Omega^+$ la función $\Omega|_{z\times[0,1]}$ es continua en $[0,1]$, además si $(z,t) \in \Omega^+ \times (0,1]$ entonces

$$|\varphi(z,t)| \leq |e^{z\ln(t)}| = |e^{Re(z)\ln t} e^{Imz \ln t i}| = |e^{Re(z)\ln t}| = t^{Re(z)} \leq 1$$

$\therefore$ φ es una función acotada en $\Omega^+ \times [0,1]$

Así, si μ es una medida de borel compleja en $[0,1]$, podemos afirmar, en virtud del teorema 3.12, que la función

$$f: \quad \Omega^+ \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \text{definida como}$$

$$f(z) \quad := \int_{[0,1]} t^z d\mu(t) \quad (z \in \Omega^+) \text{ es analítica en } \Omega^+$$

Lema 3.11 *Si μ es una medida de borel compleja definida en $[0,1]$ entonces la función $f(z) = \displaystyle\int_{[0,1]} t^z d\mu(t) \qquad (z \in \Omega^+)$ es analítica en Ω^+*

Hemos enunciado resultados sobre la distribución de los ceros de una función analítica pero ¿ Qué tiene que ver esto con el teorema de Muntz - Szasz? para responder esta pregunta comenzaremos por demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3.12 *Si $\Omega^* = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > -2\}$, y $\{\lambda_n\}$ es una sucesión de números reales positivos tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$, entonces existe una función $f^* \in H(\Omega^*)$ acotada en el conjunto $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \geq -1\}$ y que se anula sólo en los puntos $0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$*

Prueba. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$f_n : \Omega^* \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \text{como}$$

$$f_n(z) = \frac{\lambda_n - z}{2 + \lambda_n + z} \quad (z \in \Omega^*),$$

es claro que $f_n \in H(\Omega^*)$ pues es cociente de funciones analítica en Ω^* y $2+\lambda_n+z$ no se anula en Ω^*.

Sea K un subconjunto compacto de Ω^*, veamos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|1-f_n(z)|$ converge uniformemente en K

Como K es compacto existe $M>0$ tal que

$$M \geq |2+2z|+|2+z| \qquad \forall\, z \in K$$

además $\dfrac{1}{\lambda_n} \longrightarrow 0$ (ya que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}<\infty$) y en consecuencia $\lambda_n \to \infty$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lambda_n \geq 2M \qquad\qquad \forall\, n \geq n_0$$

entonces se verifica las siguientes desigualdades para cada $z \in K$ y $n \geq n_0$

1. $|2+2z| \leq M$
2. $0 < \lambda_n - M \leq |2+\lambda_n+z|$
3. $\dfrac{M}{\lambda_n - M} \leq \dfrac{2M}{\lambda_n}$

por lo tanto

$$|1-f_n(z)| = \frac{|2z+2|}{|2+\lambda_n+z|} \leq \frac{M}{\lambda_n - M} \leq \frac{2M}{\lambda_n}$$

para cada $n \geq n_0$ y $z \in K$, como la serie $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{2M}{\lambda_n}$ converge se tiene por el $M-$Test de Weierstrass que $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty}|1-f_n(z)|$ converge uniformemente en K, por lo tanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|1-f_n(z)|$ converge uniformemente en K

Ahora aplicando el teorema 3.12 podemos definir

$$f^*: \ \Omega^* \longrightarrow \mathbb{C} \text{ como}$$

$$f^*(z) = \frac{z}{(2+z)^3}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n - z}{2+\lambda_n+z} \qquad (z \in \Omega^*)$$

y además afirmar que $f^* \in H(\Omega^*)$, por otra parte si $z_0 = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R},\ a \geq -1$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left|\frac{\lambda_n - z_0}{2 + \lambda_n + z_0}\right| \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (\lambda_n - a)^2 + b^2 \leq (2 + \lambda_n + a)^2 + b^2 \\ &\Leftrightarrow \quad {\lambda_n}^2 - 2\lambda_n \leq 4 + 4\lambda_n + \lambda_n^2 + 4a + 2\lambda_n a \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq 4 + 6\lambda_n + 4a + 2\lambda_n a \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq 4(a+1) + 2\lambda_n(a+3) \end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \left|\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)\right| = \prod_{n=1}^{\infty} |f_n(z_0)| \leq 1$$

de igual forma se prueba que $\left|\dfrac{z_0}{(2+z_0)^3}\right| \leq 1$ concluyendo, así que $|f^*(z_0)| \leq 1$, otra consecuencia del teorema 3.12 es que f^* se anula sólo en los puntos $0, \lambda_1,\ \lambda_2, \ldots$ ■

Más adelante, veremos como se relaciona esta función con un funcional lineal en $C[0,1]^*$.

Lema 3.13 *Si $f \in H(\Omega^+)$ es acotada y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$ donde $\{\lambda_n\}_n$ es una sucesión de números reales positivos en donde se anula f y* $\text{ínf}\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} > 0$, *entonces f es identicamente igual a cero en Ω^+*

Prueba. Sea $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = f\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \qquad\qquad (z \in U)$$

por ser la correspondencia

$$z \longrightarrow \frac{1+z}{1-z} \tag{3.5}$$

una biyección entre U y Ω^+ (ver lema 1.5) se cumple que $f \equiv 0$ si y sólo si $g \equiv 0$ ahora bien, ya que la correspondencia (3.5) determina una función analítica en U se tiene que $g \in H(U)$ además, si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$ por el lema 1.6

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 - |\alpha_n| = \infty$$

donde $\alpha_n = \dfrac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + 1}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$ además $g(\alpha_n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, luego por el teorema 3.9 se cumple que $g \equiv 0$

$\therefore \qquad f \equiv 0$ $\blacksquare$

Capítulo 4

El Teorema de Müntz - Szász

4.1. Transformada de Fourier

En esta sección utilizaremos la letra m para representar a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y denotaremos por L^1 al conjunto de las funciones complejas f, definidas en $\mathbb{R}$ y medibles Lebesgue tales que

$$\int_{\mathbb{R}} |f| dm \qquad \text{es finita.}$$

Definición 4.1 *Si* $f \in L^1$ *se define* $\widehat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *como*

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixt} dm(x) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

A la función $\widehat{f}$ *se le llama* **transformada de Fourier de** f

El teorema que nos será de gran utilidad en este trabajo es el que afirma que $\widehat{f}$ es continua y acotada.

Teorema 4.2 *Si* $f \in L^1$, *entonces* $\widehat{f}$ *es continua en todo* $\mathbb{R}$ *y además es acotada.*

Prueba. Sea $t \in \mathbb{R}$. Para probar la continuidad en t, supongamos que $\{t_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ es una sucesión que converge a t y veamos que $\widehat{f}(t_n) \longrightarrow \widehat{f}(t)$ definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ como $f_n(x) = f(x)(e^{it_n x} - e^{itx}) \quad (t \in \mathbb{R})$ entonces para cada $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) \longrightarrow 0$$

además

$$|f_n(x)| \leq 2|f(x)| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ y } 2f \in L^1$$

luego por el teorema de la convergencia dominada

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dm \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} odm$$

$$\therefore \qquad \int_{\mathbb{R}} |f(x)(e^{it_nx} - e^{itx})|dm \longrightarrow 0$$

$$\begin{aligned} |\widehat{f}_n(t_n) - \widehat{f}(t)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{it_nx}dm - \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{itx}dm \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)||e^{it_nx} - e^{itx}|dm \end{aligned}$$

$\therefore \qquad |\widehat{f}_n(t_n) - \widehat{f}(t)| \longrightarrow 0$ y así $\widehat{f}$ es continua en t

Por otra parte,

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(t)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{itx}dm(x) \right| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{itx}|dm(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dm(x) < \infty \end{aligned}$$

lo que muestra que $\widehat{f}$ es acotada en $\mathbb{R}$.

Teorema 4.3 *Sea f^* como en el teorema 3.12, existe una medida de borel compleja μ_0 sobre $[0,1]$ tal que*

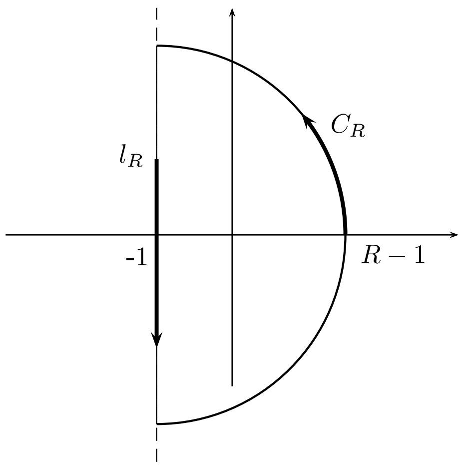
$$f^*(z) = \int_{[0,1]} t^z d\mu_0(t) \qquad\qquad (z \in \Omega^+)$$

Prueba. $\quad f^*(z) = \dfrac{h(z)}{(z+2)^2} \quad (z \in \Omega^*)$ donde $h(z) = \dfrac{z}{1+z} \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \dfrac{\lambda_n - z}{2 + \lambda_n + z}$

sea $z \in \Omega^+$ y $R > |z+1| + 1$, como $f^* \in H(\Omega^*)$ por la fórmula de Cauchy (Teorema 3.7) podemos afirmar que

$$f^*(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{l_R} \frac{f^*(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \int_{C_R} \frac{f^*(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\right] \tag{4.1}$$

donde l_R y C_R son las curvas



$$l_R(s) := -1 - is \qquad (s \in [-R, R])$$

$$C_R(t) := Re^{it} - 1 \qquad (t \in [-\pi, \pi])$$

Ahora si $t \in [-\pi, \pi]$ entonces

$$\begin{aligned} \left|\frac{f^*(C_R(t))iRe^{it}}{Re^{it} - 1 - z}\right| &= R\left|\frac{f^*(C_R(t))}{(Re^{it}+1)^2(Re^{it} - 1 - z)}\right| \\ &\leq \frac{R}{(R-1)^2(R - |z+1|)} \leq \frac{R}{(R-1)^2} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\left|\int_{C_R} \frac{f^*(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R}{(R-1)^2} dt = \frac{2\pi R}{(R-1)^2}$$

$\therefore \qquad \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{f^*(\zeta)}{\zeta - z} = 0$ de este hecho y por (4.1) se cumple que

$$\begin{aligned}
f^*(z) &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{l_R} \frac{f^*(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{f^*(-1-si)(-i)}{-1-s-z} ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{f^*(-1+si)}{1-si+z} ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^*(-1+si)}{1-si+z} ds
\end{aligned}$$

Por otra parte, para cada $s \in R$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^{z-si} dt \quad &= \quad \left[\frac{t^{z-si+1}}{z-is+1}\right]_0^1 = \frac{1}{z-is+1} \\
\therefore \qquad f^*(z) \quad &= \quad \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^1 \frac{t^{z-is}f^*(-1+si)}{2\pi(1-si+z)}dt\right\} ds \\
&\overset{\text{Teo. de Fubini}}{=} \int_0^1 t^z \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(-1+is)e^{-is\ln t} ds\right\} dt
\end{aligned}$$

definamos

$$g: \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \text{como}$$

$$g(s) \ = f^*(-1+is) \qquad (s \in \mathbb{R})$$

por tanto

$$|g(s)| = \frac{|g(-1+is)|}{|(is+1)^2|} \leq \frac{1}{|is+1|^2} \leq \frac{1}{s^2+1}$$

como $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{s^2+1}ds < \infty$, se tiene que $g \in L^1$ y por el teorema 4.2 $\widehat{g}$ es acotada, así la función $P(t) = \widehat{g}(\log t) \qquad (t \in (0,+\infty))$ (donde $\widehat{g}$ es la transformada de Fourier de g) es continua y acotada, definamos

$$\mu(E) = \int_E P dt \qquad\qquad E \in \Sigma_{t_{(0,1]}}$$

por el teorema 2.12 μ es una medida de borel compleja en $(0,1]$ que claramente la podemos extender a una medida compleja μ_0 en $[0,1]$, obteniendo finalmente que

$$f^*(z) = \int_0^1 t^z d\mu_0(t)$$

■

4.2. El Teorema de Müntz - Szász

En este capítulo daremos una de las demostraciones del Teorema de Muntz - Szász. A saber, la que se expone en el famoso texto de Walter Rudin: *Real* & *Complex Analysis*, [10]. Finalizamos este capitulo enunciando algunas generalizaciones de este teorema.

Teorema 4.4 *(***Müntz - Szász***)*
Supongamos que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ *y que* $Y = span\{1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, \ldots\}$.

1. *Si* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$, *entonces* $\overline{Y} = C[0,1]$.

2. *Si* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$ *y si* $\lambda \notin \{\lambda_n\}$, $\lambda \neq 0$ *entonces* $\overline{Y}$ *no contiene la función* t^λ

Prueba. a) Supongamos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$. Si $\overline{Y}$ contiene al conjunto de todos los polinomios, el teorema de Weierstrass nos garantizaría entonces que Y es denso en $C[0,1]$. Para ver esto, en virtud del lema 1.16, sólo bastaría con mostrar que:

$$t^n \in \overline{Y} \qquad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$, para mostrar que $t^{n_0} \in \overline{Y}$ haremos uso del teorema 1.15. Sea ϕ un funcional lineal en $C[0,1]^*$ tal que

$$\phi|_Y \equiv 0. \tag{4.2}$$

Entonces, por el teorema de representación de Riesz (Teorema 2.13) existe una medida de borel compleja μ sobre $[0,1]$ tal que

$$\phi(f) = \int_{[0,1]} f d\mu \qquad (f \in C[0,1]).$$

El lema 3.13 nos asegura que la función

$$f(z) = \int_{[0,1]} t^z d\mu(t) \qquad (z \in \Omega^+)$$

es analítica en Ω^+, además por (4.2) f se anula en los puntos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ y ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ es divergente, el teorema 3.13 implica que f es identicamente igual a cero en Ω^+; en particular, $f(n_0) = 0$.

$\therefore \qquad \phi(t^{n_0}) = 0.$ Luego $t^{n_0} \in \overline{Y}$.

b) Supongamos ahora que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ es convergente.

Sea $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ y definamos f^* como en el teorema 3.12.

Sabemos que f^* no se anula en λ, además por el teorema 4.3, se tiene la representación

$$f^*(z) = \int_{[0,1]} t^z d\mu_0(t) \qquad (z \in \Omega^+) \tag{4.3}$$

donde μ_0 es una medida de borel compleja en $[0,1]$. Luego, como μ_0 determina un funcional lineal en $C[0,1]^*$, el cual, por (4.3), no se anula en t^λ, concluimos por el teorema 1.17 que t^λ no pertenece a $\overline{Y}$. ■

Recordando el lema 1.11 obtenemos el siguiente corolario

Corolario 4.5 *Si $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una enumeración creciente de los números primos entonces el conjunto span$\{1, t^{p_1}, t^{p_2}, \ldots\}$ es denso en $C[0,1]$.*

Si $\alpha_n = 1 + \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$, el teorema de Muntz - Szasz no nos asegura si $Y_0 = span\{1, t^{\alpha_1}, t^{\alpha_2}, \ldots\}$ es denso ó no $(C[0,1])$, ya que la sucesión $\{\alpha_n\}_n$ no es creciente; sin embargo, en los lemas que están involucrados en la demostración de este teorema nunca se supuso que la sucesión $\{\lambda_n\}_n$ fuese creciente. La demostración del siguiente lema básicamente es la misma que la del teorema 4.4

Lema 4.6 *Sea* $\{\lambda_n\}_n$ *es una sucesión de números reales, entonces*

1. *Si* $\inf\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} > 0$ *y* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$, *entonces* $\overline{Y} = C[0,1]$

2. *Si* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$ *y si* $\lambda \notin \{\lambda_n\}$, $\lambda \neq 0$ *entonces* $\overline{Y}$ *no contiene la función* t^{λ}.

Corolario 4.7 Y_0 *es denso en* $C[0,1]$.

Otro ejemplo surge al considerar las funciones

$$1,\, t, \sqrt{t},\, \sqrt[3]{t},\, \sqrt[4]{t}, \ldots$$

¿ Será el conjunto $Y_1 = span\{1,\, t, \sqrt{t},\, \sqrt[3]{t},\, \sqrt[4]{t}, \ldots\}$ denso en $C[0,1]$?
y la respuesta es si, pues la demostración del teorema 4.4 da para mucho más, observemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{|1/n - 1|}{1/n + 1}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1/n - 1}{1/n + 1}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1} = \infty$$

esto quiere decir que si f es una función analítica en Ω^+ acotada y se anula en los puntos de la forma $1/n \quad (n \in \mathbb{N})$ entonces necesariamente f se anula en todo es semiplano derecho (comparar con el lema 3.13)

Si seguimos el esquema de la demostración del teorema de Müntz - Ssász en la parte a) tomando en cuenta lo dicho anteriomente llegamos a que Y_1, es denso en $C[0,1]$.

Con argumentos muy parecidos a los que se encuentran en la demostración del teorema de Müntz - Szász, Peter Borwein y Tomás Erdélyi [4], [7] dieron la demostración del siguiente teorema

Teorema 4.8 (Generalización del Teorema de Müntz - Szász) *Si* $\{\lambda_n\}_n$ *es una sucesión de números reales entonces*

$$Y = span\{1,\, t^{\lambda_1},\, t^{\lambda_2}, \ldots\} \text{ es denso en } C[0,1] \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{1 + {\lambda_n}^2} = \infty.$$

Müntz - Szász en espacios $L^p[0,1]$

Si $0 < p < \infty$ y si f es una función compleja definida en $[0,1]$ la cual es medible Lebesgue se define

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{[0,1]} |f|^p dm \right\}^{1/p}$$

Sea $L^p[0,1]$ el conjunto de todas las funciones f para las que verifica

$$\|f\|_p < \infty$$

Una de las propiedades del conjunto $L^p[0,1]$ es que es un espacio vectorial complejo (con las operaciones usuales) y que $\|\cdot\|_p$ define una norma sobre este espacio, al considerar el espacio $L^p[0,1]$ como espacio topológico con respecto a la topología que induce la norma $\|\cdot\|_p$, Borwein y Edyerlin demostrar en el mismo trabajo, el siguiente teorema.

Teorema 4.9 *(***Müntz - Szász en** $L^p[0,1]$*) Si* $\{\lambda_n\}_n$ *es una sucesión de números reales distintos y mayores que* $-1/p$ $\quad (p \in (0,+\infty))$ *entonces son equivalentes*

1. *Span*$\{t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, \ldots, t^{\lambda_n}, \ldots\}$ *es denso en* $L^p[0,1]$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n + 1/p}{(\lambda_n + 1/p)^2 + 1} = \infty.$

Bibliografía

[1] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1966.

[2] G. Bachman and L. Narice *Functional Analysis*, Dover Publications, 2000.

[3] S. N. Berstein, *Colleted Works*, Vol 1, constructive theory of functions, (1905-1930), English translation, Atomic Energy Commission, Springfield, Va, 1958.

[4] P. B. Borwein and T. Erdélyi, *The Full Müntz Theorem in* $C[0,1]$ *and* $L_1[0,1]$, J. London Math. Soc., 54, (1996), 102 - 110.

[5] J. B. Conway, *A course in Functional Analysis*, 2da ed., Springer,1990.

[6] J. B. Conway, *Functions of one complex variable*, 2da ed., Springer-Verlag, 1978.

[7] T. Erdélyi, *The Full Müntz Theorem revisited*, Constr. Approx. 21 (2005), 319 - 335

[8] C. Müntz, *Über den Approximationsatz von Weierstrass*, H. A. Schwartz Festschrift, Berlin (1914) 303-312.

[9] H.L. Royden, *Real Analysis*, The MacMillan Company, 1968.

[10] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3er ed., McGraw-Hill, New York, N.Y., 1987.

[11] O. Szasz, *Über die Approximation Steliger Funktionen Durch Lineare Aggregate von Potenzen*, Math. Ann. 77 (1916), 482 - 496.