Universidad de Los Andes

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

SELECCIONES CONTÍNUAS

Doris Mileidi Pernía Méndez

Trabajo especial de grado: Modalidad Seminario-Monografía

Tutor: Dr. Carlos Uzcátegui.

Mérida, Julio de 2009

SELECCIONES CONTÍNUAS[1]

Requisito Especial de Grado, presentado por:

DORIS M. PERNÍA M.

en la modalidad de Seminario-Monografía para optar al título de:

Licenciada en Matemáticas

Tutor: Dr. CARLOS UZCÁTEGUI[2]

[1]Este trabajo fue parcialmente financiado por Consejo de Desarrollo Científico Humanístico y Tecnológico, CDCHT-ULA, bajo el proyecto: C-1673-09-05-F

[2]Universidad de Los Andes, Departamento de Matemáticas, Grupo de Análisis Funcional, Edificio Teórico de la Facultad de Ciencias, La Hechicera, Mérida 5101, Mérida - Venezuela, uzca@ula.ve.

Con mucho cariño a mi madre cuyo
afecto y comprensión ha sido mi inspiración.

AGRADECIMIENTO

A mi tutor, Dr. Carlos Uzcátegui, que ha sido, para mí, un gran maestro, un profesor y un amigo, por lo que lo siento como un modelo en el sentido profesional y humano. Por su predisposición permanente e incondicional en aclarar mis dudas.

A Mis hermanos, mis padres, por darme la estabilidad emocional, económica, sentimental; para poder llegar hasta este logro, que definitivamente no hubiese podido ser realidad sin ustedes. GRACIAS por darme la posibilidad de que de mi boca salga esa palabra FAMILIA. Madre, serás siempre mi inspiración para alcanzar mis metas, por enseñarme que todo se aprende y que todo esfuerzo es al final recompensa. Tu esfuerzo, se convirtió en tu triunfo y el mío, TE AMO.

A Dios, por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante todo el periodo de estudio.

A José por ayudarme cuando más lo necesité, el darme momentos gratos y la confianza que depositó en mi en todos los aspectos de la vida. también por ser la persona que ha compartido el mayor tiempo a mi lado, porque en su compañía las cosas malas se convierten en buenas, la tristeza se transforma en alegría y la soledad no existe.

A mis amigos Wilson, Jackson, Yeis y Paco quienes compartieron conmigo los momentos más significativos de mi carrera y quienes nunca les falto una palabra de aliento cuando les necesite, LOS QUIERO.

A todos mis amigos pasados y presentes; pasados por ayudarme a crecer y madurar como persona y presentes por estar siempre conmigo apoyándome en todo las circunstancias posibles, también son parte de esta alegría, LOS RECUERDO.

Agradezco a todos quienes han colaborado, ya sea directa o indirectamente a la elaboración de ésta tesis.

A todos los que con su apoyo confiaron en mí.

A todos ustedes MIL GRACIAS de todo corazón. Que Dios los bendiga, porque han sido una bendición en mi vida.

Índice general

Introducción

La teoría de selecciones tiene su inicio con el trabajo de Ernest Michael, "Topologies on spaces of subsets", el cual fue publicado en 1951 (véase [6]) y aun hoy en día el interes en dicha teoría se mantiene vigente. En este trabajo estudiaremos principalmente las selecciones de dos puntos, para lo cual seguiremos [1].

Sea (X, τ) un espacio topológico. Denotaremos por $Sel_2(X)$ al conjunto de todas las selecciones de dos puntos de X, es decir, de todas las funciones $f : \mathcal{F}_2(X) \to X$ tales que $f(\{x, y\}) \in \{x, y\}$, donde $\mathcal{F}_2(X)$ es la familia de todos los subconjuntos de X de dos elementos. Denotaremos por $Sel_2(X, \tau)$ al conjunto de selecciones contínuas cuando a $\mathcal{F}_2(X)$ se dota de la topología de Vietoris.

Este trabajo lo dividiremos en tres capítulos, en el primer capítulo estudiaremos parte de la teoría de hiperespacios, la cual tiene sus inicios con los trabajos de Hausdorff y Vietoris. Dado un espacio topológico (X, τ), el hiperespacio $\mathcal{F}(X)$ de todos los subconjuntos cerrados y no vacíos de X, fue introducido por Vietoris en 1922. Particularmente, estudiaremos algunas propiedades de la topología de Vietoris en hiperespacios.

En el segundo capítulo, veremos que toda selección $f \in Sel_2(X)$ genera una relación, que es casi un orden en X definida por:

$$x_{\prec_f} y \text{ si y sólo si } f(\{x, y\}) = x.$$

Por tanto, consideraremos dicha relación en X y a la topología generada por esta, a la cual denotaremos por τ_f. Estudiaremos además si el conjunto

$$Top(f) = \{\tau : f \in Sel_2(X, \tau)\}$$

tiene elemento mínimo y su posible relación con la topología τ_f.

En el tercer capítulo, nos concentraremos en espacios Hausdorff. Uno de los objetivos de este capítulo es estudiar cuando una selección de dos puntos, es τ_f-contínua. Veremos que si (X, τ) es un espacio compacto y $f \in Sel_2(X, \tau)$, entonces $\tau_f = \tau$ y en particular, $f \in Sel_2(X, \tau_f)$ (véase teorema 3.6). Además si (X, τ) es conexo, y $f \in Sel_2(X, \tau)$, entonces (X, τ_f) es conexo. En particular, $\preceq_f$ es un orden lineal en X y $f \in Sel_2(X, \tau_f)$ (véase teorema 3.9). En el caso del teorema 3.6, este nos dan respuesta a la pregunta de si el conjunto $Top(f)$ tiene elementos minimales. Finalizaremos el capítulo mostrando un critério de continuidad (respecto a la topología τ_f), para selecciones sobre $\mathcal{F}(X)$.

Por otra parte, una pregunta que también resulta interesante pero que no trataremos en este trabajo es, si fijada una topología τ ¿existirá $f \in Sel_2(X, \tau)$? (véase [3, 2]).

Capítulo 1

Preliminares

El propósito de este capítulo es dar algunas definiciones y resultados básicos que se usarán en el desarrollo de este trabajo.

1.1. La topología de Vietoris

1.1.1. Hiperespacios

Definición 1.1 *Sea (X, τ) un espacio topológico T_1 llamaremos hiperespacio del espacio X y lo denotaremos por $\mathcal{F}(X)$, al conjunto formado por todos los subconjuntos cerrados no vacíos del espacio X.*

$$\mathcal{F}(X) = \{C \subseteq X : C \textit{es cerrado y } C \neq \emptyset\}.$$

Definición 1.2 *Sea (X, τ) un espacio topológico T_1, para $n \in \mathbb{N}$ definimos,*

$$\mathcal{F}_n(X) = \{C \subseteq X : C \in \mathcal{F}(X) \textit{ y } 1 \leq \mid C \mid \leq n\}.$$

Notación: Denotaremos por $Fin(X)$ al conjunto $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n(X)$.

1.1.2. Topología de Vietoris en Hiperespacios

Consideremos $V_i \in \tau$ no vacíos para $1 \leq i \leq n$, definimos el conjunto:

$$\langle V_1, \ldots, V_n \rangle = \{C \in \mathcal{F}(X) : C \subseteq \cup_{i=1}^{n} V_i \text{ y } \forall i \leq n \ (C \cap V_i) \neq \emptyset\}.$$

Proposición 1.3 *Sea*

$$\mathcal{B} = \{\langle V_1, \ldots, V_n \rangle : n \in \mathbb{N} \text{ } y \text{ } V_i \in \tau \setminus \{\emptyset\}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n\}$$

$\mathcal{B}$ es una base para una topología en $\mathcal{F}(X)$.

Demostración: Debemos verificar las siguientes condiciones:

1. Si $A \in \mathcal{F}(X)$, entonces existe $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$ tal que $A \in \mathcal{U}$.
2. Si $V = \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$ y $U = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ son elementos de $\mathcal{B}$, y $A \in V \cap U$, existe $S \in \mathcal{B}$ tal que $S \subseteq V \cap U$ y $A \in S$.

En efecto, para verificar 1, notemos que si $A \in \mathcal{F}(X)$ se tiene que $A \subseteq X$. Por lo tanto, $X \cap A \neq \phi$ de lo cual se sigue que $A \in \langle X \rangle$.

Para ver 2, consideremos $V = \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$ y $U = \langle U_1, \ldots, U_k \rangle$ en $\mathcal{B}$, sea $A \in V \cap U$, queremos encontrar $S \in \mathcal{B}$ tal que $S \subseteq V \cap U$ y $A \in S$. Ahora del hecho de que $A \in V \cap U$ se obtiene,

$$A \subseteq \cup_{i=1}^{n} V_i \text{ y } A \cap V_i \neq \emptyset \ \forall i \leq n \tag{1.1}$$

y

$$A \subseteq \cup_{i=1}^{k} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \ \forall i \leq k \tag{1.2}$$

De (2.1) y (2.2) se sigue que dado $x \in A$, existen $l \leq n$ y $m \leq k$ tales que $x \in V_l$ y $x \in U_m$, es decir,

$$x \in V_l \cap U_m. \tag{1.3}$$

Definamos $C = \{(l,m) : V_l \cap U_m \cap A \neq \emptyset\}$ y consideremos para $(l,m) \in C$

$$S_{(l,m)} = V_l \cap U_m.$$

Notemos que C al ser finito se puede escribir como:

$$C = \{(l_{n_1}, m_{t_1}), \ldots, (l_{n_r}, m_{t_p})\}.$$

El abierto S viene a ser:

$$S = \langle S_{(l_{n_1}, m_{t_1})}, \ldots, S_{(l_{n_r}, m_{t_p})} \rangle.$$

Pues si $x \in A$, por (2.4) existen $l_{n_z} \leq n$ y $m_{t_w} \leq k$ tales que:

$$x \in S_{(l_{n_z}, m_{t_w})} \subseteq \cup_{i=1}^{r} \cup_{j=1}^{p} S_{(l_{n_i}, m_{t_j})}$$

y además por definición de $S_{(l,m)}$ se tiene que $A \cap S_{(l_{n_i}, m_{t_j})} \neq \phi, \forall i \leq r$ y $\forall j \leq p$. Por tanto, $A \in \langle S \rangle$.

Resta ver que $S \subseteq V \cap U$. Consideremos $B \in S$, luego

$$B \subseteq \cup_{i=1}^{r} \cup_{j=1}^{p} S_{(l_{n_i}, m_{t_j})}$$

y $B \cap S_{(l_{n_i}, m_{t_j})} \neq \phi$, $\forall i \leq r$ y $\forall j \leq p$. Queremos ver que $B \in V \cap U$, es decir,

$$B \subseteq \cup_{i=1}^{n} \cup_{j=1}^{k} (V_i \cap U_j) \text{ y } B \cap V_i \cap U_j \neq \emptyset \ \forall i \leq n \text{ y } \ \forall j \leq k.$$

Sea $x \in B$, luego existe $(i_0, j_0) \in C$ tal que $x \in S_{(l_{n_{i_o}}, m_{t_{j_0}})}$; por tanto,

$$x \in V_{l_{n_{i_0}}} \cap U_{m_{t_{j_0}}} \subseteq \cup_{i=1}^{n} \cup_{j=1}^{k} (V_i \cap U_j) \text{ y } B \cap V_i \cap U_j \neq \emptyset, \forall i \leq n \text{ y } \forall j \leq k.$$

De esto se deduce que $B \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle \cap \langle U_1, \ldots, U_k \rangle$, así $S \subseteq U \cap V$.

Hemos demostrado así que $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre $\mathcal{F}(X)$.

$\blacksquare$

La topología a la cual hace referencia la proposición anterior, es llamada topología de Vietoris y la denotaremos por τ_v.

Definición 1.4 *Sea U un subconjunto de X, definimos:*

$$U^+ = \{C \in \mathcal{F}(X) : C \subseteq U\} \text{ y } U^- = \{C \in \mathcal{F}(X) : C \cap U \neq \emptyset\}$$

Notemos que si $\emptyset \neq U \subseteq X$ es abierto, entonces U^+ y U^- son elementos de τ_v, pues $U^+ = \langle U \rangle$ y $U^- = \langle U, X \rangle$.

Proposición 1.5 $\langle V_1, \dots, V_n \rangle = (\bigcup_{i=1}^n V_i)^+ \cap (\bigcap_{i=1}^n V_i^-)$.

Demostración:

($\subseteq$) Si $A \in \langle V_1, \dots, V_n \rangle$ se tiene:

1. $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_i$ y
2. $A \cap V_i \neq \emptyset$, $\forall i \leq n$

De 1 se sigue que $A \in (\bigcup_{i=1}^n V_i)^+$ y de 2, se tiene que $A \in V_i^-$, $\forall i \leq n$; así $A \in \bigcap_{i=1}^n V_i^-$. Por lo tanto, $A \in (\bigcup_{i=1}^n V_i)^+ \cap (\bigcap_{i=1}^n V_i^-)$.

($\supseteq$) Sea $A \in (\bigcup_{i=1}^n V_i)^+ \cap (\bigcap_{i=1}^n V_i^-)$, luego $A \in (\bigcup_{i=1}^n V_i)^+$ y $A \in \bigcap_{i=1}^n V_i^-$, de esto se sigue que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_i$ y $A \cap V_i \neq \emptyset$, $\forall i \leq n$. Así $A \in \langle V_1, \dots, V_n \rangle$. ■

Proposición 1.6 *El conjunto*

$$\mathcal{A} = \left\{U^+ : U \subseteq X, U \in \tau_v \setminus \{\emptyset\}\right\} \cup \left\{U^- : U \subseteq X, U \in \tau_v \setminus \{\emptyset\}\right\}$$

es una subbase para τ_v.

Demostración: Se sigue de la proposición 1.5

■

1.1.3. Axiomas de separación en $(\mathcal{F}(X), \tau_v)$

1. $\boldsymbol{(\mathcal{F}(X), \tau_v)}$ **es** $\boldsymbol{T_0}$**.**

   Sean $E, F \in \mathcal{F}(X)$, tales que $E \neq F$. Si $F \cap E = \emptyset$, entonces $F \in (X \setminus E)^+$ y $X \setminus E$ es un abierto. Ahora si $F \setminus E \neq \emptyset$, entonces $F \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $F \in (X \setminus E)^-$.

   ■

2. **Si** $\boldsymbol{(X, \tau)}$ **es** $\boldsymbol{T_1}$**, entonces** $\boldsymbol{(\mathcal{F}(X), \tau_v)}$ **es** $\boldsymbol{T_1}$.

   Sean $E, F \in \mathcal{F}(X)$. Tomemos $a \in F \setminus E$, entonces $\{a\}$ es un cerrado de X y por lo tanto, $X \setminus \{a\}$ es abierto. Luego como $a \in F \cap (X \setminus E)$, se tiene que $F \in (X \setminus E)^-$ y como $a \notin E$, $E \subseteq X \setminus \{a\}$, de lo cual se tiene que $E \in (X \setminus \{a\})^+$. Ahora, Si $a \in E \setminus F$, se obtiene de manera análoga que $E \in (X \setminus F)^-$ y $F \in (X \setminus \{a\})^+$.

   ■

3. $\boldsymbol{(X, \tau)}$ **es regular si y sólo si,** $\boldsymbol{(\mathcal{F}(X), \tau_v)}$ **es** $\boldsymbol{T_2}$.

   $(\Rightarrow)$ Supongamos que X es regular, mostraremos que $\mathcal{F}(X)$ es T_2. Sean $E, F \in \mathcal{F}(X)$ con $F \neq E$, supongamos sin perder generalidad que existe $a \in F \setminus E$. Como X es regular y E es cerrado, existen $U, V \in \tau$ tales que $U \cap V = \emptyset$ y $a \in U$, $E \subseteq V$, luego $E \in V^+$ y $F \in U^+$.

   $(\Leftarrow)$ Supongamos que X es T_2, mostremos que X es regular.

   Sea $E \subseteq X$ cerrado y $a \in X \setminus E$, siendo $\mathcal{F}(X)$ T_2 y $\{a\}$ un cerrado de X, tenemos que $E \cup \{a\}$ es cerrado. Luego existen abiertos $\langle U_1, \ldots, U_k \rangle$ y $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle$ disjuntos tales que $E \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$ y $E \cap \{a\} \in \langle U_1, \ldots, U_k \rangle$, de esto último $E \subseteq \cup_{i=1}^{n} V_i$, $E \cap V_i \neq \emptyset$, $E \cup \{a\} \subseteq \cup_{j=1}^{k} U_j$ y $(E \cup \{a\}) \cap U_j \neq \emptyset$.

Si $a \in V_i$ para algún i, entonces $E \cup \{a\} \subseteq \cup_{i=1}^{k} V_i$ y $(E \cup \{a\}) \cap V_i \neq \emptyset$ $\forall i$, con lo cual $E \cup \{a\} \leq \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$, lo cual contradice que $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle \cap \langle U_1, \ldots, U_k \rangle = \emptyset$. Por lo tanto, $a \notin V_i$ $\forall i \leq n$. Notemos además que E no intersecta a todos los U_j para $j \leq k$ pues si fuera así, $E \subseteq E \cup \{a\} \subseteq \cup_{j=1}^{k} U_j$ con lo que $E \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle \cap \langle U_1, \ldots, U_k \rangle$ lo cual es una contradicción.

Consideremos ahora $j \leq k$ tal que $E \cap U_j = \emptyset$; entonces $a \in U_j$ y se tiene que $E \subseteq \cup_{i=1}^{n} V_i$ y $a \in \cap\{U_j : 1 \leq j \leq k \text{ y } E \cap U_j = \emptyset\} = N$.
Si $(\cup_{i=1}^{n} V_i) \cap N \neq \emptyset$, existirían $b \in N$ y $1 \leq i \leq n$ tal que $b \in V_i$, luego $E \cup \{b\} \subseteq \cup_{i=1}^{n} V_i$ y $E \cup \{b\} \subseteq \cup_{j=1}^{k} U_j$, de lo cual se sigue que

$$E \cup \{b\} \in \langle U_1, \ldots, U_k \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$$

lo cual también es una contradicción.

■

1.1.4. Propiedades de $(\mathcal{F}(X), \tau_v)$

1. ***Fin(X)* es denso.**

Demostración: Recordemos que $\mathcal{F}_n(X) \subseteq \mathcal{F}(X)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, por tanto $Fin(X) \subseteq \mathcal{F}(X)$. Además como $\mathcal{F}_n(X)$ es cerrado $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\overline{\mathcal{F}_n(X)} = \mathcal{F}_n(X) \subseteq \mathcal{F}(X)$. así $\overline{Fin(X)} \subseteq \mathcal{F}(X)$.

Veamos ahora que $\mathcal{F}(X) \subseteq \overline{Fin(X)}$. Sea $A \in \mathcal{F}(X)$ y consideremos $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle \in \tau_v$ tal que $A \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$, veamos que $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle \cap Fin(X) \neq \emptyset$; como $A \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$ tenemos que $A \subseteq \cup_{i=1}^{n} V_i$ y $A \cap V_i \neq \emptyset$, $\forall i \leq n$.

Para cada $i \leq n$ consideremos $x_i \in A \cap V_i$, entonces $\{x_i, \ldots, x_n\} \subseteq A \subseteq \cup_{i=1}^{n} V_i$ y $\{x_i\} = \{x_1, \ldots, x_n\} \cap V_i \neq \emptyset$, de esto se sigue que

$$\{x_1, \ldots, x_n\} \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle \cap Fin(X).$$

Por tanto $\mathcal{F}(X) \subseteq \overline{Fin(X)}$, así $Fin(X)$ es denso.

■

2. **Si $\emptyset \neq C_i \subseteq X$, $\forall i \leq n$, entonces $\overline{\langle C_1, \ldots, C_n \rangle} = \langle \overline{C_1}, \ldots, \overline{C_n} \rangle$.**

Demostración:

($\subseteq$) Sea

$$F \in \overline{\langle C_1, \ldots, C_n \rangle} \tag{1.4}$$

Queremos ver que

$$F \in \bigcup_{i=1}^{n} \overline{C_i}, \text{ y } F \cap \overline{C_i} \neq \emptyset, \forall i \leq n.$$

Recordemos que $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{C_i} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} C_i}$ $(*)$, por lo tanto resta ver que $F \cap \overline{C_i} \neq \emptyset$, $\forall i \leq n$.

Consideremos $a \subseteq F$ y sea $U \in \tau$ tal que $a \in U$.

Caso 1: $F \in U$. En este caso $F \in \langle U \rangle \in \tau_v$. De (2.3) se sigue que $\langle U \rangle \cap \langle C_1, \ldots, C_n \rangle \neq \emptyset$, sea $C \in \langle U \rangle \cap \langle C_1, \ldots, C_n \rangle$, entonces $C \subseteq U$ y $C \subseteq \cup_{i=1}^{n} C_i$ y $C \cap C_i \neq \emptyset$, $\forall i \leq n$. Como $C \subseteq U$ se sigue que $U \cap (\cup_{i=1}^{n} C_i) \neq \emptyset$, por tanto, $a \in \overline{\cup_{i=1}^{n} C_i}$.

Caso 2: $F \cap U^c \neq \emptyset$, luego $F \in \langle U, X \rangle$, (2.3) implica que $\langle U, X \rangle \cap \langle C_1, \ldots, C_n \rangle \neq \emptyset$, de lo cual se sigue que $C \cap U \neq \emptyset$, $C \subseteq \cup_{i=1}^{n} C_i$ así, $U \cap (\cap_{i=1}^{n} C_i) \neq \emptyset$. Por lo tanto,

$a \in \overline{\cup_{i=1}^{n} C_i}$.

($\supseteq$) Sea

$$F \in \langle \overline{C_1}, \ldots, \overline{C_n} \rangle \tag{1.5}$$

fijemos $U = \langle U_1, \ldots, U_k \rangle \in \tau_v$ tal que $F \in \langle U_1, \ldots, U \rangle$, mostraremos que

$$U \cap \langle C_1, \ldots, C_n \rangle \neq \emptyset$$

Llamemos $C = \langle C_1, \ldots, C_n \rangle$. De (2.6) y de que $F \in \langle U_1, \ldots, U_k \rangle$ se sigue que:

$$F \subseteq \cup_{j=1}^{n} \overline{C_j} = \overline{\cup_{j=1}^{k} C_j} \;\; \text{y} \;\; \forall j \leq k \; F \cap \overline{C_j} \neq \emptyset$$

además,

$$F \subseteq \cup_{j=1}^{n} U_j \;\; \forall l \leq k \; F \cap U_l \neq \emptyset$$

Fijemos $q_i \in F \cap \overline{C_i}$ y $u_l \in F \cap U_l$, para cada $i \leq n$ y cada $l \leq k$.

Ahora como $F \subseteq \overline{\cup_{j=1}^{n} C_j}$, y $u_l \in F \cap U_l$, existe $z_l \in U_l \cap (\cup_{j=1}^{n} C_j)$. De igual manera, como $F \subseteq \cup_{j=1}^{n} U_j$ y $q_i \in F \cap \overline{C_i}$, existe $r_i \in C_i \cap (\cup_{j=1}^{k} U_j)$. Tomemos $K = \{z_l : l \leq k\} \cup \{r_i : i \leq n\}$ y veamos que $K \in V \cap C$; en efecto, notemos que:

$$z_l \in U_l \cap (\cup_{j=1}^{n} C_j) \subseteq (\cup_{j=1}^{k} U_j) \cap (\cup_{j=1}^{n} C_j), \quad \forall l \leq k$$

y

$$r_i \in C_i \cap (\cup_{j=1}^{k} U_j) \subseteq (\cup_{j=1}^{n} C_j) \cap (\cup_{j=1}^{k} U_j), \quad \forall i \leq n$$

Por lo tanto, $K \subseteq \cup_{j=1}^{k} U_j$ y $K \subseteq \cup_{j=1}^{n} C_j$, además $r_i \in K \cap C_i$ y $z_l \in K \cap U_l$, así $\in K \cap C_i \neq \emptyset$ y $\in K \cap U_l \neq \emptyset$. Por tanto, $K \in V \cap V$.

■

3. **Si $C \in \mathcal{F}(X)$, entonces $\mathcal{F}(C)$ es un subespacio cerrado de X.**

Demostración: Basta ver que $\overline{\mathcal{F}(C)} \subseteq \mathcal{F}(C)$. En efecto, consideremos $F \in \overline{\mathcal{F}(C)}$, luego para cada $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle \in \mathcal{B}$ con $F \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$ se tiene que

$$\langle V_1, \ldots, V_n \rangle \cap \mathcal{F}(C) \neq \emptyset \tag{1.6}$$

Queremos ver que $F \subseteq C$. Sea $a \in F$ como C es cerrado, $C = \overline{C}$ mostraremos que $a \in \overline{C}$. Tomemos $U \in \tau$ tal que $a \in U$, entonces $F \in \langle U, X \rangle$ y por (1.6) podemos considerar $K \in \langle U, X \rangle \cap \mathcal{F}(C)$, de esto se sigue que

$$K \cap U \neq \emptyset \text{ y } K \subseteq C$$

De lo cual se deduce que $U \cap C \neq \emptyset$. Por lo tanto $a \in \overline{C} = C$, y al ser F cerrado y no vacío se tiene que $F \in \mathcal{F}(C)$.

■

Definición 1.7 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos*

$$f_n : X^n \longrightarrow \mathcal{F}_n(X)$$

como

$$f_n((x_1, \ldots, x_n)) = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

Teorema 1.8 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n es contínua y sobreyectiva.*

Demostración: Sea $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$, pongamos $f_n(x) = \{y_1, \ldots, y_k\}$, $k \leq n$ y $y_i \neq y_j$ si $j \neq i$ y $j, i \leq k$. Sea $\langle V_1, \ldots, V_l \rangle \cap \mathcal{F}_n(X) = V$ un abierto que contenga a $f_n(x)$. Buscamos un abierto $U_1 \times, \ldots, \times U_n$ de X^n que contenga a x tal que
$\mathcal{F}_n(U_1 \times, \ldots, \times U_n) \subseteq V$.

1. Si $k > l$, digamos $k = l + r$, entonces

$$\langle V_1, \ldots, V_n \rangle = \langle V_1, \ldots, V_l, \overbrace{V_1, \ldots, V_1}^{r\text{-veces}} \rangle.$$

2. Si $k < l$, digamos $k + r = l$, existen indices $k_1, \ldots, k_l$ tales que

$$y_{k_1} \in V_{k+1}, \ldots, y_{k_l} \in V_{k+r}.$$

Luego,

$$V^* = \langle V_1, \ldots, V_{k_1} \cap V_{k+1}, \ldots, V_{k_2} \cap V_{k+2}, \ldots, V_{k_r} \cap V_{k+r}, \ldots, V_k \rangle \cup \langle V_1, \ldots, V_l \rangle$$

y buscamos el abierto $U_1 \times, \ldots, \times U_n$ para el abierto V^* que tiene k abiertos.

Por tanto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $l = k$ y $y_i \in V_i$. Supongamos que $y_i = x_{r_1}, \ldots, x_{r_i},\ r_i \leq n$, notemos que
$\cup_{i=1}^{k} \{r_1, \ldots, r_i\} = \{1, \ldots, n\}$. Tomemos $U_{r_s} = V_{r_s},\ 1 \leq s \leq i$.

Por construcción $\mathcal{F}_n(U_1 \times, \ldots, \times U_n) = \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$. Por lo tanto f_n es contínua.

Veamos ahora que f_n es sobreyectiva para cada $n \in \mathbb{N}$, basta observar que para todo elemento de $\mathcal{F}_n(X)$ se puede escribir de la forma $(x_1, \ldots, x_n)$ pues si tenemos un conjunto de menos de n elementos podemos repetir algunos y esto no altera al conjunto.

$\blacksquare$

Nota: En general, f_n no es una función abierta pues si consideramos X un espacio T_1 con $\emptyset \neq U, V \subseteq X$ abiertos, y $U \cap V = \emptyset$. Si $x \in U$ no es un punto aislado, entonces $f_3(U \times V \times V) \neq \langle U, V \rangle \cap f_3(X)$.

Teorema 1.9 *Sea* (X,τ) *regular,* $(\mathcal{F}(X),\tau_v)$ *es compacto si, y sólo si,* (X,τ) *es compacto.*

Demostración:
($\Rightarrow$) Como $X \subseteq \mathcal{F}(X)$, X es cerrado, al ser $F(X)$ compacto por hipótesis se sigue que X es compacto.
($\Leftarrow$) Usaremos para esta implicación el teorema de Alexander el cual dice: Un conjunto X es compacto si, y sólo si todo cubrimiento abierto de subbásicos posee un subcubrimiento finito. En efecto sea $U = \{U_i^+ : i \in I\} \cup \{V_j^- : j \in J\}$, un cubrimiento de subbásicos de $\mathcal{F}(X)$, supongamos que $F = X \setminus (\cup_{j\in J} V_j) \neq \emptyset$. Ahora si $F \in \mathcal{F}(X)$, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $F \in U_{i_0}^+$ luego $F \subseteq U_{i_0}$, además $X \setminus U_{i_0}$ es cerrado y $X \setminus U_{i_0} \subseteq \cup_{j\in J} V_j$. Por tanto, existen $j_1, \ldots, j_n \in J$ tales que $X \setminus U_{i_0} \subseteq \cup_{l=1}^{n} V_{j_l}$; luego el subcubrimiento que estamos buscando es:

$$\{U_{i_0}^+, V_{j_1}^-, \ldots, V_{j_n}^-\}$$

pues si $E \in \mathcal{F}(X)$, si $E \cap V_{j_l} \neq \emptyset \ \forall l \leq n$ entonces $E \subseteq U_{i_0}$ por tanto $E \in U_{i_0}^+$.

$\blacksquare$

Teorema 1.10 *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n(X)$ *es conexo si, y sólo si,* (X,τ) *es conexo.*

Demostración:
($\Rightarrow$) Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Como X es conexo, se tiene que X^n es conexo. Luego del teorema 1.8 se sigue que $\mathcal{F}_n(X)$ es la imagen del conexo X^n bajo la función contínua f_n. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(X)$ es conexo.
($\Leftarrow$) Fijemos $n \in \mathbb{N}$, luego si X no es conexo existe $U \subseteq X$ tal que U es un conjunto abierto-cerrado no trivial. Por tanto $\langle U, X \setminus U\rangle \cap \mathcal{F}_n(X)$ es un conjunto abierto cerrado no trivial en $\mathcal{F}_n(X)$. Así $\mathcal{F}_n(X)$ no es conexo.

$\blacksquare$

Teorema 1.11 *$(\mathcal{F}(X), \tau_v)$ es conexo si, y sólo si (X, τ) es conexo.*

Demostración:

$(\Rightarrow)$ Si X no es conexo existe, $V \subseteq X$ tal que V es un conjunto abierto-cerrado no trivial. Por tanto $\langle V, X \setminus V \rangle$ es un conjunto abierto cerrado no trivial en $\mathcal{F}(X)$. Por tanto, $(\mathcal{F}(X), \tau_v)$ no es conexo.

$(\Leftarrow)$ Por el teorema anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathcal{F}_n(X)$ es conexo. Además $\mathcal{F}_1(X) \subseteq F_n(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por tanto, $Fin(X)$ es la unión de conjuntos conexos cuya intersección es $\mathcal{F}_1(X)$. Por lo tanto, $Fin(X)$ es conexo. Además $\overline{Fin(X)}$ es conexo. Luego como $Fin(X)$ es denso en $\mathcal{F}(X)$ se tiene que $\mathcal{F}(X)$ es conexo, pues
$\overline{Fin(X)} = \mathcal{F}(X)$.

■

Capítulo 2

Selecciones sobre $\mathcal{F}_2(X)$

Recordemos que $Sel_2(X)$ denota al conjunto de todas las selecciones de dos puntos sobre $\mathcal{F}_2(X,\tau)$ y $Sel_2(X,\tau)$, denota al conjunto de todas las selecciones que son contínuas sobre $\mathcal{F}_2(X)$.

Toda selección $f \in Sel_2(X)$ genera una relación, que es casi un orden en X definida por:

$$x_{\prec_f} y \text{ si y sólo si } f(\{x,y\}) = x.$$

Consideraremos dicha relación en X y a la topología generada por esta, la cual denotaremos por τ_f. En el presente capítulo estudiaremos si el conjunto

$$Top(f) = \{\tau : f \in Sel_2(X,\tau)\}$$

tiene elemento mínimo y su posible relación con la topología τ_f.

2.1. Una topología generada por selecciones

Definición 2.1 *Una función $f : \mathcal{F}(X) \to X$ es una selección si para todo $F \in \mathcal{F}(X)$ se tiene que $f(F) \in F$.*

Definición 2.2 *Sea X un conjunto infinito, $f : \mathcal{F}_2(X) \to X$ es una selección de dos puntos si para todo $\{x, y\} \in \mathcal{F}_2(X)$ se tiene que $f(\{x, y\}) \in \{x, y\}$.*

Ejemplo 2.3 *$f : \mathcal{F}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definida por $f(\{x, y\}) = y$ si $x < y$.*

Ejemplo 2.4 *$f(\{a, b\}) = \text{mín}_{\leq}\{a, b\}$ ó $g(\{a, b\}) = \text{máx}_{\leq}\{a, b\}$ donde $\leq$ es un orden lineal sobre un conjunto X.*

Denotaremos por $Sel_2(X)$ al conjunto de las funciones que son selecciones de dos puntos, es decir,

$$Sel_2(X) = \{f : f \text{ es una selección de dos puntos.}\}$$

Dada $f \in Sel_2(X)$, ella define naturalmente una relación de la manera siguiente:

$$x \prec_f y, \text{ si } f(\{x, y\}) = x$$

$$x \preceq_f y, \text{ si } x = y \text{ ó } x \prec_f y$$

Notemos que $\preceq_f$ es reflexiva, antisimétrica y lineal pero en general no es transitiva, como nos muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.5 *Consideremos $(\mathbb{N}, \leq)$ donde $\leq$ denota el orden usual en $\mathbb{N}$. Definamos $f : \mathcal{F}_2(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ como sigue:*

$$f(\{x, y\}) = \begin{cases} 2 & si\ \{x, y\} = \{0, 2\} \\ \text{mín}_{\leq}\{x, y\} & si\ \{x, y\} \neq \{0, 2\} \end{cases}$$

Se tiene que $0 \prec_f 1$ *y* $1 \prec_f 2$ *pero* $0 \not\prec_f 2$.

Definición 2.6 *Dada* $f \in Sel_2(X)$ *definimos:*

$$(-\infty, x)_{\prec_f} = \{y \in X : y \prec_f x\} \quad , (-\infty, x]_{\prec_f} = \{y \in X : y \preceq_f x\}$$

y

$$(x, +\infty)_{\prec_f} = \{y \in X : x \prec_f y\} \quad , [x, +\infty)_{\prec_f} = \{y \in X : x \preceq_f y\}$$

también

$$(x, y)_{\prec_f} = (-\infty, y)_{\prec_f} \cap (x, +\infty)_{\prec_f}$$

Denotaremos por τ_f a la topología cuyos abiertos subbásicos son de la forma $(-\infty, x)_{\prec_f}$ ó $(x, +\infty)_{\prec_f}$. Por tanto, un elemento básico de τ_f es de la forma

$$\Big(\bigcap_{i \leq n} (-\infty, x_i)_{\prec_f}\Big) \cap \Big(\bigcap_{j \leq m} (y_i, +\infty)_{\prec_f}\Big).$$

Este último párrafo, nos conduce a la siguiente pregunta:

¿El conjunto $\mathcal{B} = \{(a, b)_{\prec_f} : a, b \in X, a \prec_f b\}$ es una base para τ_f?

En el ejemplo que sigue mostraremos que en general la respuesta es negativa.

Ejemplo 2.7 *Consideremos* $(\mathbb{N}, \leq)$ *donde* $\leq$ *denota el orden usual en* $\mathbb{N}$. *Sea* $f : \mathcal{F}_2(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ *definida por:*

$$\begin{cases} f(\{0, 2\}) = 2 & \\ f(\{2, y\}) = y & \text{si } y \in \mathbb{N} \setminus \{0, 2\} \\ f(\{x, y\}) = \min_{\leq}\{x, y\} & \text{si } \{x, y\} \notin \{\{0, 2\}, \{2, y\}\} \end{cases}$$

Si $\mathcal{B}$ es una base para τ_f, en particular $2 \in (a,b)_{\prec_f}$, para algún $(a,b)_{\prec_f} \in \mathcal{B}$. De esto se sigue que $a \prec_f 2 \prec_f b$. además por definición de $(a,b)_{\prec_f}$, se tiene que $a \prec_f b$. De la definición de f, se sigue que $b = 0$ y $a \in \mathbb{N} \setminus \{2,0\}$. Por tanto, $b \preceq_f a$ contradiciendo que $a \prec_f b$.

■

Es natural preguntarse si el hecho de que $\mathcal{B}$ sea una base tiene que ver con la transitividad de la relación $\preceq_f$. El siguiente ejemplo nos muestra que en general no es cierto.

Ejemplo 2.8 *Consideremos $f : \mathcal{F}_2(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ definida por:*

$$f(\{x,y\}) = \begin{cases} 2 & si\ \{x,y\} = \{0,2\} \\ \text{mín}_{\leq}\{x,y\} & si\ \{x,y\} \neq \{0,2\} \end{cases}$$

En este caso los intervalos de la forma $(a,b)_{\prec_f}$ generan a τ_f que en este caso es la topología discreta pues:

$$(-\infty,3)_{\prec_f} \cap (2,+\infty)_{\prec_f} = (2,3)_{\prec_f} = \{0\}$$
$$(-\infty,3)_{\prec_f} \cap (0,+\infty)_{\prec_f} = (0,3)_{\prec_f} = \{1\}$$
$$(-\infty,3)_{\prec_f} \cap (1,+\infty)_{\prec_f} = (1,3)_{\prec_f} = \{2\}$$
$$(-\infty,4)_{\prec_f} \cap (2,+\infty)_{\prec_f} = (2,4)_{\prec_f} = \{3\}$$
$$(-\infty,5)_{\prec_f} \cap (3,+\infty)_{\prec_f} = (3,5)_{\prec_f} = \{4\}$$
$$\vdots$$
$$(-\infty,n+1)_{\prec_f} \cap (n-1,+\infty)_{\prec_f} = (n-1,n+1)_{\prec_f} = \{n\}, \quad para\ 5 \leq n$$

Sin embargo, $\preceq_f$ no es transitiva como vimos en el ejemplo 2.5.

■

Sin embargo queda abierta la posibilidad de que en los intervalos $(a,b)_{\prec_f}$, con $a \prec_f b$ forman una base, inclusive si $a \not\prec_f b$.

Proposición 2.9 *Sea X un espacio T_1 y sea $f \in Sel_2(X)$, entonces para todo $x \in X$, se cumple lo siguiente:*

1. $(-\infty, x)_{\prec_f} \cap (x, +\infty)_{\prec_f} = \emptyset$.

2. $(-\infty, x]_{\prec_f} \cup [x, +\infty)_{\prec_f} = X$

Demostración: Se sigue del hecho de que $\preceq_f$ es un orden lineal.

■

Proposición 2.10 *Sea X un conjunto, $f \in Sel_2(X)$ y sean $x, y, z \in X$ tales que*

$$z \prec_f x \prec_f y \prec_f z.$$

Entonces $(-\infty, x]_{\prec_f} \cap [y, +\infty)_{\prec_f}$ es un abierto-cerrado de (X, τ_f) que separa a z del conjunto de dos puntos $\{x, y\}$.

Demostración: Notemos que $y \notin (-\infty, x]_{\prec_f}$ y también que $x \notin [y, +\infty)_{\prec_f}$. Por tanto,

$$(-\infty, x]_{\prec_f} \cap [y, +\infty)_{\prec_f} = (-\infty, x)_{\prec_f} \cap (y, +\infty)_{\prec_f}$$

Esto muestra que en efecto $(-\infty, x]_{\prec_f} \cap [y, +\infty)_{\prec_f}$ es un abierto-cerrado en (X, τ_f).

■

Este teorema nos dice que si $\prec_f$ no es transitiva, entonces (X, τ_f) no es conexo pues como acabamos de ver este posee conjuntos abiertos-cerrados no triviales.

Teorema 2.11 *El espacio (X, τ_f) es Hausdorff.*

Demostración: Sean $x, y \in X$ y supongamos sin perder generalidad que $x \prec_f y$. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1: $(x, y)_{\prec_f} = \emptyset$. En este caso $y \in U = (x, +\infty)_{\prec_f}$ y $x \in V = (-\infty, y)_{\prec_f}$, luego V y U son abiertos que separan a y de x pues $V \cap U = \emptyset$.

Caso 2: Existe $z \in (x, y)_{\prec_f}$, luego $x \in (-\infty, z)_{\prec_f}$ y $y \in (z, +\infty)_{\prec_f}$ así los abiertos $(-\infty, z)_{\prec_f}$ y $(z, +\infty)_{\prec_f}$ separan a y de x.

■

2.2. Selecciones contínuas

Dada $f \in Sel_2(X)$, en esta sección estudiaremos las posibles topologías Hausdorff que hagan a f contínua. Dada $f \in Sel_2(X)$, recordemos que

$$Top(f) = \{\tau : f \in Sel_2(X, \tau)\}.$$

En primer lugar veremos que $Top(f) \neq \emptyset$.

Proposición 2.12 *Sea τ la topología discreta sobre X, entonces $\tau \in Top(f)$.*

Demostración:

Sea $f \in Sel_2(X)$, tomemos $\{x, y\} \in \mathcal{F}_2(X)$ y $U \in \tau$ tal que $f(\{x, y\}) \in U$. Notemos que $\{\{x, y\}\} = \langle \{x\}, \{y\} \rangle \in \tau_v$. Luego, $f(\langle \{x\}, \{y\} \rangle) = f(\{\{x, y\}\}) \subseteq U$, con lo cual hemos mostrado que $f \in Sel_2(X, \tau)$.

■

Notemos que hemos probado que $\mathcal{F}_2(X)$, es discreto.

Esta proposición nos muestra que existe al menos una topología que hace a toda selección de dos puntos contínua. Esta no es la única topología con esta propiedad, como veremos el la proposición 2.22.

A continuación mostraremos una caracterización de la continuidad para selecciones de dos puntos.

Teorema 2.13 *Sea (X,τ) un espacio topológico Hausdorff y sea $f \in Sel_2(X)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$f \in Sel_2(X,\tau)$.*

2. *Para todo par de puntos $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \prec_f x_2$, existen $V_1, V_2 \in \tau$ tales que $x_i \in V_i$, $i = 1, 2$ y $z_1 \prec_f z_2$, para todo $z_i \in V_i$ $i = 1, 2$.*

Demostración:
(1) $\Rightarrow$ (2) Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \prec_f x_2$. Por tanto $x_1 \neq x_2$, al ser (X,τ) es Hausdorff existen $U_1, U_2 \in \tau$ tales que $x_i \in U_i$, $i = 1, 2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Como $x_1 \prec_f x_2$ se tiene que $f(\{x_1, x_2\}) = x_1 \in U_1$.

además como $U_1, U_2 \in \tau$ existe $W_1, W_2 \in \tau$ tales que $x_i \in W_i \subseteq U_i$ $i = 1, 2$. Sabemos que $f \in Sel_2(X,\tau)$ por tanto, existen $O_1, O_2 \in \tau$ tales que $\{x_1, x_2\} \in \langle O_1, O_2 \rangle$.

Consideremos $V_i = W_i \cap O_i$, luego $\{x_1, x_2\} \in \langle V_1, V_2 \rangle$ y $f(\langle V_1, V_2 \rangle) \subseteq U_1$. Por otra parte como $V_i \subseteq U_i$ $i = 1, 2$ y $f(\langle V_1, V_2 \rangle) \subseteq U_1$ se tiene que para todo $z_i \in V_i$ $i = 1, 2$, $z_1 \prec_f z_2$.
(2) $\Rightarrow$ (1) Notemos que f es contínua en los conjuntos unitarios de X, pues dado $x \in X$, y $U \in \tau$ tal que $f(\{x\}) \in U$ se tiene que $\{x\} \in \langle U \rangle$ y $f(\langle U \rangle) \subseteq U$.

Consideremos ahora $\{x_1, x_2\} \in \mathcal{F}_2(X)$ y sea $U \in \tau$ tal que $f(\{x_1, x_2\}) = x_1 \in U$. Como $x_1 \prec_f x_2$, por hipótesis existen $V_1, V_2 \in \tau$ tales que $x_i \in V_i$ $i = 1, 2$ y para todo $z_i \in V_i$ $i = 1, 2$, $z_1 \prec_f z_2$. Luego $f(\langle V_1 \cap U, V_2 \rangle \cap \mathcal{F}_2(X)) \subseteq U$.

∎

Corolario 2.14 *Sea $\leq$ un orden lineal sobre X y τ la topología del orden asociada a $\leq$. Si $f(\{x,y\}) = \text{mín}_{\leq}\{x,y\}$, entonces $f \in Sel_2(X,\tau)$.*

Demostración: Usaremos el teorema 2.13 para mostrar que f es continua. Sean $x_1, x_2 \in X$, tales que $x_1 \prec_f x_2$. Consideremos dos casos: Si existe $z \in X$, tal que $x_1 \prec_f z \prec_f x_2$ se tiene que $x_1 \in (-\infty, z) \in \tau(\leq)$ y $x_2 \in (z, +\infty) \in \tau(\leq)$. Además para todo $z_1 \in (-\infty, z)$ y $z_2 \in (z, +\infty)$ $z_1 \prec_f z_2$.

Si $(x_1, x_2) = \emptyset$, entonces para todo $z_1 \in (-\infty, x_2)$ y $z_2 \in (x_1, +\infty)$ $z_1 \prec_f z_2$. Luego del teorema 2.13 se sigue que f es contínua.

■

Corolario 2.15 *Sea (X,τ) un espacio Hausdorff y sea $f \in Sel_2(X,\tau)$. Entonces $f \in Sel_2(X,\tilde{\tau})$ para toda topología $\tilde{\tau}$ en X mas fina que τ.*

Demostración: Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \prec_f x_2$, como $f \in Sel_2(X,\tau)$ por la proposición 2.13 existen $V_1, V_2 \in \tau$ tales que $x_i \in V_i$ $i = 1,2$ y para todo $z_i \in V_i$ $i = 1,2$ $z_1 \prec_f z_2$.

Como $\tau \subseteq \tilde{\tau}$ se tiene que $V_1, V_2 \in \tilde{\tau}$, de la proposición 2.13 se sigue que $f \in Sel_2(X,\tilde{\tau})$.

■

Lema 2.16 *Sea (X,τ) un espacio T_1 y $f \in Sel_2(X,\tau)$. Entonces $(-\infty, x)_{\prec_f} \in \tau$, para todo $x \in X$.*

Demostración: Sea $x \in X$, consideremos $z \in (-\infty, x)_{\prec_f}$. Al ser X un espacio T_1, existe $U \in \tau$ tal que $z \in U$ y $x \notin U$. Como $f \in Sel_2(X,\tau)$ y $f(\{x,z\}) = z$, existen $V, W \in \tau$

tales que $x \in V$ y $z \in W$, además $f(\langle U, W\rangle) \subseteq U$.

Sea $y \in W$, entonces $\{x, y\} \in \langle V, W\rangle$. Como $f(\{x, y\}) \in U$ y $x \notin U$ se tiene que $f(\{x, y\}) = y$. Por tanto, $y \prec_f x$ así $y \in (-\infty, x)_{\prec_f}$. Esto muestra que $W \subseteq (-\infty, x)_{\prec_f}$, por lo tanto $(-\infty, x)_{\prec_f} \in \tau$.

■

A cada selección $f \in Sel_2(X)$, podemos asociar otra selección $f^* : \mathcal{F}_2(X) \to X$ definida por $f^*(\{x, y\}) = y$ si y sólo si, $f(\{x, y\}) = x$. Por consiguiente f^* y f generan la misma familia de intervalos, de esto se deduce la siguiente proposición.

Proposición 2.17 *Si $f \in Sel_2(X)$, entonces $\tau_f = \tau_{f^*}$.*

Demostración: Se sigue del hecho de que

$$(x, +\infty)_{\prec_f} = (-\infty, x)_{\prec_{f^*}} \text{ y } (x, +\infty)_{\prec_{f^*}} = (-\infty, x)_{\prec_f}$$

■

Teorema 2.18 *Para un espacio (X, τ) T_1 y $f \in Sel_2(X, \tau)$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio Hausdorff.*

2. *$f^* \in Sel_2(X, \tau)$.*

3. *$\tau_f \subseteq \tau$.*

Demostración:

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea (X, τ) un espacio Hausdorff. Como $f \in Sel_2(X, \tau)$, por el teorema 2.13, dados $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \prec_f x_2$ existen $V_1, V_2 \in \tau$ tales que $x_i \in V_i$, $i = 1, 2$ y $z_1 \prec_f z_2$

para todo $z_i \in V_i$, $i = 1, 2$. Luego $x_2 \prec_{f^*} x_1$ por tanto, V_1, V_2 son tales que $x_i \in V_i$, $i = 1, 2$ y $z_2 \prec_{f^*} z_1$ para todo $z_i \in V_i$, $i = 1, 2$. Por el teorema 2.13 se tiene que $f^* \in Sel_2(X, \tau)$.
(2) $\Rightarrow$ (3) Supongamos que $f^* \in Sel_2(X, \tau)$. Por hipótesis (X, τ) es T_1 luego por el lema 2.16 se tiene que $(-\infty, x)_{\prec_{f^*}} = (x, +\infty)_{\prec_f} \in \tau$; además como $f \in Sel_2(X, \tau)$ de nuevo por el lema 2.16 $(-\infty, x)_{\prec_f} \in \tau$, para todo $x \in X$. Por tanto, $\tau_f \subseteq \tau$.
(3) $\Rightarrow$ (1) Del teorema 2.11 sabemos que τ_f es Hausdorff. Por hipótesis, $\tau_f \subseteq \tau$ de lo cual se sigue que (X, τ) es un espacio Hausdorff.

■

Corolario 2.19 *Si $f \in Sel_2(X, \tau_f)$, entonces τ_f es la topología Hausdorff minimal que hace a f contínua.*

Demostración: Del teorema 2.11 se sigue que (X, τ_f), es Hausdorff. Luego dada τ una topología tal que $f \in Sel_2(X, \tau)$. Sea $f \in (X, \tau)$, tal que $\tau \subseteq \tau_f$. Queremos ver que $\tau = \tau_f$, del teorema 2.18 se tiene que $\tau_f \subseteq \tau$. Por tanto $\tau = \tau_f$, con lo cual hemos mostrado que τ_f es minimal.

■

Dada $f \in Sel_2(X)$, el teorema 2.18 nos sugiere que la topología τ_f, podría ser la topología minimal tal que f es contínua. En general esto no es cierto como veremos mas adelante. Si en el teorema anterior no suponemos que (X, τ) es un espacio T_2, resulta que es posible que $\tau_f \nsubseteq \tau$ como mostraremos en el ejemplo 2.20.

Ejemplo 2.20 *Existe un espacio infinito (X, τ) que es T_1, y $f \in Sel_2(X, \tau)$ tal que $(x, +\infty)_{\prec_f} \notin \tau$ para infinitos puntos de X.*

Demostración: Consideremos el conjunto $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, donde $\infty \notin \mathbb{N}$ con τ la topología cofinita. X esta ordenado de la siguiente manera: a $\mathbb{N}$ lo ordenamos de la manera usual, y $x \prec_f \infty$ para todo $x \in \mathbb{N}$. Mostraremos primero que (X, τ) es compacto, T_1 y no es Hausdorff. En efecto,

1. (X, τ) es compacto:

   Sea $\{A_\alpha : \alpha \in L\}$ un cubrimiento de X por elementos de τ. Fijemos $\alpha_0 \in L$, luego $X \setminus A_{\alpha_0} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, por tanto existen $A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_n} \in \{A_\alpha : \alpha \in L\}$ tales que $x_i \in A_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Luego $\{A_{\alpha_0}, A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_n}\}$ es un subcubrimiento finito de X por elementos de τ, lo cual muestra que X es compacto.

2. (X, τ) es T_1:

   Sean $x_1, x_2 \in X$. Luego $V = X \setminus \{x_1\} \in \tau$, $x_2 \in V$ y de manera análoga,
   $U = X \setminus \{x_2\} \in \tau$, $x_1 \in U$.

3. (X, τ) no es Hausdorff:

   Sean $x_1, x_2 \in X$ y supongamos que (X, τ) es Hausdorff, entonces existen $V_1, V_2 \in \tau$ tales que $x_i \in V_i$ con $i = 1, 2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

   Ahora como $V_1 \in \tau$, se tiene que
   $X \setminus V_1 = \{x_1, \ldots, x_n\}$, por tanto $V_2 \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ lo cual contradice que $V_2 \in \tau$.

Consideremos por otra parte, $\leq$ el orden usual en X. Definamos $f \in Sel(X)$ por $f(A) = \text{máx}_{\leq} A$ para todo $A \in \mathcal{F}(X, \tau)$. Mostraremos a continuación que $f \in Sel(X, \tau)$.

Notemos que f es contínua en los conjuntos unitarios de X, pues dado $\{x\} \in \mathcal{F}(X, \tau)$ y $U \in \tau$ tal que $f(\{x\}) = x \in U$, se tiene que $\{\{x\}\} = \langle\{x\}\rangle$ por tanto,

$$f(\langle\{x\}\rangle) = \{x\} \subseteq U.$$

Consideremos ahora $A \in \mathcal{F}(X, \tau)$ diferente de un conjunto unitario de X y sea $V \in \tau$ tal que $f(A) \in V$, tenemos los siguientes casos:

1. $A = X$.

   En este caso, $f(A) = \omega$. Notemos que $A \in \langle V, A\rangle$. Mostraremos que $f(\langle V, A\rangle) \subseteq V$. Dado $B \in \langle V, A\rangle$, existe $x_A \in B \cap V$ tal que $\{x \in X : x_A < x\} \subseteq V$ y por tanto $\text{máx}_{\leq} B \in \{x \in X : x_A < x\}$, luego $f(B) \in \{x \in X : x_A < x\} \subseteq V$. Así $f(\langle V, A\rangle) \subseteq V$.

2. $A \neq X$.

   Entonces A es finito y $|A| \neq 1$. Sea $x_A = f(A \setminus f(A))$. Consideremos
   $C = \{x \in V : x_A < x\}$, C también es una vecindad de $f(A)$. Sea

$$\mathcal{U} = \{\{x\} \cup C : x \in A \ \ y \ x \leq x_A\} \cup \{C\}$$

   notemos que $\mathcal{U}$ es un cubrimiento finito de A por elementos de τ tal que $A \cap U \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{U}$, por tanto $A \in \langle \mathcal{U}\rangle$.
   Notemos además que para cada $U \in \langle \mathcal{U}\rangle$ se tiene que $U \cap C \neq \emptyset$ pues $C \in \langle \mathcal{U}\rangle$. Además por la escogencia de x_A, $f(U) = \text{máx}_{\leq} U \in C \subseteq V$.

Así hemos mostrado que $f \in Sel(X, \tau)$. Para terminar, sea $x \in X$ tal que
$0 < x < \omega$, luego:
$(x, +\infty)_{\prec_f} = \{x \in X : x \prec_f z\} = \{z \leq \omega : z \neq x \ \ y \ \ \text{máx}_{\leq}\{x, z\} = x\} = \{z \leq \omega : z < x\}$.
Por tanto $(x, +\infty)_{\prec_f}$ es un conjunto finito, así $(x, +\infty)_{\prec_f} \notin \tau$.

■

Si en el lema 2.16 suponemos que el espacio (X, τ) no es T_1, el siguiente ejemplo nos muestra que no es cierto que $(-\infty, x)_{\prec_f} \notin \tau$, para todo $x \in X$.

Ejemplo 2.21 *Denotaremos por τ_f^- y τ_f^+ a las topologías generadas por los intervalos de la forma $(-\infty, x)_{\prec_f}$ y $(x, +\infty)_{\prec_f}$ con $x \in X$, respectivamente. Notemos que τ_f^- y τ_f^+ son T_0, $\tau_f^- \nsubseteq \tau_f^+$ y viceversa.*

Consideremos $(\mathbb{N}, \tau_f^+)$ y sea $f\{x,y\} = \min_{\leq}\{x,y\}$, donde $\leq$ es el orden usual en $\mathbb{N}$. Notemos que $f \in Sel_2(\mathbb{N}, \tau_f^+)$, pues $f^{-1}\big((a,+\infty)_{\prec_f}\big) = \Big(\big\langle (a,+\infty)_{\prec_f}\big\rangle\Big)$ y $\preceq_f$ coincide con $\leq$. Luego tenemos que el intervalo $(-\infty, x)_{\prec_f} \notin \tau_f^+$ para todo $x \in X$.

Proposición 2.22 *Sea X un conjunto y $f \in Sel_2(X)$, entonces $f \in Sel_2(X, \tau_f^-)$.*

Demostración: Veremos que

$$f^{-1}\big((-\infty,a)_{\prec_f}\big) = \Big(\big\langle (-\infty,a)_{\prec_f}, X\big\rangle\Big) \cap \mathcal{F}_2(X).$$

En efecto,
($\subseteq$) Sea $\{x,y\}$ tal que $f(\{x,y\}) \in (-\infty,a)_{\prec_f}$. Luego,

$$\{x,y\} \cap (-\infty,a)_{\prec_f} \neq \emptyset \ y \ \{x,y\} \subseteq (-\infty,a)_{\prec_f} \cup X = X$$

Por tanto, $\{x,y\} \in \Big(\big\langle (-\infty,a)_{\prec_f}, X\big\rangle\Big) \cap \mathcal{F}_2(X)$.
($\supseteq$) Sea $\{x,y\} \in \Big(\big\langle (-\infty,a)_{\prec_f}, X\big\rangle\Big) \cap \mathcal{F}_2(X)$, por tanto, $\{x,y\} \cap (-\infty,a)_{\prec_f} \neq \emptyset$. Si $\{x,y\} \subseteq (-\infty,a)_{\prec_f}$, entonces $\{x,y\} \in f^{-1}\big((-\infty,a)_{\prec_f}\big)$. Ahora si $\{x,y\} \nsubseteq (-\infty,a)_{\prec_f}$, como $\{x,y\} \cap (-\infty,a)_{\prec_f} \neq \emptyset$ se sigue que, $\min_{\prec_f} \in (-\infty,a)_{\prec_f}$.

Así, $\{x,y\} \in f^{-1}\big((-\infty,a)_{\prec_f}\big)$.

$\blacksquare$

Sea $\tau \in Top(f)$. En resumen podemos decir que:

1. Si τ es T_2, entonces $\tau_f \subseteq \tau$.

2. Si τ es T_1, entonces $\tau_f^- \subseteq \tau$.

Por otra parte, si τ_f es discreta, entonces τ_f es la única topología T_2 en $Top(f)$. Desde este punto de vista, surgen las siguientes preguntas: ¿Cuándo τ_f es discreta? y ¿Existirá una topología $\tau \in Top(f)$ más pequeña que τ_f^-?.

Resulta natural preguntarse, si $\tau_f \in Top(f)$ para toda $f \in Sel_2(X)$. Como veremos la respuesta es negativa.

Ejemplo 2.23 *Existe un conjunto X y $f \in Sel_2(X)$ tal que $f \notin Sel_2(X, \tau_f)$.*

Demostración: Consideremos $X = \{0,1\} \times \mathbb{N}$ con el orden usual, definimos la selección $f : \mathcal{F}_2(X) \to X$ como sigue:

$$\begin{cases} f(\{(0,n),(1,m)\}) = (1,m) & \text{si y sólo si } m \geq n+1 \quad \text{y } n \geq 1 \\ f(\{(0,n),(0,m)\}) = (0,m) & \text{para} \quad 0 < n \leq m \\ f(\{(1,n),(1,m)\}) = (1,n) & \text{para} \quad 0 < n \leq m \\ f(\{(0,0),(0,m)\}) = (0,0) & \text{para} \quad m \in \mathbb{N} \\ f(\{(1,0),(1,m)\}) = (1,m) & \text{para} \quad m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

En la figura (2.21)[1] se ilustra de manera gráfica, como es la relación inducida por esta selección.

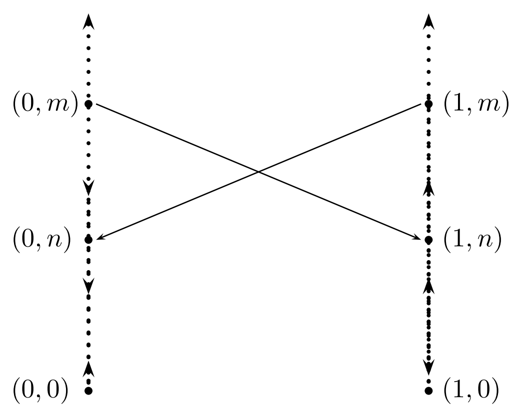

figura 2.21

[1]En la figura 2.21 las flechas salen del elemento menor y llegan al elemento mayor.

Notemos que $(0,0)$ y $(1,0)$ son el elemento mínimo y máximo respectivamente de X con la relación $\preceq_f$. Además, todos los posibles intervalos que contienen al punto $(0,0)$, son de la forma

$$(-\infty,(0,n))_{\prec_f} = \{(0,0)\} \cup \{(0,m) : m \geq n+1\} \cup \{(1,m) : m > n\} \tag{2.1}$$

$$(-\infty,(1,n+1))_{\prec_f} = \{(0,0)\} \cup \{(0,m) : m \geq n+1\} \cup \{(1,m) : 0 < m \leq n\} \tag{2.2}$$

Sean $m,n \in \mathbb{N}$ tales que $n < m$, tenemos que $(0,m) <_f (0,n)$, luego de (2.1) se sigue que

$$(-\infty,(0,n))_{\prec_f} \cap (-\infty,(0,m))_{\prec_f} = (-\infty,(0,m))_{\prec_f}.$$

Además, tenemos que $(1,n) \prec_f (1,m)$ y de (2.2) se sigue que

$$(-\infty,(1,n))_{\prec_f} \cap (-\infty,(1,m))_{\prec_f} = (-\infty,(1,n))_{\prec_f}.$$

De esto último se tiene que

$$(-\infty,(0,n))_{\prec_f} \cap (-\infty,(1,m))_{\prec_f} = \{(0,0)\} \cup \{(0,m) : m \geq n+1\}.$$

Por tanto el conjunto

$$\{(0,0)\} \cup \{\{(0,m) : m \geq n+1\} : n \in \mathbb{N}\} \tag{2.3}$$

forma una base local para el punto $(0,0)$ en la topología τ_f.

Para el punto $(1,0)$ tenemos una situación similar. Las posibles vecindades de dicho punto son de la forma

$$((0,n),+\infty)_{\prec_f} = \{(1,0)\} \cup \{(0,m) : 0 < m \geq n\} \cup \{(1,m) : m \geq n+1\} \tag{2.4}$$

$$((1,n+1),+\infty)_{\prec_f} = \{(1,0)\} \cup \{(0,m) : m \geq n+1\} \cup \{(1,m) : m \geq n+1\}. \tag{2.5}$$

Además dados $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n < m$ tenemos que $(0,m) \prec_f (0,n)$, de esto y de (2.4) se sigue que

$$((0,n),+\infty)_{\prec_f} \cap ((0,m),+\infty)_{\prec_f} = ((0,n),+\infty)_{\prec_f}.$$

También de (2.5) se tiene que

$$((1,n),+\infty)_{\prec_f} \cap ((1,m),+\infty)_{\prec_f} = ((1,m),+\infty)_{\prec_f}.$$

Luego

$$((0,n),+\infty)_{\prec_f} \cap ((1,m),+\infty)_{\prec_f} = \{(1,0)\} \cup \{(1,m) : m \geq n+1\}.$$

así el conjunto

$$\{(1,0)\} \cup \{\{(1,m) : m \geq n+1\} : n \in \mathbb{N}\} \tag{2.6}$$

forma una base local para el punto $(1,0)$ en la topología τ_f.

Mostraremos que f no es contínua en $\{(0,0),(1,0)\}$. Por definición de f sabemos que $f(\{(0,0),(1,0)\}) = (0,0)$. Consideremos U una vecindad de $(0,0)$, luego de (2.3) se tiene que $U = \{(0,0)\} \cup \{(0,n) : n > 1\}$. Veremos que para cualquier vecindad $\langle V, W\rangle$ de $\{(0,0),(1,0)\}$, se tiene que $f(\langle V, W\rangle) \nsubseteq U$.

En efecto, supongamos sin perder generalidad que $(0,0) \in V$ y que $(1,0) \in W$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{(0,n) : n > n_0\} \subseteq V$ y $\{(1,n) : n > n_0\} \subseteq W$. Luego,

$$\{(0,n_0),(1,n_0+1)\} \in \langle V, W\rangle \ \ y \ \ f(\{(0,n_0),(1,n_0+1)\}) = (1,n_0+1) \notin U.$$

$\blacksquare$

Capítulo 3

Selecciones τ_f-contínuas

En este capítulo supondremos, a menos que se indique lo contrario, que los espacios de los cuales hablaremos son Hausdorff. Uno de los objetivos de este capítulo es estudiar cuando una selección de dos puntos, es τ_f-contínua. Por otra parte, los resultados más importantes de este capítulo resultan ser los teoremas 3.6 y 3.9, pues estos teoremas nos dan respuesta a la pregunta de si el conjunto $Top(f)$ tiene elementos minimales, en el caso en que el espacio es compacto y también cuando el espacio es conexo. Finalizaremos el capítulo mostrando un critério de continuidad (respecto a la topología τ_f), para selecciones sobre $\mathcal{F}(X)$.

3.1. Contínuos lineales

El objetivo de esta sección, es proporcionar las herramientas necesarias para demostrar que si $\tau \in Top(f)$ es compacta, entonces $\tau = \tau_f$ (véase teorema 3.6). Seguiremos la presentación dada en [7].

Definición 3.1 *Un conjunto X linealmente ordenado, con mas de dos elementos es llamado un contínuo lineal si cumple las siguientes condiciones:*

1. *X tiene la propiedad del supremo (i.e todo conjunto no vacío y acotado superiormente tiene supremo).*

2. *Si $x < y$, entonces existe $z \in X$ tal que $x < z < y$.*

Proposición 3.2 *Sea X linealmente ordenado. Si X es conexo, entonces X es un contínuo lineal.*

Demostración: Supongamos que X es conexo. Si X no es un contínuo lineal, entonces tenemos dos posibilidades. Primero existen $x, y \in X$ tales que $(x, y) = \emptyset$, en cuyo caso $(-\infty, x] \cup [y, +\infty)$ es un conjunto abierto-cerrado en X, contradiciendo así que X es conexo. La segunda posibilidad es que X no tiene la propiedad del supremo, por tanto existe $\emptyset \neq A \subseteq X$ acotado superiormente tal que $\sup(A)$ no existe.

Sea $B = \{x \in X : x \text{ es cota superior de } A\}$. Notemos primero que B no tiene elemento mínimo, pues de ser así tendríamos que existe $\sup(A)$. Por otra parte, tampoco existe $\inf(B)$, pues si suponemos que $\alpha = \inf(B)$, $\alpha \notin B$ (de ser así α sería $\sup(A)$).

Por tanto α no es cota superior del conjunto A, de lo cual se sigue que existe $a \in A$ tal que $\alpha < a$. Ahora por definición de ínfimo, existe $b \in B$ tal que $\alpha \leq b < a$, lo cual contradice que α es el ínfimo de B.

Consideremos ahora para cada $a \in A$ y para cada $b \in B$ los intervalos $(-\infty, a)$ y $(b, +\infty)$ los cuales son abiertos ya que X es un espacio linealmente ordenado. Por tanto,

$$U = \bigcup_{a \in A} (-\infty, a) \;\; y \;\; V = \bigcup_{b \in B} (b, +\infty)$$

son conjuntos abiertos. Veamos que $U \cup V = X$, basta ver que $X \subseteq U \cup V$. En efecto, sea $x \in X$ luego $x \in B$ ó $x \in X \setminus B$. Si $x \in B$, entonces como B no tiene ínfimo existe $b \in B$

tal que $b < x$. Por lo tanto $x \in (b, +\infty) \subseteq V$. Ahora si $x \notin B$ se sigue que x no es cota superior del conjunto A, por tanto existe $a \in A$ tal que $x < a$. Luego $x \in (-\infty, a) \in U$ y así $X = U \cup V$.

Mostraremos ahora que $U \cap V = \emptyset$; en efecto, consideremos $x \in V \cap U$ luego, existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $x \in (-\infty, a)$ y $x \in (b, +\infty)$ de lo cual se sigue que $x < a$ y $b < x$ y al ser X un espacio linealmente ordenado, se tiene que $b < x < a$ contradiciendo así que b es cota superior del conjunto A. Por tanto, $V \cap U = \emptyset$.

Hemos mostrado así que $U \cup V$ es una desconexión del espacio X, lo cual contradice que este es conexo. Por lo tanto, X es un contínuo lineal.

■

Proposición 3.3 *Sea X un conjunto linealmente ordenado que tiene la propiedad del supremo. Entonces cada subconjunto cerrado y acotado de X con la topología del orden es compacto.*

Demostración:
Mostraremos primero que los intervalos $[x, y]$, son compactos. En efecto,

Paso 1. Dados $a < b$, y $\mathcal{A}$ un cubrimiento de $[a, b]$ por conjuntos abiertos en $[a, b]$ con la topología relativa (que es la misma que la topología del orden). Queremos mostrar que existe un subcubrimiento finito de $\mathcal{A}$ que cubre a $[a, b]$. Primero notemos que si $x \in [a, b]$, distinto de b, entonces existe un punto $y > x$ de $[a, b]$ tal que el intervalo $[x, y]$ se puede cubrir a lo sumo con dos elementos de $\mathcal{A}$. En efecto,

Si x tiene un inmediato sucesor en X, llamémoslo y, entonces $[x, y]$ contiene unicamente a los puntos x e y, y por tanto, se puede cubrir a lo sumo por dos elementos de $\mathcal{A}$. Ahora si x no tiene un inmediato sucesor en X, elijamos $A \in \mathcal{A}$, tal que $x \in A$. Como

$x \neq b$ y A es abierto, A contiene un intervalo de la forma $[x, c)$, para algún $c \in [a, b]$. Sea $y \in (x, c)$; entonces A cubre al intervalo $[x, y]$.

Paso 2. Sea C el conjunto de todos los puntos $y > a$ de $[a, b]$ tales que el intervalo $[a, y]$ puede ser cubierto por un número finito de elementos en $\mathcal{A}$. Ahora aplicando el Paso 1 al caso $x = a$, vemos que existe al menos un punto y verificando tal condición, luego C no es vacío y claramente C es acotado superiormente. Sea c el supremo del conjunto C (el cual existe porque X tiene la propiedad del supremo); entonces $a < c \leq b$.

Paso 3. Veremos que $c \in C$, es decir, veremos que el intervalo $[a, c]$ se puede cubrir por una cantidad finita de elementos en $\mathcal{A}$. Sea $A \in \mathcal{A}$, tal que $c \in A$. Como A es abierto, este contiene un intervalo de la forma $(d, c])$ para algún $d \in [a, b]$. Si $c \notin C$, existe $z \in C$ tal que $z \in (d, c)$ pues si no, d sería una cota superior de C mas pequeña que c (como se indica en la figura 3.7.1).

Como $z \in C$, el intervalo $[a, z]$ se puede cubrir por un número finito de conjuntos de $\mathcal{A}$, digamos n. Ahora $[z, c] \subseteq A$, por tanto, $[a, c] = [a, z] \cup [z, c]$ se puede cubrir por $n + 1$ elementos en $\mathcal{A}$. Así, $c \in C$.

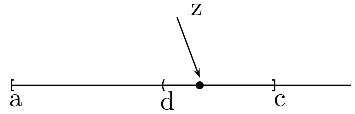

Figura 3.7.1

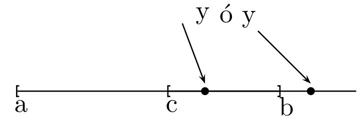

Figura 3.7.2

Paso 4. Finalmente, vamos a demostrar que $c = b$ con lo cual terminamos la demostración. Supongamos que $c < b$. Aplicando el Paso 1 al caso $x = c$, concluimos que existe un punto $y > c$ de $[a, b]$ tal que el intervalo $[c, y]$ puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{A}$ (como se indica en la figura 3.7.2).

Hemos probado en el Paso 3 que $c \in C$, por lo que $[a, c]$ puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{A}$. Por tanto, el intervalo $[a, y] = [a, c] \cup [c, y]$ también se puede cubrir por un número finito de elementos en $\mathcal{A}$, así $y \in C$, contradiciendo el hecho de que c es cota superior de C.

Sea ahora $A \in \mathcal{F}(X)$ y acotado digamos por M, luego $A \subseteq [-M, M]$. Como $[-M, M]$ es compacto y A es cerrado se tiene que A es compacto.

■

Notemos que esta proposición también es cierta, si en lugar de considerar la propiedad del supremo, consideramos la propiedad del ínfimo, pues estas propiedades son equivalentes.

Proposición 3.4 *Sean (X, τ) y (Y, ρ) espacios topológicos. Consideremos $f : X \to Y$ una biyección contínua, supongamos que X es compacto y Y es Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración: Basta ver que f^{-1} es contínua, para lo cual veremos que f es cerrada. En efecto, sea $A \subseteq X$ cerrado, al ser X compacto se tiene que A es compacto y al ser f contínua, $f(A)$ es compacto. Ahora como Y es Hausdorff y $f(A) \subseteq Y$, se tiene que $f(A)$ es cerrado.

■

Corolario 3.5 *Sean τ_1 y τ_2 dos topologías sobre un conjunto X, tales que τ_1 es mas fina que τ_2. Si el espacio (X, τ_1) es compacto y (X, τ_2) es un espacio Hausdorff, entonces $\tau_1 = \tau_2$.*

Demostración: La función identidad es una biyección contínua de (X, τ_1) en (X, τ_2), luego del teorema anterior se sigue que esta es un homeomorfismo.

$\blacksquare$

3.2. Selecciones en espacios compactos

Teorema 3.6 *Sea (X, τ) un espacio compacto, y sea $f \in Sel_2(X, \tau)$. Entonces, $\tau_f = \tau$ y en particular, $f \in Sel_2(X, \tau_f)$.*

Demostración: Sabemos del teorema 2.11 que (X, τ_f) es Hausdorff, además como (X, τ) es Hausdorff tenemos del teorema 2.18 que τ es mas fina que τ_f. Por tanto, del corolario 3.5 se sigue que $\tau_f = \tau$.

$\blacksquare$

Proposición 3.7 *En un espacio $(X, \leq)$ con elemento máximo y mínimo, además linealmente ordenado y con la propiedad del ínfimo, la selección definida por $f(A) = \min(A)$, para $A \in \mathcal{F}(X)$, es contínua con la topología del orden $\tau(\leq)$.*

Demostración: Mostraremos primero que f esta bien definida. En efecto, sea $A \in \mathcal{F}(X)$ luego de la proposición 3.3 (recordemos que las propiedades de supremo e ínfimo son equivalentes, por eso podemos hacer uso de la proposición 3.3), se sigue que A es compacto. Ahora como X tiene elemento mínimo, A es acotado inferiormente y como X tiene la propiedad del ínfimo, existe $\inf(A) = \alpha$. Mostremos que $\alpha \in A$. Supongamos que $\alpha \notin A$, y consideremos

$$\mathcal{A} = \{(a, +\infty)_< : a \in A\}.$$

Notemos que $\mathcal{A}$ es un cubrimiento de A, por abiertos de $\tau(\leq)$. Como A es compacto, existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, +\infty)_{<}.$$

Denotemos por μ al $\min\{a_1, \ldots, a_n\}$, Luego como $\alpha \notin A$ existe $b \in A$ tal que $\alpha < b < \mu$, de lo cual se concluye que

$$A \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, +\infty)_{<}.$$

Por otra parte, al ser $\leq$ un orden lineal, los intervalos $(a, b)_{\leq}$ forman una base para la topología del orden. Además, si X tiene elemento mínimo m, agregamos los intervalos $[m, b)_{\leq}$. De manera análoga, si X tiene máximo M agregamos los intervalos de la forma $(a, M]_{\leq}$.

Veremos primero que $f^{-1}\big((a, b)_{\leq}\big) \in \eta$. Donde $\eta = \tau_{v(\tau(\leq))}$. Mostraremos que

$$f^{-1}\big((a, b)_{\leq}\big) = \Big(\big\langle (a, b)_{\leq}, (a, +\infty)_{\leq} \big\rangle\Big) = D \in \eta$$

En efecto,

($\subseteq$) Sea $A \in f^{-1}\big((a, b)_{\leq}\big)$, luego $a < \min(A) < b$ por lo tanto, $A \cap (a, b)_{\leq} \neq \emptyset$ y $A \cap (a, +\infty)_{\leq} \neq \emptyset$. Además como $a < \min(A)$ se sigue que

$$A \subseteq (a, +\infty)_{\leq} = (a, +\infty)_{\leq} \cup (a, b)_{\leq}$$

Por lo tanto, $A \in D$.

($\supseteq$) Sea $A \in D$, luego $A \cap (a, b)_{\leq} \neq \emptyset$, $A \cap (a, +\infty)_{\leq} \neq \emptyset$ y también $A \subseteq (a, +\infty)$ de esto se sigue que $a < \min(A)$ y como $A \cap (a, b)_{\leq} \neq \emptyset$ existe $y \in A \cap (a, b)_{\leq}$, tal que $a < \min(A) \leq y < b$. Por tanto, $a < \min(A) < b$, así $A \in f^{-1}\big((a, b)_{\leq}\big)$.

Como X tiene elemento mínimo m, se tiene que,

$$f^{-1}\big([m,b)_{\leq}\big) = \Big(\big\langle [m,b)_{\leq}, [m,+\infty)_{\leq}\big\rangle\Big) \in \eta$$

Y como X tiene elemento maximal M,

$$f^{-1}\big((a,M]_{\leq}\big) = \Big(\big\langle (a,M]_{\leq}\big\rangle\Big) \in \eta.$$

$\blacksquare$

Lema 3.8 *Sea Y un conjunto linealmente ordenado, con la topología del orden. Sean $f, g : X \to Y$ contínuas, entonces el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X.*

Demostración: Sea $A = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ y mostremos que $\overline{A} \subseteq A$. Razonemos por el absurdo, si existe $a \in \overline{A} \backslash A$, entonces al ser $\leq$ un orden total se tiene que $f(a) > g(a)$; de donde obtenemos que $a \in f^{-1}(g(a),+\infty)$ y $a \in g^{-1}(-\infty, f(a))$.

Siendo f *y* g contínuas y $(g(a),+\infty)$ *y* $(-\infty, f(a))$ abierto en Y obtenemos que $f^{-1}(g(a),+\infty)$ y $g^{-1}(-\infty, f(a))$ son abiertos en X.

Como $a \in f^{-1}(g(a),+\infty) \cap g^{-1}(-\infty, f(a))$ y $a \in \overline{A}$, se tiene que

$$f^{-1}(g(a),+\infty) \cap g^{-1}(-\infty, f(a)) \cap A \neq \emptyset.$$

Sea $b \in f^{-1}(g(a),+\infty) \cap g^{-1}(-\infty, f(a)) \cap A \neq \emptyset$, luego

$$g(a) < f(b), \;\; g(b) < f(a) \;\; y \;\; f(b) \leq g(b).$$

En consecuencia

$$g(a) < f(b) \leq g(b) < f(a).$$

De esta última desigualdad y del hecho de que la relación $\leq$ es transitiva obtenemos que

$$a \in f^{-1}(g(b),+\infty) \cap g^{-1}(-\infty, g(b)).$$

Por tanto, $a \in f^{-1}(g(b), +\infty) \cap g^{-1}(-\infty, g(b)) \cap A \neq \emptyset$. Fijemos z en el último conjunto, luego se sigue que

$$g(b) < f(z), \;\; g(z) < g(b) \;\; y \;\; f(z) \leq g(z) \tag{3.1}$$

Y por tanto, $g(z) < f(z)$ lo cual contradice (3.1). Así, $\overline{A} \subseteq A$.

■

3.3. Selecciones en espacios conexos

El siguiente resultado es similar al teorema 3.6, pero para espacios conexos.

Teorema 3.9 *Sea (X, τ) un espacio conexo, y $f \in Sel_2(X, \tau)$. Entonces (X, τ_f) es conexo. En particular, $\preceq_f$ es un orden lineal en X y $f \in Sel_2(X, \tau_f)$.*

Demostración: Si (X, τ_f) no es conexo, entonces existe un conjunto U abierto-cerrado en (X, τ_f) no trivial, pero como (X, τ) es Hausdorff se tiene que $\tau_f \subseteq \tau$ por tanto, U también es un conjunto abierto-cerrado en (X, τ) contradiciendo que este espacio es conexo. Por último, si la relación $\preceq_f$ no es un orden lineal en X, entonces $\preceq_f$ no es transitiva, luego de la proposición 2.10 se sigue que (X, τ_f) posee un conjunto que es abierto-cerrado, contradiciendo que (X, τ_f) es conexo. Por otra parte notemos que $f(\{x, y\}) = \text{mín}_{\leq}\{x, y\}$, además τ_f coincide con la topología del orden. Luego del corolario 2.14, se sigue que $f \in Sel_2(X, \tau_f)$.

■

Notemos que de este teorema y del corolario 2.19, se obtiene que si (X, τ) es conexo, entonces τ_f es el mínimo de $Top(f)$. Por otra parte, el siguiente teorema establece una posible realación entre los teoremas 3.6 y 3.9.

Teorema 3.10 *Sea $f \in Sel_2(X)$, tal que (X, τ_f) es conexo. Entonces, para todo $x, y \in X$, tal que $x \preceq y$, el intervalo*

$$[x, y]_{\prec_f} = \{z \in X : x \preceq z \preceq y\}$$

es τ_f-compacto.

Demostración: De la proposición 2.10 se sigue que $\preceq_f$ es un orden lineal en X. Notemos además que τ_f coincide en este caso con la topología del orden $\tau(\preceq_f)$. Al ser (X, τ_f) conexo, de la proposición 3.2 se tiene que (X, τ_f) es un contínuo lineal. Por tanto (X, τ_f) tiene la propiedad del supremo, luego del teorema 3.3 se sigue que $[x, y]_{\preceq_f}$ es compacto para todo $x \prec_f y$ en X.

■

Teorema 3.11 *Sea $f \in Sel_2(X)$ tal que (X, τ_f) es conexo. Si $h \in Sel(X, \tau_f)$, entonces $h_{|\mathcal{F}_2(X)} = f$ o $h_{|\mathcal{F}_2(X)} = f^*$.*

Demostración: Notemos que dado $\{x, y\} \in \mathcal{F}_2(X)$, se tiene que $h(\{x, y\}) = f(\{x, y\})$ ó $h(\{x, y\}) = f^*(\{x, y\})$, además como (X, τ_f) es conexo de la propoción 2.10 se sigue que $\preceq_f$ es un orden lineal, de lo cual se deduce que τ_f coincide con la topología del orden $\tau(\preceq_f)$. En particular, $f \in Sel_2(X, \tau_f)$.

Supongamos que

$$V = \{\{x, y\} : h(\{x, y\}) = f(\{x, y\})\} \neq \emptyset \ \ y \ \ W = \{\{x, y\} : h(\{x, y\}) = f^*(\{x, y\})\} \neq \emptyset$$

Del lema 3.8 se sigue que V y W son cerrados en $\mathcal{F}_2(X)$, respecto a la topología de Vietoris asociada a τ_f. Pero también se tiene que V y W son abiertos, pues $X \setminus V = W$ el cual es cerrado y por la misma razón W es abierto. Pero $W \cup V \subseteq \mathcal{F}_2(X)$, siendo éste un abierto-cerrado se tiene que $\mathcal{F}_2(X)$ no es conexo, lo cual es una contradicción pues del teorema 1.10 se tendría que (X, τ_f) no es conexo. Así concluimos que $V = \emptyset$ ó $W = \emptyset$.

$\blacksquare$

De esta proposición se deduce que si el espacio es conexo, básicamente pueden existir sólo dos selecciones de dos puntos contínuas: la selección $\max_{\prec_f}$ y $\min_{\prec_f}$.

Lema 3.12 *([6]) Sea (X, τ) conexo, entonces:*

1. *Si para algún $n \geq 2$ fijo, existe una selección $f : \mathcal{F}_n(X) \to X$ contínua, entonces $f(E)$ es el primer ($\preceq_f$) elemento de E para todo $E \in \mathcal{F}_n(X)$.*

2. *Si existe $f \in Sel(X, \tau)$, entonces $f(E)$ es el primer ($\preceq_f$) elemento de E, para todo $E \in \mathcal{F}(X)$.*

Demostración: Seguiremos la demostración dada en [6].
1. Sea $B \in \mathcal{F}_n(X)$ y $x, y \in B$ tales que $x \prec_f y$. Consideremos

$$\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{F}_n(X) : f(E \cup \{x, y\}) = y\}.$$

Mostraremos que tanto $\mathcal{C}$ como $\mathcal{F}_n(X) \setminus \mathcal{C}$ son abiertos. Por el teorema 1.10 sabemos que $\mathcal{F}_n(X)$ es conexo y como $\{x, y\} \in \mathcal{F}_n(X) \setminus \mathcal{C}$, se sigue que $\mathcal{C} = \emptyset$ y por tanto, $f(B) \neq y$. Con esto quedaría demostrado *1.* En efecto,

a) $\mathcal{F}_n(X) \setminus \mathcal{C}$ es abierto:

Sea $E \in \mathcal{F}_n(X) \setminus \mathcal{C}$. Entonces, $f(E \cup \{x, y\}) = z \neq y$. Como (X, τ) es Hausdorff, podemos considerar U una vecindad de z tal que $y \notin U$. Luego como f es contínua, existe $V = \langle V_1, \ldots, V_k \rangle$ una vecindad de $E \cup \{x, y\}$, tal que $f(V \cap \mathcal{F}_n(X)) \subseteq U$. Sea W la vecindad generada por aquellos V_i que son vecindad de algún elemento de E. Notemos que $E \in \mathcal{F}_n(X) \cap W$, además como los únicos V_i que no son generadores de

W son vecindades de x o y, tenemos que si $F \in \mathcal{F}_n(X) \cap W$, entonces $F \cup \{x, y\} \in V$ y por tanto, $f(F \cup \{x, y\}) \in U$. Luego $f(F \cup \{x, y\}) \neq y$, de lo cual se sigue que $F \in \mathcal{F}_n(X) \setminus \mathcal{C}$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(X) \cap W \subseteq \mathcal{F}_n(X) \setminus \mathcal{C}$.

b) $\mathcal{C}$ es abierto:

Sea $E \in \mathcal{C}$. Entonces $f(E \cup \{x, y\}) = y$. Consideremos $U, O \in \tau$ tales que $y \in U$, $[E \cup \{x, y\} \setminus \{y\}] \subseteq O$ y $O \cap U = \emptyset$. Luego de la continuidad de f se sigue que existe una vecindad $V = \langle V_1, \ldots, V_k \rangle$ de $E \cup \{x, y\}$ tal que $f(V \cap \mathcal{F}_n(X)) \subseteq U$. Sea $W = \langle W_1, \ldots, W_j \rangle$ como en **a)**. Consideremos los siguientes casos:

i) $y \notin E$. En este caso tomamos $W^* = \langle W_1 \cap O, \ldots, W_j \cap O \rangle$. Luego de la escogencia de O y W^*, se sigue que $E \cap (W_i \cap O) \neq \emptyset$ para $i \leq j$. Además $E \subseteq \bigcup_{i \leq j} (W_i \cap O)$. Por tanto, $E \in W^*$.

ii) $y \in E$. Aqui $W^* = \langle W_1 \cap O, \ldots, W_j \cap O, V_s \rangle$, donde $y \in V_s$ y $V_s \in \{V_i : i \leq k\}$. Por el mismo argumento hecho en *i)* se tiene que $E \in W^*$.

Por otra parte, tenemos que si $F \in \mathcal{F}_n(X) \cap W^*$, entonces $F \cup \{x, y\} \in V$. Por tanto, $f(F \cup \{x, y\}) \in U$ de esto se sigue que $f(F \cup \{x, y\}) = y$, así $F \in \mathcal{C}$.

2. Sea $E \in \mathcal{F}(X)$ y supongamos que $f(E) = y$. Si y no es el primer $(\preceq_f)$ elemento de E, entonces existe $x \in E$ tal que $x \prec_f y$. Luego $\mathcal{W} = \{t \in X : x \prec_f t\}$ es una vecindad de y. Ahora como f es continua, existe $V = \langle V_1, \ldots, V_k \rangle$ una vecindad de E tal que $f(V) \subseteq \mathcal{W}$. Fijemos $x_i \in V_i$, con $i \leq k$. Sea $F = \{x_i : i \leq k\}$, como $E \in V$, se tiene que $E \subseteq \bigcup_{i \leq k} V_i$. Por tanto, podemos suponer sin perder generalidad que $x \in F$. Luego $f(F) = z \in \mathcal{W}$, por tanto,$z \neq x$ y $x \prec_f z$. Como $f \in Sel(X, \tau)$, se tiene que $f_{|\mathcal{F}_k(X)} \in Sel(X, \tau)$, además como $F \in \mathcal{F}_k(X)$ se sigue de *1* que $z \prec_f x$, lo cual es una contradicción.

■

Definición 3.13 *Sea $f \in Sel_2(X)$, diremos que $x \in X$ es un punto $\prec_f$-extremo, si para todo $y \in X$ se tiene que $x \preceq_f y$ ó bien $y \preceq_f x$.*

Teorema 3.14 *Sea $f \in Sel_2(X)$ tal que (X, τ_f) es conexo. Entonces, $Sel(X, \tau_f) \neq \emptyset$ si, y sólo si, (X, τ_f) tiene un punto $\prec_f$-extremo.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Sea $h \in Sel(X, \tau_f)$. Del teorema 3.11 se sigue que

$$h_{|_{\mathcal{F}_2(X)}} = f \;\; o \;\; h_{|_{\mathcal{F}_2(X)}} = f^*.$$

Supongamos que $h_{|_{\mathcal{F}_2(X)}} = f$. Luego, del lema 3.12 se tiene que $h([x, +\infty)_{\prec_h}) = x$, para todo $x \in X$ y $h(X) = \text{mín}_{\prec_h} X$, por tanto X tiene un punto $\prec_f$-extremo. Notemos además que si $h_{|_{\mathcal{F}_2(X)}} = f^*$, entonces $h(X) = \text{máx}_{\prec_h} X$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que X tiene un punto $\prec_f$-extremo, sin perder generalidad supongamos que es el $\text{mín}_{\prec_f} X$. Entonces del teorema 3.10 y de la proposición 3.7, se tiene que para todo $F \in \mathcal{F}(X, \tau_f)$ existe $\text{mín}_{\prec_f} F$. Definimos $h(F) = \text{mín}_{\prec_f} F$, $F \in (\mathcal{F}(X), \tau_f)$; la cual por la proposición 3.7 es $\tau_{(\prec_f)}$-contínua.

$\blacksquare$

Bibliografía

[1] Valentin Gutev and Tsugunori Nogura, Selections and order-like relations, *Applied General Topology*, Universidad Politécnica de Valencia, 2, 2001, 205-218.

[2] Jan Van Mill and Evert Wattel, Selections and orderability, *Proc. Amer. Soc*, 83, 1981, 601-605.

[3] S. García-Ferreira, V. Gutev, T. Nogura, M. Sanchis and A. Tomita, Extreme selections for hyperspaces of topological spaces *Topology and its applications*, 122, 2002, 157-181.

[4] Valentin Gutev and Tsugunori Nogura, A topology generated by selections, *Topology and its applications*, 153, 2005, 900-911.

[5] Salvador García Ferreira, Notas del curso Hiperespacios y selecciones contínuas, Universidad de Los Andes Mérida, Marzo 2009.

[6] Ernest Michael, Topologies on spaces of subsets, *Trans. Amer. Soc*, 71, 1951, 152-182.

[7] James R. Munkres, Topology, Prentice Hall, 1999.