Universidad de Los Andes

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemática

Grupo de Ecuaciones Diferenciales

Mérida - Venezuela

DINAMICA DE LA APLICACION TIENDA

Requisito Especial de Grado Para Optar al Título de
Licenciada en Matemáticas

Br.Quriaky G. Gómez C.

Tutor: Dr. Bladismir Ruiz.

Julio, 2008

ÍNDICE GENERAL

Introducción **4**

1. Preliminares **5**

1.1. Puntos Fijos Hiperbólicos 7

1.2. Conjugación Topológica 10

1.3. Conjunto de Cantor 12

1.4. Caos 13

1.5. La Familia Logística 14

1.6. Dinámica Simbólica 18

2. Homeomorfismos y Difeomorfismos **22**

3. La Aplicación Tienda **32**

3.1. Dinámica de T_2 36

3.2. Dinámica de T_s con $s > 2$ 40

3.2.1. Construcción del Conjunto de Cantor 42

Bibliografía **51**

INTRODUCCIÓN

En la teoría general de sistemas dinámicos unidimensionales se estudian modelos donde aparecen conjuntos transitivos que, en la mayoria de los casos, son conjuntos de Cantor sobre $\mathbb{R}$. Un caso muy estudiado es la familia logística $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$, la cual es diferenciable. Observemos que esta familia no es inyectiva ni sobreyectiva.

El propósito de este trabajo es estudiar los 2 tipos de Dinámica posibles en la recta real $\mathbb{R}$. Vamos a mostrar que las aplicaciones Tienda, presentan en comportamiento caótico para parametros mayores que 2, también mostraremos qué tipo de funciones no presentan un comportamiento caótico, particularmente los homeorfismos.

En este trabajo mostraremos un ejemplo muy sencillo de una función que no es lineal y que presenta un comportamiento caótico.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo introduciremos algunos conceptos básicos de sistemas dinámicos discretos unidimensionales.

A lo largo del texto, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ denotará una función continua. Eventualmente f estará definida en un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.

Definición 1 *La órbita positiva de x respecto a f es el conjunto*

$$\mathcal{O}^{+}(x) \ = \ \{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^n(x), \ldots\} = \ \{f^j(x) : j \in \mathbb{N}\}.$$

Si f es invertible, entonces la orbita negativa esta definida por

$$\mathcal{O}^{-}(x) = \ \{x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \ldots, f^{-n}(x), \ldots\} = \ \{f^{-j}(x) : j \in \mathbb{N}\}.$$

Definición 2

- *Un punto p es punto fijo de f si satisface que $f(p) = p$. El conjunto de todos los puntos fijos lo denotaremos por $Fix(f)$.*
- *Un punto p es un punto periódico de periodo n si $f^n(p) = p$ y $f^i(p) \neq p$ para $0 < j < n$. Si p es un punto periódico de periodo n, la órbita positiva de p, $\mathcal{O}^{+}(p)$,*

es llamada órbita periódica y $\mathcal{O}^{+}(p) = \{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$*. El conjunto de todos los puntos periódicos lo denotaremos por* $Per(f)$*.*

- *Un punto* p *es eventualmente periódico o preperiódico de periodo* n *si existe* $m > 0$ *tal que*
  $f^{j+n}(p) = f^j(p)$ *para* $j > m$*. Entonces* $f^j(p)$ *es periódico para* $j > m$*.*

Ejemplo 1.1 *Consideremos* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = -x^3$*. Ver figura 1.1 . Notemos que* f *es un homeomorfismo decreciente. El único punto fijo de* f *es* $x = 0$ *y* f *tiene 2 puntos periódicos de periodo dos: 1 y -1, en efecto* $f(1) = -1$ *y* $f(-1) = 1$*.*

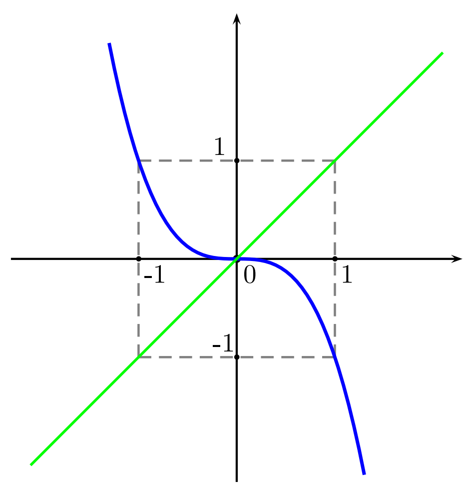


Figura 1.1: Gráfica de la función $f(x) = -x^3$

Proposición 1.1 *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función continua. Si para un punto* x_0 *la órbita* $f^j(x_0)$ *es una sucesión monótona y acotada entonces* $f^j(x_0)$ *converge a un punto fijo.*

Demostración: Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Por hipótesis, $f^j(x_0)$ es una sucesión monótona y acotada, por lo tanto, converge a un punto p. Como $f^j(x_0) \to p$ cuando $j \to \infty$, y como f es continua tenemos que $f(f^j(x_0)) = f^{j+1}(x_0) \to f(p)$ cuando $j \to \infty$. Luego, por unicidad del límite, $f(p) = p$, por lo tanto p es un punto fijo de f. ∎

Definición 3 *Sea p un punto periódico de periodo n. Un punto x es positivamente asintótico a p si $\lim_{i\to\infty} f^{ni}(x) = p$. El conjunto estable de p es definido como*

$$W_f^s(p) = \{x : x \text{ es positivamente asintótico a } p\}.$$

Si f es invertible, entonces un punto x es negativamente asintótico a p si $\lim_{i\to-\infty} f^{ni}(x) = p$. Si f no es invertible entonces decimos que q es negativamente asintótico a p si existen sucesiones q_j, p_j con $j \in \{\ldots, -n, \ldots, -1, 0\}$ tales que $p_0 = p$, $q_0 = q$, $f(p_j) = p_{j+1}$, $f(q_j) = q_{j+1}$ y $|q_j - p_j| \to 0$ cuando $j \to -\infty$. El conjunto inestable de p es definido como

$$W_f^u(p) = \{x : x \text{ es negativamente asintótico a } p\}.$$

1.1. Puntos Fijos Hiperbólicos

En esta sección, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{C}^1$ en un entorno de p donde $p \in Fix(f)$.

Definición 4 *Sea p un punto fijo. Diremos que p es un punto fijo hiperbólico si $|f'(p)| \neq 1$. Si $|f'(p)| < 1$, decimos que p es un punto fijo atractor. Si $|f'(p)| > 1$, decimos que p es un punto fijo repulsor.*

Proposición 1.2 *Sea p un punto fijo hiperbólico. Si p es atractor, i.e $|f'(p)| < 1$, entonces existe un intervalo abierto U con $p \in U$ tal que $\forall\ x \in U$, $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = p$. De hecho, $\forall\ x \in U,\ f(x) \neq x$.*

Demostración: Sea p atractor. Como f' es continua en un entorno de p, exite $\delta > 0$ tal que $|f'(x)| < \lambda < 1$ para $x \in [p-\delta, p+\delta]$. Por el Teorema de Valor Medio,

$$|f(x) - f(p)| = |f(x) - p| \leq \lambda|x-p| < |x-p| \leq \delta,$$

entonces $f(x) \subseteq [p-\delta, p+\delta]$. Analogamente, tenemos que

$$|f^n(x) - p| \leq \lambda^n |x-p|.$$

Por lo tanto, $f^n(x)$ converge a p cuando $n \to \infty$ ■

Proposición 1.3 *Si p es repulsor, i.e $|f'(p)| > 1$. Entonces existe un intervalo abierto U con $p \in U$ tal que $\forall\ x \in U - \{p\},\ \exists\ k > 0,$ tal que $f^k(x) \notin U$.*

Demostración: Sea p un punto fijo repulsor, i.e. $|f'(p)| > 1$. Como f' es continua en un entorno de p, exite $\delta > 0$ tal que $|f'(x)| > \lambda > 1$ para $x \in [p-\delta, p+\delta]$. Por el Teorema de Valor Medio,

$$|f(x) - f(p)| = |f(x) - p| \geq \lambda|x-p|$$

Como f es lipschitziana y $\lambda > 1$, entonces f no puede tener puntos fijos.

Como $\lambda^m \to \infty$ cuando $m \to \infty$, y

$$|f^n(x) - p| \geq \lambda^n|x-p|\ \forall\ n \in \mathbb{N},$$

existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $|f^k(x) - p| \nsubseteq |x-p|$, como queríamos. ■

Definición 5 *Un punto x es un punto ω-límite de p si existe una sucesión n_k que tiende a infinito cuando k tiene a infinito y tal que*

$$\text{lím}_{k\to\infty} |f^{n_k}(p) - x| = 0.$$

El conjunto de todos los puntos ω-límite de p es llamado conjunto ω-limite de p y lo denotaremos por $\omega_f(p)$.

Si f es invertible, diremos que x es un punto α-límite de p si existe una sucesión n_k que tiende a menos infinito cuando k tiene a infinito y tal que

$$\lim_{k\to\infty} |f^{n_k}(p) - x| = 0.$$

El conjunto de todos los puntos α-límite de p lo denotaremos por $\alpha_f(p)$.

Ejemplo 1.2 *Si x es un punto periódico de periodo n, entonces , el conjunto ω-límite de x, $\omega(x)$, es la órbita de x, es decir $\omega_f(x) = \mathcal{O}_f^+(x)$.*

Definición 6 *Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es positivamente invariante si $f(A) \subseteq A$. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es negativamente invariante si $f^{-1}(A) \subseteq A$. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es invariante si $f(A) = A$.*

Observación: Que un conjunto A sea invariante no implica que A sea negativamente invariante,ya que puede existir un $x \notin A$ tal que $f(x) \in A$; pero si f es invertible y A es invariante se tiene que A es negativamente invariante.

Proposición 1.4 *Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado y positivamente invariante, y $x \in A$ entonces $\omega(x)_f \subseteq A$.*

Demostración: Sea $x \in A$. Como A es invariante, $f^n(x) \in A \ \forall \ n \in \mathbb{N}$. Como A es cerrado, A tiene todos sus puntos límites, por lo tanto $\omega_f(x) \subseteq A$. ∎

Definición 7 *Un conjunto A es minimal bajo f si:*

(i) A es un conjunto cerrado, no vacío e invariante, y

(ii) Si B es un conjunto cerrado, no vacío e invariante de A, entonces B=A.

Proposición 1.5 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto compacto no vacío. Entonces A es minimal si y solo si $\omega_f(x) = A \ \forall \ x \in A$.*

Demostración: Supongamos que A es minimal bajo f. Como A es cerrado e invariante, $\forall \ x \in A, \ \omega_f(x) \subseteq A$. Como A es compacto, $\omega_f(x)$ es un conjunto no vacío invariante de A. Como A es minimal, se tiene que $\omega_f(x) = A$.

Supongamos que $\omega_f(x) = A \ \forall \ x \in A$. Supongamos que B es un conjunto no vacío, cerrado e invariante y $B \subseteq A$. Si $x \in B$, entonces $\omega_f(x) \subseteq B \subseteq A$, por lo tanto $A = B$. ■

Definición 8 *Un punto p es no-errante si para cada vecindad U de p existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$, es decir, $\exists \ x \in U$ tal que $f^n(x) \in U$. El conjunto de todos los puntos no-errantes lo denotaremos por $\Omega(f)$.*

1.2. Conjugación Topológica

Definición 9 *Sean $f : A \to A$ y $g : B \to B$ dos funciones continuas. Decimos que f y g son topológicamente conjugados si existe un homeomorfismo $h : A \to B$ tal que $h \circ f = g \circ h$. El homeomorfismo h es llamado conjugación topológica.*

Sean f y g dos funciones continuas. Diremos que $f \sim g$ si f y g son topológicamente conjugados.

Proposición 1.6 *La relación $f \sim g$ es una relación de equivalencia.*

Demostración:

- $\sim$ es reflexiva:

  Sea $f : A \to A$ una función continua y $I : A \to A$ tal que $I(x) = x$ la función identidad, por lo tanto I es un homeomorfismo. Como $f \circ I = I \circ f$, se tiene que f es topologicamente conjugado consigo mismo, por lo tanto $f \sim f$.

- $\sim$ es simétrica:

  Si $f \sim g$ entonces $\exists$ h un homeomorfismo tal que $h \circ f = g \circ h$. Como h^{-1} es un homeomorfismo, se tiene que $h^{-1} \circ g = f \circ h^{-1}$, por lo tanto $g \sim f$.

- $\sim$ es transitiva:

  Supongamos que $f \sim g$ y $g \sim F$. Luego $\exists$ $h,\ H$ homeorfismos tales que

$$h \circ f = g \circ h \tag{1.1}$$

$$H \circ g = F \circ H. \tag{1.2}$$

  Luego, componiendo (1.1) con H se tiene que $H \circ h \circ f = H \circ g \circ h$. Luego, de (1.2) tenemos que $H \circ h \circ f = F \circ H \circ h$. Como $H \circ h$ es un homeomorfismo, se tiene que $f \sim F$. ■

Proposición 1.7 *Sean $f : A \to A$ y $g : B \to B$ funciones continuas. Supongamos que f es topológicamente conjugado con g. Entonces:*

1. *f tiene una órbita periódica si y solo si g tiene una órbita periódica.*
2. *$Per(f) = Per(g)$.*
3. *$Per(f)$ es denso en A si y solo si $Per(g)$ es denso en B .*
4. *f tiene una órbita densa en A si y solo si g tiene una órbita densa en B.*

Demostración: Como f y g son topológicamente conjugados, existe un homeomorfismo $h : A \to B$ tal que $h \circ f = g \circ h$.

1. Supongamos que f tiene una órbita periódica, i.e. $\exists\ x \in A$ tal que $f^n(x) = x$ para algún n. Veamos que g tiene una órbita periódica de periodo n. Como $h \circ f^n = g^n \circ h$, se tiene que $h(x) = h(f^n(x)) = g^n(h(x))$, por lo tanto $h(x)$ es punto periódico de periodo n de g. Como $h^{-1} \circ g = f \circ h^{-1}$, si g tiene una órbita periódica de longitud n, entonces, analogamente al caso anterior, f tiene una órbita periódica de periodo n.

2. Por el caso anterior, $\forall\ x \in Per(f), \quad h(x) \in Per(g)$ y $\forall\ x \in Per(g), \quad h^{-1}(x) \in Per(f)$, por lo tanto $Per(f) = Per(g)$.

3. Supongamos que $Per(f)$ es denso. Veamos que $Per(g)$ es denso. Sea $x \in B$, luego $\exists\ h^{-1}(x) \in A$. Como $Per(f)$ es denso, $\forall\ \delta > 0\ \exists\ y \in Per(f)$ tal que $|h^{-1}(x) - y| < \delta$. Tomemos $\delta_1 > 0$ tal que si $|h^{-1}(x) - y| < \delta_1$ entonces $|x - h(x)| < \epsilon$. Como $h(x) \in Per(g)$ por la parte 1, se tiene que $Per(g)$ es denso.

4. Supongamos que f tiene órbita densa, $\mathcal{O}^+(x)$. Veamos que $\mathcal{O}^+(h(x))$ es una órbita densa por g. Sea $\epsilon > 0$ y $x_1 \in B$. Como h es sobre, $\exists\ h^{-1}(x_1) \in A$. Como $\mathcal{O}^+(x)$ es densa,$\forall\ \delta > 0\ \exists\ k > 0$ tal que $|f^k(x) - h^{-1}(x_1)| < \delta$. Tomemos $\delta_1 > 0$ tal que $|h(f^k(x)) - x_1| < \epsilon$ si $|f^k(x) - h^{-1}(x_1)| < \delta_1$, el cual existe porque h es continua. Como $h(f^k(x)) \in \mathcal{O}^+(h(x))$, se tiene que dicha órbita es densa, como queríamos. El otro caso es análogo. ■

1.3. Conjunto de Cantor

Definición 10 *Un conjunto A es totalmente disconexo si cada componente conexa es un punto. Un conjunto A es nada denso si el interior de la clausura de A es vacío, i.e.*

$int\overline{A} = \emptyset$. Un conjunto A es perfecto si cada punto p en A es punto limite de puntos $q_n \in A$ con $q_n \neq p$.

En $\mathbb{R}$ un conjunto es nada denso si y solo si es totamente disconexo. Esta afirmación está demostrada en [3].

Definición 11 *Un conjunto A es llamado conjunto de Cantor si:*

(i) A es totalmente disconexo,

(ii) es perfecto,

(iii) es compacto.

1.4. Caos

Definición 12 *Sea I un intervalo. Una función $f : I \to I$ decimos que es topológicamente transitiva si para cualquier par de subconjuntos abiertos $U, V \subseteq I$ existe $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Esto quiere decir que, si f es transitiva, entonces no podemos separar la dinámica en dos conjuntos abiertos disjuntos.

Notemos que si f tiene una órbita densa, entonces f es topológicamente transitiva. El recíproco también es cierto.

Definición 13 *Una función $f : I \to I$ tiene sensibilidad en las condiciones iniciales si existe $\epsilon > 0$ tal que para cualquier $x \in I$ y cualquier entorno U de x existe $y \in U$ y $n > 0$ tal que $|f^n(x) - f^n(y)| > \epsilon$.*

Definición 14 *Sea I un conjunto. Una función $f : I \to I$ es caótica en I si* *(i) f tiene sensibilidad en las condiciones iniciales.*

(ii) f es topológicamente transitiva.

(iii) $Per(f)$ es densa en I.

1.5. La Familia Logística

En esta sección describiremos la dinámica de la familia logística, la cual definiremos a continuación:

Sea $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, donde $\mu > 0$, es llamada la familia logística. Ver gráfica 1.2.

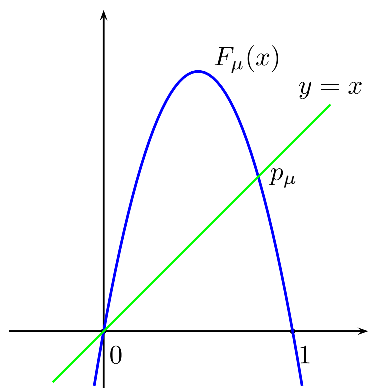


Figura 1.2: Gráfica de F_μ

Notemos que F_μ es un polinomio, en particular F_μ es continuamente diferenciable y $F'_\mu(x) = \mu - 2\mu x$. Los puntos críticos de F_μ satisfacen la siguiente ecuación : $F'_\mu(x) = \mu(1-2x) = 0$, por lo tanto el único punto crítico es $x = 1/2$. Como $F''_\mu(x) = -2\mu \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, tenemos que $x = 1/2$ es un máximo y $F_\mu(1/2) = \mu/4$.

Para encontrar los puntos fijos de F_μ, basta con resolver la ecuación $x = \mu x(1-\mu)$, por lo tanto, los puntos fijos de F_μ son 0 y $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$, en efecto, $F_\mu(0) = 0$

y $F_\mu(p_\mu) = \mu(\frac{\mu-1}{\mu})(1-(\frac{\mu-1}{\mu})) = \frac{\mu-1}{\mu} = p_\mu$.

Observemos que, para $\mu \neq 1$, ambos puntos fijos son hiperbólicos pues $|F'_\mu(0)| = |\mu|$ y $|F'_\mu(p_\mu)| = |\mu - 2(\mu-1)| = |2-\mu|$. Además, 0 es atractor si $0 < \mu < 1$ y repulsor si $1 < \mu < 3$; p_μ es atractor si $1 < \mu < 3$ y es repulsor si $0 < \mu < 1$ y $\mu > 3$.

Proposición 1.8 *Supongamos que* $\mu > 1$*. Si* $x \notin [0,1]$ *entonces* $F^j_\mu(x) \to -\infty$ *cuando* $j \to \infty$*.*

Demostración: Si $x < 0$, entonces $\mu x - \mu x^2 < x$, luego $F_\mu(x) < x$. Por lo tanto, $0 > x > F_\mu(x) > \ldots > F^n_\mu(x)$ es una sucesión decreciente. Si F^n_μ fuese acotada, esta convergería a un punto fijo negativo, pero no existe tal punto, por lo tanto $F^n_\mu \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Si $x > 1$, entonces $F_\mu(x) < 0$ y $F^j_\mu(x) = F^{j-1}_\mu(F\mu(x)) \to -\infty$ cuando $j \to \infty$. ■

Observación: Como consecuencia de esta proposición tenemos que $\Omega(F_\mu) \subseteq [0,1]$.

Proposición 1.9 *Supongamos que* $1 < \mu < 3$*. Si* $x \in (0,1)$ *entonces* $F^n_\mu(x) \to p_\mu$ *cuando* $n \to \infty$*.*

Demostración:

1. Consideremos $1 < \mu \leq 2$. Ver figura 1.3 Luego, $F_\mu(1/2) = \mu/4 < 1/2$, y $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu} < 1/2$. Por el Teorema de Valor Medio, $F_\mu(x) > x \ \forall \ x \in (0, p_\mu)$, y como F_μ es estrictamente creciente en este intervalo, se tiene que $F^n_\mu(x)$ es una sucesión creciente y acotada, entonces, por la proposición 1.1, converge a p_μ. Para $x \in (p_\mu, 1/2]$ la función es estrictamente creciente y $F_\mu(x) < x \ \forall \ x \in (0, 1/2]$, entonces, $F^n_\mu(x)$ es una sucesión decreciente y acotada, por lo tanto converge a p_μ . Por último, si $x \in (1/2, 1)$, $F_\mu(x) \in (0, 1/2)$, luego, por los casos anteriores , $F^n_\mu(x) \to p_\mu$ cuando $n \to \infty$.

2. Supongamos que $2 < \mu < 3$. Notemos que $p_\mu > 1/2$. Ver figura 1.4.

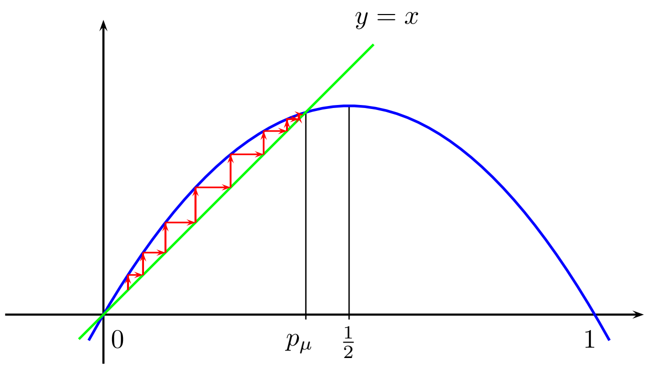


Figura 1.3: Ejemplo de F_μ para $1 < \mu \leq 2$

- Consideremos el intervalo $[1/2, p_\mu]$. Como $F_\mu^2(x)$ es monótona en $[1/2, p_\mu]$, para encontrar la imagen, es suficiente determinar las iteraciones de los extremos:

$$F_\mu^2([1/2, p_\mu]) = F_\mu([p_\mu, \mu/4]) = [\mu(\mu/4)(1 - (\mu/4), p_\mu)]$$

  Queremos mostrar que esta imagen esta contenida en $[1/2, \mu]$, $\mu(\mu/4)(1 - (\mu/4) > 1/2$ ó $\mu^3 - 4\mu^2 + 8 = (\mu - 2)(\mu^2 - 2\mu - 4) < 0$. Las raíces de $\mu^2 - 2\mu - 4$ son $1 \pm \sqrt{5}$, por lo tanto $\mu^2 - 2\mu - 4 < 0$ para $\mu < 3$. Como $\mu - 2 > 0$ para $\mu < 3$, el producto de estos factores es negativo, como deseamos. Así, $F_\mu^2(1/2) = \mu(\mu/4)(1 - \mu/4) > 1/2$ y $F^2([1/2, p_\mu]) \subseteq [1/2, p_\mu]$. Notemos que los únicos puntos fijos de F_μ^2 son 0 y μ. Como $F_\mu^2(1/2) > 1/2$, se sigue que $p_\mu > F_\mu^2(x) > x$ para $1/2 \leq x < \mu$. Por lo tanto, todos los puntos en el intervalo $[1/2, p_\mu]$ convergen bajo iteración por F_μ^2. Como $|F_\mu'(p_\mu)| < 1$, se sigue que todos estos puntos convergen a p_μ bajo iteración por F_μ.

- Ahora, sea $\widehat{p_\mu} = 1/\mu < 1/2$, entonces $F_\mu(\widehat{p_\mu}) = p_\mu$, $F_\mu([\widehat{p_\mu}, 1/2]) = F_\mu([1/2, p_\mu])$ y $F_\mu^2([\widehat{p_\mu}, 1/2]) \subseteq [1/2, p_\mu]$. Así, $\forall\, x \in [\widehat{p_\mu}, 1/2]$, $F_\mu^n(x) \to p_\mu$ cuando $n \to \infty$ por lo mostrado en el caso anterior.

- Si $x \in (p_\mu, 1)$, entonces $F_\mu(x) \in (0, p_\mu)$ y por lo tanto las iteradas convergen a

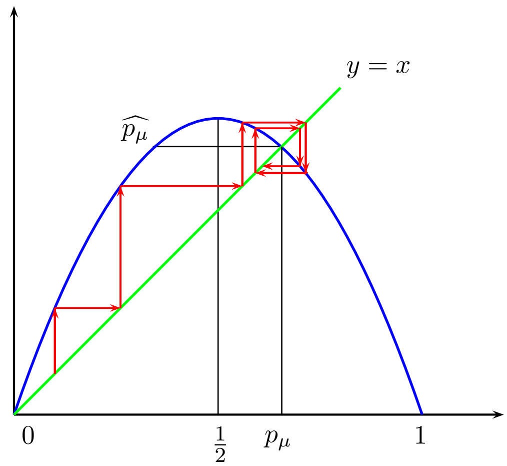


Figura 1.4: Ejemplo de F_μ para $2 < \mu < 3$

p_μ.

$\blacksquare$

Para $\mu = 3$, F_μ tiene 2 puntos periódicos de periodo 3 y cuando $\mu \to 4$, F_μ la longitud de orbitas aumentan y para $\mu = 4$, F_μ tiene orbitas periódicas de todos los periodos.

Notemos que para $\mu = 4$, el máximo de $F_\mu, \mu/4 = 1$, por lo tanto, $F_4([0,1]) = [0,1]$. Ver figura 1.5. Luego $[0,1]$ es un conjunto invariante. Además $Per(F_4)$ es denso en $[0,1]$, F_4 tiene sensibilidad en las condiciones iniciales y es transitiva. Por lo tanto, F_4 es caótica en $[0,1]$.

Para $\mu > 4$, F_μ posee un conjunto de Cantor transitivo e invariante, $\Lambda_\mu = \{x : F_\mu^k(x) \in [0,1] \ \forall \ n \in \mathbb{N}\}$. El conjunto de puntos periódicos, $Per(F_\mu)$, es denso en Λ_μ, y F_μ tiene sensibilidad en las condiciones iniciales. Por lo tanto, F_μ es caótica en Λ_μ para $\mu > 4$.

Estas afirmaciones estan demostradas en [1] y [2].

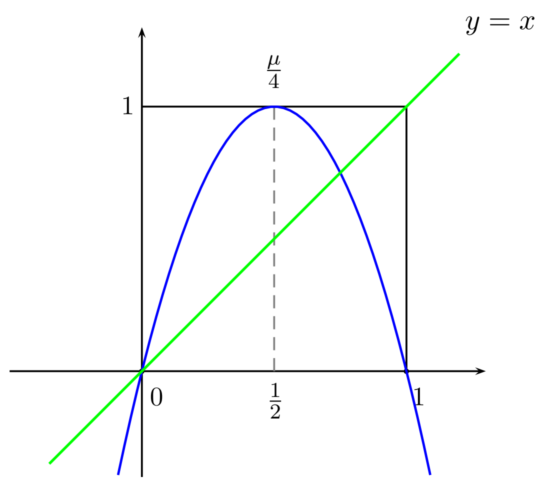


Figura 1.5: Gráfica de F_4

1.6. Dinámica Simbólica

En esta sección vamos a definir un espacio de símbolos donde representaremos la dinámica de F_μ en Λ_μ a través de una función definida en este espacio. Los elementos de este espacio son sucesiones de ceros y unos.

Definición 15 $\Sigma_2 = \{s = (s_0 s_1 s_2 \ldots) : s_i = 0, 1\}$.

Σ_2 *es llamado el espacio de sucesiones en los simbolos 0 y 1.*

En general, dado $n \geq 2$, el espacio Σ_n consiste en sucesiones de enteros entre 0 y $n-1$. Definiremos una métrica para Σ_2 de la siguiente manera. Sean $s = (s_0 s_1 s_2 \ldots)$ y $t = (t_0 t_1 t_2 \ldots)$ elementos de Σ_2, la distancia entre s y t esta dada por

$$d(s,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_1 - t_1|}{2^i}$$

Como $|s_1 - t_1|$ es 0 ó 1, $d(s,t)$ esta acotada por la serie geométrica

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$$

y por lo tanto $d(s,t)$ converge.

Proposición 1.10 *d es una métrica en Σ_2*

Demostración: Sean $s = (s_0 s_1 s_2 \ldots)$, $t = (t_0 t_1 t_2 \ldots)$, $r = (r_0 r_1 r_2 \ldots) \in \Sigma_2$. Como $|.|$ es una metrica, $d(s,t) \geq 0$. Si s=t, $|s_i - t_i| = 0$ $\forall i \in \mathbb{N}$ y por lo tanto, $d(s,t) = 0$. Si $d(s,t) = 0$ entonces $|s_i - t_i| = 0$ $\forall i \in \mathbb{N}$, pero $|.|$ es una metrica, por lo tanto s=t. Como $|.|$ es simetrica, i.e. $|s_i - t_i| = |t_i - s_i|$ $\forall i \in \mathbb{N}$, tenemos que $d(s,t) = d(t,s)$. Para $s, tyr \in \Sigma_2$, tenemos que $|s_i - r_i| \leq |s_i - t_i| + |t_i - r_i|$ $\forall$ $i \in \mathbb{N}$,luego $\frac{|s_i - r_i|}{2^i} \leq \frac{|s_i - t_i|}{2^i} + \frac{|t_i - r_i|}{2^i}$ $\forall$ $i \in \mathbb{N}$, por lo tanto $d(s,r) \leq d(s,t) + d(t,r)$. ■

Proposición 1.11 *Sean $s, t \in \Sigma_2$. Entonces $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ si y solo si $d(s,t) \leq 1/2^n$.*

Demostración: Supongamos que $s_i = t_i$ *para* $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Entonces

$$\begin{aligned} d(s,t) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{|s_1 - t_1|}{2^i} \ + \ \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_1 - t_1|}{2^i} \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1/2^n \end{aligned}$$

Por otro lado, si $s_i \neq t_i$ para algun $j \leq n$ entonces

$$d(s,t) \geq 1/2^1 \geq 1/2^n$$

por lo tanto, si $d(s,t) < 1/2^n$ entonces $s_i = t_i$ para $i \leq n$. ■

Definición 16 *Sea $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ tal que $\sigma(s_0 s_1 \ldots) = (s_1 s_2 \ldots)$ es llamada la función desplazamiento o shift.*

Proposición 1.12 *La función desplazamiento $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es continua.*

Demostración: Sea $\epsilon > 0$ y $s \in \Sigma_2$ con $s = (s_0 s_1 \ldots)$. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^n < \epsilon$ y consideremos $\delta = 1/2^{n+1}$. Si $t \in \Sigma_2$ con $t = (t_0 t_1 \ldots)$ satisface $d(s,t) < \delta$, se tiene que, por la proposición anterior, que $s_i = t_i$ para $i \leq n+1$. Por lo tanto, $\sigma(s) = \sigma(t)$ para $i < n$. Luego, $d(\sigma(s), \sigma(t)) < 1/2^n < \epsilon$. ■

Proposición 1.13 *Sea $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ la función desplazamiento. Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(1) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $Per_n(\sigma) = 2^n$.

(2) $Per(\sigma)$ es denso en Σ_2.

(3) Existe una órbita densa para σ en Σ_2.

Demostración:

1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como los puntos periódicos de periodo n son de la forma $s = (s_0 \ldots s_{n-1}, s_0 \ldots s_n, s_0 \ldots s_{n-1}, \ldots)$, pues $\sigma^n(s) = (s_0 \ldots s_n, s_0 \ldots s_{n-1}, \ldots) = s$, y como para cada $i \leq n$, existen 2 opciones para s_i, se tiene que hay 2^n puntos periodicos. Si $\sigma^n(t) = t$ entonces $t_{n+i} = t_i \; \forall \, i$, por lo tanto, $t = (t_0 \ldots t_{n-1}, t_0 \ldots t_{n-1}, \ldots)$.

2. Veamos que $Per(\sigma)$ es denso en Σ_2. Para estos mostraremos que $\overline{Per(\sigma)} = \Sigma_2$. Sea $s \in \Sigma_2$ y para cada n consideremos $t_n = (s_0, s_1 \ldots s_{n-1}, s_0 \ldots s_{n-1}, \ldots) \in Per(f)$. Por la proposición 1.12, tenemos que $d(s, t_n) \leq 1/2^n$, por lo tanto $t_n \to s, \; n \to \infty$.

3. Vamos a construir una órbita densa para σ en Σ_2. Para cada n, consideremos los bloques de secuencias de 0 y 1 de longitud n.

Luego, denotemos por s' la siguiente sucesión

$$s' = (\underbrace{0\ 1}_{1^\circ bloque}\ ,\ \underbrace{00\ 01\ 10\ 11}_{2^\circ bloque},\ \underbrace{000\ 001\ 011\ \ldots}_{3^\circ bloque},\ \ldots)$$

Sea $s \in \Sigma_2$ y $n \in \mathbb{N}$, luego, para alguna iterada de σ, $s'_i = s_i$ para $i \leq n$. Luego, por la proposición 1.12, $d(s, s') \leq 1/2^n$. Por lo tanto, s' es densa en Σ_2. ■

CAPÍTULO 2

HOMEOMORFISMOS Y DIFEOMORFISMOS

En este capítulo estudiaremos la dinámica de las funciones inyectivas y/o sobreyectivas, particularmente homeomorfismos y difeomorfismos.

Definición 17 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es un homeomorfismo si f es invertible y , además f y f^{-1} son continuas.*

Una función f es un difeomorfismo si f es invertible y f, f^{-1} son de clase $\mathcal{C}^1$

Notemos que, en $\mathbb{R}$ si f es invertible y continua, entonces f es un homeomorfismo.

Notemos que si f es estrictamente monótona, entonces f es inyectiva.

Proposición 2.1 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sobreyectiva y estrictamente decreciente. Entonces f es continua.*

Demostración: Supongamos, por reducción al absurdo que f tiene una discontinuidad. Como f es estrictamente decreciente, esta discontinuidad es de tipo salto, pues en otro caso, hay un contradicción con la monótonia. Supongamos que f es discontinua en

$x_0 \in \mathbb{R}$. Sea $A = \{f(x) : \ x < x_0\}$. A esta acotado inferiormente, pues $\forall\ x < x_0$, $f(x) > f(x_0)$, porque f es decreciente. Luego, A tiene un infimo, llamemoslo y_1. Análogamente, $B = \{f(x) : \ x > x_0\}$ esta acotado superiormente, pues $f(x_0) > f(x)$ si $x > x_0$. Por lo tanto A tiene un supremo, llamemoslo y_2. Por lo tanto, $\forall\ y \in (y_1, y_2)$, y no tiene preimagen, contradicción, pues f es sobreyectiva.

$\blacksquare$

Observación: Este resultado tambien es válido para funciones estrictamente crecientes y la demostración es análoga.

Proposición 2.2 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sobreyectiva y estrictamente decreciente. Entonces f tiene un único punto fijo.*

Demostración: : Veamos la existencia del punto fijo. Supongamos, por reducción al absurdo, que f no tiene puntos fijos. Luego $f(x) > x$ ó $f(x) < x\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Supongamos que $\forall\ x \in \mathbb{R}\ f(x) > x$. Dado $M > 0$, $\exists\ x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = -M$, pues f es sobre. Como f es decreciente , $\forall\ x > x_1,\ f(x) < -M$. Por lo tanto, $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to \infty$. Como $f(x) > x\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, tenemos que $f(M) > M$, por lo tanto, $\forall\ x > M,\ f(x) > M$, así $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$, contradicción. Si $f(x) < x$, la prueba es análoga.

Veamos la unicidad del punto fijo. Supongamos, por reducción al absurdo que f tiene dos puntos fijos, digamos p y q, con $p < q$. Como f es decreciente, $p = f(p) > f(q) = q$, contradicción. Por lo tanto, f un único punto fijo. $\blacksquare$

Proposición 2.3 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente, sobreyectiva y derivable tal que f tiene un único punto fijo p. Entonces:*

1. *Si $| f'(p) | < 1$ entonces $W^s_f(p) = \mathbb{R}$.*
2. *Si $| f'(p) | > 1$ entonces $W^u_f(p) = \mathbb{R}$.*

Demostración: Sea p el punto fijo de f. Como f es estrictamente creciente, se tiene que $f'(x) > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$. Como f es estrictamente monótona, f es inyectiva. Como f es sobre y derivable, tenemos que f^{-1} es al menos continua. Por lo tanto f es un homeomorfismo.

- Supongamos que p es atractor, es decir $f'(p) < 1$. Por definición de $f'(p)$, $\lim_{x \to p} \frac{f(x)-p}{x-p} = f'(p) < 1$, por lo tanto, $f(x) < x$ si $x > p$ y $f(x) > x$ si $x < p$.

  Veamos que $(p, +\infty) \subset W^s_f(p)$. Sea $x \in (p, +\infty)$, luego $f(x) < x$, y $p = f(p) < f(x)$, por lo tanto, $f^n(x) < f^{n-1}(x)$ y $p = f^n(p) < f^n(x) \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$. Como f^n es una sucesión decreciente y acotada, entonces converge a un punto fijo, pero p es el único punto fijo, entonces $f^n \to p$ cuando $n \to \infty$.

  Veamos que $(-\infty, p) \subset W^s_f(p)$. Sea $x \in (-\infty, p)$, luego $f(x) > x$ y $p = f(p) > f(x)$; como f es creciente, $f^n(x) > f^{n-1}(x)$ y $p = f^n(p) \ \forall \ n \in \mathbb{N}$. Ahora, f^n es una sucesión creciente y acotada, entonces converge a un punto fijo, pero p es el único punto fijo, entonces $f^n \to p$ cuando $n \to \infty$.

  Es claro que $p \in W^s_f(p)$, pues p es punto fijo. Por lo tanto $W^s_f(p) = \mathbb{R}$.

- Supongamos que p es repulsor, es decir $f'(p) > 1$. De la definición de límite, se tiene que $f(x) > x$ si $x > p$ y $f(x) < x$ si $x < p$.

  Veamos que $(p, +\infty) \subset W^u_f(p)$. Sea $x \in (p, +\infty)$, luego $f(x) > x > p$, por lo tanto, $x > f^{-1}(x) > f^{-1}(p) = p$, y $f^{-(n-1)}(x) > f^{-n}(x) > f^{-n}(p) = p \ \forall n \in \mathbb{N}$. Luego f^{-n} es una secesión decreciente y acotada, por lo tanto converge a p.

  Veamos que $(-\infty, p) \subset W^s_f(p)$ .Sea $x \in (-\infty, p)$, luego $f(x) < x < p$, por lo tanto $x < f^{-1}(x) < f^{-1}(x)$, y $f^{-(n-1)}(x) < f^{-n}(x) < f^{-n}(p) = p$. Luego f^{-n} es una sucesión creciente y acotada, por lo tanto converge a p.

Es obvio que $p \in W_f^u(p)$, pues p es punto fijo. Luego $W_f^u(p) = \mathbb{R}$. ■

Proposición 2.4 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función estrictamente decreciente, sobreyectiva y diferenciable tal que f no posee puntos periódicos. Entonces:*

1. *Si $\mid f'(p) \mid < 1$ entonces $W_f^s(p) = \mathbb{R}$.*
2. *Si $\mid f'(p) \mid > 1$ entonces $W_f^u(p) = \mathbb{R}$.*

Demostración: Como f es monótona, f es inyectiva, y por hipótesis, f es sobre, luego f tiene inversa.

Supongamos que p es atractor, i.e. $|f'(p)| < 1$. Consideremos f^2, la cual es creciente. Como f tiene un único punto fijo p, f^2 solo tiene a p como punto fijo. Por la proposición anterior, $f^{2n}(x) \to p$ cuando $n \to \infty$. Consideremos una iterada impar, f^{2n+1}, la cual es decreciente. Como $f^{2n+1}(x) = f(f^{2n}(x))$ y $f^{2n}(x) \to p$ cuando $n \to \infty$,de la continuidad f se sigue que, $f^{2n+1} \to f(p) = p$ cuando $n \to \infty$. Como ambas subsucesiones convergen a p, $f^n \to p$ cuando $n \to \infty$.

Si p es repulsor, i.e. $|f'(p)| > 1$, la demostración es analoga al caso anterior. ■

Proposición 2.5 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente monótona, invertible y continua . Entonces f no puede tener puntos periódicos mayor que 2.*

Demostración: Supongamos, por reducción al absurdo, que tiene al menos un punto periódico x de periodo $n > 2$. Como $f(x) \neq x$, se tiene que $f(x) < x$ ó $f(x) > x$.

- Afirmación 1: Si f es creciente solo tiene puntos fijos.

- Caso 1: Supongamos que $f(x) < x$, luego $f(x)^2 < f(x)$. Por lo tanto,

$$f^n(x) < f^{n-1} < \ldots < f^2(x) < f(x) < x.$$

  Pero $f^n(x) = x < f^{n-1}(x) < f(x) < x$, contradicción.

- Caso 2: Supongamos que $f(x) > x$, luego $f(x)^2 > f(x)$. Por lo tanto,

$$f^n(x) > f^{n-1} > \ldots > f^2(x) > f(x) > x.$$

  Pero $f^n(x) = x > f^{n-1}(x) > f(x) > x$, contradicción.

▪ Afirmación 2: Si que f es decreciente entonces $Per(f) = Per_2(f) \cup Fix\{f\}$.

Como f es decreciente entonces f^2 es creciente y f^{-1} es decreciente.

- Caso 1: Supongamos que $f(x) < x$, entonces $f^3(x) < f(x)$ y $f^2(x) > x$. Luego

$$f^{2m-1}(x) < f^{2(m-1)-1}(x) < \ldots < f^3(x) < f(x) < x < f^2(x) < \ldots < f^{2m}(x)$$

  Si n es par,$x = f^n(x) > f^{2m+1}(x) > x$, contradicción.
  Si n es impar, $x = f^n(x) < f^{2m}(x) < x$, contradicción.

- Caso 2: Supongamos que $f(x) > x$, entonces $f^3(x) > f(x)$ y $f^2(x) < x$

$$f^{2m}(x) < \ldots < f^2(x) < x < f(x) < f^3(x) < \ldots < f^{2(m-1)}(x) < f^{2m-1}(x)$$

  Si n es par,$x = f^n(x) < f^{2m+1}(x) < x$, contradicción.
  Si n es impar, $x = f^n(x) > f^{2m}(x) > x$, contradicción. ■

Observación: Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente entonces f tiene, a lo sumo, puntos fijos. Notemos que f puede tener infinitos puntos fijos. Si f es estrictamente decreciente, entonces f tiene un único punto fijo, y a lo sumo, puntos periódicos de periodo 2. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1

- *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x + \sin(x)$. f *es un homemorfismo creciente derivable, y la derivada es continua. Notemos que* $\forall\ x \in \{k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$, x *es punto fijo. Como* $f'(x) = \cos(x) + 1$, *se tiene que todos los puntos fijos son hiperbólicos. Notemos que si* k *es impar entonces* x *es repulsor pues* $f'(x) = \cos((2n+1)x) + 1 = 2$. *Si* k *es par entonces* x *es atractor.*

- *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = -x - \sin(x)$. f *es un homeomorfismo decreciente y* f' *es continua. El único punto fijo de* f *ocurre en* $x = 0$. *Notemos que, si* $x = k\pi$ *con* $k \in \mathbb{Z}$, x *es un punto periódico de periodo 2, pues* $f(x) = -(k\pi) - \sin(k\pi) = -k\pi = -x$ *y* $f(-x) = k\pi$. *Por lo tanto,* f *tiene infinitos puntos periódicos de periodo 2.*

Corolario 2.6 *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es un homeomorfismo creciente entonces* $\Omega(f) = Fix(f)$.

Demostración: De la definición de $\Omega(f)$ tenemos que $Fix(f) \subseteq \Omega(f)$. Veamos que $\Omega(f) \subseteq Fix(f)$. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 \notin Fix\{f\}$ y $\epsilon = \frac{1}{4}|f(x_0) - x_0|$, luego, por la continuidad, podemos tomar $\delta < \frac{1}{4}|f(x_0) - x_0|$ tal que $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subseteq (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$, por lo tanto, $f(x) \notin (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ y $f^n(x) \notin (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, pues f es creciente. ■

Proposición 2.7 *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función estrictamente monótona de clase* $\mathcal{C}^1$. *Entonces el conjunto de puntos fijos hiperbólicos es discreto.*

Demostración: Sea $p \in Fix(f)$. Por la proposición 1.2 y 1.3, existe un abierto U con $p \in U$ tal que $\forall\ x \in U \backslash \{p\},\ f(x) \neq x$. Luego, los puntos hiperbólicos son aislados, y por lo tanto, el conjunto de estos puntos es discreto.

Observación: Notemos que este resultado tambien es válido para el conjunto de puntos periódicos hiperbólicos, puesto que, si p es periódico, p es de periodo dos y como f^2 es un difeomorfismo, aplicamos la proposición 2.7 para f^2.

Proposición 2.8 *: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente monótona de clase $\mathcal{C}^1$. Si p y q son dos puntos fijos hiperbólicos de f tal que no exite un punto fijo entre ellos, entonces uno es atractor y el otro es repulsor.*

Demostración: Como f posee al menos dos puntos fijos, f es estrictamente creciente. Sean p, q puntos fijos de f, y supongamos que $p < q$.

- Caso 1 : Supongamos que p es atractor, es decir $\mid f'(p) \mid < 1$. Como f' es continua, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in (p-\delta, p+\delta), \mid f'(p) \mid < 1$. Luego por el teorema del valor medio, se tiene que:
$$\frac{f(x) - p}{x - p} = f'(\xi) < 1$$
Luego, si
$$\text{si } x < p, f(x) > x \text{ y } x > p, f(x) < x \ . \tag{2.1}$$
Supongamos por reducción al absurdo, que q es atractor, es decir $\mid f'(q) \mid < 1$. Luego, como f' es continua, $\exists\ \delta_1 > 0$ tal que $\forall\ x \in (q-\delta_1, q+\delta_1), \mid f'(q) \mid < 1$ .Por el teorema del valor medio,
$$\text{si } x < q, f(q) > x \text{ y } x > q, f(q) < x. \tag{2.2}$$
De (3.1) , (2.2) y el teorema del valor intermedio se tiene que $\exists\ r \in (p, q)$ tal que $f(r) = r$. Luego r es punto fijo de f, contradicción, pues p y q son los únicos puntos fijos de f. Por lo tanto $\mid f'(q) \mid > 1$
- Caso 2 :Supongamos que p es repulsor, es decir $\mid f'(p) \mid > 1$. Como f' es continua, existe un entorno U tal que $\forall x \in U, \mid f'(x) \mid > 1$. Luego, por el teorema del valor medio, se tiene que

$$\text{si } x < p, f(x) < x \text{ y } x > p, f(x) > x \tag{2.3}$$

Supongamos por reducción al absurdo, que $| f'(q) |> 1$, luego,

$$\text{si } \ x < q, f(q) < x \text{ y } six > q, f(q) > x. \tag{2.4}$$

De (2.3) , (2.4) y por el teorema del valor intermedio se tiene que $\exists r \in (p, q)$ tal que $f(r) = r$. Luego r es punto fijo de f, contradicción. Por lo tanto $| f'(q) |> 1$. ■

Corolario 2.9 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homeomorfismo diferenciable y $\forall\ x \in Fix(f)$, x es hiperbólico. Si x_1 y x_2 son dos puntos fijos atractores (repulsor) consecutivos, entonces existe un punto fijo y con $y \in (x_1, x_2)$ tal que y es repulsor(atractor).*

Demostración: Sean x_1 y x_2 son dos puntos fijos atractores y $x_1 < x_2$. Luego, para un entorno U de x_1, tenemos que , si $x < x_1, f(x) > x$ y si $x > x_1, f(x) < x$. Analogamente, para un entorno V de x_2, tenemos que, si $x < x_2, f(x) > x$ y si $x > x_2, f(x) < x$. Por el Teorema de Valores Intermedios, tenemos que existe un punto fijo p tal que $p \in (x_1, x_2)$. Por la proposición anterior, tenemos que p es repulsor. ■

Proposición 2.10 *Si f es continua e inyectiva entonces f no puede tener puntos eventualmente periódicos.*

Demostración: Supongamos, por reducción al absurdo, que f tiene un punto x eventualmente periódico de periodo n. Por lo tanto, existe $m > 0$ tal que $\forall\ j \geq m,\ f^{j+n}(x) = f^j(x)$. Luego, $\mathcal{O}_f^+(f^m(x))$ es una órbita periódica de periodo n. Como $y = f^m(x)$ es periódico, $f^{-1}(y)$ tiene 2 preimagenes, $f^{-1}(y) \in \mathcal{O}_f^+(f^m(x))$ y $f^{-1}(y) \in \mathcal{O}_f^+(x)$, contradicción pues f es inyectiva. Por lo tanto, f no puede tener puntos eventualmente periódicos. ■

En la siguiente proposición se nos garantiza que las funciones monótonas no pueden ser caóticas pues no pueden tener conjuntos transitivos no triviales. Consideraremos conjuntos transitivos triviales las órbitas periódicas.

Proposición 2.11 *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente monótona y sobreyectiva, entonces f no puede tener conjuntos transitivos no triviales.*

Demostración: Supongamos por reducción al absurdo, qué f es transitiva. Luego, f tiene una órbita densa. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{O}^+(x)$ es densa en $\mathbb{R}$.

- Supongamos que f es estrictamente creciente. Como $x \neq f(x)$, tenemos que $f(x) > x$ ó $f(x) < x$.

  Si $f(x) > x$, tenemos que, como f es creciente, $f^n(x)$ es una sucesión creciente. Como $\mathcal{O}^+(x)$ es densa, para $y \in \mathbb{R}$ con $y < x$, $\exists\ k \in \mathbb{N}$ tal que $|f^k(x) - y| < \frac{|y-x|}{2}$, luego, $f^k(x) < x$, contradicción.

  Si $f(x) < x$, tenemos que , $f^n(x)$ es una sucesión decreciente. Como $\mathcal{O}^+(x)$ es densa, para $y \in \mathbb{R}$ con $y > x$, $\exists\ k \in \mathbb{N}$ tal que $|f^k(x) - y| < \frac{|y-x|}{2}$, luego, $f^k(x) > x$, contradicción.

- Supongamos que f es estrictamente decreciente. Como f es monótona, f es inyectiva, luego f es biyectiva y continua, por lo tanto f^{-1} es continua y estrictamente decreciente. Como $x \neq f(x)$, tenemos que $f(x) > x$ ó $f(x) < x$.

  Si $f(x) > x$ entonces $f^3(x) > f(x)$ y $f^2(x) < x$. Luego, $f^{2m}(x) < \ldots < f^2(x) < x$ y $x < f(x) < f^3(x) < \ldots < f^{2(m-1)-1}(x) < f^{2m-1}(x)$, por lo tanto, $f^{2n}(x)$ es una sucesión decreciente y $f^{2n+1}(x)$ es creciente. Sea $y \in \mathbb{R}$ tal que $k \in (f^{2(k+1)}(x), f^{2k}(x))$, como $\mathcal{O} + (x)$ es densa , $\exists\ j$ tal que $|f^j(x) - y| < \frac{|f^{2(k+1)}(x) - f^{2k}(x)|}{2}$, pero si j es par, contradicción. Si $\jmath$ es impar, $f^j(x) > x > f^{2k}(x)$ contradicción.

  Si $f(x) < x$, el caso es análogo al anterior. ■

Notemos que con este resultado concluimos que las funciones estricatamente monótonas, entre estas, los homeomorfismos, no pueden tener un comportamiento caótico. Por lo tanto, este tipo de funciones tiene un comportamiento predecible.

Podemos concluir que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un homemorfismo y $x \in \mathbb{R}$ entonces $\mathcal{O}^+(x)$ tiene uno de los siguientes comportamientos:

- x es un punto fijo.
- $\mathcal{O}^+(x)$ es un órbita periódica de periodo dos.
- $f^n(x)$ es una sucesión monótona no acotada, y por lo tanto diverge.
- $f^n(x)$ es una sucesión monótona y acotada, por lo tanto converge a un punto fijo ó un punto periódico de periodo dos.

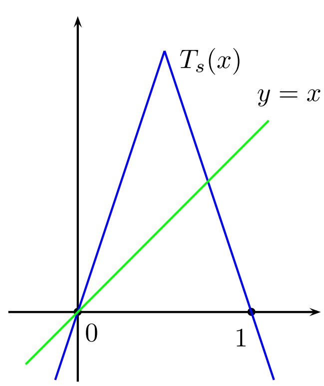
CAPÍTULO 3

LA APLICACIÓN TIENDA

En este capítulo describiremos la dinámica de la aplicación Tienda, siguiendo la metodología que es usada en el estudio de la familia logística, como esta expuesto en [1].
Sea $T_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$T_s(x) = \begin{cases} sx & si \quad x \leq 1/2 \\ s - sx & si \quad x \geq 1/2, \end{cases}$$

T_s es llamada la aplicación tienda ó Tent Map. La siguiente figura ilustra la gráfica de esta función para parámetros positivos.



Gráfica de T_s para $s > 0$

Notemos que T_s esta bien definida, pues $T_s(1/2) = s - \frac{s}{2} = \frac{s}{2}$. Por definición de T_s, esta función no es inyectiva ni sobreyectiva.

T_s es continua en todo $\mathbb{R}$, y es diferenciable en $\mathbb{R}\backslash\{1/2\}$ y, para $x < 1/2$, $T_s'(x) = s$ y para $x > 1/2$, $T_s'(x) = -s$. Como $\forall\ x \in \mathbb{R} - \{1/2\}$, $T_s'(x) \neq 0$, se tiene que T_s no tiene puntos críticos.

Si $s > 0$, entonces T_s es creciente en $(-\infty, 1/2]$ y es decreciente en $[1/2, \infty)$, se tiene que T_s tiene un máximo en $x = 1/2$ y $T_s(1/2) = s/2$.

Si $s < 0$, entonces T_s es decreciente en $(-\infty, 1/2]$ y es creciente en $[1/2, \infty)$, luego T_s tiene un mínimo en $x = 1/2$ y $T_s(1/2) = s/2$.

Estudiemos las bifurcaciones de T_s, es decir, estudiaremos los cambios en la función respecto a los cambios en el parametro.

Si $s < 1$, entonces el único punto fijo de T_s es $x = 0$. Ver figura 3.1.

- Si $s < -1$, entonces $|T_s'(0)| = |s| > 1$, y por lo tanto 0 es repulsor.

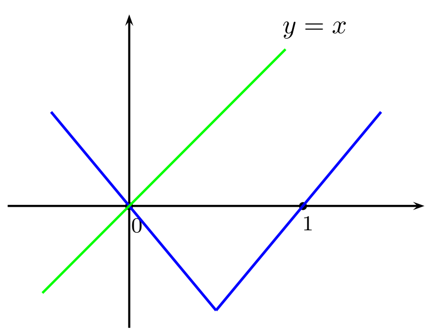


Figura 3.1: Gráfica de T_s con $s < 0$

- Si $s = -1$, tenemos que 0 no es hiperbólico, pues $T_{-1}'(0) = s = -1$. Ver figura 3.2. Además, si $x \in [-1/2, 1/2]$ entonces x es un punto periódico de periodo 2, pues

$$T_{-1}^2(x) = \begin{cases} -1-x & si \quad x \leq -1/2 \\ x & si \quad x \in [-1/2, 1/2] \\ 1-x & si \quad x \in [1/2, 3/2] \\ -2+x & si \quad x \geq 3/2 \ . \end{cases}$$

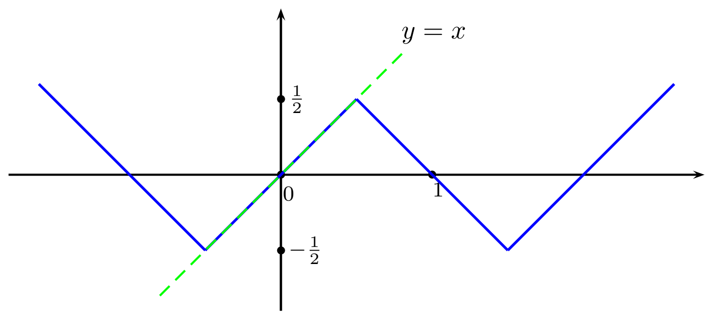


Figura 3.2: Gráfica de $T_{-1}^2(x)$

- Supongamos que $|s| < 1$. Como $|T_s'(0)| = |s| < 1$, se tiene que 0 es atractor.

  Supongamos que $0 < s < 1$. Ver figura 3.3 . Veamos que el conjunto estable de 0, $W^s(0) = \mathbb{R}$. Si $x < 0$ entonces $0 > sx > x$, i.e. $0 > T_s(x) > x$, luego $T_s^n(x)$ es una sucesión creciente y acotada, por lo tanto converge a un punto fijo, por la proposición 1.1, pero el único punto fijo es 0, luego $T_s^n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Si $x \in (0, 1/2]$ entonces $sx < x < 0$, i.e. $T_s(x) < x < 0$, luego $T_s^n(x)$ es una sucesión decreciente y acotada, por lo tanto converge a 0. Si $x \in (1/2, \infty)$, $T_s(x) < 1/2$, luego $T_s^2(x) = sT_s(x)$, entonces aplicando el razonamiento anterior, $T^n(x) = T_s^{n-1}(T_s(x)) \to p$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, $W^s(0) = \mathbb{R}$.

Si s=1, entonces $T_1(x) = x$ para $x \leq 1/2$, y por lo tanto si, $x \leq 1/2$, x es punto fijo, y todos estos puntos no son hiperbólicos, pues $T_s'(x) = s = 1$ para $x < 1/2$. Observemos que

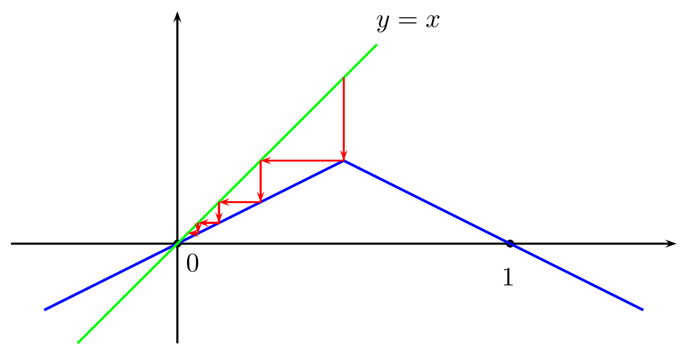


Figura 3.3: Ejemplo de T_s con $0 < s < 1$

$\forall\ x_1 > 1/2,\ T_1(x_1) = \widehat{x_1} < 1/2$. Por lo tanto, x_1 es eventualmente periódico de periodo uno. En la figura 3.4 se muestra un ejemplo para $x_1 \in (1/2, 1)$.

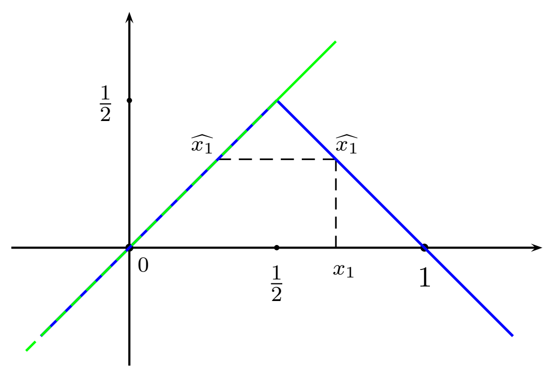


Figura 3.4: Gráfica de T_1

Si $s > 1$, entonces los puntos fijos de T_s son 0 y $p_s = \frac{s}{s+1}$, en efecto, $T_s(0) = 0$ y $T_s(p_s) = s - s(\frac{s}{s+1}) = \frac{s}{s+1} = p_s$. Observemos que ambos puntos fijos son hiperbólicos, en particular son repulsores pues $|T_1'(x)| > 1\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Para $s > 1$, aparecen puntos periódicos de periodo 2, y cuando $s \to 2$, aparecen puntos periódicos de mayor periodo; y para $s = 2$, T_2 tiene órbitas periódicas de todos los periodos. Ver figura 3.5.

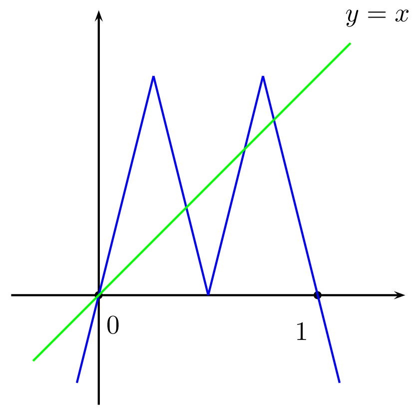


Figura 3.5: Gráfica de T_2^2

Proposición 3.1 *Supongamos que $s > 1$. Si $x \notin [0,1]$ entonces $T_s^n(x) \to -\infty$ si $n \to \infty$.*

Demostración: Sea $x < 0$. Entonces $sx < x$, i.e. $T_s(x) < x$. Como T es es creciente en $(-\infty, 1/2]$, se tiene que $T_s^n(x)$ es una sucesión decreciente. Si $T_s^n(x)$ es acotada, entonces esta converge a un punto fijo $p < 0$, pero este punto no existe, por lo tanto T_s^n no es acotada, luego $T_s^n(x) \to -\infty$ cuando $n \to \infty$.

Si $x > 1$, entonces $T_s(x) < 0 < x$ y $T_s^2(x) = s(T(x))$, luego, por lo anterior $T_s^n(x) = T_s^{n-1}(T_s(x)) \to -\infty$, $n \to \infty$.

■

De esta proposición concluimos que para $s > 1$, $\Omega(T_s) \subseteq [0,1]$. Esto es interesante, pues nos dice que la dinámica de T_s, para $s > 1$, se encuentra en $[0,1]$.

3.1. Dinámica de T_2

Teorema 3.2 *Sea $k \in \mathbb{N}$, $l \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1\}$. Entonces*

$$T_2^k : \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right] \to [0,1] \textit{es un homeomorfismo}$$

Además, si $x \in [\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]$, entonces $T_2^k(x) = \pm 2^k x + 2i_{k(l)}$ donde $i_{k(l)} \in \mathbb{Z}$.

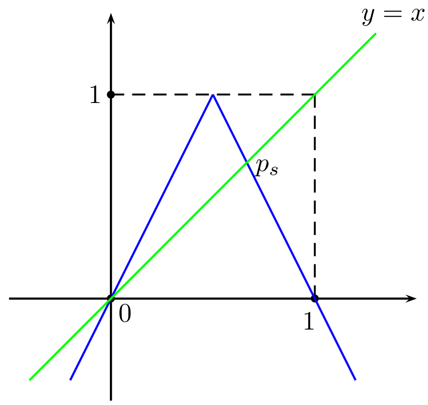


Figura 3.6: Gráfica de T_2

Demostración: La haremos por inducción.

- Sea $k = 1$, luego $l \in \{0, 1\}$.Veamos que $T_2 : [\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}] \to [0, 1]$ es un homeomorfismo.

  Para $l = 0$, tenemos que $T_2 : [0, 1/2] \to [0, 1]$ con $T_2(x) = 2x$. Como T_2 es creciente y continua, se tiene que T_2 es inyectiva. Como $T_2(0) = 0$, $T_2(1/2) = 1$, por lo tanto T_2 es sobre. Luego T_2 es invertible y continua, por lo tanto, T_2^{-1} es continua, i.e. T_2 es un homeomorfismo.

  Para $l = 1$, $T_2 : [1/2, 1] \to [0, 1]$ con $T_2(x) = 2 - 2x$. T_2 es decreciente y continua, por lo tanto T_2 es inyectiva. Como $T_2(1/2) = 1$, $T_2(1) = 0$, se tiene que T_2 es sobre. Luego, T_2 es biyectiva y la inversa es continua, por lo tanto, T_2 es un homeomorfismo.

- Supongamos que la proposición vale para n y veamos que se cumple para $n + 1$.

  Tenemos que para $l \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$, $T_2^n : [\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}] \to [0, 1]$ es un homeomorfismo. Además, si $x \in [\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}]$ entonces $T_2^n(x) = \pm 2^n x + 2i_{n(l)}$ con $i_{n(l)} \in \mathbb{Z}$.

  Para $n + 1$, consideremos $l \in \{0, 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ y veamos que T_2^{n+1} es un homeomorfismo en $[\frac{l}{2^{n+1}}, \frac{l+1}{2^{n+1}}]$, donde $T_2^{n+1}(x) = T_2(T_2^n(x))$. Si $x \in [\frac{l'}{2^{n+1}}, \frac{l'+1}{2^{n+1}}]$ con

$l' \in \{0, 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$, entonces $x \in [\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}]$ para algún $l \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. Luego $T_2^n(x) \in [0, 1]$.

Si $T^n(x) < 1/2$ entonces

$$\begin{aligned} T_2(T_2^n(x)) &= 2T_2^n(x) = 2(\pm 2^n x + 2i_{n(l)}) \\ &= \pm 2^{n+1}x + 2^2 i_{n(l)} \qquad \text{con } \ i_{n(l)} \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Tomando $i_{n+1(l')} = 2i_{n(l)} \in \mathbb{Z}$, tenemos que $T_s^{n+1}(x) = \pm 2^{n+1}(x) + 2i_{n+1(l')}$.

Si $T_2^n(x) > 1/2$ entonces

$$\begin{aligned} T_2(T_2^n(x)) &= 2 - 2T_2^n(x) = 2 - 2(\pm 2^n x + 2i_{n(l)}) \\ &= 2 \mp 2^{n+1}x - 2^2 i_{n(l)} \qquad \text{con } i_{n(l)} \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Tomando $i_{n+1(l')} = 1 - 2i_{n(l)}$ tenemos que $T^{n+1}(x) = \mp 2^{n+1}x + 2i_{n+1(l')}$.

Como $T_2 : [\frac{l'}{2^{n+1}}, \frac{l'+1}{2^{n+1}}] \to [\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}]$, y $T_2^n(x) : [\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}] \to [0, 1]$ son homeomorfismo, entonces $T_2^{n+1} = T_2 \circ T_2^n$ es un homemorfismo en $[\frac{l}{2^{n+1}}, \frac{l+1}{2^{n+1}}]$. ∎

Observación: Una consecuencia directa de este teorema es que $[0, 1]$ es un conjunto invariante bajo T_2.

Corolario 3.3 *El conjunto no-errante de T_2 es $[0, 1]$, i.e. $\Omega(T_2) = [0, 1]$.*

Demostración: De la proposición 3.1 tenemos que $\Omega(T_2) \subseteq [0, 1]$. Veamos que $[0, 1] \subseteq \Omega(T_2)$. Sea $x \in [0, 1]$ y $\epsilon > 0$, y consideremos $(x - \epsilon, x + \epsilon)$. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n} < \epsilon$. Luego, $[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}] \subseteq (x - \epsilon, x + \epsilon)$, para algun $l \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. Como T_2^n es sobre, existe $y \in [\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}]$ tal que $T_2^n(y) \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$. Por lo tanto, $x \in \Omega(T_2)$. Luego $\Omega(T_2) = [0, 1]$.

Proposición 3.4 *Sea s=2. Supongamos que $x \in [0, 1]$ es eventualmente periódico. Entonces x es racional.*

Demostración: Supongamos que x es eventualmente periódico de periodo n, luego $\exists\, m > 0$ tal que $T_2^{j+n}(x) = T^j(x)\ \forall\ j > m$. Por la proposición 3.3, $\forall\ k \in \mathbb{N},\ T_2^k(x) = 2i_{k(l)} \pm 2^k x$ con $i_{k(l)} = \mathbb{Z}$ para algun $l \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$, luego $T_2^{j+n}(x) = 2i_{j+n(l')} \pm 2^{j+n}x = 2i_{(j(l))} \pm 2^j x = T_2^j(x)$ con $i_{j+n(l')}, i_{j(l)} \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\pm 2^{j+n}x \mp 2^j x &= 2i_{j(l)} - 2i_{j+n(l')} \\
\therefore \quad x(2^{j+n} \mp 2^j) &= 2i_{j(l)} - 2i_{j+n(l')} \\
\therefore \qquad x &= \frac{i_{j(l)} - i_{j+n(l')}}{\pm 2^{j+n-1} \mp 2^{j-1}} \in \mathbb{Q}.
\end{aligned}
$$

■

Lema 1 *Si que $x \in [0,1]$ es periódico entonces $x = \frac{2k}{p}$, donde p es un entero impar.*

Demostración: Supongamos que x es un punto periódico de periodo n, i.e. $T_2^n(x) = x$, donde $T_2^n(x) = 2i_{n(l)} \pm 2^n x$ con $i_{n(l)} \in \mathbb{Z}$ y $l \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$. Luego,

$$
\begin{aligned}
T_2^n(x) = 2i_{n(l)} \pm 2^n x &= x \\
\frac{2i_{n(l)}}{1 \mp 2^n} &= x \in \mathbb{Q}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $x = \frac{2k}{p}$, donde $p = 1 - 2^n$ es impar. ■

Observación: Notemos que si $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ entonces $\mathcal{O}^+(x)$ no es finita, pues en caso contrario, por los lemas 3 y 4 tendriamos que $x \in \mathbb{Q}$, contradicción.

Lema 2 *Sea p un entero impar. Entonces T_2 es inyectiva en el conjunto*

$$
A = \left\{ \frac{2k}{p}\ \in\ [0,1] :\ k \ \ \textit{es un entero} \right\}.
$$

Demostración: Sea $x \in A$, i.e $x = \frac{2k}{p}$. Como T_2 es 2-1, entonces $\exists\ x_1 \in [0,1]$ tal que $T_2(x) = T_2(x_1)$. Supongamos, por reducción al absurdo que $x_1 \in A$, i.e. $x_1 = \frac{2k_1}{p}$. Como $T_2\ |_{(-\infty,1/2]}$ es inyectiva, si $x \leq 1/2$ entonces $x_1 > 1/2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} T_2(\frac{2k}{p}) = \frac{2(2k)}{p} &= 2 - 2\frac{2k_1}{p} = T_2(\frac{2k_1}{p}) \\ \therefore \qquad \frac{4k}{p} &= \frac{2p - 4k_1}{p} \\ \therefore \qquad 2k &= p - 2k_1. \end{aligned}$$

Luego, $p = 2(k + k_1)$, por lo tanto p es par, contradicción, pues por hipótesis p es impar. Si $x > 1/2$ el razonamiento en analogo, pues $T_2\ |_{[1/2,\infty)}$ es inyectiva . Por lo tanto T_s es inyectiva en A. ■

Proposición 3.5 *Sea s=2 . Luego x es periódico si y solo si* $x=\frac{2k}{p}$, *donde* $p, q \in \mathbb{Z}$, *p es impar y* $2k/p \in [0,1]$.

Demostración: La prueba se sigue de los lemas 4 y 5. ■

Observación: Notemos que si $\mathcal{O}^+(x)$ es periódica ó eventualmente periódica, los elementos de esta órbita son racionales.

3.2. Dinámica de T_s con $s > 2$

En esta sección mostraremos que, T_s con $s > 2$, posee una dinámica muy interesante. Recordemos que T_s tiene un máximo en $1/2$ y $T_s(1/2) = s/2 > 1$. Por lo tanto, el conjunto no errante de T_s, $\Omega(T_s)$ cambia completamente con respecto a los parametros $s < 2$. Por consiguiente,en el resto del texto, $s > 2$.

Recordemos que si $s > 1$ entonces $\forall\ x \notin [0,1]$, $T_s^n \to -\infty$ cuando $n \to \infty$.

Teorema 3.6 *Sea* $k \in \mathbb{N},\ l \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1\}$. *Entonces*

$$T_s^k : \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right] \to [0, s/2] \quad \textit{es un homeomorfismo.}$$

Además, si $x \in [\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]$, *entonces* $T_s^k(x) = \pm s^k x + s i_{k(l)}$ *donde* $i_{k(l)} \in \mathbb{Z}$.

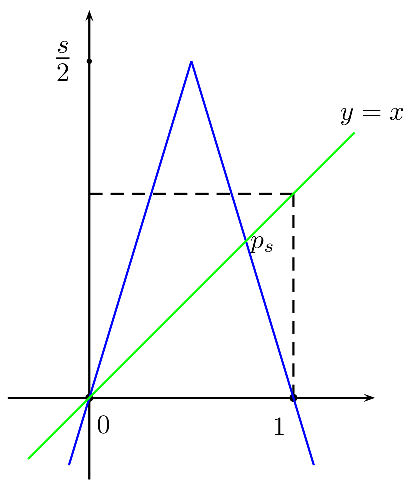


Figura 3.7: Gráfica de T_s con $s > 2$

Demostración: Haremos la prueba por inducción. Ver figura 3.7.

- Sea $k = 1$, luego $l \in \{0, 1\}$.Veamos que $T_s : [\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}] \to [0, s/2]$ es un homeomorfismo.

  Sea $l = 0$, luego dado $x \in [0, 1/2]$, se tiene que $T_s(x) = sx$ es creciente y continua, por lo tanto T_s es inyectiva. Como $T_s(0) = 0,\ T_s(1/2) = s/2$, tenemos que T_s es sobre. Luego T_2 es invertible y continua, por lo tanto la inversa es continua, i.e. T_s es un homeomorfismo.

  Para $l = 1,\ T_s : [1/2, 1] \to [0, s/2]$ y $T_s(x) = s - sx$. T_s es decreciente y continua, por lo tanto T_s es inyectiva. Como $T_s(1/2) = s/2,\ T_s(1) = 0$, se tiene que T_s es sobre. Por lo tanto T_2 es biyectiva y continua. Luego T_s es un homeomorfismo.

- Supongamos que la proposición vale para n y veamos que se cumple para $n+1$.

  Tenemos que para $l \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$, $T_s^n : [\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}] \to [0, s/2]$ es un homeomorfismo. Además, si $x \in [\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}]$ entonces $T_s^n(x) = \pm s^n x + s i_{n(l)}$ con $i_{n(l)} \in \mathbb{Z}$.

  Para $n+1$, tomemos $l \in \{0, 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$ y veamos que T_s^{n+1} manda $[\frac{l}{2^{n+1}}, \frac{l+1}{2^{n+1}}]$ homeomorficamente sobre $[0, s/2]$, donde $T_s^{n+1}(x) = T_s(T_s^n(x))$. Sea $x \in [\frac{l'}{2^{n+1}}, \frac{l'+1}{2^{n+1}}]$ con $l' \in \{0, 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$, luego $x \in [\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}]$ para algún $l \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. Luego $T_s^n(x) \in [0, s/2]$.

  Si $T_s^n(x) < 1/2$ entonces

  $$T_s(T_s^n(x)) = sT_s^n(x) = s(\pm s^n x + s i_{n(l)}) = \pm s^{n+1} x + s^2 i_{n(l)},$$

  con $i_{n(l)} \in \mathbb{Z}$. Tomando $i_{n+1(l')} = s i_{n(l)}$, tenemos que $T_s^{n+1}(x) = \pm s^n x + s i_{n+1(l')}$

  Si $T_s^n(x) > 1/2$ entonces

  $$T_s(T_s^n(x)) = s - sT_s^n(x) = s - s(\pm s^n x + s i_{n(l)}) = s \mp s^{n+1} x - s^s i_{n(l)},$$

  con $i_{n(l)} \in \mathbb{Z}$. Tomando $i_{n+1(l')} = 1 - s i_{n(l)}$, tenemos que $= \mp s^{n+1} x + s i_{n+1(l')}$

  Como $T_s : [\frac{l'}{2^{n+1}}, \frac{l'+1}{2^{n+1}}] \to [\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}]$, y $T_s^n(x) : [\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}] \to [0, s/2]$ son homeomorfismo, entonces $T_s^{n+1} = T_s \circ T_s^n$ es un homemorfismo en $[\frac{l}{2^{n+1}}, \frac{l+1}{2^{n+1}}]$. ∎

3.2.1. Construcción del Conjunto de Cantor

En esta sección construiremos un conjunto de Cantor transitivo e invariante para T_s

Denotemos por I el intervalo $[0, 1]$. Queremos encontrar los valores de s y x tales que $T_s^n(x) \in I \ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Como el máximo de T_s ocurre en $1/2$ y $T_s(1/2) = s/2$, entonces

$s/2 > 1$ cuando $s > 2$. Luego, para $s > 2$, $T_s(I)$ cubre a I y $T_s^{-1}(I) \cap I = T_s^{-1}(I)$ es la unión de dos intervalos los cuales denotaremos por I_1 y I_2, luego,

$$T_s^{-1}(I) \cap I = I_1 \cup I_2$$

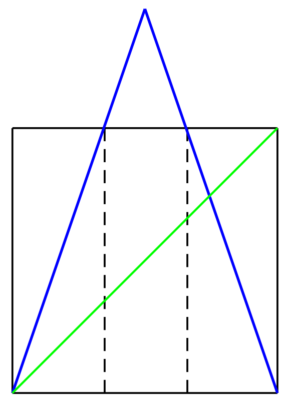


Figura 3.8: Ejemplo de T_s para s> 2

Veamos que $\Lambda_s = \bigcap_{k=0}^{\infty} T_s^{-k}(I)$ con $s > 2$ es un conjunto de Cantor.

Para $n = 2$, tenemos que

$$I_{i_0,i_1} = \bigcap_{k=0}^{1} T_s^{-k}(I_{i_k}) = I_{i_0} \cap T_s^{-1}(I_{i_1}) = \{x : T_s^k(x) \in I_{i_k},\ 0 \leq k \leq 1\}$$

y

$$\begin{aligned} S_2 = \bigcap_{k=0}^{2} T_s^{-k}(I) &= \bigcap_{k=0}^{1} T_s^{-k}(I_1 \cup I_2) \\ &= (I_1 \cup I_2) \cup T_s^{-1}(I_1 \cup I_2) \\ &= (I_1 \cap T_s^{-1}(I_1)) \cup (I_1 \cap T_s^{-1}(I_2)) \cup (I_2 \cap T_s^{-1}(I_1)) \cup (I_2 \cap T_s^{-1}(I_2)) \end{aligned}$$

Introduciremos la notación que usaremos para construir el conjunto de Cantor. Para cada n,

$$I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}} = \bigcap_{k=0}^{n-1} T_s^{-k}(I_{i_k}) = \{x : T_s(x) \in I_{i_k} \text{ para } 0 \leq k \leq n-1\}.$$

donde $i_k = 1, 2$

$$\text{y} \qquad S_n = \bigcap_{k=0}^{n} T_s^{-k}(I) = \bigcap_{k=0}^{n-1} T_s^{-k}(I_1 \cup I_2) = \bigcup_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}=1,2} I_{i_0,\ i_1,\ldots,i_{n-1}}$$

Observación: Notemos que

$$I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1},i_n} = I_{i_0} \cap T_s^{-1}(I_{i_1,\ldots,i_{n-1},i_n}), \tag{3.1}$$

pues

$$\begin{aligned}
I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1},i_n} &= \bigcap_{k=0}^{n} T_s^{-k}(I_{i_k}) = I_{i_0} \cap \bigcap_{k=1}^{n} T_s^{-k}(I_{i_k}) \\
&= I_{i_0} \cap T_s^{-1}(I_{i_1}) \cap \ldots \cap T_s^{-(n-1)}(I_{n-1}) \cap T_s^{-n}(I_n) \\
&= I_{i_0} \cap T_s^{-1}(I_{i_1} \cap \bigcup_{k=2}^{n} T_s^{-(k-1)}(I_{i_k})) \\
&= I_{i_0} \cap T_s^{-1}(I_{i_1,\ldots,i_{n-1},i_n})
\end{aligned}$$

Lema 3 *Supongamos que $s > 2$. Luego, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(1) Para cualquier elección de índice, es decir, $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1} \in \{1, 2\}$, $I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-2}} \cap S_{n+1} = I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-2},1} \cup I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-2},2}$ es la unión de dos intervalos cerrados no vacíos, los cuales son subconjuntos de $I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-2}}$.

(2) Para cualquier par de índices distintos, es decir, $(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}) \neq (i'_0, i'_1, \ldots, i'_{n-1})$, $I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}} \cap I_{i'_0,i'_1,\ldots,i'_{n-1}} = \emptyset$, por lo tanto S_n es la unión de 2^n intervalos disjuntos.

(3) T_s manda la componente $I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}}$ de S_n homeomorficamente sobre la componente $I_{i_1,\ldots,i_{n-1}}$ de S_{n-1}.

Demostración: La prueba la haremos por inducción sobre n.

- Para $n = 1$. Sea $G_1 = \{x \in I : T_s(x) > 1\}$. Notemos que G_1 es un conjunto abierto, más aun , $G_1 = (1/s, 1 - 1/s)$, y esto se sigue fácilmente de la monotonía de T_s en $[0, 1/2]$ y $[1/2, 1]$.

  Por definición, $S_1 = \bigcap_{k=0}^{1} T_s^{-1}(I) = I \cap T_s^{-1}(I) = I - \{G_1\}$, luego, S_1 es la unión de dos intervalos cerrados disjuntos. Así, $S_1 = I_1 \cup I_2$ con $I_{i_0} \subseteq I,\ i_0 = 1, 2$. Veamos que I_{i_0} va homeomorficamente sobre I bajo T_s.

  Si $x \in [0, 1/s]$, entonces T_s es creciente , luego T_s es inyectiva. Como $T_s(0) = 0,\ T_s(1/s) = 1$, luego $T_s([0, 1/s]) = [0, 1]$. Por lo tanto, T_s es biyectiva en $[0, 1/s]$ y como T_s es continua y $[0, 1]$ es compacto, se tiene que T_s^{-1} es continua.

  T_s es decreciente en $[1 - 1/s, 1]$, luego T_s es inyectiva. Como $T_s(1 - 1/s) = s - s(1 - 1/s) = 1,\ T_s(1) = 0$, entonces $T_s([1 - 1/s, 1]) = [0, 1]$. Por lo tanto, T_s es biyectiva en $[0, 1/s]$ y por la continuidad de T_s tenemos que T_s^{-1} es continua. Por lo tanto, T_s manda homeomorficamente I_{i_0} sobre I.

- Supongamos que el lema es válido para n y veamos que se cumple para $n + 1$.

  Sea $I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}}$ una componente de S_n. Entonces $T_s(I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}}) = I_{i_1,\ldots,i_{n-1}}$ es una componente de S_{n-1} y $I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}} \supseteq I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}} \cap S_n = I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1},1} \cup I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1},2}$

  - Vamos a demostrar la condición (1). Tenemos que,

    $$I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}} \cap S_{n+1} = T_s^{-1}(S_n) \cap I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}} \quad .$$

    Por (3.1) , tenemos que $I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}} = I_{i_0} \cap T_s^{-1}(I_{i_1,\ldots,i_{n-1}})$. Sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos que $I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}} \cap S_{n+1} = T_s^{-1}(S_n) \cap I_{i_0} \cap T_s^{-1}(I_{i_1,\ldots,i_{n-1}})$.

Como intersección de preimagenes es igual a la preimagen de la intersección, tenemos que , $T_s^{-1}(S_n) \cap I_{i_0} \cap T_s^{-1}(I_{i_1,\ldots,i_{n-1}}) = T_s^{-1}(S_n \cap I_{i_1,\ldots,i_{n-1}}) \cap I_{i_0}$. Como el lema es válido para n, usando la condición 1, se tiene que

$$T_s^{-1}(S_n \cap I_{i_1,\ldots,i_{n-1}}) \cap I_{i_0} = T_s^{-1}(I_{i_1,\ldots,i_{n-1},1} \cup I_{i_1,\ldots,i_{n-1},2}) \cap I_{i_0} \quad .$$

Como preimagen de la union es union de preimagenes, entonces $T_s^{-1}(I_{i_1,\ldots,i_{n-1},1} \cup I_{i_1,\ldots,i_{n-1},2}) \cap I_{i_0} = (T_s^{-1}(I_{i_1,\ldots,i_{n-1},1}) \cup T_s^{-1}(I_{i_1,\ldots,i_{n-1},2})) \cap I_{i_0}$. Por (3.1) tenemos que $(T_s^{-1}(I_{i_1,\ldots,i_{n-1},1}) \cup T_s^{-1}(I_{i_1,\ldots,i_{n-1},2})) \cap I_{i_0} = I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1},1} \cup I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1},2}$. Por lo tanto,

$$I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}} \cap S_{n+1} = I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1},1} \cup I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1},2} \ .$$

es la unión de dos intervalos cerrados disjuntos, verificando así la condición 1.

- Mostremos la condición (2). Por la condición 1, $I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}} \cap S_{n+1} = I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1},1} \cup I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1},2}$, luego existen 2^n elecciones para $I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}}$, S_{n+1} es la unión de $2(2^n) = 2^{n+1}$ intervalos, verificando la condición 2.

- Mostremos la condición (3). Como $I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1},j} \subseteq I_{i_0}$ y T_s es estrictamente monótona en I_{i_0}, y continua, se tiene que T_s es estrictamente monótona y continua en $I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1},j}$. De (3.1) se tiene que $T_s(I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1},j}) = T_s(I_{i_0} \cap T_s^{-1}(I_{i_1,\ldots,i_{n-1},j}))$. Como imagen de intersección es la intersección de la imagenes, tenemos que ,

$$T_s(I_{i_0} \cap T_s^{-1}(I_{i_1,\ldots,i_{n-1},j})) = I \cap I_{i_1,\ldots,i_{n-1},j} = I_{i_1,\ldots,i_{n-1},j}.$$

Por lo tanto,

$$T_s(I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1},j}) = I \cap I_{i_1,\ldots,i_{n-1},j} = I_{i_1,\ldots,i_{n-1},j},$$

verificando así la condición 3. ■

Lema 4 *Para cada n, la longitud del intervalo $I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}}$ esta acotada por $1/2^n$, es decir, $L(I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}}) \leq 1/2^n$ para cualquier componente de S_n.*

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N}$ y tomemos una componente $I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}}$ de S_n. Por el lema anterior, $T_s^n(I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}}) = [0,1]$. Por la proposición 3.5, $T_s^n([\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}]) = [0, s/2]$, luego, para algun $l \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$, $I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}} \subseteq [\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}]$, por lo tanto,

$$L(I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}}) < L([\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]) = \frac{1}{2^n} \quad .$$

■

Teorema 3.7 *Supongamos que $s > 2$. Entonces $\Lambda_s = \bigcap_{k=0}^{\infty} T_s^{-k}(I)$ es un conjunto de Cantor.*

Demostración: Por el lema 3, tenemos que los S_n son cerrados, entonces $\Lambda_s = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ cerrado. Como $\Lambda_s \subseteq [0,1]$ y $[0,1]$ es compacto, se tiene que Λ_s es compacto. Veamos que Λ_s es perfecto y nada denso. Sea $p \in \Lambda_s$. Mostremos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\exists\ y_j \in (p - 1/n, p + 1/n)$ tal que $y_j \notin \Lambda_s$. Sea $j \in \mathbb{N}$, y tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^n < 1/2^j$. Luego, $p \in I_{i_0,\ldots,i_{n-1}} \subseteq S_n$, para algún índice $i_0, \ldots, i_{n-1}$. Por la condición 1 del lema 6, tenemos que $I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}} \cap S_{n+1} = I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1},1} \cup I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1},2}$, luego, tomemos $y_j \in I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}} \backslash S_{n+1}$, y q_j un extremo de $I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1},i_n}$ donde $q_j \neq p$. Como $y_j \notin S_{n+1}$ entonces $y_j \notin \Lambda_s$. Como $|y_j - p| < 1/2^n < 1/2^j\ \forall\ j \in \mathbb{N}$, se tiene que $y_j \to p$ cuando $j \to \infty$, por lo tanto el interior de Λ_s es vacio, es decir, Λ_s es nada denso. Como $q_j \in \Lambda_s$, pues son extremos, $q_j \neq p$ y $|q_j - p| < 1/2^n < 1/2^j\ \forall\ j \in \mathbb{N}$, tenemos que q_j converge a $p \in \Lambda_s$,por lo tanto, Λ_s es perfecto. Por lo tanto Λ_s es un conjunto de Cantor. ■

Proposición 3.8 *Λ_s es un conjunto invariante bajo T_s.*

Demostración: Sea $x \in \Lambda_s$, por lo tanto $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \ldots s_n}$. Veamos que $T_s(x) \in \Lambda_s$. Por el lema 3, $T_S(s_0 s_1 \ldots s_n) = s_1 \ldots s_n$ para cualquier índice $s_0 s_1 \ldots s_n$. Por lo tanto, $T_s(x) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_1 \ldots s_n} \in \Lambda_s$. ■

Proposición 3.9 *El conjunto no-errante de T_s es Λ_s, $\Omega(T_s) = \Lambda_s$.*

Demostración: Sea $\epsilon > 0$ y $x \in \Lambda_s$. Consideremos $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ y tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^n < \epsilon$. Luego $\exists\ I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}} \in S_n$ tal que $x \in I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}}$ y $L(I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}}) < 1/2^n$. Por el teorema 3.6 y el lema 3, $T_s^n(I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}}) = [0,1]$, por lo tanto, $\exists\ x_1 \in I_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}}$ tal que $T_s^n(x_1) \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$. ■

Recordemos que Σ_2 es el espacio de las sucesiones en los símbolos 0 y 1, $\Sigma_2 = \{s = (s_0 s_1 s_2 \ldots) : s_i = 0, 1\}$. Además, este espacio es métrico. Recordemos la función desplazamiento: $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ tal que $\sigma(s_0 s_1 \ldots) = (s_1 s_2 \ldots)$. Utilizaremos la función desplazamineto, σ para mostrar que T_s es caótica en Λ_s para $s > 2$. Ahora definiremos una función H y mostraremos que H es una conjugación topológica entre σ y T_s con $s > 2$.

Definición 18 *Sea $H : \Lambda_s \to \Sigma_2$ con $H(x) = t = (t_0 t_1 \ldots)$, donde $t_n = 0$ si $T_s^n(x) \in I_0$ y $t_n = 1$ si $T_s^n(x) \in I_1$. función H es llamada función itinerario.*

Notemos que, si $x \in \Lambda_s = \bigcap_{k=0}^{\infty} T_s^{-k}(I_{t_k})$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $x \in \bigcap_{k=0}^{n} T_s^{-k}(I_{t_k}) = I_{t_0 t_1 \ldots t_n}$.

Lema 5 *$H : \Lambda_s \to \Sigma_2$ es un homeomorfismo.*

Demostración:

- Veamos que H es inyectiva. Sea $x, y \in \Lambda_s$. Supongamos que $s = H(x) = H(y)$. Luego $T_s^k(x), T_s^k(y) \in I_{s_k}\ \forall\ k \geq 0$, entonces $x, y \in I_{s_0 s_1 \ldots s_n}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Por el lema 7, sabemos que las longitudes de los intervalos $I_{s_0 s_1 \ldots s_n}$ están acotados, $L(I_{s_0 s_1 \ldots s_n}) \leq 1/2^{(n+1)} L([0,1])$, por lo tanto, $|x - y| \leq 1/2^{(n+1)}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, luego $x = y$, como queríamos.

- Veamos que H es sobre. Sea $x \in \Sigma_2$. Sabemos que , $I_{s_0 s_1 \ldots s_n} = \bigcap_{k=0}^{n} F_\mu^{-k}(I_{s_k})$ es un intervalo cerrado no vacío, y estos intervalos están encajados cuando n crece. Si

$x_0 \in \bigcap_{k=0}^{\infty} I_{s_0 \ldots s_k} = \bigcap_{k=0}^{\infty} T_s^{-k}(I_{s_k})$. Si $x \in I_{s_0 \ldots s_n}$, entonces, para $0 \leq k \leq n$, tenemos que $x \in T_s^{-k}(I_{s_k})$. Luego $T_s^{-k}(x) \in I_{s_k}$ $\forall$ $k \geq 0$ y $H(x_0) = s$.

- Veamos que H es continua. Sea $\epsilon > 0$ y $x \in \Lambda_s$ tal que $H(x) = (s_0 s_1 \ldots)$. Tomemos n tal que $1/2^n < \epsilon$. Consideremos $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ y $y \in \Lambda_s$ entonces $y \in I_{s_0 s_1 \ldots\ s_n}$. Por lo tanto, $H(x)$ coincide con $H(y)$ en los primeros $n + 1$. Por la proposición 1.12,

$$d(H(x), H(y)) \leq 1/2^n < \epsilon \quad .$$

  Por lo tanto, H es continua.

- Como las funciones continuas mandan compactos en compactos, y Λ_s es compacto, tenemos que Σ_2 es compacto. Luego, H^{-1} manda preimagenes de cerrados en cerrados, y por lo tanto H^{-1} es continua. Luego H es un homeomorfismo. ■

Teorema 3.10 *T_s y σ son topológicamente conjugados por H, $H \circ T_s = \sigma \circ H$.*

Demostración: Sea $x \in \Lambda_s$, por lo tanto $x = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \ldots s_n}$ donde $s_0 s_1 \ldots s_n \ldots$ está determinada por $H(x)$. Por el lema 3, tenemos que $T_s(I_{s_0 s_1 \ldots s_n}) = I_{s_1 \ldots s_n}$. Como la imagen de una intersección es la intersección de las imagenes, y por la parte 3 del lema 6, se tiene que $H(T_s(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \ldots s_n})) = H(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_1 \ldots s_n})$. Luego,

$$\begin{aligned} H(T_s(x)) &= H(T_s(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \ldots s_n})) \\ &= H(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_1 \ldots s_n}) \\ &= (s_1 s_2 \ldots s_n \ldots) \\ &= \sigma(H(x).) \end{aligned}$$

Por lo tanto T_s y σ son topológicamente conjugados, como queríamos. ∎

Veamos que T_s es caótica en Λ_s para $s > 2$.

Corolario 3.11 *Sea $s > 2$ y Λ_S como en el teorema anterior. Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1. *La cardinalidad de $Per_n(T_s) = 2^n$.*

2. *$Per(T_s)$ es denso en Λ_s.*

3. *$T_s : \Lambda_s \to \Lambda_s$ es transitiva, i.e. exite una órbita densa en Λ_s.*

Demostración: Por el teorema anterior, T_s y σ son topológicamente conjugados. Por la proposición 1.7 tenemos que $Per_n(T_s) = Per_n(\sigma)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, y por la proposición 1.13, $|Per_n(\sigma)| = 2^n$, por lo tanto, $Per_n(T_s) = 2^n$. De nuevo, por las proposiciones 1.7 y 1.13, $Per(T_s)$ es denso en Λ_s. Como H manda órbitas densas en órbitas densas, tenemos que T_s tiene una órbita densa en Λ_s, como queríamos. ∎

Observación: Como consecuencia de este corolario y el hecho de que Λ_s posee sensibilidad en las condiciones iniciales, tenemos que T_s es caótica en Λ_s.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Robinson, C. *Dynamical Systems*. CRC Press (2000).

[2] Devaney, R. *An introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley (1989)

[3] Lima, E. *Curso de análise*. Projeto Euclides (1982).