Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Grupo de Álgebra

Sobre la Revisión Iterada de Creencias

Bachiller Mattia Medina Grespan

Requisito especial de grado,
en la modalidad seminario monografía,
para optar al Título de
Licenciado en Matemáticas

Tutor: Dr. Ramón Pino Pérez

Mérida, abril 2008

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 1

INTRODUCCCIÓN

La dinámica del conocimiento es un área del saber cuyo objetivo es entender cómo cambia el conocimiento a la luz de nuevas informaciones. Esta área se encuentra en la intersección de varias disciplinas. Entre las principales podemos destacar: Filosofía (Epistemología), Computación (Inteligencia Artificial), Matemáticas (Lógica Matemática), Psicología (Psicología Cognitiva).

El problema que estudiamos en este trabajo concierne más precisamente el de la revisión del conocimiento o revisión de creencias. Esto, de una manera bastante aproximada, trata de responder a la siguiente pregunta: Si poseemos un conocimiento K y queremos incorporar una nueva información α, ¿cuál debe ser el conocimiento resultante?

Para ello vamos a estudiar el problema en el marco de Alchourrón, Gärdenfors y Makinson [1]. Ese marco, conocido como el marco AGM, aborda el problema con las herramientas de la Lógica Matemática. Podemos decir que los trabajos de esos autores, en particular el trabajo citado, son los cimientos modernos para estudiar el problema del cambio del conocimiento desde el punto de vista lógico matemático.

Como veremos, el marco AGM es un marco bastante claro en el que el conocimiento K es representado por teorías de la Lógica Proposicional y las informaciones nuevas por fórmulas de la misma lógica.

Algunos autores mostraron los defectos del marco AGM con respecto a la iteración del proceso de la revisión, en particular Darwiche y Pearl [3]. Ellos proponen un nuevo marco, llamado DP, que de alguna manera extiende el marco AGM. La solución del marco DP pasa por considerar estados de conocimiento más complejos que simples teorías de la Lógica Proposicional.

Recientemente Booth y Meyer [2] y, de manera independiente, Jin y Thielscher [4] han propuesto algunas mejoras al marco DP.

Nuestro propósito en esta memoria es entender y exponer el trabajo de Booth y Meyer [2] que en realidad es más completo que el de Jin y Thielscher [4].

Esta memoria está organizada de la siguiente manera: en el capítulo 2 exponemos las bases del marco AGM, en particular el teorema de representación de Katsuno y Mendelzon [5]. El capítulo 3 está dedicado al estudio del marco DP [3]. El capítulo 4 se lo dedicamos a lo esencial del trabajo de Booth y Meyer [2]. Terminamos con unas observaciones y algunas perspectivas de trabajo.

Las pruebas de la representación del capítulo 3 son diferentes a las propuestas por Darwiche y Pearl. Pensamos que nuestro desarrollo es más simple. También la presentación del capítulo 4 es un poco diferente a la de Booth y Meyer. Nosotros adoptamos un punto de vista más próximo al de Katsuno y Mendelzon.

Al final se encontrará un breve apéndice con los resultados más básicos de la Lógica Proposicional, sobre todo aquellos que nos son muy útiles a lo largo del trabajo.

CAPÍTULO 2

REVISIÓN DE CREENCIAS

2.1. Marco AGM

El estudio formal de la revisión de creencias comienza en los años 80. Se considera como fundador el trabajo de Alchourrón, Gardenfors y Makinson (AGM) en el año 1985 [1]. El marco AGM estudia un modelo matemático idealizado de la revisión de creencias. Dado un lenguaje lógico, las creencias de un agente son representadas por conjuntos de fórmulas cerradas bajo implicación lógica (Teorías lógicas); son llamadas *conjuntos de creencias*. La nueva información es una fórmula del lenguaje dado. Un operador de revisión es una función que incorpora la nueva información al conjunto de creencias del agente para obtener un nuevo conjunto de creencias revisado.

Definición 2.1 *Una función* $*$: *Teorías* $\times$ *Fórmulas* $\longrightarrow$ *Teorías que toma una teoría lógica y una fórmula* μ *y las envía a una nueva teoría denotada* $K * \mu$ *es llamada operador de revisión.*

Los autores del marco AGM original desarrollaron su teoría guiándose por tres principios fundamentales:

- *La prioridad de la nueva información.* La nueva información se considera más plausible y necesaria en la creencias del individuo (sin importar si está o no en contradicción con las creencias existentes).

- *Cambio minimal* o economía de información. Durante la revisión de creencias no se debe renunciar a creencias existentes en el individuo antes de la revisión o generar nuevas creencias a menos que sea necesario.

- *No contradicción.* El resultado debe ser coherente cuando la nueva información es coherente (incluso si la nueva información está en contradicción con las creencias viejas).

El trío AGM propuso 8 postulados que deben ser satisfechos por cualquier operador de revisión razonable. Ellos son los siguientes:

Postulados AGM:

En lo que sigue usaremos la letra K (eventualmente con subíndices) para denotar una teoría lógica. Las letras griegas minúsculas (eventualmente con subíndices) denotarán fórmulas de la lógica proposicional (ver el apéndice A para las notaciones y hechos más básicos de la lógica proposicional). La teoría contradictoria será denotada $K_\perp$. Usaremos el operador $+$, para la expansión, definido por

$$K + \mu = Cn(K \cup \{\mu\})$$

El primer postulado simplemente requiere que el resultado de una revisión sea un conjunto de creencias.

(K*1) $K * \mu$ es un conjunto de creencias.

El segundo postulado garantiza que la nueva información sea adquirida por el conjunto de creencias tras el proceso de revisión.

(K*2) $\mu \in K * \mu$.

El caso más interesante en un proceso de revisión se da cuando la nueva información μ es inconsistente con el conjunto de creencias K. Sin embargo, para una completa definición del operador de revisión, se cubre al caso cuando μ no es contradictoria con K identificándolo con una expansión de K por μ. El tercer y cuarto postulado nos dicen que la expansión es un caso particular de la revisión salvo en el caso en que $K + \mu = K_\perp$.

(K*3) $K * \mu \subseteq K + \mu$.

(K*4) Si $\neg\mu \notin K$, entonces $K + \mu \subseteq K * \mu$.

Los conjuntos de creencias inconsistentes son indeseables. El quinto postulado asume que $K * \mu$ es consistente a menos que μ sea una contradicción.

(K*5) $K * \mu = K_{\perp}$ si, y sólo si, μ es inconsistente.

El sexto postulado requiere que la revisión de creencias sea independiente de la sintáxis.

(K*6) Si $\phi \equiv \mu$, entonces $K * \phi = K * \mu$.

Los postulados 7 y 8 implican que el cambio minimal de K al incluir dos nuevas informaciones μ y ϕ es el mismo de la expansión de $K * \phi$ por μ siempre y cuando, μ no contradiga a las creencias en $K * \phi$.

(K*7) $K * (\phi \wedge \mu) \subseteq (K * \phi) + \mu$.

(K*8) Si $\neg\mu \notin K * \phi$, entonces $(K * \phi) + \mu \subseteq K * (\phi \wedge \mu)$.

Estos *postulados de racionalidad*(como son conocidos) fueron propuestos sobre bases filosóficas. Más aún, cualquier preocupación computacional estaba completamente ausente de de los autores del marco AGM.

En 1991 Katsuno y Mendelzon [5] estudiaron una forma de representar más concretamente a los conjuntos de creencias en el caso "finito"(un número finito de variables proposicionales). En particular, para automatizar estos procesos se necesita representar un conjunto de creencias dentro de una computadora y para ello es bueno tener una representación compacta del conjunto de creencias. Por lo tanto decidieron reformular el marco AGM. A esta reformulación la llamaremos marco KM.

2.2. Marco KM

Katsuno y Mendelzon consideraron un lenguaje proposicional finito L, y representaron al conjunto de creencias por medio de una fórmula en L. De esta manera redefinieron a un operador de revisión de la forma siguiente:

Definición 2.2 *Una función* $\circ$: *Fórmulas* $\times$ *Fórmulas* $\longrightarrow$ *Fórmulas que toma una fórmula* ψ *que representa a un conjunto de creencias y a otra fórmula* μ *que representa la nueva información y las envía a una nueva fórmula proposicional denotada como* $\psi \circ \mu$ *es llamado operador de revisión KM.*

Un *operador de revisión KM* debe cumplir con las siguientes propiedades:

(KM1) $\psi \circ \mu \vdash \mu$.

(KM2) Si $\psi \wedge \mu$ es consistente, entonces $\psi \circ \mu \equiv \psi \wedge \mu$.

(KM3) Si μ es consistente, entonces $\psi \circ \mu$ es también consistente.

(KM4) Si $\psi_1 \equiv \psi_2$ y $\mu_1 \equiv \mu_2$, entonces $\psi_1 \circ \mu_1 \equiv \psi_2 \circ \mu_2$.

(KM5) $(\psi \circ \mu) \wedge \phi \vdash \psi \circ (\mu \wedge \phi)$.

(KM6) Si $(\psi \circ \mu) \wedge \phi$ es consistente, entonces $\psi \circ (\mu \wedge \phi) \vdash (\psi \circ \mu) \wedge \phi$.

En el caso finito, la definición de revisión KM es equivalente a la de AGM. Más precisamente si $\circ$ es un operador de revisión KM, podemos definir un operador AGM, $*_\circ$ de la manera siguiente:

Definición 2.3

$$K *_\circ \mu = Cn(\varphi_K \circ \mu)$$

donde ψ_K *es una fórmula tal que* $Cn(\varphi_K) = K$ *(ver el apéndice A para la construcción de tal fórmula).*

Recíprocamente si $*$ es un operador AGM, podemos definir un operador KM, $\circ_*$ de la siguiente manera:

Definición 2.4

$$\varphi \circ_* \alpha = \theta \quad ssi \quad Cn(\theta) = Cn(\varphi) * \alpha$$

Note que la fórmula θ puede ser escogida como la disyunción de las fórmulas completas cuyo unico modelo es un modelo de $Cn(\varphi) * \alpha$ (ver el apéncice A para una discusión más detallada).

Las proposiciones siguientes establecen de manera precisa nuestras afirmaciones.

Proposición 2.1 *Si $\circ$ satisface (KM1) hasta (KM6) entonces el operador $*_\circ$ definido anteriormente es una función $*_\circ$: Teorías $\times$ Fórmulas $\longrightarrow$ Teorías que satisface (K*1)-(K*8), es decir es un operador AGM*

Demostración: El postulado (K*1) se satisface directamente de la definición de $*_\circ$.

Para la verificación del postulado (K*2) veamos que $\mu \in K *_\circ \mu$. Tenemos por (KM1) que $\mu \in Cn(\psi_K \circ \mu)$ y nuevamente la definición nos da el resultado.

Por (KM2) tenemos que $\psi_K \circ \mu \in Cn(\psi_K \wedge \mu)$, luego $Cn(\psi_K \circ \mu) \subseteq Cn(\psi_K \wedge \mu)$, bastaría ver entonces que $Cn(\psi_K \wedge \mu) = K + \mu$ para satisfacer (K*3). Sabemos que $mod(Cn(\psi_K \wedge \mu)) = mod(\psi_K \wedge \mu) = mod(\psi_K) \cap mod(\mu) = mod(Cn(\psi_K)) \cap mod(\mu) = mod(Cn(\psi_K) \cup \{\mu\}) = mod(Cn(Cn(\psi_K) \cup \{\mu\})) = mod(Cn(K \cup \{\mu\})) = mod(K + \mu)$, por lo tanto, $Cn(\psi_K \wedge \mu) = K + \mu$ lo que completa la prueba de (K*3).

Supongamos ahora que $mod(K \wedge \mu) \neq \emptyset$ para verificar (K*4) queremos ver que $K + \mu \subseteq K *_\circ \mu$. Como ψ_K y μ son consistentes tenemos por (KM2) que $Cn(\psi_K \wedge \mu) \subseteq Cn(\psi_K \circ \mu)$, pero por lo hecho anteriormente sabemos que $Cn(\psi_K \wedge \mu) = K + \mu$ luego $K + \mu \subseteq Cn((\psi_K \circ \mu)) = K *_\circ \mu$, como queríamos.

Para probar (K*5) supongamos ahora que μ es inconsistente y veamos que $K *_\circ \mu$ en inconsistente. Como μ no tiene modelos, (KM1) nos dice que $\psi_K \circ \mu$ es inconsistente, luego $Cn(\psi_K \circ \mu)$ también es inconsistente como queríamos. Recíprocamente suponga que $K *_\circ \mu$ es inconsistente, es decir $Cn(\psi_K \circ \mu)$ es inconsistente. Entonces $\psi_K \circ \mu$ es inconsistente y, por (KM3), μ es inconsistente.

Para (K*6) consideremos μ y α fórmulas equivalentes, queremos ver que $K *_\circ \mu = K *_\circ \alpha$. Por (KM4) tenemos que $\psi_K \circ \mu \equiv \psi_K \circ \alpha$, así $Cn(\psi_K \circ \mu) = Cn(\psi_K \circ \alpha)$ como queríamos.

Para ver que (K*7) se verifica debemos probar que $Cn(\psi_K \circ (\mu \wedge \alpha)) \subseteq Cn(\psi_K \circ \mu) + \alpha$. Usando (KM5) tenemos que $Cn((\psi_K \circ (\mu \wedge \alpha)) \subseteq Cn((\psi_K \circ \mu) \wedge \alpha)$, bastaría ver que $Cn((\psi_K \circ \mu) \wedge \alpha) = Cn(\psi_K \circ \mu) + \alpha$. Sabemos que $mod(Cn((\psi_K \circ \mu) \wedge \alpha)) = mod((\psi_K \circ \mu) \wedge \alpha) = mod(\psi_K \circ \mu) \cap mod(\alpha) = mod(Cn(\psi_K \circ \mu) \cap mod(\alpha) = mod(Cn(\psi_K \circ \mu) \cup \{\alpha\}) = mod(Cn(Cn(\psi_K \circ \mu) \cup \{\alpha\})) = mod(Cn(\psi_K \circ \mu) + \alpha)$, luego $Cn((\psi_K \circ \mu) \wedge \alpha) = K *_\circ \mu + \alpha$, como queríamos.

Finalmente verifiquemos (K*8). Para esto, supongamos que $K *_\circ \mu$ es consistente con α, y veamos que $(K *_\circ \mu) + \alpha \subseteq K *_\circ (\mu \wedge \alpha)$. Nuestra hipótesis y (KM6) nos dicen que $Cn((\psi_K \circ \mu) \wedge \alpha) \subseteq Cn(\psi_K \circ (\mu \wedge \alpha))$, pero por lo visto anteriormente, $Cn((\psi_K \circ \mu) \wedge \alpha) = K *_\circ \mu + \alpha$, hecho que concluye la prueba. ∎

Proposición 2.2 *Si $*$ satisface (K*1)-(K*8) entonces $\circ_*$, como se definió antes, es una función $\circ_* :$ Fórmulas $\times$ Fórmulas $\longrightarrow$ Fórmulas que satisface (KM1)-(KM6), es decir es un operador de revisión KM.*

Demostración: Recordemos la definición de $\circ_*$:

$$\varphi \circ_* \mu = \theta \quad \text{ssi} \quad Cn(\theta) = Cn(\varphi) * \mu$$

donde podemos escoger una fórmula θ en el conjunto de todas las fórmulas $\{\gamma : Cn(\gamma) = Cn(\varphi) * \alpha\}$. Así, $\circ_*$ es una función con el dominio y codominio deseados.

Comencemos probando (KM1). Queremos ver que $\theta \vdash \mu$ sabiendo que θ satisface $Cn(\theta) = Cn(\varphi) * \mu$. Gracias a (K*1) se tiene $\mu \in Cn(\varphi) * \mu$, lo que claramente implica que $\theta \vdash \mu$.

Ahora verifiquemos (KM2). Supongamos $\varphi \wedge \mu$ consistente. Queremos ver que $\varphi \circ_* \mu \equiv \varphi \wedge \mu$, es decir que si θ satisface $Cn(\theta) = Cn(\varphi) * \mu$ entonces $\theta \equiv \varphi \wedge \mu$. Por hipótesis, $Cn(\varphi)$ es consistente con μ, luego, por (K*3) y (K*4), tenemos $Cn(\varphi) * \mu = Cn(\varphi) + \mu$. Así, $Cn(\theta) = Cn(\varphi) + \mu$. Pero ya hemos visto que $Cn(\varphi) + \mu = Cn(\varphi \wedge \mu)$. Por consiguiente, $\theta \equiv \varphi \wedge \mu$.

Verifiquemos (KM3). Supongamos μ consistente. Mostremos que cualquier θ que satisface $Cn(\theta) = Cn(\varphi) * \mu$, es necesariamente consistente. En efecto, como μ es consistente, por (K*5), $Cn(\varphi) * \mu$ es consistente y por lo tanto θ es también consistente.

Verifiquemos (KM4). Supongamos que $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ y $\mu_1 \equiv \mu_2$. Queremos ver que para cualquier θ_i tal que $Cn(\theta_i) = Cn(\varphi_i) * \mu_i$, para $i = 1, 2$, se tiene $\theta_1 \equiv \theta_2$. De la hipótesis $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ se obtiene $Cn(\varphi_1) = Cn(\varphi_2)$. Así, por (K*6) y la hipótesis $\mu_1 \equiv \mu_2$, tenemos $Cn(\varphi_1) * \mu_1 = Cn(\varphi_2) * \mu_2$. De donde es immediato que $\theta_1 \equiv \theta_2$.

Verifiquemos (KM5). Sean θ y ρ tales que $Cn(\theta) = Cn(\varphi) * \alpha$ y $Cn(\rho) = Cn(\varphi) * (\alpha \wedge \beta)$. Queremos ver que $\theta \wedge \beta \vdash \rho$. Por (K*7) sabemos que $Cn(\varphi) * (\alpha \wedge \beta) \subseteq (Cn(\varphi) * \alpha) + \beta$. Pero es fácil ver que $(Cn(\varphi) * \alpha) + \beta = Cn(\theta \wedge \beta)$. Por lo tanto, $\theta \wedge \beta \vdash \rho$.

Verifiquemos (KM6). Sean θ y ρ tales que $Cn(\theta) = Cn(\varphi) * \alpha$ y $Cn(\rho) = Cn(\varphi) * (\alpha \wedge \beta)$. Suponga que $\theta \wedge \beta$ es consistente. Queremos ver que $\rho \vdash \theta \wedge \beta$. Como $\theta \wedge \beta$ es consistente, $Cn(\theta \wedge \beta)$ también lo es consistente, es decir $(Cn(\varphi) * \alpha) + \beta$ es consistente. Así, por (K*8), $(Cn(\varphi) * \alpha) + \beta \subseteq Cn(\varphi) * (\alpha \wedge \beta)$. Lo que se traduce como $Cn(\theta \wedge \beta) \subseteq Cn(\rho)$, es decir $\rho \vdash \theta \wedge \beta$. ∎

Observación 2.1 *Es fácil ver que si* $*$: *Teorías* $\times$ *Fórmulas* $\longrightarrow$ *Teorías y* $\circ$: *Fórmulas* $\times$ *Fórmulas* $\longrightarrow$ *Fórmulas entonces usando las definiciones 2.3 y 2.4 se tiene:*

1. $* = *_{\circ_*}$
2. $\circ = \circ_{*_\circ}$

De las proposiciones 2.1, 2.2 y la observación anterior obtenemos directamente el siguiente corolario:

Corolario 2.1 *Sean* $*$: *Teorías*$\times$*Fórmulas* $\longrightarrow$ *Teorías y* $\circ$: *Fórmulas*$\times$*Fórmulas* $\longrightarrow$ *Fórmulas dos operadores. Entonces se cumplen:*

1. $*$ *es un operador de revisión AGM ssi* $\circ_*$ *es un operador de revisión KM.*
2. $\circ$ *es un operador de revisión KM ssi* $*_\circ$ *es un operador de revisión AGM.*

Valiéndose de esta reformulación Katsuno y Mendelzon mostraron un teorema de representación para los operadores de revisión.

Definición 2.5 *Consideremos una función que asigna a cada fórmula proposicional* ψ *un preorden total*[1] $\leq_\psi$ *sobre W. Decimos que esta asignación es fiel si y sólo si*

1. *Si* $\omega_1 \models \psi$, *entonces* $\omega_1 \leq_\psi \omega_2$ *para cualquier* ω_2
2. *Si* $\omega_1 \models \psi$ *y* $\omega_2 \not\models \psi$, *entonces* $\omega_1 <_\psi \omega_2$; *y*
3. *Si* $\psi \equiv \phi$, *entonces* $\leq_\psi = \leq_\phi$.

Aquí, $\omega_1 <_\psi \omega_2$ *está definido como* $\omega_1 \leq_\psi \omega_2$ *y* $\omega_2 \not\leq_\psi \omega_1$; $\omega_1 =_\psi \omega_2$ *está definido como* $\omega_1 \leq_\psi \omega_2$ *y* $\omega_2 \leq_\psi \omega_1$.

Teorema 2.1 *Un operador de revisión* $\circ$ *satisface los postulados (KM1)-(KM6) si y sólo si existe una asignación fiel que envía cada fórmula* ψ *a un preorden total* $\leq_\psi$ *tal que*

$$Mod(\psi \circ \mu) = min(Mod(\mu), \leq_\psi)$$

[1] Un preorden total es una relación total y transitiva.

Demostración: ($\Rightarrow$) Supongamos que existe un operador $\circ$ que satisface las condiciones (KM1)-(KM6). Definamos la relación $\leq_\psi$ para cada ψ por medio del operador $\circ$ de la manera siguiente: para cualequier par de valuaciones ω_1 y ω_2, ponemos

$$\omega_1 \leq_\psi \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 \in Mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2})$$

donde $\varphi_{\omega_1,\omega_2}$ denota una fórmula[2] tal que $mod(\varphi_{\omega_1,\omega_2}) = \{\omega_1, \omega_2\}$

Primero que todo notemos que $\leq_\psi$ está bien definida pues, en virtud de (KM4) no depende de la escogencia de $\varphi_{\omega_1,\omega_2}$.

Mostraremos ahora que $\leq_\psi$ es un preorden total.

Totalidad: Sean ω_1, ω_2 valuaciones. Como $mod(\varphi_{\omega_1,\omega_2}) \neq \emptyset$ (KM3) nos dice que $mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2})$ es no vacío, además por (KM1) tenemos que $mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2}) \subseteq mod(\varphi_{\omega_1,\omega_2})$. Así, $\omega_1 \in mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2})$ o bien, $\omega_2 \in mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2})$. Por lo tanto, $\omega_1 \leq_\psi \omega_2$ o bien $\omega_2 \leq_\psi \omega_1$. Como queríamos.

Transitividad: Sean $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ valuaciones. Supongamos que $\omega_1 \leq_\psi \omega_2$ y $\omega_2 \leq_\psi \omega_3$. queremos ver que $\omega_1 \leq_\psi \omega_3$. Hay tres casos a considerar.

(Caso 1) $\omega_1 \in mod(\psi)$
En este caso, ψ y $\varphi_{\omega_1,\omega_3}$ son consistentes entre ellas pues comparten el modelo ω_1, entonces, por (KM2), $\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_3} \equiv \psi \wedge \varphi_{\omega_1,\omega_3}$. Por lo tanto $\omega_1 \in mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_3})$, lo que implica $\omega_1 \leq_\psi \omega_3$.

(Caso 2) $\omega_1 \notin mod(\psi)$ y $\omega_2 \in mod(\psi)$
Por hipótesis tenemos que $mod(\psi \wedge \varphi_{\omega_1,\omega_2}) = \{\omega_2\}$. Así, por (KM2), tenemos que $mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2}) = \{\omega_2\}$, luego como $\omega_1 \notin mod(\psi)$, tenemos que $\omega_1 \not\leq_\psi \omega_2$. Lo cual contradice la hipótesis $\omega_1 \leq_\psi \omega_2$, por lo tanto el caso 2 no puede suceder.

(Caso 3) $\omega_1 \notin mod(\psi)$ y $\omega_2 \notin mod(\psi)$
Por (KM3) sabemos que $mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}) \neq \emptyset$ y por (KM1) sabemos que $mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}) \subseteq \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Ahora consideremos dos subcasos.

(Caso 3.1) $mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}) \cap \{\omega_1, \omega_2\} = \emptyset$
De esta suposición se obtiene que $mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}) = \{\omega_3\}$. Notemos entonces

[2]En general, en el caso finito, si M es un conjunto de modelos denotamos por φ_M una fórmula tal que $mod(\varphi_M) = M$ y por abuso de lenguaje denotaremos $\varphi_{\omega_1,\omega_2}$, $\varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}$ a $\varphi_{\{\omega_1,\omega_2\}}$, $\varphi_{\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}}$ respectivamente.

que $mod(\psi \circ (\varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3} \wedge \varphi_{\omega_2,\omega_3})) = \{\omega_3\}$. Luego, de (KM5) y (KM6), se tiene que $mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}) \cap \{\omega_2, \omega_3\} = mod(\psi \circ (\varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3} \wedge \varphi_{\omega_2,\omega_3})) = mod(\psi \circ \varphi_{\omega_2,\omega_3})$. Así, $mod(\psi \circ \varphi_{\omega_2,\omega_3}) = \{\omega_3\}$. Por lo tanto $\omega_2 \notin mod(\psi \circ \varphi_{\omega_2,\omega_3})$, luego $\omega_2 \not\leq_\psi \omega_3$, y esto es contradice la hipótesis inicial, por lo tanto, el caso 3.1 no es posible.

(Caso 3.2) $mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}) \cap \{\omega_1, \omega_2\} \neq \emptyset$
Notemos que la hipótesis $\omega_1 \leq_\psi \omega_2$ implica $\omega_1 \in mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2})$. Además por la suposición de este caso, $\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}$ y $\varphi_{\omega_1,\omega_2}$ son consistentes entre ellas. Se deduce entonces de (KM5) y (KM6) que $mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}) \cap \{\omega_1, \omega_2\} = mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2})$, por lo tanto, $\omega_1 \in mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}) \cap \{\omega_1, \omega_2\}$, en particular $\omega_1 \in mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3})$. Así, $\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}$ y $\varphi_{\omega_1,\omega_3}$ son consistentes entre ellas. Luego, de (KM5) y (KM6), se obtiene que $mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}) \cap \{\omega_1, \omega_3\} = mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_3})$. Luego $\omega_1 \in mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_3})$, de donde $\omega_1 \leq_\psi \omega_3$ como queríamos.

Mostremos ahora las propiedades de la *fidelidad*.
Queremos ver que si $\omega \models \psi$ entonces $\omega \leq_\psi \omega'$ para cualquier ω'. Si una valuación ω es modelo de ψ entonces $\omega \in mod(\psi \wedge \varphi_{\omega,\omega'})$. Por (KM2), $\psi \circ \varphi_{\omega,\omega'} \equiv \psi \wedge \varphi_{\omega,\omega'}$. Así, $\omega \in \psi \circ \varphi_{\omega,\omega'}$ lo que implica $\omega \leq_\psi \omega'$. Luego la primera condición de asignación fiel se cumple.

Ahora supongamos que $\omega \in mod(\psi)$ y $\omega' \notin mod(\psi)$. Queremos ver que $\omega <_\psi \omega'$. Como antes, por (KM2), se puede ver que $mod(\psi \circ \varphi_{\omega,\omega'}) = \{\omega\}$. Así, $\omega' \not\leq_\psi \omega$. Como $\leq_\psi$ es un preorden total necesariamente $\omega <_\psi \omega'$. Por lo tanto la segunda condición de fidelidad también se cumple.

Para probar la tercera y última condición supongamos que $\psi \equiv \phi$ y veamos que $\leq_\psi = \leq_\phi$. Por (KM4) tenemos $mod(\psi \circ \varphi_{\omega,\omega'}) = mod(\phi \circ \varphi_{\omega,\omega'})$ para cualquier par de valuaciones ω, ω'. Luego, por definición, tenemos

$$\omega \leq_\psi \omega' \quad \Leftrightarrow \quad \omega \leq_\phi \omega'$$

Lo que claramente dice $\leq_\psi = \leq_\phi$.

Finalmente mostremos la ecuación de la representación, es decir

$$mod(\psi \circ \mu) = min(mod(\mu), \leq_\psi)$$

El caso en que μ sea inconsistente ambos lados de la igualdad son el conjunto vacío y por lo tanto se cumple.

Ahora supongamos que μ es consistente.

Mostremos primero que $mod(\psi \circ \mu) \subseteq min(mod(\mu), \leq_\psi)$.
Supongamos que no ocurre lo que queremos y veamos que llegamos a una contradicción. Entonces asumimos que existe ω, tal que $\omega \in mod(\psi \circ \mu)$ y $\omega \notin min(mod(\mu), \leq_\psi)$. Como $\omega \in mod(\psi \circ \mu)$, por (KM1), ω es modelo de μ. Pero como $\omega \notin min(mod(\mu), \leq_\psi)$ necesariamente existe una valuación ω' modelo de μ tal que $\omega' <_\psi \omega$.
Se dan dos casos:

(Caso 1) $\omega' \in mod(\psi)$
Como ω' es modelo de μ, tenemos que $\psi \wedge \mu$ es consistente. Luego, por (KM2), tenemos que $mod(\psi \circ \mu) = mod(\psi \wedge \mu) = mod(\psi) \cap mod(\mu)$. Como $\omega \in mod(\psi \circ \mu)$ entonces $\omega \in mod(\psi)$. Luego, $\omega \leq_\psi \omega'$ lo cual es una contradice el hecho que $\omega' < \omega$.

(Caso 2) $\omega' \notin mod(\psi)$
Como $\omega' <_\psi \omega$ tenemos $mod(\psi \circ \varphi_{\omega,\omega'}) = \{\omega'\}$. Como ω y ω' son modelos de μ, tenemos que $(\mu \wedge \varphi_{\omega,\omega'}) \equiv \varphi_{\omega,\omega'}$. Luego de (KM5) y (KM4) obtenemos que $mod(\psi \circ \mu) \cap \{\omega, \omega'\} \subseteq mod(\psi \circ \varphi_{\omega,\omega'})$. Pero sabemos que $mod(\psi \circ \varphi_{\omega,\omega'}) = \{\omega'\}$ luego $\omega \notin mod(\psi \circ \mu)$. Lo cual es una contradicción.

Probemos ahora que $min(mod(\mu), \leq_\psi) \subseteq mod(\psi \circ \mu)$.
Sea ω tal que $\omega \in min(mod(\mu), \leq_\psi)$ y, contrariamente a lo que queremos, supongamos que $\omega \notin mod(\psi \circ \mu)$. Con esta suposición llegaremos a una contradicción. En efecto, como μ es consistente, tenemos por (KM3) que existe un modelo ω' de $\psi \circ \mu$. Por (KM1), $\omega' \in mod(\mu)$. Como tanto ω como ω' son modelos de μ, tenemos que $(\varphi_{\omega,\omega'} \wedge \mu) \equiv \varphi_{\omega,\omega'}$. Además notemos que $\omega' \in mod(\psi \circ \mu) \cap \{\omega, \omega'\}$, así $\psi \circ \mu \wedge \varphi_{\omega,\omega'}$ es consistente, se sigue entonces de las condiciones (KM5), (KM6) y (KM4) que $mod(\psi \circ \mu) \cap \{\omega, \omega'\} = mod(\psi \circ \varphi_{\omega,\omega'})$. Como $\omega \notin mod(\psi \circ \mu)$, tenemos, por la última igualdad, $mod(\psi \circ \varphi_{\omega,\omega'}) = \{\omega'\}$. Así, $\omega' <_\psi \omega$. Pero esto contradice el hecho que ω es minimal en $mod(\mu)$ con respecto a $\leq_\psi$.

($\Leftarrow$) Supongamos que existe una asignación fiel que envía cada fórmula ψ a un preorden total $\leq_\psi$. Supongamos que el operador $\circ$ satisface $mod(\psi \circ \mu) = min(mod(\mu), \leq_\psi)$. Probemos que $\circ$ satisface (KM1)-(KM6).

Notemos que por definición $mod(\psi \circ \mu) \subseteq mod(\mu)$, luego $\psi \circ \mu \vdash \mu$, por lo tanto, se cumple (KM1).

Supongamos que $\psi \wedge \mu$ es consistente, bastará probar que $mod(\psi \wedge \mu) = min(mod(\mu), \leq_\psi)$ para verificar la condición (KM2). Probemos primero que $mod(\psi \wedge \mu) \subseteq min(mod(\mu), \leq_\psi)$. Sea ω una valuación tal que $\omega \in mod(\psi) \cap mod(\mu)$. Por la primera propiedad de asignación fiel, tenemos que $\omega \leq_\psi \omega'$ para cualquier valuación ω', luego ω es minimal en $mod(\mu)$ con respecto a $\leq_\psi$, como queríamos. Ahora mostremos que $min(mod(\mu), \leq_\psi) \subseteq mod(\psi \wedge \mu)$. Sea $\omega \in min(mod(\mu), \leq_\psi)$ y, buscando una contradicción, supongamos que $\omega \notin mod(\psi \wedge \mu)$. Como $mod(\psi \wedge \mu) \neq \emptyset$, tomemos un modelo ω' de $\psi \wedge \mu$. En particular, $\omega' \in min(mod(\mu), \leq_\psi)$ por la inclusión que probamos anteriormente. Pero como supusimos que $\omega \notin mod(\psi \wedge \mu)$ y sabemos que $\omega \in mod(\mu)$, necesariamente $\omega \notin mod(\psi)$. Así, de la segunda propiedad de asignación fiel, tenemos que $\omega' <_\psi \omega$ lo que contradice la minimalidad de ω en los modelos de μ. Esto completa la prueba de (KM2).

Supongamos que μ es consistente. Así, mod (μ) es un conjunto no vacío y finito. Entonces, como $\leq_\psi$ es un preorden total, $min(mod(\mu), \leq_\psi)$ es diferente del conjunto vacío[3] y por lo tanto, $\psi \circ \mu$ es consistente. Luego (KM3) se cumple.

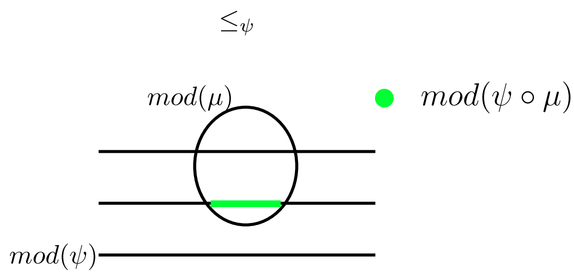
Notemos que por la tercera condición de asignación fiel se tiene que $min(mod(\mu), \leq_\psi) = min(mod(\alpha), \leq_\phi)$ cuando $\mu \equiv \alpha$ y $\psi \equiv \phi$ ya que $mod(\mu) = mod(\alpha)$ y $\leq_\psi = \leq_\phi$. Así, por la representación, tenemos que $\psi \circ \mu \equiv \phi \circ \alpha$. Luego, (KM4) se cumple.

Mostremos la condición (KM5). Notemos que si $min(mod(\mu), \leq_\psi) \cap mod(\phi) = \emptyset$, entonces, $mod((\psi \circ \mu) \wedge \phi) = \emptyset$. Por consiguiente, $mod((\psi \circ \mu) \wedge \phi) \subseteq mod(\psi \circ (\mu \wedge \phi))$, que es equivalente a (KM5).
Ahora supongamos que $(\psi \circ \mu) \wedge \phi$ es consistente, y veamos que la contención anterior se sigue cumpliendo. Supongamos que existe $\omega \in mod((\psi \circ \mu) \wedge \phi)$, y $\omega \notin mod(\psi \circ (\mu \wedge \phi))$, así de la representación se obtiene que ω es modelo de ϕ y minimal en $mod(\mu)$ con respecto a $\leq_\psi$ y, además, que ω no está en los minimales de $mod(\mu) \cap mod(\phi)$ con respecto a $\leq_\psi$. Luego, existe $\omega' \in mod(\mu) \cap mod(\phi)$ tal que $\omega' <_\psi \omega$, lo cual es una contradicción ya que $\omega' \in mod(\mu)$.

[3]La única manera de que no haya elementos minimales en un conjunto finito es que haya ciclos para $<_\psi$ lo cual es imposible debido a la transitividad y a la irreflexividad de la relación $<_\psi$.

Mostremos finalmente la condición (KM6). Bastará ver que $mod(\psi \circ (\mu \wedge \phi)) \subseteq mod((\psi \circ \mu) \wedge \phi)$, para verificar (KM6). Consideremos entonces que existe $\omega \in mod(\psi \circ (\mu \wedge \phi))$ y $\omega \notin mod((\psi \circ \mu) \wedge \phi)$. Por la representación tenemos que $\omega \in min(mod(\mu) \cap mod(\phi), \leq_\psi)$, y que $\omega \notin min(mod(\mu), \leq_\psi) \cap mod(\phi)$. Luego, como $\omega \in mod(\phi)$, tenemos que $\omega \notin min(mod(\mu), \leq_\psi)$. Por otra parte, como $mod((\psi \circ \mu) \wedge \phi) \neq \emptyset$ podemos tomar $\omega' \in min(mod(\mu), \leq_\psi) \cap mod(\phi)$. Ahora bien, como $\omega \in min((mod(\mu) \cap mod(\phi)), \leq_\psi)$, $\omega' \in mod(\mu) \cap mod(\phi)$ y $\leq_\psi$ es total, tenemos que $\omega \leq_\psi \omega'$, pero $\omega' \in min(mod(\mu), \leq_\psi)$, luego $\omega \in min(mod(\mu), \leq_\psi)$, lo cual es una contradicción. ∎

La siguiente figura ilustra el teorema de representación.



Los modelos de $\psi \circ \mu$ están indicados en verde: los minimales de los modelos de μ con respecto al preorden $\leq_\psi$, indicado por las rayas horizontales. Los modelos en las rayas más bajas son los modelos más plausibles para ψ.

2.3. Problemas con la Iteración de creencias

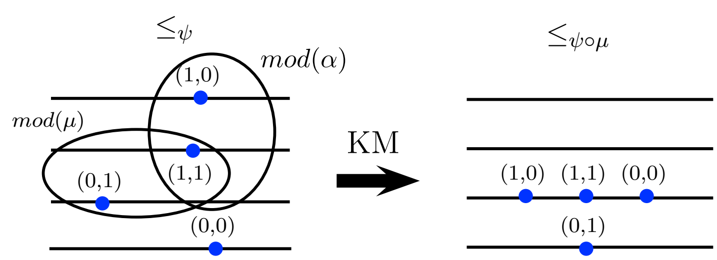
Usando el teorema de representación de Katsuno y Mendelzon, Adnan Darwiche y Judea Pearl mostraron en 1997 [3] que la revisión KM (equivalente a la revisión AGM en el caso finito) tiene problemas al iterar el proceso de revisión. Argumentando que estos problemas venían del hecho de que lo único conocido sobre el ordenamiento de los mundos luego de la revisión por la nueva información μ es que los mundos más plausibles (en el primer nivel) son los modelos minimales de μ según el preorden total asignado al conjunto de creencias inicial. Veamos, por medio de los siguientes ejemplos, que ésta falta de relación estructural entre el preorden inicial $\leq_\psi$ asignado fielmente a ψ, y el preorden de la revisión $\leq_{\psi \circ \mu}$ asignado fielmente a $\psi \circ \mu$ implica cambios contraintuitivos en un conjunto de creencias ψ.

Ejemplo 2.1 *Vemos un animal extraño X a lo lejos, y parece que está ladrando como un perro, por lo tanto, concluimos que el no vuela y mucho menos es que es un pájaro. Sin embargo, si se da el caso que X resulte ser un pájaro, nosotros estamos preparados para cambiar de parecer y concluir que X vuela. Viendo el animal de cerca nos damos cuenta que puede volar. La pregunta ahora es si debemos o no seguir pensando que X vuela en el caso que descubramos que X sea un pájaro despues de todo.*

Un operador de revisión que responda a esta pregunta negativamente, sería un operador no razonable. Sin embargo, el siguiente operador propuesto por Darwiche y Pearl es compatible con KM, y responde a estas características indeseadas.

mundo	pajaro	vuela	$\leq_\psi$	$\leq_{\psi o \mu}$
(1,1)	V	V	2	1
(1,0)	V	F	3	1
(0,1)	F	V	1	0
(0,0)	F	F	0	1

Tomando $\psi \equiv \neg pajaro \wedge \neg vuela$, $\mu = vuela$ y $\alpha = pajaro$. Veamos la gráfica de la tabla anterior.



Es claro por el teorema de representación que $\circ$ es un operador de revisión que satisface (KM1)-(KM6), ya que (0,1) es el minimal de los modelos de μ para $\leq_\psi$ y es el mundo más plausible en $\leq_{\psi\circ\mu}$. Y notemos que $min(mod(\alpha), \leq_{\psi\circ\mu}) = \{(1,0),(1,1)\}$. Por el teorema de representación y por el hecho de que $mod(\alpha) = \{(1,0),(1,1)\}$. Tenemos entonces que $(\psi \circ \mu) \circ \alpha \equiv \alpha$. De esta manera el conjunto de creencias resultante cree nada más que el animal es un pájaro y olvida el hecho de que puede volar.

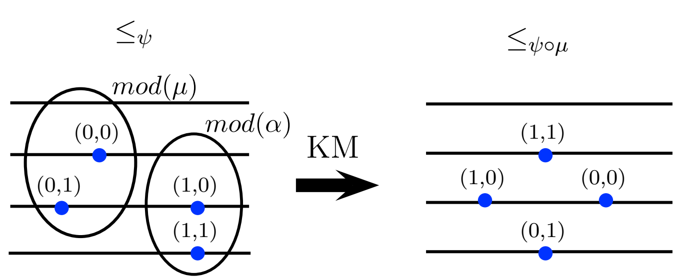
Este ejemplo nos muestra que existen operadores de revisión KM que *renuncian* a creencias sin justificación alguna. El ejemplo a continuación propuesto por Darwiche Pearl (DP), muestra que también existen operadores de revisión KM que *generan* creencias sin justificación alguna.

Ejemplo 2.2 *Se nos presenta una señorita llamada Brenda que parece ser lista y luce adinerada, por lo tanto, creemos que Brenda es lista y que Brenda es adinerada. Claramente, seguiremos creyendo que Brenda es lista aúnque nos enteremos que es pobre y seguiremos creyendo que Brenda es adinerada aunque nos enteremos que no es lista. Entonces, llega a nosotros una información que dice que Brenda no es lista, y por lo tanto, seguimos convencidos de que Brenda es adinerada. Pero otra nueva información nos es dada, y nos dice que Brenda sí es lista después de todo. Como el hecho de que Brenda sea o no lista no afecta en absoluto el hecho de que sea adinerada lo razonable es que después de toda la confusión sobre la inteligencia de Brenda sigamos creyendo que Brenda es adinerada.*

Veamos un operador de revisión compatible con KM que permite dejar de creer que Brenda es adinerada e incluso adquirir la creencia de que Brenda no es adinerada.

mundo	lista	adinerada	$\leq_\psi$	$\leq_{\psi o \mu}$
(1,1)	V	V	0	2
(1,0)	V	F	1	1
(0,1)	F	V	1	0
(0,0)	F	F	2	1

Tomando $\psi \equiv lista \wedge adinerada$, $\mu = \neg lista$ y $\alpha = lista$. Veamos la gráfica de la tabla anterior.



Notemos que $min(mod(\alpha), \leq_{\psi \circ \mu}) = \{(1,0)\}$. Luego por el teorema de representación obtenemos que $(\psi \circ \mu) \circ \alpha \equiv lista \wedge \neg adinerada$ y obtenemos que $\circ$ satisface (KM1)-(KM6). Posición no deseada por un agente razonable.

Esto nos hace citar la siguiente frase de Hans Rott:

> *"Que los principios de cambio minimal sean las bases de las teorías existentes de revisión de creencias es sólo un mito, al menos en lo que a la tradición AGM se refiere."*

CAPÍTULO 3

REFORMULACIÓN DARWICHE-PEARL

3.1. Estados Epistémicos

Un estado espistémico etimológicamente quiere decir estado de conocimiento. Las creencias de un agente se basan en los conocimientos del mismo en un determinado momento. En el marco AGM las creencias y los estados epistémicos de un agente son exactamente lo mismo, a saber, conjuntos de fórmulas cerradas bajo implicación lógica. Ellos los llaman *conjuntos de creencias* ("belief sets"). Para Katsuno y Mendelzon un estado epistémico es una fórmula proposicional de un lenguaje proposicional finito que codifica un conjunto de creencias. Sin embargo ambos enfoques definen al proceso de revisión de creencias, como un operador que afecta sólo a los conjuntos de creencias, y se basan en postulados que hablan exclusivamente de *un paso* de revisión.

Percatándose de esto, Darwiche y Pearl en 1997 [3] se dieron cuenta que hacía falta más que conjuntos de creencias para poder dar cuenta de manera coherente del proceso de iteración en la revisión. Intuitivamente, un estado epistémico debía tener además de los conjuntos de creencias de AGM o KM toda la información necesaria para un razonamiento coherente, incluyendo en particular, la estrategia para la revisión de creencias que el agente deseara emplear en un determinado momento. De esta manera consideraron a los estádos espistémicos como entidades abstractas pero no dieron una representación formal única de éstos.

Denotaremos a los estados epistémicos con letras griegas mayúsculas Ψ, Φ eventualmente con subíndices.

En el marco propuesto por Darwiche y Pearl (que llamaremos marco DP) es posible hablar de dos estados epistémicos Ψ_1 y Ψ_2 iguales (denotado como $\Psi_1 = \Psi_2$), pero aún así, pudiendo ser sintácticamente diferentes.

En el marco DP cada estado espistémico Ψ tiene un conjunto de creencias asociado. Ese conjunto será codificado por una fórmula proposicional denotada $B(\Psi)$. Como es usual en la literatura confundiremos a la fórmula $B(\Psi)$ con el conjunto de creencias que ella codifica a saber $Cn(B(\Psi))$. Es muy importante notar que el conjunto de creencias de Ψ no caracteriza al estado epistémico Ψ. Es posible tener dos estados epistémicos distintos con conjuntos de creencias asociados equivalentes. Más precisamente, la función B no es, en general, inyectiva.

3.2. Reformulación de KM

Los postulados KM modificados por Darwiche y Pearl son los siguientes:

(R*1) $B(\Psi \circ \mu) \vdash \mu$.

(R*2) Si $B(\Psi) \wedge \mu$ es consistente, entonces $B(\Psi \circ \mu) \equiv B(\Psi) \wedge \mu$.

(R*3) Si μ es consistente, entonces $B(\Psi \circ \mu)$ es también consistente.

(R*4) Si $\Psi_1 = \Psi_2$ y $\mu_1 \equiv \mu_2$, entonces $B(\Psi_1 \circ \mu_1) \equiv B(\Psi_2 \circ \mu_2)$.

(R*5) $B(\Psi \circ \mu) \wedge \phi \vdash B(\Psi \circ (\mu \wedge \phi))$.

(R*6) Si $B((\Psi \circ \mu)) \wedge \phi$ son consistentes, entonces $B((\Psi \circ (\mu \wedge \phi)) \vdash B(\Psi \circ \mu) \wedge \phi$.

La diferencia entre estos postulados y (KM1)-(KM6) reside esencialmente en la naturaleza de los estados epistémicos y en la función B. Ya no se revisa a un conjunto de creencias ψ ante una nueva información μ. Al contrario, la revisión por μ se aplica sobre un estado epistémico Ψ.

Podría decirse que que los postulados nuevos son una traducción inmediata de los postulados KM a nivel de las creencias. El único postulado que no tiene traducción inmediata es (KM4). Ellos adoptan la condición (R*4) que es un debilitamiento de (KM4). Recordemos que (KM4), en términos de estados epistémicos, dice que dos estados epistémicos Ψ_1 y Ψ_2 con sus respectivos conjuntos de creencias asociados equivalentes, al ser revisados por información equivalente, siguen teniendo respectivos conjuntos de creencias asociados equivalentes. El postulado (R*4) es más débil pues exige hipótesis más fuertes: pide la igualdad de los estados epistémicos (en el antecedente de la implicación) en vez de la equivalencia de sus creencias.

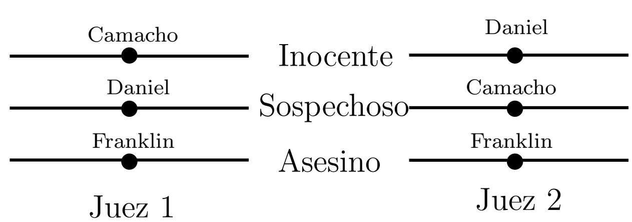
Es importante resaltar una diferencia en la notación que hemos adoptado. Darwiche y Pearl utilizan una notación que puede inducir al lector inadvertido en error. Por ejemplo el postulado (R*1) lo enuncian así: $\Psi \circ \mu \vdash \mu$. Su significado siendo, por supuesto, $B(\Psi \circ \mu) \vdash \mu$. Nosotros preferimos hacer explícita la función B (las creencias) en la formulación de los postulados.

De ahora en adelante nos referiremos a (R*1)-(R*6) como los postulados AGM-DP.

El siguiente ejemplo propuesto por Goldszmidt y Pearl (con otros nombres), ilustra las consecuencias contraintuitivas que se pueden obtener siguiendo una traducción literal de la condición (KM4) que sería: $B(\Psi_1) \equiv B(\Psi_2)$ y $\mu_1 \equiv \mu_2$ implica $B(\Psi_1 \circ \mu_1) \equiv B(\Psi_2 \circ \mu_2)$, Postulado que llamaremos (R*4')

Ejemplo 3.1 *Dos jueces en un caso de asesinato poseen diferentes estados epistémicos el primer juez cree que "Franklin es el asesino, Amilcar es sospechoso pero no hay pruebas suficientes en su contra, mientras que Camacho es definitivamente inocente". El segundo Juez cree que "Franklin es el asesino, Camacho es sospechoso pero no hay pruebas suficientes en su contra, mientras que Amilcar es definitivamente inocente". Los dos jueces tienen el mismo conjunto de creencias* $B(\Psi_1) \equiv B(\Psi_2) =$ *"Franklin es el asesino". Pero una evidencia sorprendente llega a los jueces* $\mu =$ *"Franklin no es el asesino". Claramente, cualquier revisión de creencias racional, hará que estos jueces difieran en sus conjuntos de creencias resultantes luego de revisar por la nueva evidencia. Sin embargo para cualquier operador de revisión que satisfaga el postulado (R*4') resultará que* $B(\Psi_1 \circ \mu) \equiv B(\Psi_2 \circ \mu)$*, lo cual es una posición insostenible en este caso (ver la explicación más abajo).*

El siguiente diagrama ilustra los estados epistémicos de los dos jueces como preferencias sobre los mundos posibles.



En ese caso, lo razonable es que el primer juez, después de la revisión, piense que el asesino es Daniel y que el segundo juez piense, después de la revisión, que el asesino es Camacho. Así las creencias sobre el asesino serán distintas.

3.2.1. Teorema de representación AGM-DP

Una vez establecido el nuevo marco para la revisión de estados epistémicos, Darwiche y Pearl mostraron un teorema de representación paralelo al teorema de representación de Katsuno y Mendelzon.

Definición 3.1 *Sea W el conjunto de todas las valuaciones de un lenguaje proposicional finito L y suponga que el conjunto de creencias asociado a cualquier estado epistémico pertenece a L. Una función que envía cada estado epistémico Ψ a un preorden total $\leq_\Psi$ sobre W se llama asignación fiel si, y sólo si se cumplen:*

1. *Si $\omega_1 \models B(\Psi)$, entonces $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ para cualquier ω_2.*
2. *Si $\omega_1 \models B(\Psi)$ y $\omega_2 \not\models B(\Psi)$, entonces $\omega_1 <_\Psi \omega_2$.*
3. *Si $\Psi = \Phi$, entonces $\leq_\Psi = \leq_\Phi$.*

Teorema 3.1 *Sea $\circ$ una función con dominio* Estados-epistémicos $\times$ Fórmulas *y codominio* Estados-epistémicos. *Entonces $\circ$ satisface los postulados (R*1)-(R*6) si, y sólo si, existe una asignación fiel que envía cada estado espistémico Ψ en un preorden total $\leq_\Psi$ tal que*

$$mod(B(\Psi \circ \mu)) = min(mod(\mu), \leq_\Psi)$$

Demostración: ($\Rightarrow$) Supongamos que un operador de revisión $\circ$ satisface los postulados (R*1)-(R*6). Y definamos para cada estado epistémico Ψ una relación correpondiente $\leq_\Psi$ de la siguiente manera:

$$\omega_1 \leq_\Psi \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 \in mod(B(\Psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2}))$$

Debemos mostrar que la relación $\leq_\Psi$ es un preorden total.
La prueba de este hecho es análoga a la que se hizo para probar que $\leq_\psi$ era un preorden total en el Teorema 2.1, cambiando a ψ por Ψ y usando la notación del marco DP para los conjuntos de creencias.

Para demostrar la fidelidad de la definición, nos referimos de nuevo al Teorema 2.1 y realizamos como antes el mismo procedimiento análogo al hecho para probar que la asignación de $\leq_\psi$ a cada conjunto de creencias ψ cumplía las dos primeras propiedades de fidelidad, y la tercera propiedad se obtiene directamente de la definición de $\leq_{\Psi_1}$ y $\leq_{\Psi_2}$ y de la condición (R*4).

La ecuación de la representación se obtiene de manera análoga a la representación en la prueba del Teorema 2.1.

($\Leftarrow$) Supongamos que existe una asignación fiel que envía a cada estado epistémico Ψ, a un preorden total $\leq_\psi$, tal que el operador $\circ$ satisface $mod(B(\psi \circ \mu)) = min(mod(\mu), \leq_\psi)$. Probemos que $\circ$ satisface (R*1)-(R*6).
Los postulados (R*1), (R*2), (R*3), (R*5) y (R*6) se demuestran análogamente a la manera en que se demostraron respectivamente los postulados (KM1), (KM2), (KM3), (KM5) y (KM6) en el Teorema 2.1.

Para la prueba de (R*4). Supongamos que $\Psi_1 = \Psi_2$ y $\mu \equiv \alpha$, y veamos que los dos estados epistémicos revisados respectivamente por μ y α tienen conjuntos de creencias asociados equivalentes. Sabemos por la representación que $mod(B(\Psi_1 \circ \mu)) = min(mod(\mu), \leq_{\Psi_1})$ y que
$mod(B(\Psi_2 \circ \alpha)) = min(mod(\alpha), \leq_{\Psi_2})$, como $mod(\mu) = mod(\alpha)$ y, por la tercera condición de asignación fiel, $\leq_{\Psi_1} = \leq_{\Psi_2}$, tenemos que $mod(B(\Psi_1 \circ \mu)) = mod(B(\Psi_2 \circ \alpha))$. Como queríamos. ∎

Observación 3.1 *Una diferencia esencial entre el teorema 2.1 y el teorema 3.1 es que en el caso del marco KM (teorema 2.1) una asignación fiel permite de reconstruir el operador $\circ$ (salvo equivalencia lógica) mientras que en el marco AGM-DP (teorema 3.1) la asignación fiel no permite reconstruir al operador $\circ$. En este caso debemos tener definido al operador, pues, como ya dijimos antes, conocer $B(\Psi \circ \mu)$ no nos permite conocer $\Psi \circ \mu$.*

3.3. Postulados para la revisión iterada

En la sección anterior pudimos ver que el teorema de representación AGM-DP es paralelo al teorema de representación KM. Vimos también que hay ciertas diferencias. Una de ellas es la formulación de (R*4). Otra es la tercera condición de asignación fiel que exige la igualdad de dos estados epistémicos para asegurar la igualdad entre los preordenes totales correspondientes. Los postulados AGM-DP, sólo nos dicen quiénes van a ser los mundos más plausibles para el preorden asociado al estado espistémico revisado por una nueva información. Así, los postulados DP no hacen restricciones respecto al reordenamiento de los mundos que no son minimales después de la revisión.

En el año 1997 Boutilier comenzó a indagar sobre los problemas en la revisión iterada. Para solucionar estos problemas propuso agregar un nuevo postulado al marco KM existente. Se trata del postulado siguiente

(CB) Si $\psi \circ \mu \vdash \neg\alpha$, entonces $(\psi \circ \mu) \circ \alpha \equiv \psi \circ \alpha$

Este postulado impone restricciones sobre conjuntos de creencias por lo tanto puede ser llevado a la notación de DP:

(CB) Si $B(\Psi \circ \mu) \vdash \neg\alpha$, entonces $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv B(\Psi \circ \alpha)$

El siguiente teorema nos muestra la contraparte semántica del postulado de Boutilier para estados epistémicos.

Teorema 3.2 *Supongamos que un operador de revisión satisface los postulados (R*1)-(R*6). El operador satisface el postulado (CB), si y sólo si, el operador y su correspondiente asignación fiel satisfacen:*

(CBR) Si $\omega_1, \omega_2 \models \neg B(\Psi \circ \mu)$, *entonces* $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ *sii* $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$

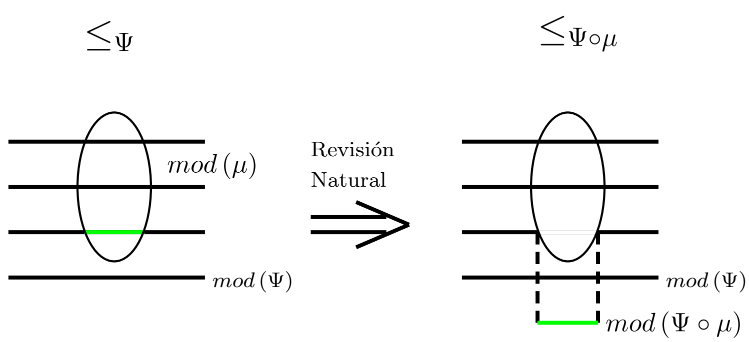
Demostración:
($\Rightarrow$) Supongamos que el postulado (CB) se cumple. Supongamos que ω_1 y ω_2 son modelos de la negación de $B(\Psi \circ \mu)$. Queremos ver que $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ sii $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$. Consideremos una fórmula α tal que $mod(\alpha) = \{\omega_1, \omega_2\}$, así $mod(\alpha) \subseteq mod(\neg B(\Psi \circ \mu))$. Luego[1], $[mod(\neg B(\Psi \circ \mu))]^c \subseteq [mod(\alpha)]^c$, esto es, $mod(B(\Psi \circ \mu)) \subseteq mod(\neg\alpha)$, lo cual implica que $B(\Psi \circ \mu) \vdash \neg\alpha$. Así por (CB) tenemos que $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv B(\Psi \circ \alpha)$, que por el teorema de representación es equivalente a que $min(\{\omega_1, \omega_2\}, \leq_{\Psi\circ\mu}) = min(\{\omega_1, \omega_2\}, \leq_\Psi)$. Pero esta última igualdad implica trivialmente que $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ sii $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$. Como queríamos.

[1]Aquí vamos a denotar A^c al complemento de A. También usaremos el hecho que $mod(\neg\alpha) = (mod(\alpha))^c$.

($\Leftarrow$) Supongamos que el postulado (CBR) se cumple. Supongamos que $B(\Psi \circ \mu) \vdash \neg\alpha$. Queremos ver que $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv B(\Psi \circ \alpha)$. Tenemos que $mod(B(\Psi \circ \mu)) \subseteq mod(\neg\alpha)$, así $mod(\alpha) \subseteq mod(\neg B(\Psi \circ \mu))$. Pero por (CBR) los preordenes $\leq_\Psi$ y $\leq_{\Psi\circ\mu}$ son idénticos para modelos de $mod(\neg B(\Psi \circ \mu))$, en particular $min(mod(\alpha), \leq_\Psi) = min(mod(\alpha), \leq_{\Psi\circ\mu})$. Luego del Teorema 2.1 se obtiene que $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv B(\Psi \circ \alpha)$. Como queríamos. ∎

Los operadores de revisión AGM-DP (aquellos que satisfacen los postulados (R*1)-(R*6)) que cumplen con el postulado (CB), fueron bautizados por Boutilier operadores de *revisión natural*.

El postulado de Boutilier desde un punto de vista semántico nos dice que $\leq_{\Psi\circ\mu}$ se obtiene de $\leq_\Psi$ simplemente poniendo los minimales de μ en el nivel más bajo y los demás no cambian. Así no sólo impone restricciones sobre el preorden total correspondiente al estado espistémico revisado, (CB) lo define completamente. La siguiente figura explica exactamente este hecho.



A pesar de que la revisión natural pareciera ser la solución más apropiada para los problemas de la revisión iterada en cuanto al cambio minimal en las creencias se refiere. Darwiche y Pearl mostraron que era, en cierta forma exagerada, y por esta razón llevaba a resultados contraintuitivos. En el siguiente capítulo veremos ejemplos concretos donde la revisión natural implica comportamientos no razonables. Por esta razón Darwiche y Pearl, propusieron sustituir al postulado (CB) por 4 postulados menos restrictivos.

El primer postulado que Darwiche y Pearl propusieron agregar a (R*1)-(R*6) expresa la siguiente idea: cuando dos nuevas informaciones llegan, la segunda siendo más fuerte que la primera, la primera es redundante ya que la segunda información sola, podría implicar el mismo conjunto de creencias que se obtendría al revisar por ambas consecutivamente. Más formalmente el postulado es el siguiente:

(C1) Si $\alpha \vdash \mu$, entonces $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv B(\Psi \circ \alpha)$.

El segundo postulado expresa que si dos informaciones sucesivas son contradictorias, la última prevalece, es decir, la segunda información sola, implicaría el mismo conjunto de creencias. Más formalmente el postulado es el siguiente:

(C2) Si $\alpha \vdash \neg\mu$, entonces $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv B(\Psi \circ \alpha)$.

El tercer postulado expresa la siguiente idea: si revisamos nuestras creencias por una información μ, y luego revisamos el conjunto de creencias obtenido de la revisión por μ por una nueva información α. Entonces μ debería ser retenido en el conjunto de creencias final, en el caso de que si hubiesemos revisado inicialmente por α, el conjunto de creencias obtenido implique a μ. Más formalmente el postulado es el siguiente:

(C3) Si $B(\Psi \circ \alpha) \vdash \mu$, entonces $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \vdash \mu$.

El cuarto postulado expresa que ninguna información debería contribuir a su propio olvido. Por lo tanto si revisamos nuestras creencias por una información μ, y después por una información α, el cojunto de creencias resultante no debería implicar a la negación de μ, cuando nuestras creencias iniciales revisadas sólo por la información α no implican a $\neg\mu$. Más formalmente el postulado es el siguiente:

(C4) Si $B(\Psi \circ \alpha) \nvdash \neg\mu$, entonces $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \nvdash \neg\mu$.

A los postulados (C1) hasta (C4) los llamaremos postulados de la iteración DP.

Analizando los 4 nuevos postulados de la iteración DP, podemos notar que ninguno de éstos conlleva a olvido innecesario de información. El postulado (C1), no olvida la primera información μ, ya que la segunda información α prevalece e implica a μ. En cambio (C2) si permite el olvido de la primera información μ cuando interviene la segunda información α, pero justificadamente, ya que lógicamente son contradictorias. En cuanto a los postulados (C3) y (C4), ellos están basados precisamente en no olvidar la información que es lo que queremos hacer notar.

Así como el postulado (CBR), la contraparte semántica de (CB), impone relaciones entre los preórdenes asociados a los estados espistémicos antes y despúes de la revisión por la nueva información, los postulados (C1) a (C4) deben tener contrapartes semánticas que también impongan relaciones entre los preórdenes asociados a los estados espistémicos antes y despúes de la revisión por la nueva información.

Y esto es precisamente lo que establece el siguiente teorema.

Teorema 3.3 *Supongamos que un operador de revisión satisface los postulados (R*1)-(R*6). El operador satisface los postulados (C1)-(C4) si, y sólo si, el operador y su asignación fiel correspondiente satisfacen:*

(CR1) Si $\omega_1 \models \mu$ *y* $\omega_2 \models \mu$, *entonces* $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$.

(CR2) Si $\omega_1 \models \neg\mu$ *y* $\omega_2 \models \neg\mu$, *entonces* $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$.

(CR3) Si $\omega_1 \models \mu$ *y* $\omega_2 \models \neg\mu$, *entonces* $\omega_1 <_\Psi \omega_2 \Rightarrow \omega_1 <_{\Psi\circ\mu} \omega_2$.

(CR4) Si $\omega_1 \models \mu$ *y* $\omega_2 \models \neg\mu$, *entonces* $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2 \Rightarrow \omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$.

Más precisamente

$$(Ci) \quad \Leftrightarrow \quad (CRi) \quad para \quad i \in \{1,2,3,4\}$$

Antes de comenzar con la demostración mostraremos el siguiente lema que nos será útil durante la misma.

Lema 3.1 *Sea* $\circ$ *un operador que satisface (R*1) hasta (R*6) y sea* μ *consistente. Sean además* Ψ *un estado epistémico y* α *una fórmula. Entonces,* $B(\Psi\circ\mu) \vdash \alpha$ *si, y sólo si, existe una valuación* ω *tal que* $\omega \in mod(\mu \wedge \alpha)$ *y* $\omega <_\Psi \omega'$ *para todo* $\omega' \in mod(\mu \wedge \neg\alpha)$.

Demostración:
($\Rightarrow$) Supongamos que μ es consistente y que $B(\Psi\circ\mu) \vdash \alpha$. Por el teorema 3.1 tenemos que $min(mod(\mu), \leq_\Psi) \subseteq mod(\alpha)$. Tomemos entonces $\omega \in min(mod(\mu), \leq_\Psi)$, así $\omega \in mod(\mu) \cap mod(\alpha)$. Afirmamos que $\omega <_\Psi \omega'$ para todo $\omega' \in mod(\mu \wedge \neg\alpha)$. En efecto, por reducción al absurdo, supongamos que existe $\omega' \in mod(\mu) \cap mod(\neg\alpha)$

tal que $\omega' \leq_\Psi \omega$. Así $\omega' \in min(mod(\mu) \leq_\Psi)$. Lo cual es una contradicción ya que $min(mod(\mu), \leq_\Psi) \subseteq mod(\alpha)$ y $\omega' \in mod(\neg\alpha)$.

($\Leftarrow$) Supongamos que existe $\omega \in mod(\mu \wedge \alpha)$ tal que $\omega <_\Psi \omega'$ para todo $\omega' \in mod(\mu \wedge \neg\alpha)$. Queremos ver que $B(\Psi \circ \mu) \vdash \alpha$, lo cual es equivalente a ver que $min(mod(\mu), \leq_\Psi) \subseteq mod(\alpha)$ por el Teorema 2.1. Supongamos, por reducción al absurdo, que existe $\omega' \in min(mod(\mu), \leq_\Psi)$ y $\omega' \notin mod(\alpha)$. Como $\omega \in mod(\mu)$, tenemos que $\omega' \leq_\Psi \omega$. Pero $\omega' \in mod(\mu) \cap mod(\neg\alpha)$. Contradicción. ∎

Demostración del Teorema 3.3:

1. El postulado (CR1) es equivalente a (C1).
   ($\Rightarrow$) Supongamos que (CR1) se cumple y que $\alpha \vdash \mu$. Queremos ver que $B(\Psi \circ \alpha) \equiv B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha)$. El postulado (CR1) nos dice que $\leq_\Psi$ y $\leq_{\Psi \circ \mu}$ son idénticos para los modelos de μ. Como $mod(\alpha) \subseteq mod(\mu)$, tenemos que en particular $min(mod(\alpha), \leq_\Psi) = min(mod(\alpha), \leq_{\Psi \circ \mu})$. Luego por el teorema de representación tenemos que $mod(B(\Psi \circ \alpha)) = mod(B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha))$. Así, $B(\Psi \circ \alpha) \equiv B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha)$.
   ($\Leftarrow$) Supongamos que (C1) se cumple. Consideremos ω_1 y ω_2 modelos de μ. Queremos ver que $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ sii $\omega_1 \leq_{\Psi \circ \mu} \omega_2$. Consideremos una fórmula α tal que $mod(\alpha) = \{\omega_1, \omega_2\}$. Así tenemos que $\alpha \vdash \mu$ entonces por (C1) tenemos que $\Psi \circ \alpha \equiv (\Psi \circ \mu) \circ \alpha$. Lo cual es equivalente a $min(\{\omega_1, \omega_2\}, \leq_\Psi) = min(\{\omega_1, \omega_2\}, \leq_{\Psi \circ \mu})$. Pero esta igualdad implica trivialmente que $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ sii $\omega_1 \leq_{\Psi \circ \mu} \omega_2$. Como queríamos.

2. El postulado (CR2) es equivalente a (C2).
   La prueba es totalmente análoga a la prueba de la equivalencia precedente.

3. El postulado (CR3) es equivalente a (C3).
   ($\Rightarrow$) Supongamos que (CR3) se cumple y que $B(\Psi \circ \alpha) \vdash \mu$. Queremos ver que $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \vdash \mu$. Por el Lema 3.1 tenemos que existe $\omega \in mod(\alpha) \cap$ mod (μ) tal que $\omega <_\Psi \omega'$ para todo $\omega' \in mod(\alpha) \cap mod(\neg\mu)$.Por (CR3), $\omega <_{\Psi \circ \mu} \omega'$ para todo $\omega' \in mod(\alpha) \cap mod(\neg\mu)$. Luego de nuevo por el Lema 3.1 tenemos que $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \vdash \mu$. Como queríamos.
   ($\Leftarrow$) Supongamos que (C3) se cumple. Tomemos ω_1 modelo de μ y ω_2 modelo de $\neg\mu$ tales que $\omega_1 <_\Psi \omega_2$. Queremos ver que $\omega_1 <_{\Psi \circ \mu} \omega_2$. Consideremos la fórmula proposicional α tal que $mod(\alpha) = \{\omega_1, \omega_2\}$. Como $\omega_1 \in mod(\alpha \wedge \mu)$, $\omega_1 <_\Psi \omega_2$ y $mod(\alpha) \cap mod(\neg\mu) = \{\omega_2\}$ se tiene por el Lema 3.1 que $B(\Psi \circ \alpha) \vdash \mu$. Así por el postulado (C3) se tiene que $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \vdash \mu$. Por el Lema 3.1 tenemos

que $\omega_1 <_{\Psi\circ\mu} \omega_2$. Ya que $mod(\alpha \wedge \mu) = \{\omega_1\}$ y $mod(\alpha \wedge \neg\mu) = \{\omega_2\}$. Como queríamos.

4. El postulado (CR4) es equivalente a (C4).
Para la demostración usaremos las siguientes formas equivalentes de de (C4) y (CR4), que llamaremos (C4') y (CR4') respectivamente. Ellas se obtienen así: (C4') es el contrarecíproco de (C4) y (CR4') se obtiene de (CR4) poniendo el contrarecíproco en la conclusión.

(C4') Si $(\Psi \circ \mu) \circ \alpha \vdash \neg\mu$, entonces $\Psi \circ \alpha \vdash \neg\mu$.
(CR4') Si $\omega_1 \models \mu$ y $\omega_2 \models \neg\mu$, entonces $\omega_2 <_{\Psi\circ\mu} \omega_1 \Rightarrow \omega_2 <_\Psi \omega_1$

Probaremos entonces que (CR4') $\Leftrightarrow$ (C4').

($\Rightarrow$) Probemos (C4'). Supongamos que (CR4') se cumple y que $B((\Psi\circ\mu)\circ\alpha) \vdash \neg\mu$. Queremos ver que $B(\Psi\circ\alpha) \vdash \neg\mu$. Por el Lema 3.1 existe $\omega \in mod(\alpha\wedge\neg\mu)$ tal que $\omega <_{\Psi\circ\mu} \omega'$ para todo $\omega' \in mod(\alpha\wedge\mu)$. Por (CR4'), tenemos que $\omega <_\Psi \omega'$. Luego por el Lema 3.1 tenemos que $B(\Psi \circ \alpha) \vdash \neg\mu$. Como queríamos.

($\Leftarrow$) Probemos (CR4') asumiendo (C4'). Consideremos ω_1 modelo de μ y ω_2 modelo de $\neg\mu$ y $\omega_2 <_{\Psi\circ\mu} \omega_1$. Queremos mostrar que $\omega_2 <_\Psi \omega_1$. Sea α una fórmula proposicional tal que $mod(\alpha) = \{\omega_1, \omega_2\}$. Notemos que $\{\omega_2\} = mod(\alpha) \cap mod(\neg\mu)$ y además $mod(\alpha) \cap mod(\mu) = \{\omega_1\}$. Como $\omega_2 <_{\Psi\circ\mu} \omega_1$ tenemos por el Lema 3.1 $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \vdash \neg\mu$. Por (C4') tenemos $B(\Psi \circ \mu) \vdash \neg\mu$. De nuevo por el Lema 3.1, tenemos que $\omega_2 <_\Psi \omega_1$, ya que $mod(\alpha) \cap\ mod(\neg\mu) = \{\omega_2\}$ y $mod(\alpha) \cap mod(\mu) = \{\omega_1\}$. ∎

Al examinar con detalle el teorema anterior, nos damos cuenta que los postulados (CR1)-(CR4), no imponen restricciones a $\leq_{\Psi\circ\mu}$ cuando un modelo de $\neg\mu$ es más plausible según $\leq_\Psi$ que un modelo de μ. En el capítulo 4 trataremos este caso.

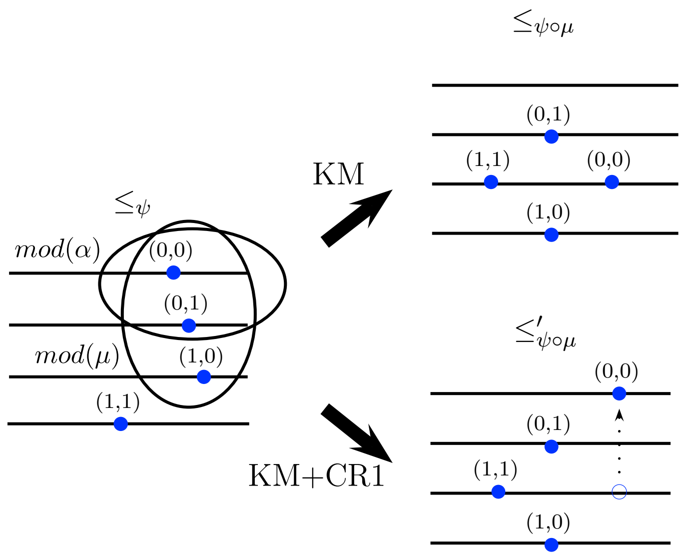
3.3.1. Ejemplos

Ejemplo 3.2 *Tengo incorporados en un circuito un sumador y un multiplicador. Yo creo que tanto el sumador como el multiplicador están funcionando, por lo tanto, todo el circuito está funcionando. Si alguien me dijera que el circuito está fallando, yo culparía al multiplicador y no al sumador (ya que los multiplicadores tienden a dar más problemas). Sin embargo, si alguien me dice que el sumador está dañado, yo creería que el multiplicador esta bien (porque las fallas son independientes, entonces, dos fallas simultáneas son menos deseadas que una sola). Ahora me dicen que el circuito está fallando, e inmediatamente después, que el sumador está fallando. Debería entonces creer que el multiplicador está malo también?. Un argumento tonto sería: "Después de enterarme de la falla en el circuito yo culpo al multiplicador. Sabiendo que el sumador está malo es perfectamente consistente con mis creencias actuales que el multiplicador esté dañado, de esta manera, yo no tengo razones para cambiar de parecer con respecto a multiplicador dañado". Un razonamiento más en acuerdo con la realidad dice que yo debo cambiar de parecer ya que la única razón por la que pueda culpar a multiplicador es que el circuito esté fallando. En otro caso, por mi propia experiencia, presumiré que el multiplicador está bueno. Incluso aceptaré que los dos componentes no son afectados entre si. Por lo tanto, saber que el sumador está malo despeja cualquier razón para que culpe al multiplicador; debo regresar a mi creencia inicial que el multiplicador está bueno.*

La situación siguiente es perfectamente compatible con AGM:

mundo	sumador_ok	multiplicador_ok	$\leq_\psi$	$\leq_{\psi o \mu}$
(1,1)	V	V	0	1
(1,0)	V	F	1	0
(0,1)	F	V	2	2
(0,0)	F	F	3	1

Tomando $B(\Psi) \equiv sumador\_ok \wedge multiplicador\_ok$, $\mu = \neg(sumador\_ok \wedge multiplicador\_ok)$ y $\alpha = \neg sumador\_ok$. Veamos la siguiente gráfica que ilustra este comportamiento indeseable y también el comportamiento más racional que impone (CR1) en una situación así.



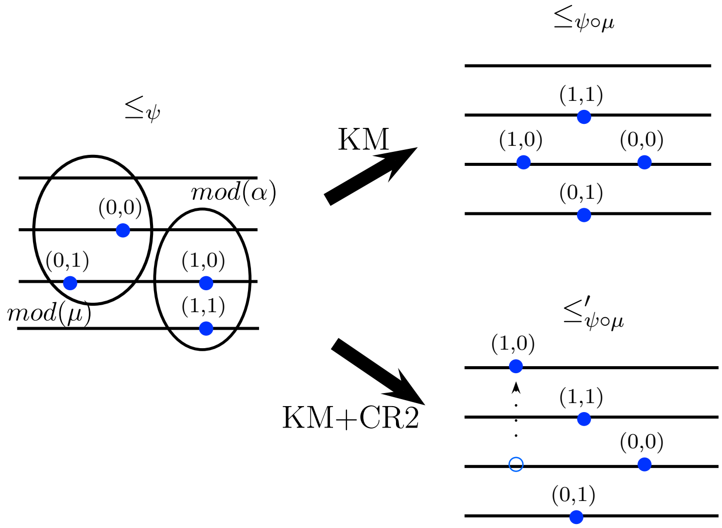
Notemos que $min(mod(\alpha), \leq_{\Psi\circ\mu}) = \{(0,0)\}$. Esto implicaría por el teorema de representación que $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv \neg sumador\_ok \wedge \neg multilplicador\_ok$. Pero en la gráfica podemos ver que $(0,1) <_\Psi (0,0)$ y que $(0,0) <_{\Psi\circ\mu} (0,1)$ rompiendo con la condición (CR1) ya que (0,1) y (0,0) son modelos de μ. Sin embargo podemos ver que $min(mod(\alpha), \leq'_{\Psi\circ\mu}) = \{(0,1)\}$ ya que $\leq'_{\Psi\circ\mu}$ satisface (CR1). Y de esta manera $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv \neg sumador\_ok \wedge multilplicador\_ok$. Que es la posición razonable de la que habláramos antes.

Ejemplo 3.3 *Retomemos el ejemplo 2.2 de la señorita Brenda.*

La siguiente situación, compatible con AGM, resume el ejemplo anterior

mundo	lista	adinerada	$\leq_\psi$	$\leq_{\psi o\mu}$
(1,1)	V	V	0	2
(1,0)	V	F	1	1
(0,1)	F	V	1	0
(0,0)	F	F	2	1

Tomando $B(\Psi) \equiv lista \wedge adinerada$, $\mu = \neg lista$ y $\alpha = lista$. Veamos los problemas y la solución que impone (CR2) ilustrados en la gráfica siguiente:



Notemos que $min(mod(\alpha), \leq_{\Psi\circ\mu}) = \{(1,0)\}$. Esto implicaría por el teorema de representación que $B((\Psi\circ\mu)\circ\alpha) \equiv lista\wedge\neg adinerada$. Pero en la gráfica podemos ver que $(1,1) <_{\Psi} (1,0)$ y que $(1,0) <_{\Psi\circ\mu} (1,1)$ rompiendo con la condición (CR2) ya que (1,1) y (1,0) son modelos de $\neg\mu$. Sin embargo podemos ver que $min(mod(\alpha), \leq'_{\Psi\circ\mu}) = \{(1,1)\}$ ya que $\leq'_{\Psi\circ\mu}$ satisface (CR2). Y de esta manera $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv lista \wedge adinerada$. Que es una posición razonable.

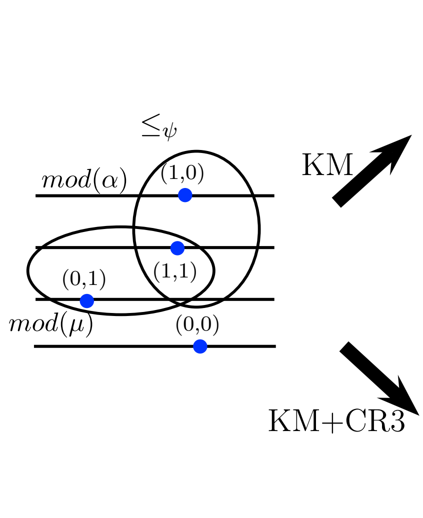
Ejemplo 3.4 *Retomemos el ejemplo 2.1 acerca del pájaro que vuela.*

Habíamos visto que AGM permite que olvidemos el hecho de que el animal vuela después de informarnos de que es un pájaro. La tabla siguiente compatible con AGM nos muestra cómo es que eso puede suceder:

mundo	pajaro	vuela	$\leq_{\Psi}$	$\leq_{\Psi o\mu}$
(1,1)	V	V	2	1
(1,0)	V	F	3	1
(0,1)	F	V	1	0
(0,0)	F	F	0	1

Tomando $B(\Psi) \equiv \neg pajaro \wedge \neg vuela$, $\mu = vuela$ y $\alpha = pajaro$, vemos más gráficamente en la figura que sigue el extraño comportamiento AGM (alias KM) y cómo

(CR3) prohíbe ese comportamiento indeseable:



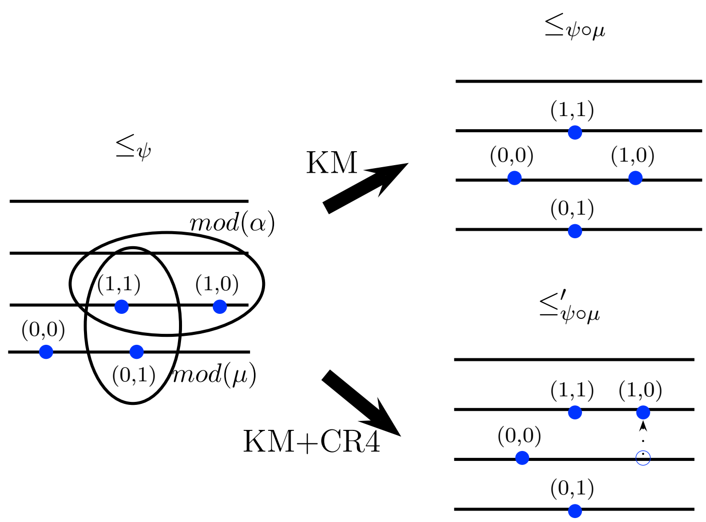
Notemos que $min(mod(\alpha), \leq_{\Psi\circ\mu}) = \{(1,1),(1,0)\}$. Esto implicaría por el teorema de representación que $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv pajaro$. Pero en la gráfica podemos ver que $(1,1) <_\Psi (1,0)$ y que $(1,1) =_{\Psi\circ\mu} (1,0)$ rompiendo con la condición (CR3) ya que $(1,1) \in mod(\mu)$ y $(1,0) \in mod(\neg\mu)$. Sin embargo podemos ver que $min(mod(\alpha), \leq'_{\Psi\circ\mu}) = \{(1,1)\}$ ya que $\leq'_{\Psi\circ\mu}$ satisface (CR3). Y de esta manera $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv pajaro \wedge vuela$. Que es una posición bastante razonable.

Ejemplo 3.5 *Un filósofo escocés se levanta en la mañana y dice: "El sol está radiante. ¡Qué bueno! No tengo razones para creer que tendré un día desagradable". La esposa le dice: "De hecho antes de que te levantaras dijeron en la radio que va ser un día lleno de sol". El filósofo dijo: "¿En verdad lo dijeron? Los de la radio normalmente están en lo cierto, voy a tener que retractarme. Hoy va ser un día desagradable después de todo".*

Vamos a ver que AGM permite ese razonamiento extraño mientras que (CR4) lo prohíbe. La situación inicial es que en general no hay mucho sol en Escocia. Pero en cualquier caso los días pueden ser tanto agradables como desagradables. La tabla siguiente, que es compatible con AGM, ilustra porqué ese razonamiento extraño es posible:

mundo	sol_radiante	día_agradable	$\leq_\Psi$	$\leq_{\Psi o\mu}$
(1,1)	V	V	1	2
(1,0)	V	F	1	1
(0,1)	F	V	0	0
(0,0)	F	F	0	1

Tomando $B(\Psi) \equiv \neg sol\_radiante$, $\mu = dia\_agradable$ y $\alpha = sol\_radiante$, vamos a ver en la gráfica siguiente de manera más precisa el comportamiento extraño del filósofo y cómo (CR4) prohíbe ese comportamiento.



Notemos que $min(mod(\alpha), \leq_{\Psi\circ\mu}) = \{(1,0)\}$. Esto implicaría por el teorema de representación que $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv dia\_soleado \wedge \neg dia\_agradable$. Pero en la gráfica podemos ver que $(1,1) =_\psi (1,0)$ y que $(1,0) <_{\psi\circ\mu} (1,1)$ rompiendo con la condición (CR4) ya que $(1,1) \in mod(\mu)$ y $(1,0) \in mod(\neg\mu)$. Sin embargo podemos ver que $min(mod(\alpha), \leq'_{\Psi\circ\mu}) = \{(1,1), (1,0)\}$ ya que $\leq'_{\Psi\circ\mu}$ satisface (CR4). Y de esta manera $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv sol\_radiante$. Que es una posición razonable.

3.4. Operadores de Revisión DP

Veamos ahora ejemplos concretos de operadores que satisfagan los postulados (R*1)-(R*6) y (C1)-(C4).

Vamos a comenzar por probar un lema bastante útil y cuya prueba es prácticamente inmediata.

Lema 3.2 *Sea $\circ$ un operador de revisión que satisface (R*1) hasta (R*6) y $\Psi \mapsto \leq_\Psi$ la asignación fiel asociada. Suponga que $B(\Psi)$ es consistente, entonces para cualquier valuación w*

$$w \models B(\Psi) \quad \Leftrightarrow \quad w \leq_\Psi w' \quad \textit{para cualquier } w'$$

Dicho de otra manera, $mod(B(\Psi)) = min(W, \leq_\Psi)$.

Demostración: La implicación ($\Rightarrow$) es inmediata por la condición 1 de asignación fiel. Para ver la recíproca, razonemos por el absurdo. Suponga que $w \leq_\Psi w'$ para cualquier w' pero además $w \not\models B(\Psi)$. Como $B(\Psi)$ es consistente existe w' tal que $w' \models B(\Psi)$. Luego, por la condición 2 de asignación fiel se tiene $w' <_\Psi w$ lo cual es una contradicción. ∎

3.4.1. Revisión natural

La Revisión Natural se definió para aquellos operadores que cumplieran con los postulados (R*1)-(R*6) y la condición (CB) de Boutilier. Por lo tanto bastará mostrar que (CB) implica (C1)-(C4) para incluir a la Revisión Natural en la lista de operados compatibles con la revisión de Darwiche y Pearl.

Proposición 3.1 *Sea $\circ$ un operador de revisión que satisface (R*1)-(R*6). Si el operador satisface (CBR) entonces satisface (CR1)-(CR4).*

Demostración: Supongamos que (CBR) se cumple.

(CR1). Supongamos que $\omega_1 \models \mu$ y $\omega_2 \models \mu$. Queremos ver que

$$\omega_1 \leq_\Psi \omega_2 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_1 \leq_{\Psi \circ \mu} \omega_2 \tag{3.1}$$

Consideramos los siguientes dos casos:

Caso 1: $\omega_1 \in min(mod(\mu), \leq_\Psi)$.
En este caso siempre ocurre $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ cualquiera que sea ω_2. También tenemos, por el teorema de representación que $\omega_1 \models B(\Psi \circ \mu)$ y por el lema 3.2 siempre ocurre $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$. Luego se cumple la equivalencia (3.1).

Caso 2: $\omega_1 \notin min(mod(\mu), \leq_\Psi)$.
En este caso por el teorema de representación $\omega_1 \not\models B(\Psi \circ \mu)$.
($\Rightarrow$) Supongamos que $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$. Entonces no es el caso que ω_2 sea modelo de $B(\Psi\circ\mu)$ pues tendríamos por la representación $\omega_2 \in min(mod(\mu), \leq_\Psi)$ lo que implicaría $\omega_2 <_\Psi \omega_1$ que es una contradicción. Entonces, como $\omega_1, \omega_2 \in mod(\neg B(\Psi \circ \mu))$, por (CBR), tenemos $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$.
($\Leftarrow$) Si $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$ entonces ω_2 tiene que ser modelo de $\neg B(\Psi \circ \mu)$ porque si no por el lema 3.2 tendríamos $\omega_2 \in min(W, \leq_{\Psi\circ\mu})$ y también por el mismo lema $\omega_1 \notin min(W, \leq_{\Psi\circ\mu})$. Esto significa que $\omega_2 <_{\Psi\circ\mu} \omega_1$, contradicción. Entonces $\omega_1, \omega_2 \in mod(\neg B(\Psi \circ \mu))$ y, de nuevo por (CBR), $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$.

(CR2). Supongamos que $\omega_1 \models \neg\mu$ y $\omega_2 \models \neg\mu$. Queremos ver que $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ si, y sólo si, $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$. Por el teorema de representación tenemos que $\omega_1, \omega_2 \in mod(\neg B(\Psi \circ \mu))$. Luego, de (CBR), se obtiene que $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ si, y sólo si, $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$. Como queríamos.

(CR3). Supongamos que $\omega_1 \models \mu$ y $\omega_2 \models \neg\mu$. Queremos ver que si $\omega_1 <_\Psi \omega_2$ entonces $\omega_1 <_{\Psi\circ\mu} \omega_2$.
Tenemos dos casos posibles:

Caso 1: $\omega_1 \in min(mod(\mu), \leq_\Psi)$.
Supongamos que $\omega_1 <_\Psi \omega_2$. Como $\omega_2 \notin mod(\mu)$ por el teorema de representación $\omega_2 \not\models B(\Psi \circ \mu)$. Por la hipótesis del caso que tratamos y la representación $\omega_1 \models B(\Psi \circ \mu)$. Así, por el lema 3.2, tenemos $\omega_1 <_{\Psi\circ\mu} \omega_2$.

Caso 2: $\omega_1 \notin min(mod(\mu), \leq_\Psi)$.
Supongamos que $\omega_1 <_\Psi \omega_2$. Así, por la representación $\omega_1, \omega_2 \not\models B(\Psi \circ \mu)$. Entonces, por (CBR)[2], $\omega_1 <_{\Psi\circ\mu} \omega_2$.

[2]Note que como las relaciones $\leq_\Psi$ y $\leq_{\Psi\circ\mu}$ son preordenes totales (CBR) es equivalente a decir que si $w, w' \not\models B(\Psi \circ \mu)$ entonces $w <_\Psi w'$ ssi $w <_{\Psi\circ\mu} w'$

(CR4). Supongamos que $\omega_1 \models \mu$ y $\omega_2 \models \neg\mu$. Queremos ver que si $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$, entonces $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$. Se procede de manera análoga a la prueba de la propiedad (CR3.) ∎

Esta proposición junto con el Teorema 3.2 y el Teorema 3.3 nos aseguran que la revisión natural es un operador de revisión de Darwiche Pearl. Más aún, este resultado muestra que los postulados (C1)-(C4) son un debilitamiento de (CB). Que no son equivalentes, es decir que (C1)-(C4) no implican (CB), será visto en la siguiente sección.

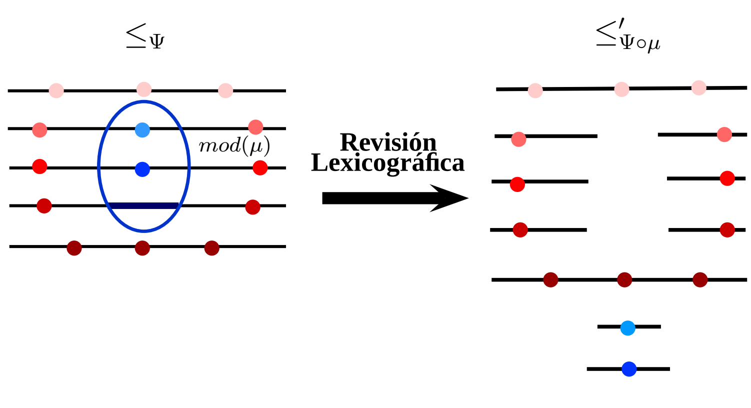
3.4.2. Revisión Lexicográfica

Contemporáneamente con Boutilier, Nayak [6] introdujo el operador de *revisión lexicográfica* buscando la solución para el problema de la revisión iterada de AGM. Semánticamente la revisión natural impone restricciones sobre el ordenamiento de las valuaciones después de efectuada la revisión por nueva información. La propiedad (Lex) muestra como Nayak define el preorden $\leq_{\Psi\circ\mu}$ para una información μ.

(Lex)

$$\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2 \Leftrightarrow [(\omega_1 \models \mu) \wedge (\omega_2 \models \neg\mu)] \vee [[(\omega_1, \omega_2 \models \mu) \vee (\omega_1, \omega_2 \models \neg\mu)] \wedge [\omega_1 \leq_\Psi \omega_2]]$$

La siguiente gráfica ilustra la revisión lexicográfica.



Como veremos más adelante, en presencia de (R*1)-(R*6), la condición (Lex) será equivalente a (C1), (C2) más una condición que Nayak llamó *Recalcitrancia*: cuando llegan dos nuevas informaciones no contradictorias entre si se tiene que al revisar las creencias por la primera información y luego revisar nuevamente por la segunda información el conjunto de creencias resultante debe implicar la primera información. Esta condición será denotada (Rec). En términos de estados epistémicos recalcitrancia dice:

(Rec) Si $\beta \nvdash \neg\alpha$, entonces $B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta) \vdash \alpha$.

El siguiente Teorema nos muestra la contraparte semántica de la recalcitrancia.

Teorema 3.4 *Supongamos que un operador $\circ$ satisface (R*1)-(R*6). Entonces $\circ$ satisface (Rec), si y sólo si, $\circ$ y su correspondiente asignación fiel satisfacen:*
(R) Si $\omega_1 \in mod(\alpha)$ y $\omega_2 \in mod(\neg\alpha)$, entonces $\omega_1 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$.

Demostración:
($\Rightarrow$) Tomemos $\omega_1 \in mod(\alpha)$ y $\omega_2 \in mod(\neg\alpha)$. Queremos ver que $\omega_1 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$. Consideremos β la fórmula proposicional tal que $mod(\beta) = \{\omega_1, \omega_2\}$. Así tenemos que $mod(\alpha) \cap mod(\beta) = \{\omega_1\}$ y tenemos que $mod(\beta) \nsubseteq mod(\neg\alpha)$. De (Rec) y la representación se obtiene que $min(mod(\beta), \leq_{\Psi\circ\alpha}) \subseteq mod(\alpha)$. Luego $\omega_1 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$ ya que $\omega_2 \in mod(\neg\alpha)$. Como queríamos.

($\Leftarrow$) Supongamos que (R) se cumple y que $\beta \nvdash \neg\alpha$. Queremos ver que $B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta) \vdash \alpha$, que es equivalente a ver que $mod(B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta) \subseteq mod(\alpha)$ y esto por el teorema de representación equivale a que
$min(mod(\beta), \leq_{\Psi\circ\alpha}) \subseteq mod(\alpha)$. Tomemos entonces $\omega \in min(mod(\beta), \leq_{\Psi\circ\alpha})$ y veamos que $\omega \in mod(\alpha)$. Razonando por el absurdo supongamos que $\omega \notin mod(\alpha)$. Por hipótesis tenemos que mod $(\beta) \cap mod(\alpha) \neq \emptyset$ así por (R) existe $\omega' \in mod(\beta)$ tal que $\omega' <_{\Psi\circ\alpha} \omega$ contradiciendo la minimalidad de ω en $mod(\beta)$ con respecto a $\leq_{\Psi\circ\alpha}$. Luego $\omega \in mod(\alpha)$. Como queríamos. ∎

Teorema 3.5 *Sea $\circ$ un operador que satisface (R*1)-(R*6). Entonces $\circ$ y su correspondiente asignación fiel satisfacen (CR1), (CR2) y (R) si, y sólo si, $\circ$ y su correspondiente asignación fiel satisfacen (Lex).*

Demostración: Supongamos que $\circ$ satisface (R*1)-(R*6).
($\Rightarrow$) Asumamos (CR1), (CR2) y (R). Probaremos primero:

$$\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2 \Rightarrow [(\omega_1 \models \mu) \wedge (\omega_2 \models \neg\mu)] \vee [[(\omega_1, \omega_2 \models \mu) \vee (\omega_1, \omega_2 \models \neg\mu)] \wedge (\omega_1 \leq_{\Psi} \omega_2)]$$

Supongamos que $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$ y que no es el caso que $[(\omega_1, \omega_2 \models \mu) \vee (\omega_1, \omega_2 \models \neg\mu)] \wedge [(\omega_1 \leq_{\Psi} \omega_2)]$. Mostremos que $[(\omega_1 \models \mu) \wedge (\omega_2 \models \neg\mu)]$
Como $\neg[(\omega_1, \omega_2 \models \mu) \vee (\omega_1, \omega_2 \models \neg\mu)] \wedge [(\omega_1 \leq_{\Psi} \omega_2)]$ es equivalente a $[(\omega_1 \models \mu) \wedge (\omega_2 \models \neg\mu)] \vee [(\omega_1 \models \neg\mu) \wedge (\omega_2 \models \mu)] \vee \omega_2 <_{\Psi} \omega_1$, lo que queremos probar[3] los enunciados 1 y 2 que enunciamos a continuación:

1.$(\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2) \wedge [[(\omega_1 \models \mu) \wedge (\omega_2 \models \neg\mu)] \vee [(\omega_1 \models \neg\mu) \wedge (\omega_2 \models \mu)]] \Rightarrow [(\omega_1 \models \mu) \wedge (\omega_2 \models \neg\mu)]$

2. $[(\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2) \wedge (\omega_2 <_{\Psi} \omega_1)] \Rightarrow [(\omega_1 \models \mu) \wedge (\omega_2 \models \neg\mu)]$

Probemos 1. Supongamos que el antecedente es verdad. Si $(\omega_1 \models \mu) \wedge (\omega_2 \models \neg\mu)$ estamos listos pues es lo que queremos probar. Si no, tenemos $(\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2)$ y $(\omega_1 \models \neg\mu) \wedge (\omega_2 \models \mu)$. Por el el postulado (R) tenemos que $\omega_2 <_{\Psi\circ\mu} \omega_1$. Lo cual es una contradicción.

Probemos 2. Supongamos que $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$ y que $\omega_2 <_{\Psi} \omega_1$. Vamos a razonar por reducción al absurdo. supongamos que no es cierto que $(\omega_1 \models \mu) \wedge (\omega_2 \models \neg\mu)$. Entonces tenemos tres casos y veremos que cada uno de ellos nos lleva a una contradicción.

Caso 1: $\omega_1, \omega_2 \models \mu$. Como $\omega_2 <_{\Psi} \omega_1$, por el postulado (CR1) tenemos que $\omega_2 <_{\Psi\circ\mu} \omega_1$. Contradicción.

Caso 2: $\omega_1, \omega_2 \models \neg\mu$. Como $\omega_2 <_{\Psi} \omega_1$, por el postulado (CR2) tenemos que $\omega_2 <_{\Psi\circ\mu} \omega_1$. Contradicción.

Caso 3: $\omega_1 \models \neg\mu$ y $\omega_2 \models \mu$. Por el postulado (R) tenemos que $\omega_2 <_{\Psi\circ\mu} \omega_1$. Lo cual es una contradicción.

De esta manera tenemos que $\omega_1 \models \mu$ y $\omega_2 \models \neg\mu$. Como queríamos.

[3] Aquí estamos usando una de las leyes clásicas de la lógica que nos dice que probar $(A \wedge (B \vee C)) \rightarrow D$ es equivalente a probar $(A \wedge B) \rightarrow D$ y $(A \wedge C) \rightarrow D$.

Ahora probemos la implicación de derecha a izquierda de (Lex). Entonces supongamos que $[(\omega_1 \models \mu) \wedge (\omega_2 \models \neg\mu)] \vee [[(\omega_1, \omega_2 \models \mu) \vee (\omega_1, \omega_2 \models \neg\mu)] \wedge [\omega_1 \leq_\Psi \omega_2]]$. Queremos probar que $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$.

Haciendo una prueba por casos, bastará mostrar:

1. $[(\omega_1 \models \mu) \wedge (\omega_2 \models \neg\mu)] \Rightarrow \omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$

2. $[(\omega_1, \omega_2 \models \mu) \vee (\omega_1, \omega_2 \models \neg\mu)] \wedge [\omega_1 \leq_\Psi \omega_2] \Rightarrow \omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$

Verifiquemos 1. Supongamos que $(\omega_1 \models \mu) \wedge (\omega_2 \models \neg\mu)$. Luego directamente de (R) se deduce que $\omega_1 <_{\Psi\circ\mu} \omega_2$. En particular $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$. Como queríamos.
Verifiquemos 2. Se dan dos casos:

Caso 1: $(\omega_1, \omega_2 \models \mu) \wedge (\omega_1 \leq_\Psi \omega_2)$. Directamente de (CR1) obtenemos que $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$.
Caso 2: $(\omega_1, \omega_2 \models \neg\mu) \wedge (\omega_1 \leq_\Psi \omega_2)$. Directamente de (CR2) obtenemos que $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$.

($\Leftarrow$) Supongamos que (Lex) se cumple. Verifiquemos (CR1), (CR2) y (R).

(CR1) Queremos ver que $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ si, y sólo si $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$.
Supongamos que $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$. Como también $\omega_1, \omega_2 \models \mu$, por (Lex), obtenemos directamente que $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$. Como queríamos.
Supongamos que $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$. Como $\omega_1, \omega_2 \models \mu$ tenemos por la condición (Lex) que $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$. Como queríamos.

(CR2) La prueba es completamente análoga a la de (CR1).

(R) Tomemos $\omega_1 \models \mu$ y $\omega_2 \models \neg\mu$. Queremos ver que $\omega_1 <_{\Psi\circ\mu} \omega_2$. Si esto no ocurre, entonces, por la totalidad de $\leq_{\Psi\circ\mu}$, tenemos $\omega_2 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_1$. Entonces, por (Lex), o bien $\omega_2 \models \mu$ y $\omega_1 \not\models \mu$ (lo cual no es el caso) o bien $[[(\omega_1, \omega_2 \models \mu) \vee (\omega_1, \omega_2 \models \neg\mu)] \wedge [\omega_1 \leq_\Psi \omega_2]]$. Así en particular $[(\omega_1, \omega_2 \models \mu) \vee (\omega_1, \omega_2 \models \neg\mu)]$ lo cual contradice nuestra hipótesis inicial. ∎

Como corolario del teorema anterior y de los teoremas 3.3 y 3.4 obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.6 *Sea $\circ$ un operador que satisface los postulados (R*1)-(R*6). Entonces $\circ$ es un operador de Revisión Lexicográfica si, y sólo si, $\circ$ satisface (C1), (C2) y (Rec).*

Proposición 3.2 *Sea $\circ$ un operador de revisión que satisface (R*1)-(R*6). Si $\circ$ y su correspondiente asignación fiel cumplen (R) entonces $\circ$ y su correspondiente asignación fiel satisfacen (CR3) y (CR4).*

Demostración: Supongamos que (R) se cumple.

(CR3) Tomemos $\omega_1 \models \mu$ y $\omega_2 \models \neg\mu$. Supongamos que $\omega_1 <_\Psi \omega_2$. Queremos ver que $\omega_1 <_{\Psi\circ\mu} \omega_2$, lo cual se deduce directamente de la hipótesis y de (R).

(CR4) Tomemos $\omega_1 \models \mu$ y $\omega_2 \models \neg\mu$. Supongamos que $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$. Queremos ver que $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$. Por (R) y la hipótesis tenemos $\omega_1 <_{\Psi\circ\mu} \omega_2$. Luego $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$. Como queríamos. ∎

Finalmente tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.7 *Sea $\circ$ un operador que satisface (R*1)-(R*6). Si $\circ$ es de revisión lexicográfica entonces es un operador de Darwiche y Pearl es decir satisface (C1)-(C4).*

Demostración: Del teorema 3.6 tenemos que todo operador lexicográfico que satisface (R*1)-(R*6) también satisface (C1), (C2) y (Rec). Pero por la proposición 3.2, el teorema 3.4 y el teorema 3.3 tenemos que la condición (Rec) implica a (C3)-(C4). Hecho que concluye la prueba. ∎

3.4.3. Funciones ordinales condicionales de Spohn

En 1987 Spohn [7] introdujo a las *funciones ordinales condicionales* como representantes de estados epistémicos. De acuerdo a Spohn una función ordinal condicional, es una función κ también llamada *función de ranking* desde el conjunto dado de valuaciones W a la clase de los ordinales. Intuitivamente κ representa un orden de los mundos (valuaciones) por su grado de plausibilidad: los mundos con ordinales más pequeños son más plausibles. Así, los mundos que son la pre-imagen del 0 son los más plausibles de acuerdo a las creencias del agente.
El ordenamiento por plausibilidad de las valuaciones posibles puede ser extendido a un ordenamiento de las proposiciones (conjuntos de mundos posibles), definiendo a

el valor bajo κ de una proposición μ como el valor del mundo con el menor ordinal asignado entre los modelos de μ. Esto es, $\kappa(\mu) = min\{\kappa(\omega) : \omega \models \mu\}$. Diremos que las creencias de una función denotadas como $B(\kappa)$ se caracterizan por ser las proposiciones que tienen como modelos las pre-imágenes bajo κ del ordinal 0. Esto es, $mod(B(\kappa)) = \{\omega : \kappa(\omega) = 0\}$[4].
Además de proponer a las funciones ordinales condicionales como representación de estados epistémicos. Spohn propuso un método para cambiar un ranking frente a nueva información. La evidencia la representó como un par (μ, m), donde μ es una proposición representante de la nueva información y m es el grado de plausibilidad de μ después de la revisión, es decir m es el rango mínimo en donde se encuentran puden encontrarse modelos de $\neg\mu$. Según Spohn, un ranking κ es actualizado frente a una nueva evidenciade la siguiente manera:

$$\kappa_{(\mu,m)}(\omega) = \begin{cases} \kappa(\omega) - \kappa(\mu), & \text{si} \quad \omega \models \mu; \\ \kappa(\omega) - \kappa(\neg\mu) + m, & \text{si} \quad \omega \models \neg\mu. \end{cases}$$

Spohn llamó a la función $\kappa_{(\mu,m)}(\omega)$ la (μ, m)-condicionalización de κ.

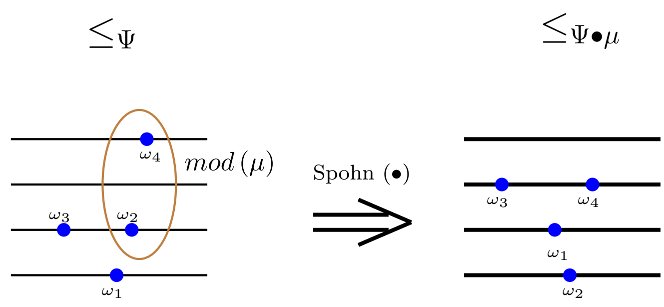
Haciendo variar m es posible definir una gran cantidad de funciones de ranking. Darwiche y Pearl construyeron un operador de revisión de creencias denotado por $\bullet$ inspirados en las ideas de Spohn.

Es una especie de función de ranking que fortaleciera las creencias en la nueva información luego de revisar por ella. Específicamente, tomaron m el grado de plausibilidad post-revisión de μ un grado mayor que el valor $\neg\mu$ bajo κ:

$$(\kappa \bullet \mu)(\omega) \stackrel{def}{=} \kappa_{(\mu,\kappa(\neg\mu)+1)}(\omega) = \begin{cases} \kappa(\omega) - \kappa(\mu), & \text{si} \quad \omega \models \mu; \\ \kappa(\omega) + 1, & \text{si} \quad \omega \models \neg\mu. \end{cases}$$

La siguiente figura da un ejemplo que ilustra al operador $\bullet$.

[4]A diferencia de Spohn y Darwiche y Pearl nosotros no suponemos que $\kappa^{-1}(0) \neq \emptyset$, así puede suceder que $B(\kappa) \equiv \perp$.



El siguiente teorema muestra que la propuesta para revisión de creencias de Spohn, satisface el marco Darwiche-Pearl.

Teorema 3.8 *El operador de revisión $\bullet$ satisface los postulados (R*1)-(R*6) y (C1)-(C4).*

Antes de demostrar el teorema vamos a establecer dos los lemas.

Lema 3.3 *Definamos el preorden de una función ranking κ de la siguiente manera:*

$$\omega_1 \leq_\kappa \omega_2 \stackrel{def}{=} \kappa(\omega_1) \leq (\omega_2)$$

Tenemos entonces

$$mod(B(\kappa \bullet \mu)) = min(mod(\mu), \leq_\kappa)$$

y las siguiente condiciones:

1. *Si $\omega_1 \models B(\kappa)$, entonces $\omega_1 \leq_\kappa \omega_2$, para cualquier ω_2.*
2. *Si $\omega_1 \models B(\kappa)$ y $\omega_2 \not\models B(\kappa)$, entonces $\omega_1 <_\kappa \omega_2$.*
3. *Si $\kappa_1 = \kappa_2$, entonces $\leq_{\kappa_1} = \leq_{\kappa_2}$.*

Aquí, $\omega_1 <_\kappa \omega_2$ está definido como $\omega_1 \leq_\kappa \omega_2$ y $\omega_2 \not\leq_\kappa \omega_1$; $\omega_1 =_\kappa \omega_2$ está definido como $\omega_1 \leq_\kappa \omega_2$ y $\omega_2 \leq_\kappa \omega_1$.

Demostración: Para mostrar que $mod(B(\kappa \bullet \mu)) = min(mod(\mu), \leq_\kappa)$. Primero consideramos el caso en que μ es inconsistente, es decir $mod(\mu) = \emptyset$. En ese caso para todo ω, $\kappa \bullet \mu(\omega) = \kappa(\omega)+1$. Por consiguiente, $mod(B(\kappa \bullet \mu)) = \emptyset = min(mod(\mu), \leq_\kappa)$.

Ahora vamos a considerar el caso en que μ es consistente y probaremos la doble inclusión:

▶ ($\subseteq$): Supongamos que $\omega \models B(\kappa \bullet \mu)$. Así por definición de $B(\kappa \bullet \mu)$ tenemos que $(\kappa \bullet \mu)(\omega) = 0$, y por la definición de $\kappa \bullet \mu$ tenemos que los mundos que están en el nivel cero son necesariamente modelos de μ. Por lo tanto $\omega \models \mu$. Además $\kappa(\omega) - \kappa(\mu) = (\kappa \bullet \mu)(\mu) = 0$ así $\kappa(\omega) = \kappa(\mu) = min\{\kappa(\omega') : \omega' \models \mu\}$. Luego por la definición del preorden $\leq_\kappa$ tenemos que $\omega \leq_\kappa \omega'$ para todo $\omega' \models \mu$. De esta manera $\omega \in min(mod(\mu), \leq_\kappa)$.

▶ ($\supseteq$): Si $\omega \in min(mod(\mu), \leq_\kappa)$, entonces $\omega \models B(\kappa \bullet \mu)$.
Supongamos que $\omega \in min(mod(\mu), \leq_\kappa)$. Así $\omega \models \mu$ y $\omega \leq_\kappa \omega'$ para todo $\omega' \models \mu$. Por la definición del preorden $\leq_\kappa$ tenemos entonces que $\kappa(\omega) \leq \kappa(\omega')$ para todo $\omega' \models \mu$. Por lo tanto $\kappa(\mu) = \kappa(\omega)$. Esto implica que $\kappa(\mu) - \kappa(\omega) = 0$, y esto por definición nos dice que $(\kappa \bullet \mu)(\omega) = 0$, y por lo tanto, $\omega \models B(\kappa \bullet \mu)$.

El resto del lema se muestra como sigue:

1. Verifiquemos que si $\omega_1 \models B(\kappa)$ entonces $\omega_1 \leq_\kappa \omega_2$, para cualquier ω_2.
   Supongamos que $\omega_1 \models B(\kappa)$. Así $\kappa(\omega_1) = 0$. Por lo tanto $\omega_1 \leq_\kappa \omega_2$ por definición de $\leq_\kappa$.

2. Verifiquemos que si $\omega_1 \models B(\kappa)$ y $\omega_2 \models \neg B(\kappa)$ entonces $\omega_1 \leq_\kappa \omega_2$.
   Supongamos que $\omega_1 \models B(\kappa)$ y $\omega_2 \models \neg B(\kappa)$. Entonces $\kappa(\omega_1) = 0$ y $\kappa(\omega_2) > 0$. Luego por definición de $\leq_{\kappa \bullet \mu}$, tenemos que $\omega_1 <_\kappa \omega_2$.

3. Verifiquemos que si $\kappa^1 = \kappa^2$ entonces $\leq_{\kappa^1} = \leq_{\kappa^2}$.
   La prueba es inmediata de la definición de $\leq_{\kappa^1}$ y $\leq_{\kappa^2}$. ∎

Lema 3.4 *Sean $\leq_\kappa$ y $\leq_{\kappa \bullet \mu}$ los pre-ordenes inducidos por los ranking κ y $\kappa \bullet \mu$. Entonces tenemos que:*

1. *Si $\omega_1 \models \mu$ y $\omega_2 \models \mu$, entonces $\omega_1 \leq_\kappa \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 \leq_{\kappa \bullet \mu} \omega_2$.*

2. *Si* $\omega_1 \models \neg\mu$ *y* $\omega_2 \models \neg\mu$, *entonces* $\omega_1 \leq_\kappa \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 \leq_{\kappa\bullet\mu} \omega_2$.

3. *Si* $\omega_1 \models \mu$ *y* $\omega_2 \models \neg\mu$, *entonces* $\omega_1 <_\kappa \omega_2 \Rightarrow \omega_1 <_{\kappa\bullet\mu} \omega_2$.

4. *Si* $\omega_1 \models \mu$ *y* $\omega_2 \models \neg\mu$, *entonces* $\omega_1 \leq_\kappa \omega_2 \Rightarrow \omega_1 \leq_{\kappa\bullet\mu} \omega_2$.

Demostración:
La condicionalización $\bullet$ es un proceso en el cual los ordinales asignados a los modelos de μ son todos disminuidos en $\kappa(\mu)$ "unidades" y los ordinales asignados a los modelos de $\neg\mu$ son incrementados por 1. Esto implica lo siguiente:

1. El orden relativo entre los modelos de μ no cambia.

2. El orden relativo entre los modelos de $\neg\mu$ no cambia.

3. Si un modelos de μ tiene un ordinal asignado por κ menor al asignado por κ a un modelo de $\neg\mu$. Después de realizar la actualización por μ el orden entre el modelo de μ y el modelo $\neg\mu$ va continuar cumpliéndose.

4. Es imposible para un modelo de μ tener un ordinal asignado por $\kappa \bullet \mu$ mayor estricto al asignado por $\kappa \bullet \mu$ a un modelo de $\neg\mu$ después de la actualización, si bajo κ pasaba lo contrario.
   Luego se cumplen las 4 propiedades deseadas. ∎

Demostración del Teorema 3.8
Por el Lema 3.3 y el teorema de (representación) 3.1 tenemos que $\bullet$ satisface (R*1)-(R*6). Por el Lema 3.4 y por el teorema 3.3 obtenemos inmediatamente que $\bullet$ satisface (C1)-(C4). ∎

De esta manera tenemos que el operador $\bullet$ es un operador de Darwiche Pearl. A partir de ahora al operador $\bullet$ definido por Darwiche y Pearl lo llamaremos *operador SDP*.

CAPÍTULO 4

REVISIÓN ADMISIBLE

En el marco AGM el principio del cambio minimal se refiere, *grosso modo*, a minimizar los cambios entre los conjuntos de fórmulas que representan los conjuntos de creencias. Sin embargo existen otras interpretaciones para el cambio minimal. Con la traslación de conjuntos de creencias a estados espistémicos (DP), el cambio minimal, puede pensarse en términos de la menor cantidad posible de cambios sobre el preorden de plausibilidad asociado $\leq_\Psi$. Es decir, dado un estado epistémico Ψ y una nueva información μ, el cambio minimal en la revisión se logra haciendo a los preórdenes totales $\leq_\Psi$ y $\leq_{\Psi\circ\mu}$ lo más similares posible.

Con ésta interpretación semántica del cambio minimal podemos saber, de manera intuitiva, con una mirada a las gráficas qué operador de revisión es más o menos conservativo del cambio minimal. Por ejemplo, si vemos la gráfica del operador de revisión natural pareciera que es el más conservativo entre todos los operadores de Darwiche-Pearl vistos hasta ahora. Lo contrario pasa si vemos la gráfica de la revisión lexicográfica: parece el operador menos conservativo de los operadores Darwiche-Pearl.

A partir de este momento siempre tendremos en mente la última interpretación de cambio minimal, es decir tratar de minimizar el cambio en $\leq_\Psi$.

4.1. Problemas en el marco DP

Darwiche y Pearl mostraron que la condición (CB) es muy fuerte, y que la revisión natural no es del todo tan natural ya que puede llevar a resultados contraintuitivos. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.1 *Observamos un extraño animal y éste parece ser un pájaro; por lo tanto creemos que lo es. Cuando éste se acerca, vemos claramente que el animal es rojo. Así, creemos que es un pájaro rojo. Para salir de dudas consultamos a un experto en aves que lo examina y concluye que no es un pájaro sino otra clase de animal. ¿Deberíamos seguir creyendo que el animal es rojo?¡(CB) nos dice que no! Como si nunca hubiesemos sabido el color del pájaro.*

Este resultado poco satisfactorio puede ser visto más precisamente si ponemos

$$\leq_\Psi = \begin{array}{cc} 00 & 01 \\ 10 & 11 \end{array}$$

en donde la primera coordenada se refiere a $pajaro$ y la segunda a $rojo$. Así $B(\Psi) \equiv pajaro$. La revisión natural por $rojo$ nos lleva a

$$\leq_{\Psi \circ rojo} = \begin{array}{c} 00 \quad 01 \\ 10 \\ 11 \end{array}$$

y de nuevo revisando por $\neg pajaro$ la revisión natural nos da

$$\leq_{\Psi \circ rojo \circ \neg pajaro} = \begin{array}{c} 10 \\ 11 \\ 00 \quad 01 \end{array}$$

Así, es claro que $B(\Psi \circ rojo \circ \neg pajaro) \equiv \neg pajaro$.

Como la revisión de Boutilier es un caso particular de la revisión de Darwiche-Pearl, se desprende que hay debilidades en el Marco DP. Lo curioso del trabajo de Darwiche y Pearl es que a pesar de que se dieron cuenta del problema de la revisión natural, no la rechazaron de los operadores compatibles con DP, si no que a partir del postulado de Boutilier propusieron los postulados (C1)-(C4) más débiles que (CB). Por lo tanto no dieron una solución definitiva para esto.

Este hecho motivó a los investigadores Richard Booth y Thomas Meyerpor un lado [2] y a Yi Jin y Michael Thielscher por otro [4], a estudiar estos problemas recientemente. Ellos proponen varios cambios en el marco DP como solución.

Aquí estudiaremos con más detalle el trabajo de Booth y Meyer por ser más completo y porque, a nuestro juicio, posee una exposición más clara y detallada.

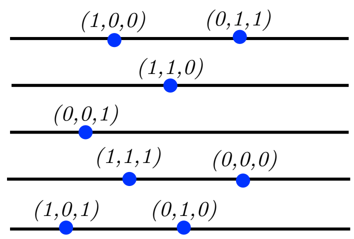
4.2. Marco RAGM

Booth y Meyer comienzan su nuevo marco considerando operadores de revisión con estados epistémicos (el marco DP sin los axiomas de la iteración). Ellos, por comodidad en el tratamiento, sólo consideran estados epistémicos Ψ tales que $B(\Psi)$ sea consistente. En ese caso se apuede aplicar el lema 3.2, y tenemos $mod(B(\Psi)) = min(W, \leq_\Psi)$. También suponen que las fórmulas por las cuales se revisa serán siempre consistentes. Esto es necesario para que el postulado (R*1) sea consistente con la hipótesis que las creencias de los estados epistémicos son siempre consistentes. Note que bajo estas suposiciones el postulado (R*3) es redundante.

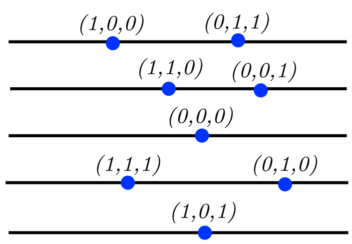
Recordemos que Darwiche y Pearl mostraron que una traducción literal del postulado de irrelevancia de sintáxis (KM4) a estados epistémicos en términos de la función B era demasiado fuerte (ver ejemplo 3.1 que le precede) y debía ser sustituido por el postulado (R*4) en el marco de estados epistémicos. Sin embargo, Booth y Meyer argumentan que (R*4) es muy débil. Ya que no proporciona una formulación adecuada de la irrelevancia de sintáxis para la revisión iterada. (R*4) especifíca que la revisión por dos informaciones equivalentes debe producir estados espistémicos con bases de creencias asociadas equivalentes. Pero de allí no se deduce, que estos estados epistémicos revisados resultantes, después de ser a su vez revisados por informaciones equivalentes también produzcan estados espistémicos con bases de creencias asociadas equivalentes.

Como veremos a continuación, es posible entonces satisfacer la revisión de Darwiche-Pearl y tener $B((\Psi \circ \alpha) \circ \gamma) \not\equiv B((\Psi \circ \beta) \circ \delta)$ aún cuando $\alpha \equiv \beta$ y $\gamma \equiv \delta$. Esto, por supuesto, no parece ser muy racional.

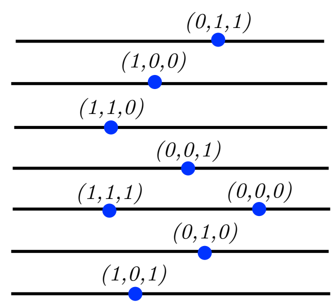
Ejemplo 4.2 *Consideremos un lenguaje proposicional generado por 3 fórmulas atómicas p,q y r. Fijemos cualquier operador* $\circ$ *de revisión de Darwiche-Pearl (La revisión lexicográfica por ejemplo). Por los teoremas 3.1 y 3.3 existe una asignación fiel que envía cada estado epistémico* Ψ *a un preorden total* $\leq_\Psi$ *cumpliendo que* $mod(\Psi \circ \mu) = min(mod(\mu), \leq_\Psi)$ *y las condiciones (CR1),(CR2),(CR3) y (CR4). Si tomamos esta misma asignación para todo los estados epistémicos salvo en los casos de* Φ, $\Phi \circ p$ *y* $\Phi \circ \neg\neg p$ *a los cuales son asignados respectivamente los preordenes totales* $\leq_\Phi$, $\leq_{\Phi\circ p}$ *y* $\leq_{\Phi\circ\neg\neg p}$ *como se muestran abajo. Es fácil verificar que estos tres preordenes siguen cumpliendo las condiciones de la asignación fiel de los teoremas 3.1 y 3.3 y por lo tanto que la asignación fiel considerada con los pequeños cambios realizados corresponde a un operador de revisión de Darwiche y Pearl.*



$\leq_\Psi$



$\leq_{\Psi\circ p}$



$\leq_{\Psi\circ\neg\neg p}$

Pero observemos que $B((\Psi \circ\ p) \circ q) = \{(1,1,1),(0,1,0)\}$, *mientras que* $B((\Psi \circ \neg\neg p) \circ q) = \{(0,1,0)\}$. *De esta manera hemos conseguido un operador de Darwiche y Pearl que se comporta de la forma poco intuitiva que habláramos justo antes.*

Como consecuencia de este hecho, Booth y Meyer proponen que el postulado (R*4) sea reemplazado[1] por el postulado siguiente:

[1] Nosotros simplemente reenforzaremos (R*4). Pensamos que (R*4) no se puede obtener de (R*4')(módulo (R*1), (R*2), (R*3), (R*5) y (R*6)) como Booth y Meyer lo sobrentienden.

(R*4') Si $\Psi_1 = \Psi_2$, $\alpha \equiv \beta$ y $\delta \equiv \gamma$ entonces $B((\Psi \circ \alpha) \circ \gamma) \equiv B((\Psi \circ \beta) \circ \delta)$

Proposición 4.1 *Sea $\circ$ un operador de revisión que satisface (R*1)-(R*6). Entonces $\circ$ (R*4') si, y sólo si $\circ$ y su correspondiente asignación fiel satisfacen*

*(RR*4') Si $\Psi_1 = \Psi_2$ y $\alpha \equiv \beta$ entonces $\leq_{\Psi_1 \circ \alpha} = \leq_{\Psi_2 \circ \beta}$.*

Demostración: ($\Rightarrow$) Supongamos que (R*4') se cumple y que (RR*4') no, es decir existen α, β, Ψ_1 y Ψ_2 tales que $\Psi_1 = \Psi_2$, $\alpha \equiv \beta$ y $\leq_{\Psi_1 \circ \alpha} \neq \leq_{\Psi \circ \beta}$. Esto implica, sin pérdida de generalidad, que existen valuaciones ω_1 y ω_2 tales que $\omega_1 \leq_{\Psi_1 \circ \alpha} \omega_2$ pero $\omega_2 <_{\Psi_2 \circ \beta} \omega_1$. Consideremos una fórmula φ tal que $mod(\varphi) = \{\omega_1, \omega_2\}$. Por el teorema de representación tenemos que $\omega_1 \in mod(B((\Psi_1 \circ \alpha) \circ \varphi))$, pero $mod(B((\Psi_2 \circ \beta) \circ \varphi)) = \{\omega_2\}$, así $B((\Psi_1 \circ \alpha) \circ \varphi) \not\equiv B((\Psi_2 \circ \beta) \circ \varphi)$. Lo cual contradice (R*4'). Luego $\leq_{\Psi_1 \circ \alpha} = \leq_{\Psi_2 \circ \beta}$. Como queríamos.

($\Leftarrow$) Supongamos que (RR*4') se cumple y supongamos que $\Psi_1 = \Psi_2$, $\alpha \equiv \beta$ y $\delta \equiv \gamma$. Queremos ver que $B((\Psi \circ \alpha) \circ \gamma) = B((\Psi \circ \beta) \circ \delta)$. Por (RR*4') tenemos que $\leq_{\Psi_1 \circ \alpha} = \leq_{\Psi_2 \circ \beta}$. Además por hipótesis $mod(\gamma) = mod(\delta)$.
Luego $min(mod(\gamma), \leq_{\Psi_1 \circ \alpha}) = min(mod(\delta), \leq_{\Psi_2 \circ \beta})$, por el teorema de representación tenemos que $B((\Psi \circ \alpha) \circ \gamma) = B((\Psi \circ \beta) \circ \delta)$. Como queríamos. ∎

El postulado (RR*4') establece que la revisión de dos estados espistémicos idénticos por dos informaciones equivalentes debe resultar en estados espistémicos con preordenes totales asociados idénticos.

Proposición 4.2 *La revisión lexicográfica ((R*1)-(R*6) más (Lex)) satisface (R*4').*

Demostración: Usando la proposición anterior bastará probar que (Lex) implica (RR*4'). Supongamos que $\Psi_1 = \Psi_2$ y $\alpha \equiv \beta$. Tomemos ω_1 y ω_2 dos mundos cualesquiera. Queremos ver que

$$\omega_1 \leq_{\Psi_1 \circ \alpha} \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 \leq_{\Psi_2 \circ \beta} \omega_2$$

Por (Lex) tenemos que:

$\omega_1 \leq_{\Psi_1 \circ \alpha} \omega_2 \Leftrightarrow [(\omega_1 \models \alpha) \wedge (\omega_2 \models \neg\alpha)] \vee [[(\omega_1, \omega_2 \models \alpha) \vee (\omega_1, \omega_2 \models \neg\alpha)] \wedge [\omega_1 \leq_{\Psi_1} \omega_2]]$
y también
$\omega_1 \leq_{\Psi_2 \circ \beta} \omega_2 \Leftrightarrow [(\omega_1 \models \beta) \wedge (\omega_2 \models \neg\beta)] \vee [[(\omega_1, \omega_2 \models \beta) \vee (\omega_1, \omega_2 \models \neg\beta)] \wedge [\omega_1 \leq_{\Psi_2} \omega_2]]$

pero por hipótesis sabemos que $mod(\alpha) = mod(\beta)$ y que $\leq_{\Psi_1} = \leq_{\Psi_2}$. Así,

$$[(\omega_1 \models \alpha) \wedge (\omega_2 \models \neg\alpha)] \vee [[(\omega_1, \omega_2 \models \alpha) \vee (\omega_1, \omega_2 \models \neg\alpha)] \wedge [\omega_1 \leq_{\Psi_1} \omega_2]] \quad \Leftrightarrow$$
$$[(\omega_1 \models \beta) \wedge (\omega_2 \models \neg\beta)] \vee [[(\omega_1, \omega_2 \models \beta) \vee (\omega_1, \omega_2 \models \neg\beta)] \wedge [\omega_1 \leq_{\Psi_2} \omega_2]]$$

Luego,

$$\omega_1 \leq_{\Psi_1 \circ \alpha} \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 \leq_{\Psi_2 \circ \beta} \omega_2$$

como queríamos. ∎

Proposición 4.3 *La revisión natural ((R*1)-(R*6) más (CB)) satisface (R*4').*

Demostración: Bastará probar que (CBR) implica (RR*4'). Supongamos que $\Psi_1 = \Psi_2$ y $\alpha \equiv \beta$. Tomemos ω_1 y ω_2 dos mundos cualesquiera. Queremos ver que

$$\omega_1 \leq_{\Psi_1 \circ \alpha} \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 \leq_{\Psi_2 \circ \beta} \omega_2$$

Por hipótesis se tiene que $mod(\alpha) = mod(\beta)$ y que $\leq_{\Psi_1} = \leq_{\Psi_2}$. Por lo tanto, por el lema 3.2, $min(W, \leq_{\Psi_1 \circ \alpha}) = min(mod(\alpha), \leq_{\Psi_1}) =$
$min(mod(\beta), \leq_{\Psi_2}) = min(W, \leq_{\Psi_2 \circ \beta})$

Por (CBR) tenemos que si ω_1 y ω_2 no son minimales para $\leq_{\Psi_2 \circ \beta}$ ni para $\leq_{\Psi_1 \circ \alpha}$ entonces, $\omega_1 \leq_{\Psi_1 \circ \alpha} \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 \leq_{\Psi_1} \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 \leq_{\Psi_2} \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 \leq_{\Psi_2 \circ \beta} \omega_2$.

Pero es claro que si dos preórdenes totales coinciden en los minimales y en los elementos que no son minimales entonces son iguales. Esta observación permite concluir la prueba. ∎

Proposición 4.4 *La revisión SDP satisface (R*4').*

Demostración: Supongamos dos ranking κ_1 y κ_2 idénticos y $\alpha \equiv \beta$. Queremos ver que $(\kappa_1 \bullet \alpha)(\omega_1) \leq (\kappa_1 \bullet \alpha)(\omega_2) \Leftrightarrow (\kappa_2 \bullet \beta)(\omega_1) \leq (\kappa_2 \bullet \beta)(\omega_2)$ para cualquier par de valuaciones ω_1 y ω_2. De la definición del operador de revisión SDP y de las hipótesis obtenemos directamente que $(\kappa_1 \bullet \alpha) = (\kappa_2 \bullet \beta)$. Luego, $(\kappa_1 \bullet \alpha)(\omega_1) \leq (\kappa_1 \bullet \alpha)(\omega_2) \Leftrightarrow (\kappa_2 \bullet \beta)(\omega_1) \leq (\kappa_2 \bullet \beta)(\omega_2)$. Como queríamos. ∎

Booth y Meyer conjeturan que la intención de Darwiche y Pearl era reemplazar (KM4) con (R*4') en lugar de (R*4). en todo caso parece una propiedad muy natural y como acabamos de ver satisfecha por los operadores más conocidos.

Definición 4.1 *El conjunto de postulados del marco AGM-DP al cual se le añade (R*4') se define como el marco RAGM. Precisamente los postulados del marco RAGM se pueden enunciar así:*

(R*1) $B(\Psi \circ \mu) \vdash \mu$.

(R*2) Si $B(\Psi) \wedge \mu$ es consistente, entonces $B(\Psi \circ \mu) \equiv B(\Psi) \wedge \mu$.

(R*3) Si μ es consistente, entonces $B(\Psi \circ \mu)$ es también consistente.

(R*4") Si $\Psi_1 = \Psi_2$, $\mu_1 \equiv \mu_2$ y $\rho_1 \equiv \rho_2$, entonces $B(\Psi_1 \circ \mu_1) \equiv B(\Psi_2 \circ \mu_2)$ y $B(\Psi_1 \circ \mu_1 \circ \rho_1) \equiv B(\Psi_2 \circ \mu_2 \circ \rho_2)$.

(R*5) $B(\Psi \circ \mu) \wedge \phi \vdash B(\Psi \circ (\mu \wedge \phi))$.

(R*6) Si $B((\Psi \circ \mu)) \wedge \phi$ son consistentes, entonces $B((\Psi \circ \mu) \wedge \phi) \vdash B(\Psi \circ (\mu \wedge \phi))$.

Note que (R*4") es equivalente a la conjunción de (R*4) y (R*4').

Definición 4.2 *Sea W el conjunto de todos las valuaciones de un lenguaje proposicional finito L y suponga que el conjunto de creencias asociado a cualquier estado epistémico es una fórmula de L. Una función que envía cada estado epistémico Ψ a un preorden total $\leq_\Psi$ sobre W se llama asignación fiel B-M si, y sólo si:*

1. *Si $\omega_1 \models B(\Psi)$, entonces $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ para cualquier ω_2.*
2. *Si $\omega_1 \models B(\Psi)$ y $\omega_2 \not\models B(\Psi)$, entonces $\omega_1 <_\Psi \omega_2$.*
3. *Si $\Psi = \Phi$ y $\alpha \equiv \beta$ con $\alpha, \beta \in L$, entonces $\leq_\Psi = \leq_\Phi$ y $\leq_{\Psi \circ \alpha} = \leq_{\Phi \circ \mu}$.*

Aquí, $\omega_1 <_\Psi \omega_2$ está definido como $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ y $\omega_2 \not\leq_\Psi \omega_1$.

Teorema 4.1 *Un operador de revisión $\circ$ satisface los postulados (RAGM), si y sólo si, existe una asignación fiel B-M que envía a cada estado espistémico Ψ a un preorden total $\leq_\Psi$ tal que*

$$mod(B(\Psi \circ \mu)) = min(mod(\mu), \leq_\Psi)$$

Demostración: Note que RAGM es AGM-DP + (R*4'). Por otra parte, una asignación fiel B-M es una asignación fiel + la propiedad (RR*4'). Luego el teorema que queremos probar es un corolario inmediato del teorema 3.1 y de la proposición 4.1. ∎

Añadir (R*4') es el primer cambio[2] propuesto por Booth y Meyer. Ellos proponen un segundo cambio. Para verlo recordemos el ejemplo 4.1. Vimos allí que la revisión natural no podía retener la información del color del animal luego de la última información que el animal no era pájaro. El argumento de retener la creencia en el color rojo del animal se basa en el hecho de que la información del color del animal no entra en conflicto con la información del tipo de animal (en este caso particular). En otras palabras, conocer que el animal no es un pájaro no impide que pueda ser de color rojo, es razonable entonces retener la información de que es rojo.

De esta manera Booth y Meyer generalizaron esta situación: cuando una información α es consistente con una revisión por una información β, debería ser retenida si una revisión por α se realiza justo antes que la revisión por β. Formalmente esto es,

(P) Si $B(\Psi \circ \beta) \nvdash \neg\alpha$ entonces $B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta) \vdash \alpha$.

Aplicando (P) al ejemplo 3.1 vemos que si $rojo$ es consistente con $B(\Psi \circ \neg pajaro)$, tenemos que $B((\Psi \circ rojo) \circ \neg pajaro) \vdash rojo$. En cierta forma (P) enfoca la independencia entre nuevas informaciones. La proposición siguiente nos da la caracterización semántica de (P).

Proposición 4.5 *Supongamos que un operador de revisión satisface los postulados (R*1)-(R*6). El operador satisface el postulado (P), si y sólo si, el operador y su correspondiente asignación fiel satisfacen:*

(PR) Si $\omega_1 \in mod(\alpha)$ *y* $\omega_2 \in mod(\neg\alpha)$*, entonces* $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2 \Rightarrow \omega_1 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$

Demostración:
($\Rightarrow$) Supongamos que (P) se cumple y consideremos ω_1 modelo de α y ω_2 modelo de $\neg\alpha$ tales que $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$. Queremos ver que $\omega_1 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$. Consideremos β una fórmula proposicional tal que $mod(\beta) = \{\omega_1, \omega_2\}$. Por el teorema de representación tenemos que $B(\Psi \circ \beta) \nvdash \neg\alpha$ ya que $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$. De (P) se deduce que $B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta) \vdash \alpha$. Afirmamos que $\omega_1 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$. Ya que si $\omega_2 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_1$ tendríamos por el teorema de representación que $\omega_2 \in mod(B((\Psi\circ\alpha)\circ\beta)$, esto implica que $mod(B((\Psi\circ\alpha)\circ\beta) \nsubseteq mod(\alpha)$,

[2]En realidad como ya lo señaláramos, Booth y Meyer proponen simplemente reemplazar (R*4) por (R*4') pero nosotros guardamos (R*4) para poder obtener el teorema 4.1 de una manera bastante simple.

esto es, $B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta) \not\vdash \alpha$. Lo cual es una contradicción.

($\Leftarrow$) Supongamos que (PR) se cumple y que $B(\Psi \circ \beta) \not\vdash \neg\alpha$. Esto implica que existe $\omega_1 \in mod(\alpha) \cap mod(B(\Psi \circ \beta))$, así $\omega_1 \leq_\Psi \omega'$ para todo $\omega' \in mod(\beta)$. Afirmamos que $B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta) \vdash \alpha$. Ya que si $B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta) \not\vdash \alpha$, existiría $\omega_2 \in mod(\neg\alpha) \cap mod(B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta))$. Como $\omega_2 \in mod(B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta))$ por el teorema de representación tenemos que $\omega_2 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega'$ para todo $\omega' \in mod(\beta)$, en particular $\omega_2 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_1$. Pero sabemos que $\omega_1 \models \alpha$, $\omega_2 \not\models \alpha$ y $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ (ya que $\omega_1 \in \text{mín}(mod(\beta), \leq_\Psi)$ y $\omega_2 \in mod(\beta)$ entonces, por (PR), $\omega_1 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$, lo cual es una contradicción. ∎

La condición (PR) requiere que un modelo ω_1 de α que sea al menos igual de plausible que un modelo ω_2 de $\neg\alpha$ deba ser estrictamente más plausible que ω_2 después de una revisión por α del estado epistémico corriente. De esta manera (PR) obliga a ciertos cambios en el preorden $\leq_\Psi$ luego de recibir a α.
Esta condición propuesta por Boooth-Meyer asegura que la nueva información α sea incluida en las creencias con el *arraigamiento mínimo* suficiente para que sea retenido en la revisión que sigue.

Proposición 4.6 *La revisión lexicográfica satisface el postulado (P).*

Demostración: Sabemos, por el teorema 3.5 que la revisión lexicográfica satisface al postulado (R). Pero de (R) se deduce inmediatamente (PR) y por la proposición 4.5 se tiene (P). ∎

Proposición 4.7 *La revisión SDP satisface (P).*

Demostración: Bastará probar que SDP satisface (PR) que por la proposición 4.5 equivale a (P). Consideremos $\omega_1 \in mod(\alpha)$ y $\omega_2 \in mod(\neg\alpha)$ tales que $\omega_1 \leq_\kappa \omega_2$. Queremos ver que $\omega_1 <_{\kappa\bullet\alpha} \omega_2$. Tenemos por definición de la revisión SDP que $(\kappa\bullet\alpha)(\omega_1) = \kappa(\omega_1) - \kappa(\alpha)$ y $\kappa(\omega_2) + 1 = (\kappa\bullet\alpha)(\omega_2)$. Como $\kappa(\omega_1) \leq \kappa(\omega_2)$ claramente $\kappa(\omega_1) - \kappa(\alpha) < \kappa(\omega_2) + 1$, y esto implica por definición del preorden total $\leq_{\Psi\bullet\alpha}$ que $\omega_1 <_{\Psi\bullet\alpha} \omega_2$. ∎

Acabamos de ver que la condición (P) es una propiedad que ya tenían tanto el operador $\bullet$ como el operador lexicográfico. No pasa lo mismo para la revisión natural que claramente no cumple esta condición. Así, adoptando la condición (P) se excluye la revisión natural como un operador de revisión permitido. Por lo tanto, Booth-Meyer incluyeron en sus cambios para el marco (DP) a (P) como postulado, argumentando que era importante no descartar innecesariamente información obtenida previamente a la última información incluída.

Definición 4.3 *Un operador de revisión es Admisible si, y sólo si, satisface RAGM, (C1), (C2), y (P).*

Así como el marco DP puede ser visto, en cuanto a los asignamientos fieles se refiere, como un marco en cual la revisión por una información α, produce que los modelos de la información α se deslicen hacia abajo o no se muevan con respecto a los modelos de $\neg\alpha$ que están al mismo nivel, la revisión admisible asegura vía (PR) que este deslizamiento hacia abajo sea estricto.

Como el operador SDP es un operador de revisión Darwiche y Pearl, además por las proposiciónes 4.4 y 4.7 satisface (R*4') y (P) respectivamente, tenemos que $\bullet$ es un operador de revisión admisible. De la misma manera por las por las proposiciónes 4.2 y 4.6 tenemos que la revisión lexicográfica es un operador admisible.

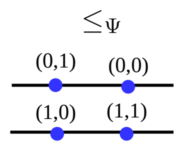
La revisión lexicográfica es entonces el menos conservativo de los operadores de revisión admisibles. Booth y Meyer argumentaron en contra de la revisión lexicográfica enfocándose en el postulado de *Recalcitrancia*. Ya que ésta determina cuándo una información β va ser incluida luego de una revisión previa por otra información α basándose únicamente en la relación lógica entre α y β; el estado espistémico Ψ deja de tener cualquier influencia. Reemplazar el postulado (Rec) por el más débil (P) sí proporciona a Ψ alguna influencia sobre el resultado. Lo que buscan Booth y Meyer es dar al estado epistémico Ψ la mayor influencia permitida por los postulados de revisión admisible. Consiguiendo así más "sensatez" para el agente al momento de realizar varios cambios.

Notemos que la revisión lexicográfica conlleva a que la información más reciente tome completa precedencia sobre la información obtenida previamente. Por lo tanto, cuando la aplicamos al ejemplo 4.1 nos permite mantener la creencia de que el animal previamente creído pájaro es efectivamente rojo, ya que rojo es una información incluida previamente que no entra en conflicto con la información obtenida más reciente.

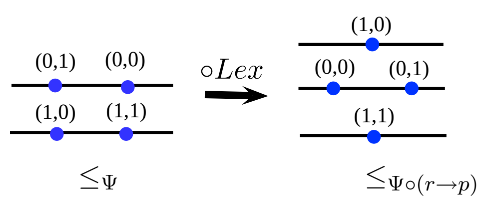
Mientras la anterior era una aproximación a un cambio razonable en las creencias, una adherencia dogmática a la revisión lexicográfica puede traer problemas como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3 *Mientras visitamos un zoológico observamos una criatura que claramente es roja, pero estamos muy lejos para determinar si es un pájaro o es un cuadrúpedo. Entonces adoptamos como nuestro conjunto de creencias a* $B(\Psi) = rojo$*. Al lado de nosotros se encuentra una persona que conoce el lugar que dice que como la criatura es roja, entonces es un pájaro. No tenemos razones para dudar de ella, y por lo tanto adoptamos la creencia* $rojo \rightarrow pajaro$*. Ahora la criatura se acerca a nosotros y se puede ver claramente que no es un pájaro. La pregunta es: ¿Debemos continuar creyendo que es rojo?*

Bajo las circunstancias descritas anteriormente queremos que la observación inicial tome precedencia, y creer que el animal es rojo. Sin embargo la revisión lexicográfica no permite este comportamiento. Consideremos un lenguaje L conformado por dos fórmulas atómicas $r = rojo$ y $p = pajaro$. Nuestro estado espistémico inicial es Ψ donde $B(\Psi) = r$ luce de la siguiente manera:

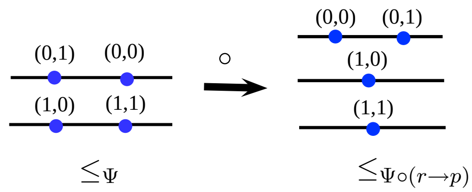


Al revisar por la fórmula $r \rightarrow p$ (la información proporcionada por el experto del zoológico) la revisión lexicográfica toma los modelos de $\neg r \vee p$ y los ordena de la misma forma que lo hace $\leq_\Psi$ por debajo de los modelos de $\neg(\neg r \vee p)$. La siguiente figura ilustra este proceso:



Finalmente al revisar por la fórmula $\neg p$ (la información que indica que la criatura no es pájaro) la revisión lexicográfica toma como conjuntos de creencias al modelo de $\neg p$ más plausible según $\leq_{\Psi \circ (r \rightarrow p)}$. Como $(0,0) <_{\Psi \circ (r \rightarrow p)} (1,0)$ tenemos que $mod(B((\Psi \circ (r \rightarrow p)) \circ \neg p)) = \{(0,0)\}$. Esto es $B((\Psi \circ (r \rightarrow p)) \circ \neg p) \equiv \neg r \wedge \neg p$. Es decir, de la revisión lexicográfica resulta que la criatura ni es pájaro, ni es rojo. Esto es un comportamiento contraintuitivo.

Notemos que usando la condición (P) en éste ejemplo, dependiendo del ordenamiento de los mundos luego de revisar por la fórmula $r \rightarrow p$ se podrá obtener un resultado razonable. Veamos la figura:



Notemos que el operador $\circ$ de la figura cumple con RAGM, (C1), (C2) y (P). Al revisar de nuevo usando la revisión admisible al estado espistémico $\Psi \circ (r \to p)$ por la fórmula $\neg p$ obtendremos que $B((\Psi \circ (r \to p)) \circ \neg p) \equiv r \wedge \neg p$. Es decir concluiremos creyendo que la criatura no es un pájaro pero seguiremos creyendo que es rojo. Lo cual es un razonamiento deseado.
De esta manera la condición (P) permite la posibilidad de retener la creencia de que el animal es rojo, pero no obliga a que esto siempre ocurra.

Anteriormente vimos que el postulado (P) bajo RAGM produce un deslizamiento estricto hacia abajo de los modelos de la nueva información por la que se está revisando en el preorden total asociado al estado espistémico revisado. Sin embargo (P) no nos dice cuánto van a mejorar o deslizar hacia abajo dichos modelos. Dependiendo de este deslizamiento obtendremos un operador de revisión distinto. Ya vimos por ejemplo, que si deslizamos hacia abajo los modelos de la nueva información tanto como nos permita RAGM obtendremos la revisión lexicográfica. Por esta razón Booth-Meyer incluyen otro postulado que compensa este problema determinando exactamente el mejoramiento de la nueva información en el preorden asociado a la revisión.

Para ello, introdujeron la terminología y la notación siguiente:

Definición 4.4 *Dos fórmulas proposicionales α y β son contradictorias respecto a un estado epistémico Ψ, denotado como $\alpha \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$, si, y sólo si, $B(\Psi \circ \alpha) \vdash \neg\beta$ y $B(\Psi \circ \beta) \vdash \neg\alpha$. En tal caso diremos que α y β son Ψ-contradictorias.*

Que $\alpha \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$ significa que, bajo Ψ, α y β tienden a *excluirse* una con otra. Esta relación propuesta por Booth y Meyer tiene ciertas propiedades importantes. Primero notemos que $\leftrightsquigarrow_\Psi$ depende sólo del preorden total asignado a Ψ. En efecto, del teorema de representación tenemos que $\alpha \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$ si, y sólo si, $min(mod(\alpha), \leq_\Psi) \subseteq mod(\neg\beta)$ y $min(mod(\beta), \leq_\Psi) \subseteq mod(\neg\alpha)$. Esto puede reformularse de la siguiente manera, que nos dará una ayuda útil para visualizar la relación de Ψ-contradicción.

Proposición 4.8 *$\alpha \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$ si, y sólo si, existe $\omega' \in mod(\alpha)$ y $\omega'' \in mod(\beta)$ tales que $\omega' <_\Psi \omega$ y $\omega'' <_\Psi \omega$ para todo $\omega \in min(mod(\alpha \wedge \beta), \leq_\Psi)$.*

Demostración: ($\Rightarrow$) Razonemos por el absurdo. Supongamos que $\alpha \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$ y sin pérdida de generalidad, que

$$\forall \omega' \in mod(\alpha) \exists \omega \in min(mod(\alpha \wedge \beta), \leq_\Psi)\ \omega \leq_\Psi \omega'$$

Ahora bien, como $\leq_\Psi$ es un preorden total todos los elementos de $min(mod(\alpha \wedge \beta), \leq_\Psi)$ están en el mismo nivel, el enunciado anterior es equivalente a decir que existe $\omega \in min(mod(\alpha \wedge \beta), \leq_\Psi)$ tal que $\omega \leq_\Psi \omega'$ para todo $\omega' \in mod(\alpha)$. Así $\omega \in min(mod(\alpha), \leq_\Psi)$. Luego, $\omega \in min(mod(\alpha), \leq_\Psi) \cap mod(\beta)$, lo cual es una contradicción ya que por hipótesis $min(mod(\alpha), \leq_\Psi) \subseteq mod(\neg\beta)$. ($\Leftarrow$) Supongamos que existe $\omega' \in mod(\alpha)$ tal que $\omega' <_\Psi \omega$ para todo $\omega \in min(mod(\alpha \wedge \beta), \leq_\Psi)$. Queremos ver que $min(mod(\alpha), \leq_\Psi) \subseteq mod(\neg\beta)$. Supongamos que existe $\omega'' \in min(mod(\alpha), \leq_\Psi)$ tal que $\omega'' \in mod(\beta)$. Así, tenemos que ω'' es también minimal en $mod(\alpha \wedge \beta)$ con respecto a $\leq_\Psi$. Por lo tanto, $\omega' <_\Psi \omega''$. Lo cual contradice la minimalidad de ω'' en $mod(\alpha)$ conrespecto a $\leq_\Psi$.
Mediante un razonamiento análogo se prueba que $min(mod(\beta), \leq_\Psi) \subseteq mod(\neg\alpha)$. ∎

En otras palabras, la proposición 4.8 dice que $\alpha \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$ si y sólo si existe tanto un modelo de α como un modelo de β que son estrictamente más plausibles que los modelos más plausibles de $(\alpha \wedge \beta)$. Otras propiedades inmediatas de $\leftrightsquigarrow_\Psi$ es que es una relación simétrica y que es sintácticamente independiente, es decir, si $\alpha \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$ y $\beta \equiv \beta'$ entonces $\alpha \leftrightsquigarrow_\Psi \beta'$. Más aún, si α y β son lógicamente inconsisentes uno con otro, esto es, $mod(\alpha) \cap mod(\beta) = \emptyset$ en particular $min(mod(\alpha), \leq_\Psi) \subseteq mod(\neg\beta)$ y $min(mod(\beta), \leq_\Psi) \subseteq mod(\neg\alpha)$, luego $\alpha \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$. Sin embargo el hecho de que $\alpha \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$ no implica que α y β no tengan modelos en común. Veamos el siguiente ejemplo:

Notemos que si α, β y γ son fórmulas proposicionales, no es posible tener a la vez que γ sea consistente con β, y que $(\alpha \vee \gamma)$ sea inconsistente con β. Ya que si así fuera tendríamos que $mod(\gamma) \cap mod(\beta) \neq \emptyset$ y $[mod(\alpha) \cup mod(\gamma)] \cap mod(\beta) = [mod(\alpha) \cap mod(\beta)] \cup [mod(\gamma) \cap mod(\beta)] = \emptyset$. Lo cual es una contradicción. Sin embargo el siguiente ejemplo nos mostrará que es posible tener a la vez $\gamma \not\leftrightsquigarrow_\Psi \beta$ (γ y β no son Ψ-contradictorias) y $(\alpha \vee \gamma) \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$.

Ejemplo 4.4 *Consideremos al lenguaje proposicional L generado por tres fórmulas atómicas $\{p, q, s\}$ (en ese orden serán consideradas las valuaciones). Tomemos $\alpha = p$, $\beta = q$ y $\gamma = r$. Y tomemos $\leq_\Psi$ tal que su menor nivel contenga sólo a las dos valuaciones (0,1,0) y (1,0,0), y el nivel siguiente sólo contenga la valuación (1,1,1). Tenemos entonces:*

$mod(\alpha) = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1),(1,0,0)\}$
$mod(\beta) = \{(0,1,0),(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$
$mod(\gamma) = \{(0,0,1),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,1)\}$
$mod(\neg\beta) = \{(1,0,1),(0,0,0),(1,0,0),(0,0,1)\}$
$mod(\neg\gamma) = \{(1,1,0),(1,0,0),(0,0,0),(0,1,0)\}$
$mod(\neg\alpha) = \{(0,1,1),(0,0,1),(0,1,0),(0,0,0)\}$
$mod(\neg\alpha \wedge \neg\gamma) = \{(0,0,0),(0,1,0)\}$

Notemos que $min(mod(\gamma), \leq_\Psi) = \{1,1,1\}$, así $min(mod(\gamma), \leq_\Psi) \nsubseteq mod(\neg\beta)$. Además $min(mod(\alpha\vee\gamma), \leq_\Psi) = \{(1,0,0)\}$ y $min(mod(\beta), \leq_\Psi) = \{(0,1,0)\}$ así $min(mod(\alpha\vee\gamma), \leq_\Psi) \subseteq mod(\neg\beta)$ y $min(mod(\beta), \leq_\Psi) \subseteq mod(\neg\alpha \wedge \neg\gamma)$. Luego, $\gamma \not\leftrightsquigarrow_\Psi \beta$ y $(\alpha \vee \gamma) \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$.

Por lo tanto la relación $\leftrightsquigarrow_\Psi$ puede ser vista como un debilitamiento de la inconsistencia lógica.

Antes de ver otro resultado que nos proporciona dos propiedades más de $\leftrightsquigarrow_\Psi$ veamos una propiedad bien conocida de los operadores de revisión y dos pequeños corolarios:

Proposición 4.9 (Tricotomía) *Sea $\circ$ un operador RAGM. Entonces para cualesquiera λ y μ*

$$B(\Psi \circ (\lambda \vee \mu)) \equiv \begin{cases} B(\Psi \circ \lambda) \\ B(\Psi \circ \mu) \\ B(\Psi \circ \lambda) \vee B(\Psi \circ \mu) \end{cases}$$

Demostración: Es bastante fácil ver que $min(mod(\lambda) \vee mod(\mu), \leq_\Psi)$ es o bien $min(mod(\lambda), \leq_\Psi)$ o bien $min(mod(\mu), \leq_\Psi)$ o bien $min(mod(\lambda), \leq_\Psi) \cup min(mod(\mu), \leq_\Psi)$. De donde se obtiene el resultado por la representación. ∎

Como corolarios inmediatos de la propiedad de tricotomía tenemos

Corolario 4.1 *Sea $\circ$ un operador RAGM. Entonces para cualesquiera λ y μ*

$$B(\Psi \circ (\lambda \vee \mu)) \vdash B(\Psi \circ \lambda) \vee B(\Psi \circ \mu)$$

Corolario 4.2 *Sea $\circ$ un operador RAGM. Entonces para cualesquiera λ y μ*

$$B(\Psi \circ \lambda) \vdash B(\Psi \circ (\lambda \vee \mu)) \quad \textit{o bien} \quad B(\Psi \circ \mu) \vdash B(\Psi \circ (\lambda \vee \mu))$$

Proposición 4.10 *Sea $\circ$ un operador RAGM. Entonces la siguientes propiedades se cumplen:*

1. *Si $\alpha \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$ y $\gamma \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$, entonces $(\alpha \vee \gamma) \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$.*
2. *Si $\alpha \not\leftrightsquigarrow_\Psi \beta$ y $\gamma \not\leftrightsquigarrow_\Psi \beta$, entonces $(\alpha \vee \gamma) \not\leftrightsquigarrow_\Psi \beta$.*

Demostración:

1. Supongamos que $\alpha \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$ y $\gamma \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$. Para mostrar que $(\alpha \vee \gamma) \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$ necesitamos mostrar (i) $B(\Psi \circ (\alpha \vee \gamma)) \vdash \neg\beta$ y (ii) $B(\Psi \circ \beta) \vdash \neg(\alpha \vee \gamma)$. Para probar (i), sabemos por hipótesis que $B(\Psi \circ \alpha) \vdash \neg\beta$ y que $B(\Psi \circ \gamma) \vdash \neg\beta$. Esto equivalente a que $(B(\Psi \circ \alpha) \vee B(\Psi \circ \gamma)) \vdash \neg\beta$. Por el corolario 4.1 tenemos entonces que $B(\Psi \circ (\alpha \vee \gamma)) \vdash \neg\beta$. Ahora verifiquemos (ii). Por hipótesis tenemos $B(\Psi \circ \beta) \vdash \neg\alpha$ y $B(\Psi \circ \beta) \vdash \neg\gamma$. Así tenemos que $B(\Psi \circ \beta) \vdash (\neg\alpha \wedge \neg\gamma)$ y esto es equivalente a (ii).

2. Supongamos que $\alpha \not\leftrightsquigarrow_\Psi \beta$ y $\gamma \not\leftrightsquigarrow_\Psi \beta$.

   Vamos a considerar tres casos:

   (Caso 1) $B(\Psi \circ \beta) \nvdash \neg\alpha$.

   Por el teorema de representación tenemos que $min(mod(\beta), \leq_\Psi) \nsubseteq mod(\neg\alpha)$. En particular $min(mod(\beta), \leq_\Psi) \nsubseteq mod(\neg\alpha) \cap mod(\neg\gamma)$, esto implica que $B(\Psi \circ \beta) \nvdash \neg(\alpha \vee \gamma)$ luego $(\alpha \vee \gamma) \not\leftrightsquigarrow_\Psi \beta$. Como queríamos.

   (Caso 2) $B(\Psi \circ \beta) \nvdash \neg\gamma$.

   Por un razonamiento análogo al caso anterior obtenemos que $(\alpha \vee \gamma) \not\leftrightsquigarrow_\Psi \beta$. Como queríamos.

   (Caso 3) $B(\Psi \circ \beta) \vdash \neg\alpha$ y $B(\Psi \circ \beta) \vdash \neg\gamma$.

   Recordemos que por hipótesis tenemos $\alpha \not\leftrightsquigarrow_\Psi \beta$ y $\gamma \not\leftrightsquigarrow_\Psi \beta$. Esto con las hipótesis del caso que estamos tratando nos dice que necesariamente ocurre $B(\Psi \circ \alpha) \nvdash \neg\beta$ y $B(\Psi \circ \gamma) \nvdash \neg\beta$. Luego por el corolario 4.2 tenemos que $B(\Psi \circ (\alpha \vee \gamma)) \nvdash \neg\beta$. Luego en este caso también tenemos que $(\alpha \vee \gamma) \not\leftrightsquigarrow_\Psi \beta$. Como queríamos. ∎

La primera propiedad de la proposición 3.10 nos dice que si una fórmula β es Ψ-contradictoria con otras dos fórmulas por separado, entonces β es es Ψ-contradictoria con su disjunción, mientras la segunda propiedad nos dice que β no puede ser Ψ-contradictoria con una disjunción sin ser Ψ-contradictoria con al menos una de las fórmulas que conforman esa disjunción.

Ya conociendo la relación $\leftrightsquigarrow_\Psi$ y sus propiedades más reelevantes, podemos introducir una nueva condición propuesta por Booth y Meyer.

(D) Si $\alpha \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$, entonces $B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta) \vdash \neg\alpha$.

Esta nueva condición requiere que cuando α y β son Ψ-contradictorias, $\neg\alpha$ resulta de una revisión por α seguida de una revisión por β. Esto es, cuando se realiza la revisión por β del estado epistémico $\Psi \circ \alpha$, la información que se tenía en Ψ (que dado β implicaba $\neg\alpha$) toma precedencia sobre la información obtenida en $\Psi \circ \alpha$.

Esa condición tiene una contraparte semántica como lo establece el teorema siguiente:

Teorema 4.2 *Supongamos que un operador de revisión $\circ$ satisface los postulados RAGM. Entonces $\circ$ satisface el postulado (D), si y sólo si, $\circ$ y su correspondiente asignación fiel satisfacen:*

(DR) Si $\omega_1 \in mod(\neg\alpha)$, $\omega_2 \in mod(\alpha)$ y $\omega_2 \notin mod(B(\Psi \circ \alpha))$, entonces, $\omega_1 <_\Psi \omega_2 \Rightarrow \omega_1 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$.

Demostración:
($\Rightarrow$) Supongamos que (D) se cumple y consideremos $\omega_1 \in mod(\neg\alpha)$, $\omega_2 \in mod(\alpha)$, $\omega_2 \notin mod(B(\Psi\circ\alpha))$ tales que $\omega_1 <_\Psi \omega_2$. Queremos ver que $\omega_1 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$. Tomemos a β una fórmula tal que $mod(\beta) = \{\omega_1, \omega_2\}$. Entonces tenemos que $min(mod(\beta), \leq_\Psi) \subseteq mod(\neg\alpha)$, esto es, $B(\Psi \circ \beta) \vdash \neg\alpha$. Además como $\omega_2 \notin min(mod(\alpha), \leq_\Psi)$ tenemos que $min(mod(\alpha), \leq_\Psi) \subseteq mod(\neg\beta)$, esto es $B(\Psi \circ \alpha) \vdash \neg\beta$. Así $\alpha \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$. Luego de (D) se deduce que $B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta) \vdash \neg\alpha$. Afirmamos ahora que $\omega_1 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$. Ya que si ocurre lo contrario, es decir $\omega_2 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_1$ entonces $\omega_2 \in min(\{\omega_1, \omega_2\}, \leq_{\Psi\circ\alpha})$ y como mod $(\beta) = \{\omega_1, \omega_2\}$ tendríamos que $\omega_2 \in mod(B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta))$. Pero como $\omega_2 \in mod(\alpha)$ tendríamos que $B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta) \nvdash \neg\alpha$. Lo cual es una contradicción.

($\Leftarrow$) Supongamos que (DR) se cumple y supongamos además que $B(\Psi \circ \alpha) \vdash \neg\beta$ y $B(\Psi\circ\beta) \vdash \neg\alpha$. Queremos ver que $B((\Psi\circ\alpha)\circ\beta) \vdash \neg\alpha$. Supongamos lo contrario, es decir $B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta) \nvdash \neg\alpha$. Esto implica que existe $\omega \in mod(\alpha)$ que también está en $mod(B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta))$. En particular, $\omega \in mod(\alpha) \cap mod(\beta)$. Como $\omega \in mod(\beta)$ y $mod(B(\Psi\circ\alpha)) \subseteq mod(\neg\beta)$ tenemos que $\omega \notin mod(B(\Psi\circ\alpha))$. Por el teorema de representación tenemos que $\omega \notin min(mod(\alpha), \leq_\Psi)$. Ahora bien, notemos que $\omega \not\models B(\Psi\circ\beta)$ ya que $\omega \in mod(\alpha)$ y $mod(B(\Psi \circ \beta)) \subseteq mod(\neg\alpha)$. Esto es, $\omega \notin min(mod(\beta), \leq_\Psi)$.

Por lo tanto, existe $\omega' \in mod(\beta) \cap mod(\neg\alpha)$ tal que $\omega' <_\Psi \omega$. De esta manera tenemos $\omega' \in mod(\neg\alpha)$, $\omega \in mod(\alpha)$, $\omega \notin mod(B(\Psi \circ \alpha))$ y $\omega' <_\Psi \omega$. Luego de (DR) obtenemos que $\omega' <_{\Psi\circ\alpha} \omega$, lo cual implica que $\omega \notin mod(B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta))$, lo cual es una contradicción. ∎

La condición (DR) reduce el aumento de plausibilidad de los modelos de α después de una revisión por α. Asegura que, a excepción de los modelos más plausibles de α, el ordenamiento relativo entre los modelos de $\neg\alpha$ más plausibles que los modelos de α no cambie.

Booth y Meyer decidieron reforzar los requerimientos de la revisión admisible (aquellos operadores que satisfacen RAGM, (C1), (C2) y (P)) insistiendo que la condición (D) debe ser también satisfecha.

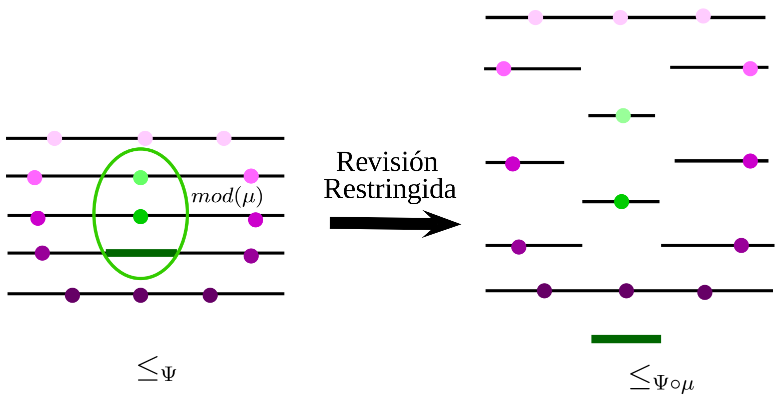
4.3. Revisión Restringida

Observando las contrapartes semánticas de (C1), (C2), (P) y (D), notamos que estas definen completamente, respecto al preorden asociado a la revisión, cómo van a estar ordenados los modelos y los no modelos de la nueva información entre ellos mismos respectivamente ((CR1) y (CR2)), y cuánto van mejorar los modelos de la nueva información respecto a los no modelos ((PR) y (DR)).

De esta manera Booth y Meyer definieron el siguiente operador de revisión:

Definición 4.5 *Un operador de revisión que satisface RAGM, (C1), (C2), (PR) y (DR) será llamado operador de revisión restringida.*

La siguiente gráfica ilustra el comportamiento de un operador de revisión restringida:



La condición que veremos a continuación proporciona un orden único sobre las valuaciones que no están en los minimales de $\leq_{\Psi\circ\alpha}$ ya caracterizados por RAGM como $min(mod(\alpha), \leq_\Psi)$.

(RR) $\forall \omega_1, \omega_2 \not\models B(\Psi \circ \alpha)$, $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1 <_\Psi \omega_2 \quad \text{o bien} \\ (\omega_1 \leq_\Psi \omega_2) \wedge ((\omega_1 \models \alpha) \vee (\omega_2 \models \neg\alpha)) \end{cases}$

Es importante resaltar que en la segunda condición (que es una conjunción), el segundo factor es una disyunción. Así, (RR) nos dice que el orden relativo de las valuaciones que no están en $min(W, \leq_{\Psi\circ\alpha})$ no cambia, excepto por los modelos de α y los modelos de $\neg\alpha$ que están en el mismo nivel de plausibilidad; los cuales son divididos en dos niveles con los modelos de α más plausibles que los modelos de $\neg\alpha$. Por lo tanto RAGM combinado con (RR) construye un ordenamiento único de las valuaciones después de la revisión.

Proposición 4.11 *Sea $\circ$ un operador de revisión que satisface RAGM. Entonces, $\circ$ satisface (RR) si, y sólo si, $\circ$ satisface (CR1), (CR2), (PR) y (DR).*

Demostración: $(\Rightarrow)$:

1. (RR)$\Rightarrow$(CR1).

   Tomemos $\omega_1, \omega_2 \in mod(\alpha)$. Queremos ver que $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$. Asumamos primero $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ y verifiquemos que $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$.

   Se dan 2 casos:

   Caso 1: $\omega_1 \in mod(B(\Psi \circ \alpha))$.

   Por el lema 3.2 tenemos directamente que $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$.

Caso 2: $\omega_1 \notin mod(B(\Psi \circ \alpha))$.

Por el teorema de representación tenemos que existe $\omega' \in mod(\alpha)$ tal que $\omega' <_\Psi \omega_1$. Como $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ tenemos de nuevo por el teorema de representación que $\omega_2 \notin mod(B(\Psi \circ \alpha))$. Luego directamente de la definición de (RR) obtenemos que $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$. Como queríamos.

Ahora suponga que $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$ y verifiquemos que $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$. Como antes consideramos dos casos:

Caso 1: $\omega_1 \in mod(B(\Psi \circ \alpha))$

En este caso, por el teorema de representación, es immediato que $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$.

Caso 2: $\omega_1 \notin mod(B(\Psi \circ \alpha))$.

Por el lema 3.2 junto con las hipótesis que tenemos nos dice que $\omega_2 \notin mod(B(\Psi \circ \alpha))$. En efecto si no fuera así tendríamos $\omega_2 \in mod(B(\Psi \circ \alpha))$, lo cual por el lema 3.2 nos dice que $\omega_2 \in min(W, \leq_{\Psi\circ\alpha})$, luego $\omega_2 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_1$, lo cual es una contradicción. Entonces tenemos que ambos ω_1 y ω_2 no son modelos de $B(\Psi\circ\alpha)$ así por (RR) tenemos que $\omega_1 <_\Psi \omega_2$ o bien $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$. Lo cual claremente implica $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$.

2. (RR)$\Rightarrow$(CR2).

   Tomemos $\omega_1, \omega_2 \in mod(\neg\alpha)$.Queremos ver que $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$. Asumamos primero $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ y verifiquemos que $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$.

   Tenemos por el teorema de representación que $\omega_1, \omega_2 \notin mod(B(\Psi \circ \alpha))$. Luego, directamente de la definición de (RR) obtenemos que $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$. Como queríamos.

   Ahora suponga que $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$ y verifiquemos que $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$. Como antes tenemos que $\omega_1, \omega_2 \notin mod(B(\Psi \circ \alpha))$. Luego por la condición (RR), $\omega_1 <_\Psi \omega_2$ o bien $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$. Lo cual claremente implica $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$.

3. (RR)$\Rightarrow$(PR). Usando el hecho que los preórdenes de la asignación fiel son preórdenes totales, (RR) se puede reescribir (negando ambos lados de la equivalencia) de la siguiente manera:

   (RR') $\forall \omega_1, \omega_2 \not\models B(\Psi \circ \alpha)$, $\omega_1 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_2 \Leftrightarrow [\omega_1 \leq_\Psi \omega_2] \wedge [(\omega_1 <_\Psi \omega_2) \vee ((\omega_1 \models \alpha) \wedge (\omega_2 \models \neg\alpha))]$

   Ahora bien, tomemos $\omega_1 \in mod(\alpha)$ y $\omega_2 \in mod(\neg\alpha)$ y supongamos que $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$. Queremos ver que $\omega_1 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$.

Se dan dos casos:

(Caso 1) $\omega_1 \in mod(B(\Psi \circ \alpha))$.

Por el lema 3.2 y el hecho que $\omega_2 \in mod(\neg\alpha)$, tenemos directamente que $\omega_1 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$.

(Caso 2) $\omega_1 \notin mod(B(\Psi \circ \alpha))$.

Notemos que $\omega_2 \notin mod(B(\Psi \circ \alpha))$. Luego aplicando (RR') obtenemos directamente que $\omega_1 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$.

4. (RR)$\Rightarrow$(DR).

   Tomemos $\omega_1 \in mod(\neg\alpha)$, $\omega_2 \in mod(\alpha)$ y $\omega_2 \notin mod(B(\Psi \circ \alpha))$. Como por el teorema de representación $\omega_1 \notin mod(B((\Psi \circ \alpha))$. Aplicando (RR') obtenemos directamente que si $\omega_1 <_\Psi \omega_2$ entonces $\omega_1 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$. Que era lo que queríamos probar.

($\Leftarrow$) Supongamos que (CR1), (CR2), (PR), (DR) se cumplen. Sean ω_1, ω_2 tales que $\omega_1, \omega_2 \notin mod(B(\Psi \circ \alpha))$. queremos ver

$$\omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2 \Leftrightarrow [\omega_1 <_\Psi \omega_2] \vee [(\omega_1 \leq_\Psi \omega_2) \wedge ((\omega_1 \models \alpha) \vee (\omega_2 \models \neg\alpha))]$$

Probemos primero que:
$\omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2 \Rightarrow [\omega_1 <_\Psi \omega_2] \vee [(\omega_1 \leq_\Psi \omega_2) \wedge ((\omega_1 \models \alpha) \vee (\omega_2 \models \neg\alpha))]$

Para esto supongamos que $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$ y $\omega_2 \leq_\Psi \omega_1$ (es decir, $\omega_1 \not<_\Psi \omega_2$). Veamos entonces que $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ y que o bien $\omega_1 \in mod(\alpha)$, o bien $\omega_2 \in mod(\neg\alpha)$.

Supongamos que pasa lo contrario de lo que queremos, es decir $\omega_2 <_\Psi \omega_1$ o es el caso que $\omega_1 \in mod(\neg\alpha)$ y $\omega_2 \in mod(\alpha)$.

Afirmamos que ésta suposición no es posible. En efecto, primero supongamos que $\omega_1 \in mod(\neg\alpha)$ y $\omega_2 \in mod(\alpha)$. La hipótesis $\omega_2 \leq_\Psi \omega_1$ junto a (PR) implican que $\omega_2 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_1$. Lo cual es una contradicción.

Por otra parte, si $\omega_2 <_\Psi \omega_1$, tenemos 4 casos posibles:

(Caso 1) $\omega_1, \omega_2 \in mod(\alpha)$.

Por la condición (CR1) obtendríamos que $\omega_2 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_1$. Lo cual es una contradicción.

(Caso 2) $\omega_1, \omega_2 \in mod(\neg\alpha)$.

Por la condición (CR2) obtendríamos que $\omega_2 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_1$. Lo cual es una contradicción.

(Caso 3) $\omega_1 \in mod(\alpha)$ y $\omega_2 \in mod(\neg\alpha)$.

Como $\omega_1 \not\models B(\Psi \circ \alpha)$, de la condición (DR) obtendríamos que $\omega_2 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_1$. Lo cual es una contradicción.

(Caso 4) $\omega_1 \in mod(\neg\alpha)$ y $\omega_2 \in mod(\alpha)$.

Por la condición (PR) obtendríamos que $\omega_2 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_1$. Lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $\omega_2 <_{\Psi} \omega_1$ no es posible.

Ahora probemos que:

$[\omega_1 <_{\Psi} \omega_2] \vee [(\omega_1 \leq_{\Psi} \omega_2) \wedge ((\omega_1 \models \alpha) \vee (\omega_2 \models \neg\alpha))] \Rightarrow \omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$

Esto es equivalente a mostrar:

1. $\omega_1 <_{\Psi} \omega_2 \Rightarrow \omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$
2. $(\omega_1 \leq_{\Psi} \omega_2) \wedge ((\omega_1 \models \alpha) \vee (\omega_2 \models \neg\alpha)) \Rightarrow \omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$

Verifiquemos 1. Supongamos que $\omega_1 <_{\Psi} \omega_2$. Se dan 4 casos posibles:

(Caso 1) $\omega_1, \omega_2 \in mod(\alpha)$.

Se deduce directamente de (CR1) que $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$.

(Caso 2) $\omega_1, \omega_2 \in mod(\neg\alpha)$.

Se deduce directamente de (CR2) que $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$.

(Caso 3) $\omega_1 \in mod(\alpha)$ y $\omega_2 \in mod(\neg\alpha)$.

Se deduce de (PR) que $\omega_1 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$. En particular, $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$.

(Caso 4) $\omega_1 \in mod(\neg\alpha)$ y $\omega_2 \in mod(\alpha)$.

Se deduce de (DR) que $\omega_1 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$. En particular, $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$. Como queríamos.

Ahora verifiquemos 2. Supongamos que $(\omega_1 \leq_{\Psi} \omega_2) \wedge ((\omega_1 \models \alpha) \vee (\omega_2 \models \neg\alpha))$. Se dan dos casos posibles:

(Caso 1) $(\omega_1 \leq_{\Psi} \omega_2) \wedge (\omega_1 \models \alpha)$.

Si $\omega_2 \in mod(\alpha)$ por la condición (CR1) tenemos que $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$. En cambio si $\omega_2 \in mod(\neg\alpha)$ entonces por (PR) obtenemos que $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$. Como queríamos

(Caso 2) $(\omega_1 \leq_{\Psi} \omega_2) \wedge (\omega_2 \models \neg\alpha)$

Si $\omega_1 \in mod(\neg\alpha)$ por la condición (CR2) tenemos que $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$. En cambio si $\omega_1 \in mod(\alpha)$ entonces la condición (PR) nos asegura que $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$. Como queríamos. ∎

Esencialmente como corolario del teorema anterior tenemos lo siguiente

Teorema 4.3 *Sea $\circ$ un operador de revisión que satisface RAGM. Entonces el operador y su correspondiente asignación fiel B-M satisfacen (RR) si, y sólo si, $\circ$ es un operador de revisión restringida.*

Demostración: La prueba se obtiene como corolario de la proposición 4.11 del teorema 4.2, de la proposición 4.5 y del teorema 3.3. ∎

Otra interpretación de (RR) es que mantiene el orden relativo entre las valuaciones que no son minimales en $\leq_{\Psi\circ\alpha}$, excepto por lo cambios impuesto por (PR) entre $\leq_{\Psi}$ y $\leq_{\Psi\circ\alpha}$. De esta manera la revisión restringida es el operador de revisión admisible más conservativo, en el sentido que efectúa el mínimo de cambios posibles en el ordenamiento relativo de las valuaciones permitidos por la revisión admisible. Así, en el contexto de la revisión admisible, la revisión restringida toma el lugar de la revisión natural en los operadores de Darwiche y Pearl.

4.3.1. Propiedades de la Revisión restringida

La revisión restringida cuenta con varias propiedades interesantes y muy importantes. Comencemos analizando una propiedad estructural interesante subyacente en el ejemplo 4.3. En éste $B(\Psi)$ es consistente con cada una de las fórmulas en la secuencia de iteraciones. Además las fórmulas de la secuencia de iteraciones son inconsistentes una con otra. Finalmente la información contenida en el conjuntoo de creencias inicial $B(\Psi)$ es retenida luego de la iteración de revisiones por dichas fórmulas. Esta particularidad es un caso de un resultado general muy importante.

Denotemos Γ la sucesión no vacía de informaciones (fórmulas) $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, y denotemos por $\Psi \circ \Gamma$ la revisión iterada $\Psi \circ \gamma_1 \circ \ldots \circ \gamma_n$,donde la notación es por convención (y por necesidad) asociativa a la izquierda. Además nos referiremos a todo estado epistémico Ψ tal que $B(\Psi) \nvdash \neg\gamma_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ como Γ-compatible. Veamos el siguiente postulado:

(O) Si Ψ es Γ-compatible entonces, $B(\Psi \circ \Gamma) \vdash B(\Psi)$.

La propiedad (O) dice que mientras $B(\Psi)$ no entre en conflicto directo con cualquiera de las informaciones entrantes $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, todas las creencias de $B(\Psi)$ tendrán que propagarse al conjunto de creencias resultante de la revisión iterada $\Psi \circ \gamma_1 \circ \ldots \circ \gamma_n$. Esta es una propiedad de preservación de información que es satisfecha por la revisión restringida como lo establece la proposición siguiente.

Proposición 4.12 *La revisión restringida satisface (O).*

Demostración: Denotemos por $\Psi \circ \Gamma_i$, para $i = 0 \ldots n$, a la revisión iterada $\Psi \circ \gamma_1 \circ \ldots \circ \gamma_i$ (con $\Psi \circ \Gamma_0 = \Psi$). Aplicando inducción sobre i mostraremos que:

$$\forall i \in \{0 \ldots n\} \; \forall \omega_1 \in mod(B(\Psi)) \; \forall \omega_2 \notin mod(B(\Psi)) \quad (\omega_1 <_{\Psi \circ \Gamma_i} \omega_2 \;) \quad (*)$$

En otras palabras mostraremos que todo modelo de $B(\Psi)$ está siempre estrictamente debajo de los modelos de $\neg B(\Psi)$ con respecto al preorden $\leq_{\Psi \circ \Gamma_i}$, y como $B(\Psi)$ tiene modelos en común con γ_i para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, obtendremos que $min(mod(\gamma_{i+1}), \leq_{\Psi \circ \Gamma_i}) \subset mod(B(\Psi))$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. En efecto, si no fuera el caso tendríamos $min(mod(\gamma_{i+1}), \leq_{\Psi \circ \Gamma_i}) \cap$ $mod(\neg B(\Psi)) \neq \emptyset$. Así, podemos tomar $\omega' \in min(mod(\gamma_{i+1}), \leq_{\Psi \circ \Gamma_i}) \cap mod(\neg B(\Psi))$ y $\omega \in mod(\gamma_{i+1}) \cap mod(B(\Psi)))$. Como tenemos $\omega' \notin mod(B(\Psi))$ y $\omega \in mod(B(\Psi))$, se deduce de $(*)$ que $\omega <_{\Psi \circ \Gamma_i} \omega'$, lo que contradice la minimalidad de ω'. Así tenemos $B(\Psi \circ \gamma) \vdash B(\Psi)$. Que es lo que queremos probar.

Ahora probemos la propiedad $(*)$. Supongamos que $\omega_1 \in mod(B(\Psi))$ y $\omega_2 \notin mod(B(\Psi))$.

Para el caso $i = 0$. Queremos mostrar que $\omega_1 <_\Psi \omega_2$. Lo cual es una consecuencia directa del lema 3.2.

Ahora supongamos que $\omega_1 <_{\Psi \circ \Gamma_i} \omega_2$. Queremos ver que $\omega_1 <_{\Psi \circ \Gamma_{i+1}} \omega_2$.

Se dan 4 casos:

(Caso 1) $\omega_1, \omega_2 \in mod(\gamma_{i+1})$. Por la condición (CR1) tenemos que $\omega_1 <_{\Psi \circ \Gamma_{i+1}} \omega_2$. Como queríamos.

(Caso 2) $\omega_1, \omega_2 \in mod(\neg\gamma_{i+1})$. Por la condición (CR2) tenemos que $\omega_1 <_{\Psi \circ \Gamma_{i+1}} \omega_2$. Como queríamos.

(Caso 3) $\omega_1 \in mod(\gamma_{i+1})$, $\omega_2 \in mod(\neg\gamma_{i+1})$. Por la condición (PR) tenemos que $\omega_1 <_{\Psi \circ \Gamma_{i+1}} \omega_2$. Como queríamos.

(Caso 4) $\omega_1 \in mod(\neg\gamma_{i+1})$, $\omega_2 \in mod(\gamma_{i+1})$.

Por la Γ-compatibilidad existe $\omega' \in mod(B(\Psi)) \cap mod(\gamma_{i+1})$. Así por la hipótesis inductiva tenemos que $\omega' <_{\Psi \circ \Gamma_i} \omega_2$, por lo tanto $\omega_2 \notin min(mod(\gamma_{i+1}), \leq_{\Psi \circ \Gamma_i})$ luego por el teorema de representación $\omega_2 \notin B(\Psi \circ \Gamma_{i+1})$, y por la condición (DR) tenemos que $\omega_1 <_{\Psi\circ\Gamma_{i+1}} \omega_2$. Como queríamos.

A pesar de que la revisión restringida preserva información que no es directamente contradictoria con nueva información entrante, no está dogmáticamente atada a información no reciente. Si dos estados epistémicos sucesivos incosistentes uno con el otro, tiene conflicto con alguna de las informaciones de una sucesión $\Gamma = \gamma_1, \ldots \gamma_n$, la revisión restringida prefiere el estado espistémico más reciente luego de la revisión por Γ. La siguiente proposición enuncia esta propiedad más formalmente.

Proposición 4.13 *La revisión restringida satisface la siguiente propiedad:*

(Q) Si Ψ y $\Psi \circ \alpha$ son ambos Γ-compatibles pero $mod(B(\Psi)) \cap mod(B(\Psi \circ \alpha)) = \emptyset$, entonces $B((\Psi \circ \alpha) \circ \Gamma) \vdash B(\Psi \circ \alpha)$ y $B(\Psi \circ \alpha \circ \Gamma) \nvdash B(\Psi)$.

Demostración: Supongamos Ψ y $\Psi \circ \alpha$ Γ-compatibles y $mod(B(\Psi)) \cap mod(B(\Psi \circ \alpha)) = \emptyset$. Queremos ver que $B((\Psi \circ \alpha) \circ \Gamma) \vdash B(\Psi \circ \alpha)$ y $B(\Psi \circ \alpha \circ \Gamma) \nvdash B(\Psi)$.

Como $\Psi \circ \alpha$ es Γ-compatible tenemos por la proposición 4.12 que $B((\Psi \circ \alpha) \circ \Gamma) \vdash B(\Psi \circ \alpha)$. Y como $mod(B(\Psi)) \cap mod(B(\Psi \circ \alpha)) = \emptyset$ y $B(\Psi \circ \alpha \circ \Gamma)$ es consistente, tenemos que $B(\Psi \circ \alpha \circ \Gamma) \nvdash B(\Psi)$ ya que si no $mod(B(\Psi \circ \alpha \circ \Gamma)) \subseteq mod(B(\Psi \circ \alpha)) \cap mod(B(\Psi))$, lo cual es una contradicción (un conjunto no vacío no puede estar contenido en el conjunto vacío). ∎

Booth y Meyer definieron ciertas propiedades para poder llegar a una caracterización sintáctica más compacta de la revisión restringida. Ellas aparecen en la siguiente proposición.

Proposición 4.14 *Sea $\circ$ un operador que satisface RAGM,*

1. *(C1) y (P) juntos, son equivalentes a la regla*

   (C1P) Si $B(\Psi \circ \beta) \nvdash \neg\alpha$ entonces $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \equiv B(\Psi \circ (\alpha \wedge \beta))$

2. *(C2) y (D) juntos, son equivalentes a la regla*

   (C2D) Si $\alpha \leftrightsquigarrow_{\Psi} \beta$, entonces $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \equiv B(\Psi \circ \beta)$.

Demostración:
($\Rightarrow$) Supongamos que se cumplen (C1) y (P), y que $B(\Psi \circ \beta) \nvdash \neg\alpha$. De (P) se deduce que $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \vdash \alpha$, que por RAGM implica que $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \equiv B(\Psi \circ \alpha \circ (\alpha \wedge \beta))$. Por (C1) se tiene que $B(\Psi \circ \alpha \circ (\alpha \wedge \beta)) \equiv B(\Psi \circ (\alpha \wedge \beta))$ (Ya que $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$). Por lo tanto $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \equiv B(\Psi \circ (\alpha \wedge \beta))$. Como queríamos.

($\Leftarrow$) Supongamos que (C1P) se cumple.

Veamos primero que (C1) se cumple. Para esto supongamos que $\beta \vdash \alpha$, es decir $mod(\beta) \subseteq mod(\alpha)$. Así tenemos que $min(mod(\beta), \leq_\Psi) \nsubseteq mod(\neg\alpha)$ es decir, $B(\Psi \circ \beta) \nvdash \neg\alpha$ y por (C1P) tenemos que $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \equiv B(\Psi \circ (\alpha \wedge \beta))$. Pero $\beta \vdash \alpha$, así $\beta \equiv \alpha \wedge \beta$, luego $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \equiv B(\Psi \circ \beta)$ por RAGM. Como queríamos.

Para ver (P), supongamos que $B(\Psi \circ \beta) \nvdash \neg\alpha$. Luego por (C1P) tenemos que $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \equiv B(\Psi \circ (\alpha \wedge \beta))$ que por RAGM implica claramente que $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \vdash \alpha$.

($\Rightarrow$) Supongamos que se cumplen (C2) y (D), y que $\alpha \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$. De (D) se deduce que $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \vdash \neg\alpha$, que por RAGM implica que $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \equiv B(\Psi \circ \alpha \circ (\neg\alpha \wedge \beta))$. Por (C2) se deduce que $B(\Psi \circ \alpha \circ (\neg\alpha \wedge \beta)) \equiv B(\Psi \circ (\neg\alpha \wedge \beta))$ (ya que $\neg\alpha \wedge \beta \vdash \neg\alpha$). Por lo tanto $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \equiv B(\Psi \circ (\neg\alpha \wedge \beta))$. Pero como por hipótesis $B(\Psi \circ \beta) \vdash \neg\alpha$, obtenemos por RAGM que $B(\Psi \circ (\neg\alpha \wedge \beta)) \equiv B(\Psi \circ \beta)$, de donde se deduce por transitividad que $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \equiv B(\Psi \circ \beta)$. Como queríamos.

($\Leftarrow$) Supongamos que (C2D) se cumple.

Veamos primero que (C2) se cumple. Para esto supongamos que $\beta \vdash \neg\alpha$. Así $\alpha \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$ para cualquier Ψ entonces por (C2D) tenemos que $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \equiv B(\Psi \circ \beta)$. Como queríamos.

Para ver (D), supongamos que $\alpha \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$. Entonces (C2D) implica que $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \equiv B(\Psi \circ \beta)$, pero $B(\Psi \circ \beta) \vdash \neg\alpha$, luego $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \vdash \neg\alpha$. Como queríamos.

Claramente (C1P) y (C2D) proporcionan condiciones para la reducción de la revisión de dos iteraciones $\Psi \circ \alpha \circ \beta$ a la revisión de un solo paso (sólo con respecto a las bases de creencias resultantes). (C1P) reduce a una revisión por $(\alpha \wedge \beta)$ cuando α es consistente con una revisión por β. (C2D) reduce a una revisión por β, ignorando por completo a α cuando α y β son Ψ-contradictorias. Siguiendo la prueba (C1)-(P)$\Leftrightarrow$(C1P) dado RAGM, notemos que la consecuencia de (C1P) también se obtiene en el caso que $B(\Psi \circ \alpha) \nvdash \neg\beta$. Agrupando todos estos resultados obtenemos una caracterización más sucinta de la revisión restringida.

Proposición 4.15 *Sólo la revisión restringida satisface RAGM y*

$$(T) \quad B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \equiv \begin{cases} B(\Psi \circ \beta), & si \quad \alpha \leftrightsquigarrow_{\Psi} \beta \\ B(\Psi \circ (\alpha \wedge \beta)) & en \quad otro \quad caso. \end{cases}$$

Demostración: Del teorema 4.3 y la proposición 4.14 bastará mostrar que módulo RAGM, (C1P) y (C2D) se cumplen si, y sólo si, (T) se cumple.

$(T) \Rightarrow (C1P), (C2D)$ Supongamos que $\circ$ satisface RAGM y (T). Para mostrar (C1P) supongamos que $B(\Psi \circ \beta) \nvdash \neg\alpha$. Así $\alpha \not\leftrightsquigarrow_{\Psi} \beta$ de (T) se sigue que $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \equiv B(\Psi \circ (\alpha \wedge \beta))$. Como queríamos. Para mostrar (C2D) supongamos que $\alpha \leftrightsquigarrow_{\Psi} \beta$. Directamente de (T) obtenemos que $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \equiv B(\Psi \circ \beta)$ que es lo que queríamos probar.

$(C1P), (C2D) \Rightarrow (T)$ Supongamos que $\circ$ satisface RAGM, (C1P) y (C2D). Si $\alpha \leftrightsquigarrow_{\Psi} \beta$ tenemos por (C2D) que $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \equiv B(\Psi \circ \beta)$. Si $\alpha \not\leftrightsquigarrow_{\Psi} \beta$, tenemos dos casos.

(Caso 1) $B(\Psi \circ \beta) \nvdash \neg\alpha$. Se sigue directamente de (C1P) que $B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta) \equiv B(\Psi \circ (\alpha \wedge \beta))$.

(Caso 2) $B(\Psi \circ \alpha) \nvdash \neg\beta$. Por RAGM se tiene $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \equiv B(\Psi \circ (\alpha \wedge \beta))$. ∎

La proposición 4.14 nos permite ver claramente otra propiedad significativa de la revisión restringida: si tenemos que $\alpha \leftrightsquigarrow_{\Psi} \beta$ entonces sabemos por (D) que $B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta) \vdash \neg\alpha$. Pero en el caso contrario, es decir cuando $\alpha \not\leftrightsquigarrow_{\Psi} \beta$ ahora la proposición 3.14 nos dice que $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \equiv B(\Psi \circ (\alpha \wedge \beta))$ y por RAGM que $B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta) \vdash \alpha$. De esta manera el estatus de la información α (si es retenida o descartada) en el estado epistémico $(\Psi \circ \alpha) \circ \beta$ siempre está completamente determinado. Formalizemos esta propiedad importante en la siguiente proposición.

Proposición 4.16 *La revisión restringida satisface la siguiente propiedad:*

(U) Si $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \nvdash \neg\alpha$ *entonces* $B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta) \vdash \alpha$.

Esta propiedad (U) dice que la penúltima información entrante debe ser retenida mientras su consistencia lo permita.

Lema 4.1 *Bajo RAGM, (U) y (C4) implican (P).*

Demostración: Supongamos que (U) y (C4) se cumplen para un operador $\circ$ que satisface RAGM. Queremos ver que $\circ$ satisface (P). Supongamos que entonces

$B(\Psi \circ \beta) \nvdash \neg\alpha$. Por (C4) tenemos que $B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta) \nvdash \neg\alpha$. Luego se deduce de (U) que $B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta) \vdash \alpha$. ∎

El lema 4.1 tiene como consecuencia la siguiente caracterización axiomática alternativa de la revisión restringida.

Teorema 4.4 *Un operador de revisión $\circ$ que satisface RAGM es de revisión restringida si, y sólo si, $\circ$ satisface las condiciones (C1), (C2), (C4), (U) y (D).*

La contraparte semántica de (U) corresponde a separar todo los modelos de α de todos los modelos de $\neg\alpha$ en el pre-orden total $\leq_{\Psi\circ\alpha}$ asignado al estado espistémico revisado por α, de tal manera que cada nivel de plausibilidad de $\leq_{\Psi\circ\alpha}$ contiene sólo modelos de α o bien sólo modelos de $\neg\alpha$:

Proposición 4.17 *Sea $\circ$ un operador de revisión que satisface RAGM. Entonces $\circ$ satisface la condición (U) si, y sólo si $\circ$ y su correspondiente asignación fiel satisfacen*

(UR) Si $\omega_1 \in mod(\alpha)$ y $\omega_2 \in mod(\neg\alpha)$ entonces o bien $\omega_1 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$ o bien $\omega_2 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_1$

Demostración: ($\Rightarrow$) Supongamos que (U) se cumple. Razonemos por el absurdo. Supongamos que existe una fórmula α y valuaciones $\omega_1 \in mod(\alpha)$, $\omega_2 \in mod(\neg\alpha)$ con $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$ y $\omega_2 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_1$. Y lleguemos a una contradicción.

Sea β un fórmula proposicional tal que $mod(\beta) = \{\omega_1, \omega_2\}$, así por la representación tenemos que $mod(B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) = \{\omega_1, \omega_2\}$ y por lo tanto $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \nvdash \alpha$ y $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \nvdash \neg\alpha$.Luego (U) no se cumple. Contradicción.

($\Rightarrow$) Supongamos que (UR) se cumple. Razonemos por el absurdo. Supongamos que existen α y β fórmulas proposicionales tales que $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \nvdash \alpha$ y $B(\Psi \circ \alpha \circ \beta) \nvdash \neg\alpha$. Entonces existen valuaciones $\omega_1 \in mod(\alpha)$ y $\omega_2 \in mod(\neg\alpha)$ tales que $\omega_1, \omega_2 \in mod(B(\Psi \circ \alpha \circ \beta)) = min(mod(\beta), \leq_{\Psi\circ\alpha})$. De esta manera como ω_1 y ω_2 son minimales de $mod(\beta)$ para $\leq_{\Psi\circ\alpha}$ tenemos que $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$ y $\omega_2 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_1$. Por lo tanto α, ω_1 y ω_2 son un contraejemplo de (UR). Lo cual es una contradicción. ∎

Notemos entonces que la revisión lexicográfica satisface la condición (U), ya que claramente (Lex) implica (UR).

A continuación veremos otra propiedad de preservación, que a diferencia de (O) y (Q), estudia los casos cuando $B(\Psi)$ es inconsistente con alguna de las informaciones entrantes durante una revisión iterada.

Proposición 4.18 *La revisión restringida satisface la siguiente propiedad:*

(S) Si $B(\Psi\circ\alpha)\vdash\neg\beta$ *y* $B(\Psi\circ\neg\alpha)\vdash\neg\beta$*, entonces* $B(\Psi\circ\alpha\circ\neg\alpha\circ\beta)\equiv B(\Psi\circ\alpha\circ\beta)$.

Demostración: Sea $\circ$ un operador de revisión restringida. Supongamos que $B(\Psi\circ\alpha)\vdash\neg\beta$ y $B(\Psi\circ\neg\alpha)\vdash\neg\beta$. Queremos ver que $B(\Psi\circ\alpha\circ\neg\alpha\circ\beta)\equiv B(\Psi\circ\alpha\circ\beta)$.

Se dan dos casos:

(Caso 1) $\neg\alpha \leftrightsquigarrow_{\Psi\circ\alpha} \beta$. Como $\circ$ satisface (T) (Proposición 4.15) tenemos directamente que $B(\Psi\circ\alpha\circ\neg\alpha\circ\beta)\equiv B(\Psi\circ\alpha\circ\beta)$. Como queríamos.

(Caso 2) $\neg\alpha \not\leftrightsquigarrow_{\Psi\circ\alpha} \beta$. Se dan dos sub-casos.

(Sub-caso 1) $B(\Psi\circ\alpha\circ\neg\alpha)\nvdash\neg\beta$.

Como $\circ$ satisface (C2) (Teorema 4.3) y $\neg\alpha\vdash\neg\alpha$, se tiene que $B(\Psi\circ\alpha\circ\neg\alpha)\equiv B(\Psi\circ\neg\alpha)$. Pero por hipótesis tenemos que $B(\Psi\circ\neg\alpha)\vdash\neg\beta$. Lo cual es una contradicción. Luego este caso no se puede cumplir.

(Sub-caso 2) $B(\Psi\circ\alpha\circ\beta)\nvdash\alpha$.

Recordemos que por el Teorema 4.3 $\circ$ satisface (P). Del contrarrecíproco de (P) tenemos que $B(\Psi\circ\beta)\vdash\neg\alpha$ y por hipótesis tenemos que $B(\Psi\circ\alpha)\vdash\neg\beta$. Esto es $\alpha \leftrightsquigarrow_{\Psi} \beta$. De nuevo usando la propiedad (T) obtenemos que $B(\Psi\circ\alpha\circ\beta)\equiv B(\Psi\circ\beta)$ y como $\neg\alpha \not\leftrightsquigarrow_{\Psi\circ\alpha} \beta$ nuevamente (T) implica que $B(\Psi\circ\alpha\circ\neg\alpha\circ\beta)\equiv B(\Psi\circ\alpha\circ(\neg\alpha\wedge\beta))$, pero por (C2) ($\neg\alpha\wedge\beta\vdash\neg\alpha$) tenemos que $B(\Psi\circ\alpha\circ(\neg\alpha\wedge\beta))\equiv B(\Psi\circ(\neg\alpha\wedge\beta))$ y como $B(\Psi\circ\beta)\vdash\neg\alpha$ por RAGM tenemos que $B(\Psi\circ(\neg\alpha\wedge\beta))\equiv B(\Psi\circ\beta)$. Luego, $B(\Psi\circ\alpha\circ\neg\alpha\circ\beta)\equiv B(\Psi\circ\beta)$. Como queríamos. ∎

La propiedad (S) establece que si $\neg\beta$ está en el conjunto de creencias inicial, y la revisión por una nueva información α o por $\neg\alpha$ sigue reteniendo a $\neg\beta$, entonces luego de la revisión iterada donde β es precedido por α y $\neg\alpha$, la última información entrante $\neg\alpha$ se anula, y la información menos reciente α es retenida.

4.4. Conveniencia de la Revisión Restringida

Ya vimos varias de las propiedades más importantes de la revisión restringida que apuntan no sólo a que es el operador más conservativo de los admisibles si no que también son propiedades bastante deseadas. Booth y Meyer no consideran a la revisión restringida como un operador de revisión preferible a los demás operadores conocidos. Para ellos su contribución fue, mediante la inclusión de la revisión admisible, solucionar el problema de debilidad del marco de Darwiche-Pearl en los estados epistémicos.

La pregunta ahora es ¿cuál operador de revisión usar en una situación en particular? Sin duda alguna depende de muchos factores, como el contexto, el arraigamiento hacia algunas creencias, la fuente de información etc. Este problema a sido estudiado por otros investigadores como Friedman y Halpern.

Un ejemplo claro de este dilema es el ejemplo 4.3. Como vimos, este ejemplo está en contra del uso de la revisión lexicográfica, pero un rápido análisis nos mostrará que está a favor de la revisión restringida. Recordemos que $B(\Psi) = rojo$ y queremos ver que la información del color $rojo$ del pájaro es retenida en el conjunto de creencias $B((\Psi \circ (rojo \rightarrow pajaro)) \circ \neg pajaro)$. Como las informaciones $rojo \rightarrow pajaro$ y $pajaro$ tiene modelos en común con $B(\Psi)$, es decir, $B(\Psi)$ es compatible con la sucesión de informaciones $rojo \rightarrow pajaro, pajaro$ luego la propiedad (O) satisfecha por la revisión restringida (Proposición 4.12), nos dice que $B(\Psi \circ (rojo \rightarrow pajaro)) \circ \neg pajaro) \vdash B(\Psi)$ y por lo tanto $rojo \in Cn(B(\Psi \circ (rojo \rightarrow pajaro)) \circ \neg pajaro)$. Como queríamos.

Pero notemos que basta cambiar sutilmente el *contexto* del ejemplo 4.3 para que este se torne a favor de la revisión lexicográfica y en contra de la revisión restringida. El siguiente ejemplo nos ilustra esta situación.

Ejemplo 4.5 *Vemos un criatura de lejos que parece ser de color rojo aunque no estamos muy seguros. Estamos tan lejos que no sabemos si es un pájaro o un cuadrúpedo. Entonces simplemente adoptamos como conjunto de creencias $B(\Psi) = rojo$. A un lado de nosotros se encuentra un experto en pájaros que comenta que si la criatura es en efecto roja, entonces tiene que ser un pájaro. Así adoptamos la creencia $rojo \rightarrow pajaro$. Pero luego obtenemos información de alguien que estuvo cerca de la criatura y nos dice que esta no es un pájaro. Dado este contexto, es decir, la fiabilidad del experto combinada con el hecho de que la criatura inicialmente parecía roja, es razonable que en el estado de creencias resultante obtengamos la creencia de que el animal no es rojo es decir $\neg rojo$.*

Notemos que el cambio se basa en la duda inicial si el pájaro es rojo o no. En el ejemplo 4.3 nosotros habíamos visto que el pájaro era rojo y luego que no era pájaro, por lo tanto, debíamos descartar la información del experto, y seguir creyendo que la criatura era roja. En cambio, en este ejemplo, como nosotros no hemos visto nada, nos queda arraigarnos a la fiabilidad del experto y al conocimiento de la fisionomía de un pájaro por parte de la persona que nos dijo que la criatura no lo era, y por lo tanto, rechazar el hecho de que la criatura es roja.

Por lo tanto la revisión restringida no nos proporciona el razonamiento correcto porque de la compatibilidad del conjunto de creencias inicial con las informaciones entrantes va resultar que la variable $rojo$ figura en el conjunto de creencias resultante de la revisión. En cambio si vemos el análisis hecho en contra de la revisión lexicográfica en el ejemplo 3.3 vemos que de esta resulta la variable $\neg rojo \wedge \neg pajaro$. Es decir $\neg rojo \in Cn(B(\Psi \circ (rojo \rightarrow pajaro)) \circ \neg pajaro)$ que es el resultado razonable en este caso.

Veamos ahora como la fuente de información puede afectar dramáticamente el resultado de una revisión y donde no parece razonable la revisión restringida

Ejemplo 4.6 *Considere un estado epistémico Ψ con $B(\Psi) = p$ y la sucesión de informaciones n informaciones entrantes $p \rightarrow q$,$\neg q$. Por ejemplo si $n = 3$ tendríamos $\Psi \circ (p \rightarrow q) \circ \neg q \circ (p \rightarrow q) \circ \neg q \circ (p \rightarrow q) \circ \neg q$. Como p no está en conflicto directo con ninguna de la fórmulas en la sucesión se tiene que cualquier revisión que satisfaga la propiedad (O) (incluyendo la revisión restringida) requerirá que p sea retenida en el conjunto de creencia resultante de la revisión iterada. Pero ahora bien, si cada par $p \rightarrow q$ y $\neg q$ es obtenido de una fuente diferente, tal conclusión no parece tan razonable. Después de todo, la primera sucesión $p \rightarrow q$ y $\neg q$ de la misma información retiene a p, pero viene seguida de n fuentes distintas que esencialmente nos dicen que $\neg p$ está en el resultado (notemos que si tenemos $p \vdash q$ tenemos como consecuencia $\neg q \vdash \neg p$).*

Otro ejemplo donde la revisión restringida no es satisfactoria es el siguiente:

Ejemplo 4.7 *Supongamos que estamos dictando una clase a un grupo de alumnos constituido por n varones y m mujeres, y supongamos que la clase forma parte de una competencia de matemáticas. Para cada $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, m$ consideremos las variables proposicionales p_i y q_i significando que el niño i ganó la competición y que la niña j ganó la competición respectivamente, y suponga que inicialmente nosotros creemos que uno de los niños ganó la competencia, es decir, $B(\Psi) = \phi \wedge \sigma$ donde $\phi = \bigvee_i p_i$ y σ es tan solo un enunciado que expresa la unicidad del ganador de la competencia. Ahora bien, supongamos que entrevistamos a cada uno de los niños un después del otro, y cada uno de ellos nos dice que o bien ganó una de las niñas o ganó el, es decir, obtenemos la sucesión de informaciónes entrantes $(\neg \phi \vee p_i)_i$.*

Supongamos que estamos dispuestos a aceptar el testimonio de cada niño. Usar un operador que satisfaga la condición (O) nos llevará a creer que el niño n ganó la competencia, que es algo muy poco plausible.

La revisión lexicográfica en cambio si nos permite concluir que una de las niñas fué la ganadora. En efecto, notemos que en el preorden $\leq_\Psi$, los mundos minimales son los modelos de las situaciones donde uno de los niños es el ganador y nadie más. En el segundo nivel están los modelos de los casos en que una niña es la ganadora y nadie más junto a los demás casos. Al revisar por la información $(\neg\phi \vee p_1)$ de que o bien el niño 1 entrevistado es el ganador o bien una de las niñas es la ganadora, tenemos por la revisión lexicográfica que en el nuevo ordenamiento $\leq_{\Psi\circ\neg\phi\vee p_1}$ el único mundo minimal va ser el modelo del caso con el niño i como único ganador, en el segundo nivel los modelos de los casos en que una niña es la ganadora y en un nivel superior los casos restantes. Por lo tanto al revisar el conjunto de creencias resultante ahora por la información $(\neg\phi \vee p_2)$ de que o bien el niño 2 entrevistado es el ganador o bien una de las niñas es la ganadora, tenemos por la revisión lexicográfica que en el nuevo ordenamiento $\leq_{(\Psi\circ\neg\phi\vee p_1)\circ(\neg\phi\vee p_2)}$, los mundos minimales son los modelos de los casos en que una niña es la ganadora, en el segundo nivel el niño 2 como ganador, y en los niveles de arriba el resto de las posibilidades. Por lo tanto a partir de esta iteración al revisar por la sucesión de informaciones $(\neg\phi \vee p_i)_i$ con $i = 3, ..n$ por la revisión lexicográfica los modelos minimales en el preorden asignado al estado espistémico resultante de la revisión iterada, van a seguir siendo los modelos de que una niña es ganadora. Por RAGM obtendremos que nuestro conjunto de creencias final será que alguna niña es la ganadora de la competición de matemáticas.

De estos ejemplos es claro que un agente, en la mayoría de los casos, no debería aferrarse al mismo operador de revisión cada vez que tiene que ejecutar una revisión en sus creencias. Esto significa que el agente puede usar diferentes tipos de operadores en cada paso al momento de realizar un proceso revisión iterada. Esto inmendiatamente nos lleva a pensar qué operador de revisión (admisible) usar en un punto determinado. Booth-Meyer no consiguieron una respuesta definitiva para esta pregunta pero dieron algunas claves para abordar este problema.

CAPÍTULO 5

OBSERVACIONES FINALES Y PERSPECTIVAS

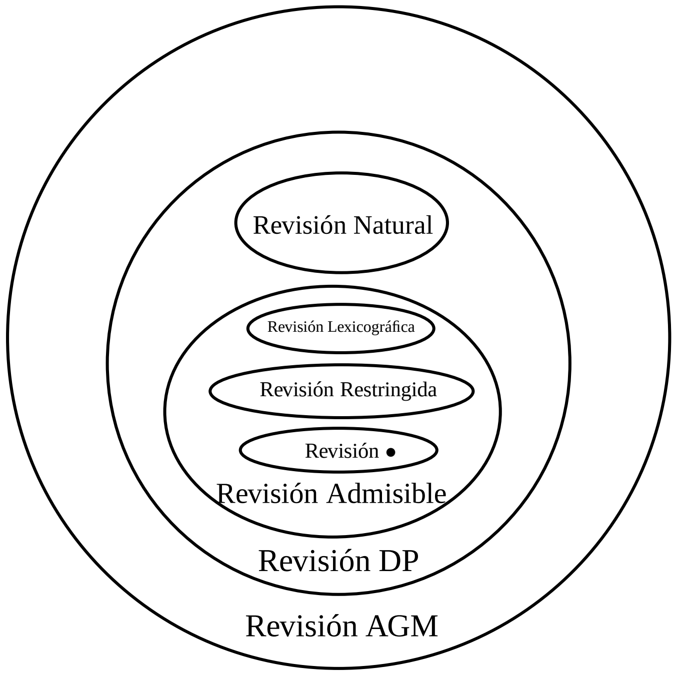
En este trabajo hemos estudiado el proceso de revisión de creencias dentro del marco AGM [1]. En particular nos rentringimos al caso finito y hemos adoptado el punto de vista de Katsuno y Mendelzon [5], que en este caso es equivalente al marco AGM.

Hemos hecho hincapié en los defectos que este marco presenta para la revisión iterada. Así, hemos estudiado en profundidad las soluciones propuestas por Darwiche y Pearl (marco DP) [3] y las mejoras propuestas tanto por Booth y Meyer [2] como por Jin y Thielscher [4]. De hecho observamos que los resultados del trabajo de Jin y Thielscher están estrictamente contenidos en el trabajo de Booth y Meyer. Así escogimos de estudiar con cuidado este último trabajo.

La herramienta clave en este estudio es el teorema de representación de Katsuno-Mendelzon (y sus declinaciones). Este teorema permite observar la falta de relación estructural entre los preordenes asociados a un estado epistémico y un estado epistémico revisado por una nueva información respectivamente. Todas las soluciones propuestas (revisión natural, funciones de Spohn, revisión lexicográfica, marco DP, etc) consisten en relacionar estas dos estructuras.

Es importante observar que a partir de la solución de DP un estado epistémico - a diferencia del marco AGM - es más que una fórmula o una teoría de la Lógica Proposicional. Sin embargo esta noción nunca está perfectamente formalizada. Para los efectos prácticos de formulación de postulados de racionalidad lo que es importante son las creencias asociadas a un estado epistémico, lo cual se hace mediante la función B.

Los resultados de este trabajo nos dan una clasificación de los operadores de revisión que pueden resumirse a través del siguiente diagrama:



A nosotros nos fue muy útil pensar a los estados epistémicos como preórdenes totales. Sin embargo hay otras representaciones como las funciones "ranking"de Spohn. Una perspectiva de trabajo es explorar más profundamente la noción de estado epistémico. Tratar de encontrar un álgebra (una axiomatización) de los estados epistémicos de la cual los preórdenes totales, las funciones ranking, etc sean realizaciones.

Otro punto importante que quisiéramos desarrollar más es el estudio de postulados de irrelevancia de la sintaxis iterados generalizados en el estilo de R*4". Más precisamente postulados como el siguiente: para todo n y para todo $i \leq n$ si $\alpha_i \equiv \beta_i$ y $\Psi_1 = \Psi_2$ entonces para todo $k \leq n$ $B(\Psi_1 \circ \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_k) \equiv B(\Psi_2 \circ \beta_1 \circ \cdots \circ \beta_k)$.

Nosotros notamos que la revisión restringida es el mejoramiento mínimo de los modelos de la nueva información. En un estudio futuro quisiéramos caracterizar sintácticamente mejoramientos "graduados" de la nueva información.

En la última parte de ésta memoria hemos visto lo delicado que se torna la escogencia de un operador de revisión. Puede depender de diversos factores, como el contexto, el arraigamiento hacia cierta creencias por parte del agente, la fuente de información y muchos otros más. Entonces pensamos que sería interesante tratar de caracterizar las situaciones en que se deben usar los diferentes tipos de operadores.

APÉNDICE A

RESULTADOS BÁSICOS DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

Teorema A.1 (Teorema de completitud)

$\Sigma \vdash \alpha$ *ssi* $\Sigma \models \alpha$ *en particular,* $\mu \vdash \alpha$ *ssi* $mod(\mu) \subseteq mod(\alpha)$

Teorema A.2

Sean Σ *y* Γ *conjuntos de fórmulas proposicionales. Entonces,*

- $Cn(\Sigma)$ *es una teoría lógica*
- $mod(\Sigma) = mod(Cn(\Sigma))$
- $mod(Cn(\Sigma \cup \Gamma)) = mod(\Sigma) \cap mod(\Gamma)$
- $mod(\Sigma \cup \Gamma) = mod(\Sigma) \cap mod(\Gamma)$
- $mod(\Sigma) = mod(Cn(\Sigma))$

Teorema A.3

Sean R *y* S *teorías. Entonces,*

- $R \subseteq S$ *ssi* $mod(S) \subseteq mod(R)$
- $R \cap S$ *es una teoría lógica*
- $mod(K \cap S) = mod(S) \cup mod(R)$

Teorema A.4

Sean L *un lenguaje proposicional finito generado por el conjunto de fórmulas atómicas* $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ *y* W *el conjuntos de mundos posibles de* L*. Consideremos* $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$ *un subconjunto cualquiera de* W *con* k *un número natural, donde,*

$$\begin{aligned} \omega_1 &= (\omega_{11}, \ldots, \omega_{1n}) \\ &\vdots \\ \omega_k &= (\omega_{k1}, \ldots, \omega_{kn}) \end{aligned}$$

Y definamos para $i = 1, \ldots, k$ *y* $j = 1, \ldots, n$,

$$l_{i,j} = \begin{cases} p_j & si \quad \omega_{ij} = 1 \\ \neg p_j & si \quad \omega_{ij} = 0. \end{cases}$$

Si ahora consideramos a la fórmula proposicional $\varphi_i = l_{i1} \wedge \ldots \wedge l_{in}$ *es claro que* $mod(\varphi_i) = \{\omega_i\}$*. Por lo tanto el conjunto de los modelos de la disjunción* $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_k$*, es precisamente* A*.*

Denotaremos φ_A *a una fórmula proposicional tal que* $mod(\varphi_A) = A$*, por ejemplo* $\varphi_A = \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_k$ *como antes.*

BIBLIOGRAFÍA

[1] C. E. Alchourrón, P. Gärdenfors, and D. Makinson. On the logic of theory change: Partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, 50:510–530, 1985.

[2] R. Booth and T. Meyer. Admissible and restrained revision. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 26:127–151, 2006.

[3] A. Darwiche and J. Pearl. On the logic of iterated belief revision. *Artificial Intelligence*, 89:1–29, 1997.

[4] Y. Jin and M. Thielscher. Iterated belief revision, revised. *Artificial Intelligence*, 171:1–18, 2007.

[5] H. Katsuno and A. O. Mendelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence*, 52:263–294, 1991.

[6] A. C. Nayak. Iterated belief change based on epistemic entrenchment. *Erkenntnis*, 41:353–390, 1994.

[7] W. Spohn. Ordinal conditional functions: A dynamic theory of epistemic states. In W. L. Harper and B. skyrms, editors, *Causation in Decision: Belief Change and Statistics*, pages 105–134. Kluwer, 1988.