República Bolivariana de Venezuela
Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Grupo de Álgebra

Teorema de Arrow para Perfiles Estructurados

Dubraska Salcedo Quintero

Requisito Especial de Grado
en la modalidad Seminario-Monografía
para optar al Título de
Licenciada en Matemáticas
Tutor: Dr. Ramón Augusto Pino Pérez.

Mérida-Venezuela
Febrero, 2008

CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MÉRIDA VENEZUELA

Departamento de Matemáticas

Acta-Veredicto

Quienes subscriben, miembros del jurado designado por el Consejo de Facultad, en un todo de acuerdo con lo establecido en los Artículos 51 y 52 del Reglamento para la Carrera de Matemáticas, declaran

Aprobado - mención distinguido

el ***Requisito Especial de Grado***, en la ***modalidad Seminario-Monografía***, titulado

" Teorema de Arrow para Perfiles Estructurados "

para optar al título de

Licenciada en Matemáticas

presentado por la Bachiller

Dubraska Salcedo Quintero

titular de la cédula de identidad V17.831.918.

En este mismo acto dejamos constancia del logro de los objetivos originalmente propuestos, así como del esfuerzo y dedicación de la mencionada Bachiller. Asimismo, queremos destacar que dicho trabajo posee características sobresalientes y lo recomendamos para su publicación.

En Mérida, el día miércoles 27 de febrero de 2008.

Prof. Ramón Pino	Prof. Carlos Uzcátegui	Prof. José Luis Chacón
CI: V003.995.182	CI: V005.[illegible]	CI: V002.554.008
Universidad de Los Andes	Universidad de Los Andes	Universidad de Los Andes
Tutor	Jurado	Jurado

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA UNIVERSIDAD DE LOS ANDES Facultad de Ciencias Departamento de Matemáticas

La Hechicera, Núcleo "Pedro Rincón Gutiérrez", Edificio A, Facultad de Ciencias. Mérida, Mérida 5101, Venezuela
Fax: +58-274-2401345. Teléfono: +58-274-2401346. e-mail: jefemat@ula.ve

Índice

Capítulo 1

Introducción

Un problema central en nuestra sociedad es el de hacer una elección. Más precisamente, cómo elegir los mejores candidatos dada una población de individuos que expresan sus preferencias sobre esos candidatos. El problema es, esencialmente, establecer qué es una elección justa o buena o que satisfaga a la sociedad en su conjunto.

Ese tipo de problemas se ha venido estudiando desde la antigüedad, ver por ejemplo [7]. Esta área de estudio se conoce con el nombre de Teoría del Voto o más generalmente como Teoría de Elección Social.

La Teoría del voto comienza a tener un interés en el mundo de las matemáticas en el siglo de las luces con los trabajos del Marqués de Condorcet y de Charles de Borda. Pero no es sino a mediados del siglo XX, que el economista Kenneth J. Arrow introduce una manera axiomática de estudiar los sistemas electorales [1].

Arrow probó que no hay sistemas electorales que satisfagan al mismo tiempo un conjunto de postulados que parecen muy razonables. Ese resultado es conocido como el Teorema de Imposibilidad de Arrow. El cual estudiaremos con detalle en este trabajo.

Uno de nuestros aportes es estudiar espacios de alternativas que tienen cierta estructura. En particular una distancia. Al mismo tiempo estudiaremos preferencias que vienen estructuradas. Esa estructuración viene dada por varios parámetros, a saber la distancia y dos funciones de agregación. Lo que es en realidad el punto de partida para un análisis fino de preferencias estructuradas que satisfacen el Teorema de Imposibilidad de Arrow.

Nosotros organizamos el trabajo como sigue. En el capítulo 2 presentamos los conceptos básicos de la Teoría de Elección Social. En el capítulo 3 presentamos la noción de perfiles estructurados y probamos el Teorema de Arrow para ese tipo de perfiles. El capítulo 4 está dedicado a un análisis de dos maneras de estructurar perfiles: usando el la función de agregación min y usando la función suma. Terminamos con unas observaciones y algunas perspectivas de trabajo.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Teoría de Elección Social

La Teoría de Elección Social estudia los sistemas o mecanismos para hacer escogencias colectivas.

El problema general que se quiere modelizar es cómo un grupo de personas escoge las mejores alternativas de un grupo de alternativas dado. Así, los elementos en juego son los siguientes:

Un grupo de personas conforman al conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$, que corresponde al conjunto de *votantes*. Este grupo tiene que escoger de un conjunto finito de alternativas que denotamos por $X = \{x, y, \ldots\}$, "la mejor"o "las mejores"(según sea el caso). Cada individuo tiene sus preferencias sobre las alternativas. Ahora , el problema más preciso es el de hacer una elección de manera que se pueda decir que se ha utilizado un método racional, según ciertos criterios.

Las preferencias de cada individuo $i \in N$ se expresan a través de un preorden total cuya definición precisa damos a continuación.

Definición 2.1.1 *Una relación $\preceq$ es un preorden total si:*

i) $\preceq$ *es reflexiva,*

ii) $\preceq$ *es transitiva, y*

iii) $\preceq$ *es total.*

La relación de preferencia de un individuo trata de modelizar cuando una alternativa es *al menos tan buena como* otra; de hecho esta serála manera de leer esta relaciones. Así, la preferencia del individuo i se denota por $\preceq_i$ y $x \preceq_i y$ significa que para el individuo i x es al menos tan buena como y.

Esto tiene sentido, pues dadas dos alternativas, en general, se cree que una de las alternativas es al menos tan buena como la otra. Es decir, dado el par $x, y \in X$ ocurre que $x \preceq_i y$ ó $y \preceq_i x$; esto es lo que expresa $iii)$ y si $x = y$ es lo que expresa $i)$. La transitividad expresa la coherencia en las preferencias.

Agruparemos las preferencias de todos los individuos en un vector, que llamamos un perfil y lo denotamos por $u = (\preceq_1, \preceq_2, \ldots, \preceq_n)$. Así, el conjunto de todos los perfiles que denotamos por $\mathcal{P}$, es el producto cartesiano, tantas veces como individuos haya en N, del conjunto de todos los preordenes totales sobre X.

Es natural pensar que dadas dos alternativas x, y, en ciertas circunstancias,queramos expresar que " x es mejor que y". Entonces tiene sentido la definición siguiente:

Definición 2.1.2 *Sea $\preceq$ la relación "al menos tan buena como" definida antes. Definimos la relación $\prec$, que llamaremos "mejor que", de la siguiente manera:*

$$a \prec b \Longleftrightarrow a \preceq b \ \wedge \ b \npreceq a$$

Las observaciones siguientes son inmediatas excepto la (iv). Una prueba de ella puede ser hallada en detalle en [3].

i) $\prec$ es transitiva por la transitividad de $\preceq$,

ii) $\prec$ es irreflexiva (directo de la definición),

iiii) $\prec$ es asimétrica (directo de la definición),

iv) $\prec$ es modular, es decir, $\exists(\Omega, <)$ un orden lineal estricto y una función

$$r : X \mapsto \Omega$$

tal que

$$x \prec y \Longleftrightarrow r(x) < r(y)$$

Así, dadas dos alternativas x, y, $x \prec_i y$ expresa que para el individuo i "x es mejor que y".

Pudiera ocurrir también que, dadas dos alternativas x, y, queramos expresar que es indiferente una alternativa respecto a la otra, es decir, que nos parecen igual de buenas, o ninguna mejor que la otra. Para ello tenemos la definición siguiente:

Definición 2.1.3 *Definimos la relación $\sim$, que llamaremos "indiferencia", de la siguiente manera:*

$$a \sim b \Longleftrightarrow a \preceq b \ \wedge \ b \preceq a$$

Considerando que $\preceq$ es total tenemos que

$$a \sim b \Leftrightarrow a \not\prec b \wedge b \not\prec a$$

Entonces, dadas dos alternativas x, y, $x \sim_i y$ expresa que para el individuo i "x es indiferente a y" ó "y es indiferente a x"(porque ésta relación es simétrica).

Como es usual, usaremos representaciones gráficas por niveles de estas relaciones de preferencia. Los niveles más bajos corresponden a los elementos más preferidos y cuando dos elementos son indiferentes ellos aparecen en el mismo nivel. Así por ejemplo si $X = \{x, y, z, w\}$ el preorden total $x \sim y \prec z \sim w$ será representado por

$$\begin{array}{cc} z & w \\ x & y \end{array}$$

El preorden $y \prec x \prec z \prec w$ será representado por

$$\begin{array}{c} w \\ z \\ x \\ y \end{array}$$

y el preorden $x \sim y \sim z \prec w$ será representado por

$$\begin{array}{ccc} & w & \\ x & y & z \end{array}$$

Algunas veces, deseamos hacer una elección entre sólo un subconjunto de las alternativas. A continuación distinguimos estos subconjuntos.

Definición 2.1.4 *Una agenda es un subconjunto no vacío del conjunto de alternativas, y la denotaremos por V. El conjunto de todas las agendas posibles, dado el conjunto de alternativas X será denotado $\mathscr{P}^*(X)$.*

La manera de hacer la escogencia o elección viene dada por una función.

Definición 2.1.5 *Una Regla de Elección Social es una función f tal que:*

$$f : \mathcal{P} \times \mathscr{P}^*(X) \longrightarrow \mathscr{P}^*(X), y$$

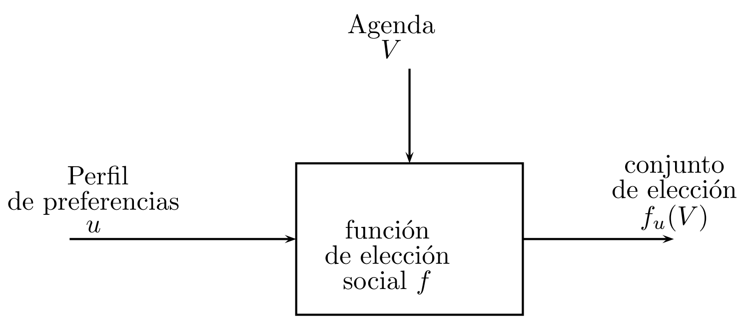
$$f(u, V) \subseteq V, \quad \textit{para cualquier} \quad (u, V) \in \mathcal{P} \times \mathscr{P}^*(X)$$

$f(u, V)$ es el conjunto de las mejores alternativas en V, según las preferencias en u.

Algunas veces, f es una función parcial.

Escribimos $f_u(V)$ en lugar de $f(u, V)$ y algunas veces nos referiremos a una regla de elección social diciendo simplemente una regla de elección.

El diagrama siguiente ilustra el mecanismo de las reglas de elección.



2.2. Algunas Reglas de Elección

2.2.1. Regla por Mayoría Simple

Sean $X = \{x, y\}$ y $N = \{1, \ldots, n\}$.

Definimos f solo para los pares de la forma (u, X) con $u \in \mathcal{P}$, porque en los casos de las agendas $V = \{x\}$ y $V = \{y\}$ el resultado es trivial.

$$f_u(X) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } \big|\{i \in N : x \prec_i y\}\big| > \big|\{i \in N : y \prec_i x\}\big| \\ \{y\} & \text{si } \big|\{i \in N : y \prec_i x\}\big| > \big|\{i \in N : x \prec_i y\}\big| \\ \{x, y\} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta regla de elección se llama Regla por Mayoría Simple.

Ejemplo 2.2.1 *Sea* $n = 3$.

Si

$$u = \left(\begin{array}{ccc} x & x & y \\ \underbrace{y}_{\preceq_1} & \underbrace{y}_{\preceq_2} & \underbrace{x}_{\preceq_3} \end{array} \right),$$

$f_u(\{x, y\}) = \{y\}$, *porque* $\big|\{i \in N : y \prec_i x\}\big| = 2 > 1 = \big|\{i \in N : x \prec_i y\}\big|$.

Ahora, si

$$u = \left(\begin{array}{ccc} & y & x \\ \underbrace{x\ y}_{\preceq_1} & \underbrace{x}_{\preceq_2} & \underbrace{y}_{\preceq_3} \end{array} \right),$$

entonces $f_u(\{x, y\}) = \{x, y\}$.

2.2.2. Regla por Mayoría Absoluta

Sean $X = \{x, y\}$ y $N = \{1, \ldots, n\}$.

De nuevo definimos f solo para los pares de la forma (u, X) con $u \in \mathcal{P}$.

$$f_u(X) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } \big|\{i \in N : x \prec_i y\}\big| > n/2 \\ \{y\} & \text{si } \big|\{i \in N : y \prec_i x\}\big| > n/2 \\ \{x, y\} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 2.2.2 *Sea* $n = 4$.

Si

$$u = \left(\begin{array}{cccc} y & y & x & y \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{x}_{\preceq_2} & \underbrace{y}_{\preceq_3} & \underbrace{x}_{\preceq_4} \end{array} \right),$$

entonces $f_u(\{x, y\}) = \{x\}$, *porque* $\big|\{i \in N : x \prec_i y\}\big| = 3 > 2$.

Notemos que en este caso obtenemos el mismo resultado si usamos Mayoría Simple o Mayoría Absoluta. También esto ocurre en las situaciones del ejemplo 2.2.1.

Ahora, si

$$u = \begin{pmatrix} y & y & & x \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{x}_{\preceq_2} & \underbrace{x\ y}_{\preceq_3} & \underbrace{y}_{\preceq_4} \end{pmatrix},$$

entonces según la Regla por Mayoría Absoluta x e y son escogidos, mientras que la Regla por Mayoría Simple da como ganadora a la alternativa x.

En resumen, cuando x es escogido por Mayo-ría Absoluta también es escogido por Mayoría Simple. pero la recíproca no es cierta.

2.2.3. Una Generalización de Mayoría Simple, Ganadores de Condorcet y La Paradoja del Voto

En general, el conjunto de alternativas tiene más de dos elementos, y dada la aceptación de la Regla por Mayoría Simple, surge la idea de generalizar esta regla para más de dos alternativas.

Veamos una manera de generalizar para $X = \{x, y, z\}$. La idea central es aplicar Mayoría Simple a cada par de alternativas posible, es decir, aplicar Mayoría Simple a $\{x, y\}$, $\{y, z\}$ y $\{x, z\}$.

Definición 2.2.1 *Una alternativa es llamada Ganador de Condorcet si gana o al menos empata en cada votación de pares en la cual participa.*

Así, definimos una nueva regla de la manera siguiente:

$$f_u(V) = \{x \in V : x \text{ es ganador de Condorcet}\}$$

Mas adelante veremos que se puede aplicar esta regla a conjuntos de alternativas X de cualquier cardinalidad finita.

Ejemplo 2.2.3 *Sean $N = \{1, 2, 3\}$ y $X = \{x, y, z\}$.*

Supongamos $V = \{x, y, z\}$ y

$$u = \begin{pmatrix} y & y & y \\ z & x & x \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{z}_{\preceq_2} & \underbrace{z}_{\preceq_3} \end{pmatrix}.$$

Aplicamos Mayoría Simple a los pares $\{x, y\}, \{y, z\}$ *y* $\{x, z\}$ *y tenemos que:*

- x *le gana a* y*, pero* x *pierde con* z*. Así,* x *no es ganador de Condorcet.*
- *Como* x *le gana a* y*,* y *no puede ser ganador de Condorcet.*
- z *le gana a* y*. También* z *le gana a* x*. Así,* z *es el único ganador de Condorcet.*

Por lo tanto, $f_u(V) = \{z\}$*.*

Ejemplo 2.2.4 *Consideremos ahora*

$$u = \left(\begin{array}{ccc} z & x & y \\ y & z & x \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{y}_{\preceq_2} & \underbrace{z}_{\preceq_3} \end{array} \right).$$

Al aplicar Mayoría Simple a $\{x, y\}, \{y, z\}$ *y* $\{x, z\}$ *tenemos que* x *le gana a* y*,* y *le gana a* z*, pero* z *la gana a* x*.*

En este caso esperaríamos, por transitividad, que x *le ganase a* z *ya que* x *le gana a* y *que a su vez le gana a* z*. Pero como vimos, en realidad,* z *le gana a* x*. Esta situación es conocida como* ***La Paradoja del Voto***[1] *.*

El ejemplo precedente nos muestra una regla que es parcial.

Para paliar los efectos de la paradoja del voto, Borda[2] propone una nueva regla, que lleva su nombre y que presentaremos en la siguiente sección.

2.3. Otros ejemplos de reglas de elección

En esta sección continuaremos dando algunos ejemplos de reglas de elección.

Definición 2.3.1 (Regla de la Identidad.) *Definimos* $f : \mathcal{P} \times \mathscr{P}^*(X) \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$, *con*

$$f_u(V) = V$$

[1] Ver [2]

[2] Jean-Charles de Borda, matemático francés (1733-1799) a quien se le debe el ejemplo de la Paradoja del voto (ver [6]).

Esta regla es poco interesante porque, a pesar de estar bien definida, es una regla que no considera la opinión de los votantes, dando como ganadores a todas las alternativas de la agenda.

Definición 2.3.2 (Regla de la Proyección.) *Definimos* $f : \mathcal{P} \times \mathscr{P}^*(X) \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$, *con*

$$f_u(V) = min(V, \preceq_1)$$

Esta regla de elección es llamada Regla de la Proyección.

Esta regla no parece ser muy buena, ya que sólo toma en cuenta las preferencias de un solo individuo, el individuo 1.

Definición 2.3.3 (Regla de Condorcet.) *Dado un perfil* $u = (\preceq_1, \preceq_2, \ldots, \preceq_n)$, *un conjunto finito de preferencias* $X = \{x, y, \ldots\}$ *y una agenda* V, *definimos* $N_{x,y} = |\{i : x \prec_i y\}|$. *Luego,* x *es un Ganador de Condorcet de* V *relativo a* u *si para todo* $y \in V,\ N_{x,y} \geq N_{y,x}$.

Notemos que esta definición es consistente con la definición 2.2.1

Definimos

$$f_u^C(V) = \big\{x \in V : x \text{ es ganador de Condorcet de } V \text{ relativo a } u\big\}.$$

Esta regla de elección es llamada Regla de Condorcet.

Ejemplo 2.3.1 *Sean* $N = \{1, 2, 3\}$ *y* $X = \{t, x, y, z\}$.

Si $V = X$ *y*

$$u = \begin{pmatrix} t & x & y \\ z & z & x \\ y & y & z \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{t}_{\preceq_2} & \underbrace{t}_{\preceq_3} \end{pmatrix},$$

como,

- $N_{x,t} = 1 < N_{t,x} = 2$,
- $N_{y,t} = 1 < N_{t,y} = 2$,
- $N_{z,t} = 1 < N_{t,z} = 2$,

entonces t *es el único ganador de Condorcet. Así,* $f^C(V) = \{t\}$.

El ejemplo 2.2.4 nos muestra que f^C *es una regla parcial.*

Definición 2.3.4 (Regla de Pareto.) *Sean* $x, y \in X$ *y* u *un perfil. Decimos que* x *es Pareto superior a* y *en* u *si para todo* i, $x \preceq_i y$ *y existe* j *tal que* $x \prec_j y$.

Definimos

$$f_u(V) = \{x \in V : \forall y \in V, y \neq x, x \text{ es pareto superior a } y \text{ en } u\}.$$

Esta regla de elección es llamada Regla de Pareto.

Ejemplo 2.3.2 *Sean* $N = \{1, 2, 3\}$ *y* $X = \{x, y, z\}$.

Si

$$u = \left(\begin{array}{ccc} z & y & \\ y & z & \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{x}_{\preceq_2} & \underbrace{x\ z\ y}_{\preceq_3} \end{array} \right)$$

entonces, x *es Pareto Superior a* y *en* u*; también* x *es Pareto superior a* z *en* u*, por lo tanto,* $f_u(V) = \{x\}$.

Notemos que esta regla tampoco esta definida para la situación del ejemplo 2.2.4.

Podemos forzar cada regla a ser total, dando como ganadores a todas la alternativas de la agenda, en los casos en que la función no esté definida.

Las reglas que definiremos a continuación son funciones totales.

Definición 2.3.5 (Regla de Condorcet Ordenada.) *Consideremos* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ *un conjunto de preferencias ordenado (con el orden natural de los subíndices). Las agendas son de la forma* $V = \{x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\}$ *con* $i_0 < i_1 < \ldots < i_m$. *Definimos*

$$y_1 = \begin{cases} x_{i_0} & \text{si } N_{x_{i_0}, x_{i_1}} \geq N_{x_{i_1}, x_{i_0}} \\ x_{i_1} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} y_1 & \text{si } N_{y_1, x_{i_2}} \geq N_{x_{i_2}, y_1} \\ x_{i_2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$y_m = \begin{cases} y_{m-1} & si\ N_{y_{m-1},x_{i_m}} \geq N_{x_{i_m},y_{m-1}} \\ x_{i_m} & en\ otro\ caso \end{cases},$$

y finalmente $f_u(V) = \{y_m\}$.

Notemos que esta regla es una generalización de Mayoría Simple que siempre da como resultado un único ganador y es llamada Regla de Condorcet Ordenada.

Ejemplo 2.3.3 *Sean* $N = \{1, 2, 3, 4\}$ *y* $X = \{w, x, y, z\}$ *ordenado alfabéticamente.*

Si $V = X$ *y*

$$u = \begin{pmatrix} & z & w & w \\ y\ z & x & y & y \\ x & w & z & z \\ \underbrace{w}_{\preceq_1} & \underbrace{y}_{\preceq_2} & \underbrace{x}_{\preceq_3} & \underbrace{x}_{\preceq_4} \end{pmatrix},$$

veamos cómo se obtiene $f_u(V)$.

- $N_{w,x} = 2 = N_{x,w} \Rightarrow y_1 = w$
- $N_{w,y} = 1 < 3 = N_{y,w} \Rightarrow y_2 = y$
- $N_{y,z} = 1 < 2 = N_{z,y} \Rightarrow y_3 = z$

Por lo tanto, $f_u(V) = \{z\}$.

Definición 2.3.6 (Regla de Borda.) *Para cada* $x \in X$ *tenemos que:* x *tiene asociado un número natural* $r_i(x)$, *que corresponde al nivel donde* x *se encuentra en el preorden total* $\preceq_i$. *Formalmente,* $r_i(x)$ *es una función definida por*

$$r_i(x) = m \Longleftrightarrow m \text{ es el mayor entero tal que } \exists x_o, x_1, \ldots, x_m \in X \text{ con } x_j \prec_i x_{j+1} \text{ y } x_m = x.$$

Definimos

$$r_u(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i(x), \ y$$

$$f_u^B(V) = \{x \in V : r_u(x) \leq r_u(y), \forall y \in V\}.$$

Está regla de elección es llamada Regla de Borda.

Ejemplo 2.3.4 *Sean* $N = \{1, 2, 3\}$ *y* $X = \{x, y, z\}$.

Supongamos

$$u = \begin{pmatrix} z & y & \\ y & z & \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{x}_{\preceq_2} & \underbrace{x\ z\ y}_{\preceq_3} \end{pmatrix}.$$

Veamos cómo se obtiene $f_u^B(X)$.

- $r_u(x) = 0$
- $r_u(y) = 3$
- $r_u(z) = 3$

Por lo tanto, $f_u^B(X) = \{x\}$.

Ejemplo 2.3.5 *Esta regla da como ganadores a todas la alternativas de la agenda en la situación de ejemplo 2.2.4.*

Ejemplo 2.3.6 *1) Consideremos la siguiente situación:*

$N = \{1, 2, 3\}$ *y* $X = \{w, x, y, z\}$.

Si $V = X$ *y*

$$u = \begin{pmatrix} w & w & w \\ z & y & x \\ y & x & z \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{z}_{\preceq_2} & \underbrace{y}_{\preceq_3} \end{pmatrix}$$

tenemos que:

- $r_u(w) = 9$
- $r_u(x) = 3$
- $r_u(y) = 3$
- $r_u(z) = 3$

Por lo tanto, $f_u^B(X) = \{x, y, z\}$.

Por otro lado,

- $N_{x,y} = N_{y,z} = N_{z,x} = 2$
- $N_{y,x} = N_{z,y} = N_{x,z} = 1$
- $N_{x,w} = N_{y,w} = N_{z,w} = 3$
- $N_{w,x} = N_{w,y} = N_{w,z} = 0$

Así, tenemos que no hay Ganador de Condorcet.

2) *Tomemos ahora,* $N = \{1,2,3\}$ *y* $X = \{t,w,x,y,z\}$.

Si $V = X$ *y*

$$u = \begin{pmatrix} w & w & x \\ t & t & t \\ z & z & w \\ y & y & z \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{x}_{\preceq_2} & \underbrace{y}_{\preceq_3} \end{pmatrix}$$

tenemos que:

- $r_u(t) = 9$
- $r_u(w) = 10$
- $r_u(x) = 4$
- $r_u(y) = 2$
- $r_u(z) = 5$

Por lo tanto, $f_u^B(X) = \{y\}$.

Por otro lado,

- $N_{x,y} = 2 > 1 = N_{y,x}$
- $N_{x,z} = 2 > 1 = N_{z,x}$
- $N_{x,w} = 2 > 1 = N_{w,x}$
- $N_{x,t} = 2 > 1 = N_{t,x}$

Por lo tanto, $f_u^C(V) = \{x\}$*.*

Así, $x \in V$*, es un Ganador de Condorcet, pero y* $x \notin f_u^B(V)$*, es decir, un ganador de Condorcet no es necesariamente un ganador de Borda.*

Esto nos dice que los ganadores de Condorcet no son necesariamente elegidos por Borda, es decir muchas veces se tiene $f_u^C(V) \nsubseteq f_u^B(V)$*.*

2.4. Postulados

En esta sección vamos a introducir algunos postulados que una regla de elección "justa" debería satisfacer. Los ilustraremos con ejemplos.

En lo siguiente f denota una regla de elección.

Definición 2.4.1 f *satisface el postulado de* ***Dominio Estándar(DS)*** *si:*

i) Hay al menos tres elementos en X*,*

ii) Hay al menos tres elementos en N*, y*

iii) f *está definida para todos los posibles pares de* $\mathcal{P} \times \mathscr{P}^*(X)$*.*

Definición 2.4.2 f *satisface el postulado de* ***Anonimato (A)*** *si, dados dos perfiles* u, u' *tales que* u' *es una permutación de* u *entonces* $f_u(V) = f_{u'}(V), \forall V \in \mathscr{P}^*(X)$*.*

Es bastante claro que todas las reglas que hemos definido hasta ahora, excepto la Regla de la Proyección, satisfacen este postulado.

Definición 2.4.3 i *es dictador si para todo* $u \in \mathcal{P}$ *y todo* $V \in \mathscr{P}^*(X)$

$$x \prec_i y \ \wedge \ x \in V \Longrightarrow y \notin f_u(V)$$

Diremos que f *es* ***Dictatorial*** *si existe* $i \in N$ *tal que* i *es dictador.*

Algunas veces, en lugar de escribir que f *no es dictatorial escribiremos simplemente* f *es* ***ND****.*

Que f *sea no dictatorial es por supuesto el postulado deseable para una regla de elección.*

Ejemplo 2.4.1 *La Regla de la Proyección, es claramente una regla dictatorial. Allí el individuo 1 es el dictador.*

Veremos inmediatamente que una regla de elección no puede al mismo tiempo satisfacer el postulado de anonimato y ser dictatorial.

Teorema 2.4.1 *Sea f es una regla de elección total, $|X| > 1$ y $|N| > 1$. Si f es dictatorial entonces f no satisface el postulado de Anonimato.*

Demostración: f dictatorial significa que existe $i \in N$ tal que i es un dictador. Sin pérdida de generalidad supongamos $i = 1$.

Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Ellos existen porque $|X| > 1$. Sea $u = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$ definido por

$$u = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ y & x & & x \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{y}_{\preceq_2} & \cdots & \underbrace{y}_{\preceq_n} \end{pmatrix}$$

Como $|N| > 1$, por lo menos los dos primeros individuos del perfil existen.

Como el individuo 1 es un dictador entonces $y \notin f_u(\{x, y\})$. Como f es total $f_u(\{x, y\}) = \{x\}$.

Tomemos $u' = (\preceq_2, \preceq_1, \ldots, \preceq_n)$ el perfil que resulta de permutar los dos primeros elementos de u. Luego, como el primer individuo es un dictador entonces $x \notin f_{u'}(\{x, y\})$. Como f es total $f_{u'}(\{x, y\}) = \{y\}$. Así, $f_u(\{x, y\}) \neq f_{u'}(\{x, y\})$. De donde se deduce que f no satisface el postulado de Anonimato.

■

Definición 2.4.4 *f satisface el postulado de* ***Pareto Fuerte (PF)*** *si, para todo perfil u y para toda agenda V si se cumplen las tres propiedades siguientes:*

i) $x \in V$, *y*

ii) $\forall i, x \preceq_i y$

iii) $\exists j$ *tal que* $x \prec_j y$

necesariamente $y \notin f_u(V)$.

Definición 2.4.5 *f satisface el postulado de* ***Pareto Débil(PD)*** *si, para todo perfil u y para toda agenda V si se cumplen las dos propiedades siguientes:*

i) $x \in V$, *y*

ii) $\forall i, x \prec_i y$

necesariamente $y \notin f_u(V)$.

Notemos que Pareto Fuerte implica Pareto Débil.

Ejemplo 2.4.2 *1)* ***La Regla de la Proyección no satisface PF.***

En efecto,

sean $X = \{t, x, y\}$, $N = \{1, 2, 3\}$, *y*

$$u = \left(\begin{array}{ccc} & t & t \\ t & y & y \\ \underbrace{x\ y}_{\preceq_1} & \underbrace{x}_{\preceq_2} & \underbrace{x}_{\preceq_3} \end{array} \right)$$

Luego, $f_u(X) = \{x, y\}$

Pero observe que

- $x \in V = X$,
- $\forall i, x \preceq_i y$,
- $\exists j [x \prec_i y]$, *por ejemplo* $j = 2$. *Además*
- $y \in f_u(V)$

*Por lo tanto (***PF***) no se cumple.*

2) ***La Regla de la Proyección satisface PD.***

Sean $u = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$ *un perfil,* $x, y \in X$ *y* V *una agenda, tales que:*

i) $x \in V$, *y*

ii) $\forall i, x \prec_i y$

Por ii) tenemos que $x \prec_1 y$. *Luego, por i) tenemos que* $y \notin min(V, \prec_1)$. *Es decir,* $y \notin f_u(V)$.

Por lo tanto, f *satisface* ***PD***.

*3) **La Regla de Borda, f^B, satisface los postulados de Pareto.***

En efecto, sean u un perfil y V una agenda tales que se cumplen:

i) $x \in V$,

ii) $\forall i, x \preceq_i y$, *y*

iii) $\exists j$ *tal que* $x \prec_j y$

Debemos mostrar que $y \notin f_u^B(V)$.

Por ii) tenemos que $r_i(x) \leq r_i(y), \forall i \in N$.

Luego, por iii), para algún j, $r_j(x) < r_j(y)$. *Así, por propiedades estándares de la suma* $\Sigma_{i=1}^n r_i(x) < \Sigma_{i=1}^n r_i(y)$, *es decir* $r_u(x) < r_u(y)$.

Por i) y la definición de $f_u^B(V)$ *tenemos lo deseado.*

Definición 2.4.6 $u \upharpoonright_V$ *denota el perfil u restringido a la agenda V.*

Ejemplo 2.4.3 *Si* $X = \{t, w, x, y, z\}$, $\quad V = \{t, w, \}$ *y*

$$u = \begin{pmatrix} w & w & x \\ t & t & t \\ z & z & w \\ y & y & z \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{x}_{\preceq_2} & \underbrace{y}_{\preceq_3} \end{pmatrix}$$

tenemos que:

$$u \upharpoonright_V = \begin{pmatrix} w & w & t \\ \underbrace{t}_{\preceq_1} & \underbrace{t}_{\preceq_2} & \underbrace{w}_{\preceq_3} \end{pmatrix}$$

Definición 2.4.7 *f satisface el postulado de **Independencia de Alternativas Irrelevantes(IAI)** si, para cada par de perfiles u y u' y cada agenda V tales que* $u \upharpoonright_V = u' \upharpoonright_V$ *se tiene* $f_u(V) = f_{u'}(V)$.

Ejemplo 2.4.4 *1) **La Regla de la Proyección satisface IAI***

Sean $u = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$, $u' = (\preceq'_1, \ldots, \preceq'_n)$ *perfiles y V una agenda, tales que* $u \upharpoonright_V = u' \upharpoonright_V$.

Luego, para cada i $\preceq_i\restriction_V=\preceq'_i\restriction_V$, *en particular,* $\preceq_1\restriction_V=\preceq'_1\restriction_V$.

De donde, $min(\preceq_1, V) = min(V, \preceq'_1)$. *O lo que es equivalente,* $f_u(V) = f_{u'}(V)$.

Por lo tanto, f *satisface* ***IAI***.

2) ***La Regla de Borda,*** f^B***, no satisface IAI***

En efecto,

sean $X = \{t, w, x, y, z\}$, $\quad V = \{x, t, w\}$,

$$u = \begin{pmatrix} w & w & y & y \\ t & t & x & x \\ z & z & z & z \\ y & y & w & w \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{x}_{\preceq_2} & \underbrace{t}_{\preceq_3} & \underbrace{t}_{\preceq_4} \end{pmatrix}, \quad y \quad u' = \begin{pmatrix} z & z & y & y \\ y & y & z & z \\ w & w & x & x \\ t & t & w & w \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{x}_{\preceq_2} & \underbrace{t}_{\preceq_3} & \underbrace{t}_{\preceq_4} \end{pmatrix},$$

entonces $u\restriction_V= u'\restriction_V$. *Y veamos que* $f_u(V) \neq f_{u'}(V)$.

$$\left.\begin{array}{rcl} r_u(x) & = & 6 \\ r_u(t) & = & 6 \\ r_u(w) & = & 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow f_u^B(V) = \{x, t\} \quad y \quad \left.\begin{array}{rcl} r_{u'}(x) & = & 4 \\ r_{u'}(t) & = & 2 \\ r_{u'}(w) & = & 6 \end{array}\right\} \Longrightarrow f_{u'}^B(V) = \{t\}.$$

Definición 2.4.8 *f satisface el postulado de* ***Explicaciones Transitivas(ET)*** *si para cada perfil u existe un preorden total $\preceq_u$ tal que para cada agenda V,* $f_u(V) = min(V, \preceq_u)$.

Ejemplo 2.4.5 *1)* ***La Regla de la Proyección satisface ET***

Tomamos para cada $u = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$, $\preceq_u=\preceq_1$.

Luego, trivialmente, $f_u(V) = min(V, \preceq_u)$. *Así,* f *satisface* ***ET***.

2) ***La Regla de Borda,*** f^B***, satisface ET***

Sea $u = (\preceq_1, \preceq_2, \ldots, \preceq_n) \in \mathcal{P}$.

Definimos $\preceq'_u$ *de la siguiente manera:*

$$x \preceq'_u y \Longleftrightarrow r_u(x) \leq r_u(y)$$

La relación $\preceq'_u$ *es reflexiva y transitiva porque* $\leq$ *es reflexiva y transitiva.*

Luego, para mostrar que $\preceq'_u$ es un preorden total solo falta ver que es total. En efecto, sean $x, y \in X$.

Luego, $r_u(x) \leq r_u(y)$ ó $r_u(y) \leq r_u(x)$. Es decir, $x \preceq'_u y$ ó $y \preceq'_u x$.

Finalmente que $f_u^B(V) = min(V, \preceq'_u)$ se deduce inmediatamente de la definición de f^B y la definición de $\preceq'_u$.

La proposición siguiente es una herramienta fundamental en la prueba del teorema central del capítulo 2.

Proposición 2.4.1 *Si f satisface Explicaciones Transitivas ($f_u(V) = min(V, \preceq_u)$) entonces $\preceq_u$ es único y está caracterizado por*

$$x \preceq_u y \Longleftrightarrow x \in f_u(\{x, y\})$$

Demostración:

Sea f una función de elección social que satisface el postulado de Explicaciones Transitivas ($f_u(V) = min(V, \preceq_u)$).

Definimos para cada perfil u, la relación $\preceq_u^{'}$ como sigue:

$$x \preceq_u^{'} y \Longleftrightarrow x \in f_u(\{x, y\})$$

Sea $u \in \mathcal{P}$.

Veamos que $\preceq_u^{'}$ es un preorden total.

- Totalidad.

  Sean $x, y \in X$.

  Consideremos la agenda $\{x, y\}$. $x \in min(\{x, y\}, \preceq_u)$ ó $y \in min(\{x, y\}, \preceq_u)$.

  Como f satisface el postulado de Explicaciones Transitivas entonces $x \in f_u(\{x, y\})$ ó $y \in f_u(\{x, y\})$. Es decir, $x \preceq_u^{'} y$ ó $y \preceq_u^{'} x$.

- Reflexividad.

  Para cada $x \in X$, $\{x\} = min(\{x\}, \preceq_u)$. Luego, $x \in f_u(\{x\})$. Por lo tanto, $x \preceq_u^{'} x$.

- Transitividad.

  Supongamos que $x \preceq_u^{'} y$ y $y \preceq_u^{'} z$. Es decir, $x \in f_u(\{x,y\})$ y $y \in f_u(\{y,z\})$. Y veamos que $x \preceq_u^{'} z$, es decir, que $x \in f_u(\{x,z\})$.

  Como f satisface Explicaciones Transitivas entonces $x \in min(\{x,y\}, \preceq_u)$ y $y \in min(\{y,z\}, \preceq_u)$. Es decir, $x \preceq_u y$ y $y \preceq_u z$. Luego, por la transitividad de $\preceq_u$ tenemos que $x \preceq_u z$. Así, $x \in min(\{x,z\}, \preceq_u)$. Luego, $x \in f_u(\{x,z\})$.

Así, hemos mostrado que $\preceq_u^{'}$ es un preorden total.
Veamos ahora que $min(V, \preceq_u^{'}) = f_u(V)$ y que es el único preorden con esta propiedad.

- $min(V, \preceq_u^{'}) = f_u(V)$

  Sea $x \in X$.

$$
\begin{aligned}
x \in min(V, \preceq_u') &\Leftrightarrow x \preceq_u' y, \forall y \in V \\
&\Leftrightarrow x \in f_u(\{x,y\}), \forall y \in V \\
&\Leftrightarrow x \in min(\{x,y\}, \preceq_u), \forall y \in V \\
&\Leftrightarrow x \preceq_u y, \forall y \in V \\
&\Leftrightarrow x \in min(V, \preceq_u) \\
&\Leftrightarrow x \in f_u(V)
\end{aligned}
$$

- $\preceq_u'$ es único.

  Sea $\preceq_u'$ un preorden total tal que $f_u(V) = min(V, \preceq_u')$. Veamos que $\preceq_u' = \preceq_u$.

  Sean $x, y \in X$.

$$
\begin{aligned}
x \preceq_u' y &\Leftrightarrow x \in min(\{x,y\}, \preceq_u') = f_u(\{x,y\}) = min(\{x,y\}, \preceq_u) \\
&\Leftrightarrow x \preceq_u y
\end{aligned}
$$

■

Es natural preguntarse si hay una caracterización de esta propiedad. La respuesta a esta pregunta es positiva y damos la caracterización que conocemos de inmediato.

Proposición 2.4.2 *Caracterización de Explicaciones Transitivas*[3].

f satisface Explicaciones Transitivas si y solo si f es total y, para cada perfil u y cada par de agendas V y V' tales que $V \cap V' \neq \phi$ se cumple:

[3] Estas propiedades que caracterizan Explicaciones Transitivas son exactamente las propiedades semánticas que hacen que los operadores de fusión (y también de revisión) tengan una representación en términos de asignaciones sincréticas(fieles en el caso de revisión)[5].

i) $f_u(V) \cap V' \subseteq f_u(V \cap V')$, *y*

ii) $f_u(V \cap V') \subseteq f_u(V) \cap V'$, *si este último conjunto no es vacío.*

Demostración:
($\Longleftarrow$) Sea $u \in \mathcal{P}$.

Debemos mostrar que existe un preorden total $\preceq_u$ tal que $f_u(V) = min(V, \preceq_u), \forall V$. Definimos $\preceq_u$ de la manera siguiente:

$$x \preceq_u y \Longleftrightarrow x \in f_u(\{x,y\})$$

Veamos que $\preceq_u$ es un preorden total.

1) Totalidad.

Sean $x, y \in \mathbf{X}$.

Como $f_u(\{x,y\}) \neq \phi$ y $f_u(\{x,y\}) \subseteq \{x,y\}$ entonces $x \in f_u(\{x,y\})$ ó $y \in f_u(\{x,y\})$.

Luego, $x \preceq_u y$ ó $y \preceq_u x$.

2) Reflexividad.

Sea $x \in X$.

Como f es total entonces $f_u(\{x\}) = \{x\}$. Por lo tanto, $x \preceq_u x$.

3) Transitividad.

Supongamos que $x \preceq_u y \quad \wedge \quad y \preceq_u z$. Veamos que $x \preceq_u z$, lo cual es equivalente a $x \in f_u(\{x,z\})$.

Notemos que si $x \in f_u(\{x,y,z\})$ entonces $x \in f_u(\{x,z\})$. En efecto,

por i), $f_u(\{x,y,z\}) \cap \{x,z\} \subseteq f_u(\{x,z\})$.

Así, basta mostrar que $x \in f_u(\{x,y,z\})$.

Por reducción al absurdo, supongamos que $x \notin f_u(\{x,y,z\})$.

Luego, $x \notin f_u(\{x,y,z\}) \cap \{x,y\}$.

Como $f_u(\{x,y,z\}) \cap \{x,y\}$ es o bien $\{x,y\}$, $\{x\}$, $\{y\}$ ó ϕ entonces necesariamente $f_u(\{x,y,z\}) \cap \{x,y\}$ es $\{y\}$ o bien ϕ.

3.1) Si $f_u(\{x,y,z\}) \cap \{x,y\} = \{y\}$, por $i)$ y $ii)$ $\{y\} = f_u(\{x,y\})$.

Esto contradice la hipótesis de que $x \preceq_u y$.

3.2) Si $f_u(\{x,y,z\}) \cap \{x,y\} = \phi$.

Como $f_u(\{x,y,z\}) \neq \phi$ y $f_u(\{x,y,z\}) \subseteq \{x,y,z\}$ entonces $f_u(\{x,y,z\}) = \{z\}$.

Luego, $f_u(\{x,y,z\}) \cap \{y,z\} = \{z\}$.

Por $i)$ y $ii)$ $\{z\} = f_u(\{y,z\})$.

Esto contradice la hipótesis de que $y \preceq_u z$.

Hemos mostrado que $\preceq_u$ es un preorden total. Falta ver que $f_u(V) = min(V, \preceq_u)$ para cualquier V.

Sea $V \in \mathcal{P}^*(\mathbf{X})$.

1) $f_u(V) \subseteq min(V, \preceq_u)$:

Por reducción al absurdo, supongamos que $f_u(V) \nsubseteq min(V, \preceq_u)$, es decir, que $\exists x \in f_u(V)\big[x \notin min(V, \preceq_u)\big]$

$x \notin min(V, \preceq_u)$ significa que $\exists y \in V\big[x \npreceq_u y\big]$.

Lo que estamos suponiendo es que,$\exists x, y \in V\big[x \in f_u(V) \wedge x \npreceq_u y\big]$.

Consideremos la agenda $\{x,y\}$.

Por $i)$ y $ii)$ tenemos que $f_u(V) \cap \{x,y\} = f_u(V \cap \{x,y\})$, es decir, que $f_u(V) \cap \{x,y\} = f_u(\{x,y\})$. Por lo tanto, $x \in f_u(\{x,y\})$.

Esto contradice que $x \npreceq_u y$.

2) $min(V, \preceq_u) \subseteq f_u(V)$:

Por reducción al absurdo, supongamos que $min(V, \preceq_u) \nsubseteq f_u(V)$, es decir, que $\exists x \in min(V, \preceq_u)\big[x \notin f_u(V)\big]$.

$x \in min(V, \preceq_u)$ significa que $x \preceq_u y, \forall y \in V$. Así, estamos suponiendo que, $\exists x \in V\big[x \preceq_u y,\, \forall y \in V \wedge x \notin f_u(V)\big]$.

Consideremos $z \in f_u(V)$, y la agenda $\{z,x\}$.

Luego, $f_u(V) \cap \{z,x\} \neq \phi$ porque $z \in f_u(V)$.

Por $i)$ y $ii)$ tenemos que $f_u(V) \cap \{z,x\} = f_u(V \cap \{z,x\})$. Por lo tanto, $f_u(V) \cap \{z,x\} = f_u(\{z,x\})$.

Como $x \notin f_u(\{z,x\})$ entonces $\{z\} = f_u(\{z,x\})$. Es decir, $z \prec_u x$.

Esto contradice que $x \in min(V, \preceq_u)$ porque $z \in V$.

($\Longrightarrow$) Sean u un perfil, V y V' agendas tales que $V \cap V' \neq \phi$. Mostraremos que se satisfacen $i)$ y $ii)$.

1) $f_u(V) \cap V' \subseteq f_u(V \cap V')$.

   Debemos mostrar que $min(V, \preceq_u) \cap V' \subseteq min(V \cap V', \preceq_u)$.

   Tenemos que

$$min(V, \preceq_u) \cap V' = \{x \in (V \cap V') : x \preceq_u y, \forall y \in V\} \quad \text{y}$$

$$min(V \cap V', \preceq_u) = \{x \in (V \cap V') : x \preceq_u y, \forall y \in (V \cap V')\}.$$

   De aquí, tenemos lo deseado.

2) $f_u(V \cap V') \subseteq f_u(V) \cap V'$, si $f_u(V) \cap V' \neq \phi$.

   Supongamos que $f_u(V) \cap V' \neq \phi$. Es decir, $\exists y \in V\big[y \in f_u(V) \;\wedge\; y \in V'\big]$. De donde tenemos que $y \preceq z, \forall z \in V \;\wedge\; y \in (V \cap V')$.

   Debemos mostrar que $min(V \cap V', \preceq_u) \subseteq min(V, \preceq_u) \cap V'$.

   Sea $x \in min(V \cap V', \preceq_u)$. Es claro que $x \in V'$, así, basta mostrar que $x \in min(V, \preceq_u)$. En efecto,

   Sea $w \in V$.

   Como $x \in min(V \cap V', \preceq_u)$ y $y \in (V \cap V')$, entonces $x \preceq_u y$.

   Por otro lado, $y \preceq_u w$. Luego, por la transitividad, $x \preceq_u w$.

$\blacksquare$

2.5. Análisis de los Postulados sobre algunas Reglas de Elección

Verificamos si cada una de las reglas de elección definidas hasta ahora satisface o no cada uno de los postulados de la sección anterior.

- **La Regla de Condorcet, f^C, satisface los postulados de Pareto.**

  En efecto, sean u un perfil, $x, y \in X$ y V una agenda tales que:

  i) $x \in V$,

  ii) $\forall i, x \preceq_i y$, y

  iii) $\exists j$ tal que $x \prec_j y$

  Debemos mostrar que $y \notin f_u^C(V)$.

  De las hipótesis es fácil ver que $N_{x,y} > N_{y,x}$, por lo tanto y no es ganador de Condorcet de V relativo a u. Así, $y \notin f_u^C(V)$.

- **La Regla de Condorcet, f^C, satisface IAI**

  En efecto, sean $u = (\preceq_1, \preceq_2, \ldots, \preceq_n)$ y $u' = (\preceq'_1, \preceq'_2, \ldots, \preceq'_n)$ perfiles y V una agenda tales que $u \restriction_V = u' \restriction_V$.

  x es Ganador de Condorcet en V respecto a u significa que

  $$\big|\{i \in N : x \prec_i y\}\big| \geq \big|\{i \in N : y \prec_i x\}\big|, \forall y \in V$$

  Como $u \restriction_V = u' \restriction_V$ entonces

  $$\big|\{i \in N : x \prec_i y\}\big| \geq \big|\{i \in N : y \prec_i x\}\big| \Longleftrightarrow \big|\{i \in N : x \prec'_i y\}\big| \geq \big|\{i \in N : y \prec'_i x\}\big|$$

  lo que significa que, x es Ganador de Condorcet en V respecto a u'.

  Esto muestra lo deseado.

- **La Regla de Condorcet, f^C no satisface ET** porque no es total. Aún si forzáramos esta regla a ser total (dando como resultado, por ejemplo, toda la agenda en los casos de indefinición) la regla no puede satisfacer ET. Esto se puede ver fácilmente como consecuencia del teorema de Imposibilidad de Arrow Probado en el capítulo siguiente.

- **La Regla de Pareto satisface, evidentemente, los postulados de Pareto.**

- **La Regla de Pareto satisface IAI.**

  Sean $u = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$, $u' = (\preceq'_1, \ldots, \preceq'_n)$ perfiles y V una agenda, tales que $u \restriction_V = u' \restriction_V$.

Luego, para cada $i \preceq_i \restriction_V = \preceq'_i \restriction_V$.

Basta mostrar que x es pareto superior a y en $u \Longleftrightarrow x$ es pareto superior a y en u'.

Luego,

$$\begin{array}{rcl} x \text{ es pareto superior a } y \text{ en } u & \Longleftrightarrow & \forall i, x \preceq_i y \wedge \exists j[x \prec_j y] \\ & \Longleftrightarrow & \forall i, x \preceq'_i y \wedge \exists j[x \prec'_j y] \\ & \Longleftrightarrow & x \text{ es pareto superior a } y \text{ en } u' \end{array}$$

- **La Regla de Pareto no satisface ET** porque no es total. Aún si forzáramos esta regla a ser total (dando como resultado, por ejemplo, toda la agenda en los casos de indefinición) la regla no puede satisfacer **ET**. Esto se puede ver fácilmente como consecuencia del teorema de Imposibilidad de Arrow probado en el capítulo siguiente.

- **La Regla de Condorcet Ordenada no satisface los postulados de Pareto.**

  Basta observar el ejemplo 2.3.3, allí tenemos $f_u(V) = \{z\}$. Sin embargo, para todo i, $x \prec_i z$ y $x \in V$. Así el postulado de Pareto Débil no se cumple para esta regla.

- **La Regla de Condorcet Ordenada satisface IAI**:

  Sean $u = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$, $u' = (\preceq'_1, \ldots, \preceq'_n)$ perfiles y V una agenda, tales que $u \restriction_V = u' \restriction_V$.

  Luego, para cada $i \preceq_i \restriction_V = \preceq'_i \restriction_V$.

  Pongamos

  $$N_{x,y,u} = |\{i : x \prec_i y\}| \text{ y } N_{x,y,u'} = |\{i : x \prec'_i y\}|$$

  Como $u \restriction_V = u' \restriction_V$ entonces $\forall x, y \in V, N_{x,y,u} = N_{x,y,u'}$

  Luego, $f_u(V) = f_{u'}(V)$.

- **La Regla de Condorcet Ordenada no satisface ET**.

  Por reducción al absurdo.

  Supongamos que la Regla de Condorcet Ordenada (f), satisface **ET**.

  Por la proposición 2.4.1 la relación $\preceq_u$ definida por

  $$x \preceq_u y \Longleftrightarrow x \in f_u(\{x, y\})$$

  es el único preorden total que satisface $f_u(V) = min(V, \preceq_u)$.

Sean $N = \{1,2,3\}$, $X = \{x,y,z\}$ y

$$u = \left(\underbrace{\begin{matrix} y \\ z \\ x \end{matrix}}_{\preceq_1} \quad \underbrace{\begin{matrix} y \\ x \\ z \end{matrix}}_{\preceq_2} \quad \underbrace{\begin{matrix} y \\ x \\ z \end{matrix}}_{\preceq_3} \right).$$

Luego,

$$f_u(\{x,y\}) = \{x\} \Longleftrightarrow x \prec_u y$$
$$f_u(\{y,z\}) = \{y\} \Longleftrightarrow y \prec_u z$$
$$f_u(\{x,z\}) = \{z\} \Longleftrightarrow z \prec_u x$$

Esta situación contradice que la relación $\preceq_u$ sea un preorden total, porque no es una relación transitiva.

Por lo tanto, concluimos que f no satisface **ET**.

- **La Regla de Borda, f^B, satisface ET.**

  En la sección anterior mostramos que f^B satisface **ET**. Presentamos a continuación otra demostración del mismo hecho, usando la proposición 2.4.2.

  Así, debemos mostrar que f es total y, que para cada perfil u y cada par de agendas V y V' tales que $V \cap V' \neq \phi$ se cumple:

  i) $f_u^B(V) \cap V' \subseteq f_u^B(V \cap V')$, y
  ii) $f_u^B(V \cap V') \subseteq f_u^B(V) \cap V'$, si este último conjunto no es vacío.

  En efecto, tenemos que f^B es total por su definición.

  Sean $u = (\preceq_1, \preceq_2, \ldots, \preceq_n) \in \mathcal{P}$ y $V, V' \in \mathscr{P}^*(X)$ tales que $V \cap V' \neq \phi$.

  Tenemos que

$$f_u^B(V) \cap V' = \{x \in (V \cap V') : r_u(x) \leq r_u(y), \forall y \in V\}, \quad y$$

$$f_u^B(V \cap V') = \{x \in (V \cap V') : r_u(x) \leq r_u(y), \forall y \in (V \cap V')\},$$

  de donde, se satisface i).

Supongamos ahora que $f_u^B(V) \cap V' \neq \phi$. Es decir,

$$\exists t \in X \Big[t \in \{x \in (V \cap V') : r_u(x) \leq r_u(y), \forall y \in V\} \Big]$$

Sea $h \in f_u(V \cap V')$. Es decir, $h \in \{x \in (V \cap V') : r_u(x) \leq r_u(y), \forall y \in (V \cap V')\}$.

Como $t \in (V \cap V')$ entonces $r_u(h) \leq r_u(t)$. Luego, usando la transitividad de $\leq$ tenemos que $r_u(h) \leq r_u(y), \forall y \in V$.

Por lo tanto, $h \in f_u(V)$. Lo que muestra que se satisface ii).

A continuación presentamos una tabla que resume esta sección.

Regla \Postulado	A	DS	ET	IAI	PF	PD	ND
de la Proyección	×	✓	✓	✓	×	✓	×
de Condorcet	✓	×	×	✓	✓	✓	✓
de Pareto	✓	×	×	✓	✓	✓	✓
de Borda	✓	✓	✓	×	✓	✓	✓
de Condorcet Ordenada	✓	✓	×	✓	×	×	✓

Note que las cuatro últimas reglas satisfacen claramente el anonimato, por consiguiente no pueden ser dictatoriales.

Notemos también que ninguna de las reglas estudiadas satisface todos los postulados a la vez. Entonces, es natural preguntarse si existe una regla de elección que si los satisface. La respuesta a esta pregunta la encontraremos en el capítulo siguiente.

Capítulo 3

Teorema de Imposibilidad de Arrow

3.1. Teorema de Imposibilidad de Arrow

Este célebre teorema nos dice que no existe una regla de elección que satisface a la vez, los siguientes postulados:

1. Dominio Estándar,
2. Explicaciones Transitivas,
3. Independencia de Alternativas Irrelevantes,
4. Pareto Débil, y
5. Ausencia de dictador.

Como parece que cada uno de estos postulados es "sensato", se tiende a pensar que una buena regla de elección debe satisfacerlos. Lo sorprendente del Teorema de Arrow es que nos dice que no hay reglas completamente razonables en este sentido. Debido a esto, se hace referencia a este teorema diciendo que es imposible la existencia de una regla de elección "perfecta".

En [2] y [3] se presenta este teorema así:

Teorema 3.1.1 ***(Teorema de Imposibilidad de Arrow.)***
Sea f una función de elección social que satisface:

1. *Dominio Estándar,*

2. *Explicaciones Transitivas,*

3. *Independencia de Alternativas Irrelevantes, y*

4. *Pareto Fuerte.*

Entonces f es dictatorial.

Sin embargo, cambiando las definiciones de *un conjunto localmente decisivo* y *globalmente decisivo para una alternativa x contra otra alternativa y*, que se presentan en dichas referencias por las que presentamos en la sección siguiente de este capítulo, obtenemos una demostración análoga a la presentada en las mismas referencias para el Teorema de Imposibilidad así:

Teorema 3.1.2 ***(Teorema de Imposibilidad de Arrow.)***
Sea f una función de elección social que satisface:

1. *Dominio Estándar,*

2. *Explicaciones Transitivas,*

3. *Independencia de Alternativas Irrelevantes, y*

4. *Pareto Débil.*

Entonces f es dictatorial.

Notemos que esta segunda presentación del Teorema implica la primera.

La prueba de este teorema es esencialmente la misma que damos de una versión restringida a dominios estructurados (ver Teorema 3.2.1).

3.2. Perfiles Estructurados y Teorema de Arrow

En muchas situaciones las preferencias que se consideran, y por ende los perfiles considerados, tienen cierta estructura. Entonces cabe preguntarse si para ese tipo de perfiles el teorema de Arrow sigue siendo válido.

En esta sección vamos a estudiar ciertos perfiles estructurados y la validez del teorema de Arrow para esos perfiles.

Vamos a distinguir un subconjunto del conjunto de los perfiles, dado un conjunto de alternativas X con cierta "estructura". Tal "estructura" estará dada por una distancia definida sobre X. Para ello, recordamos la definición de una función de *distancia*.

Definición 3.2.1 *Sea X un conjunto. $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$, con $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, es una función de distancia sobre X si satisface las tres propiedades siguientes:*

- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Definición 3.2.2 *Sea $X = \{0, 1\}^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Definimos $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ así:*

$$d(x, z) = \#\ \textit{de coordenadas en que difieren}\ x\ \textit{y}\ z.$$

Es fácil ver que está función es una distancia. Ella es llamada distancia de Hamming.

Definición 3.2.3 $g : \bigcup_{n\geq 1} (\mathbb{R}^+)^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *es una función de agregación si satisface:*
$g(\overline{0}) = 0$, *y* $g(\overline{x}) = g(\overline{y})$ *si* $\overline{y}$ *es una permutación de* $\overline{x}$.

Definición 3.2.4 *Sea $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una distancia sobre X.*

Podemos definir ahora $d^g : X \times \mathscr{P}^*(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una "distancia"[1] *entre elementos de X y subconjuntos no vacíos de X a partir de d y una función de agregación $g : \bigcup_{n\geq 1} (\mathbb{R}^+)^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$.*

Definimos $d^g(x, V) = g(d(x, v_1), ..., d(x, v_n))$, donde $V = \{v_1, ..., v_n\}$.

Notemos que como g es una función de agregación(en particular no depende del orden en que se presentan sus argumentos), d^g está bien definida.

Ejemplo 3.2.1 *Presentamos las más usadas:*

- $d^s(x, V) := \sum_{y \in V} d(x, y)$,

[1] Estrictamente hablando esto no es una distancia pero por abuso de lenguaje llamaremos a este tipo de funciones distancias.

donde $s = g : \bigcup_{n\geq 1} (\mathbb{R}^+)^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *esta dada por* $g(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$

- $d^{min}(x, V) := min\{d(x, y) : y \in V\}$,

  donde $min = g : \bigcup_{n\geq 1} (\mathbb{R}^+)^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *esta dada por* $g(x_1, ..., x_n) = min\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$

- $d^{max}(x, V) := max\{d(x, y) : y \in V\}$,

  donde $max = g : \bigcup_{n\geq 1} (\mathbb{R}^+)^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *esta dada por* $g(x_1, ..., x_n) = max\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$

Definición 3.2.5 *Sea X un conjunto de alternativas y d una distancia sobre X. Un preorden total $\preceq$ es d^g-consistente si existe $A \in \mathscr{P}^*(X)$ tal que*

$$x \preceq y \Longleftrightarrow d^g(x, A) \leq d^g(y, A)$$

Ejemplo 3.2.2 *Sean $X = \{0, 1\}^3$ y d la distancia de Hamming.*

- *El preorden total siguiente es $d^{min}-$consistente, con $A = \{(0, 0, 0)\}$.*

$$\begin{array}{c} (1,1,1) \\ (1,1,0)\ (1,0,1)\ (0,1,1) \\ (0,0,1)\ (0,1,0)\ (1,0,0) \\ (0,0,0) \end{array}$$

- *El preorden total siguiente es d^s-consistente, con $A = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1)\}$.*

$$\begin{array}{c} (1,1,1)\ (1,1,0) \\ (1,0,1)\ (0,1,1)\ (0,1,0)\ (1,0,0) \\ (0,0,1)\ (0,0,0) \end{array}$$

- *El preorden total siguiente es d^s-consistente, con $A = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$.*

$$\begin{array}{c} (0,1,1) \\ (0,0,1)\ (1,1,1)\ (0,1,0) \\ (0,0,0)\ (1,1,0)\ (1,0,1) \\ (1,0,0) \end{array}$$

Definición 3.2.6 *Un perfil* $u = (\preceq_1, \preceq_2, \ldots, \preceq_n)$ *es* d^g-*consistente si para cada* i, $\preceq_i$ *es* d^g-*consistente.*

En [3] y [4] aparece la noción de perfil $d-$consistente. Es fácil ver que esa noción corresponde a la de perfil $d^{min}-$consistente.

Como queremos estudiar las reglas de elección restringidas a los perfiles d^g-consistentes, modificaremos la definición de algunos postulados.

Definición 3.2.7 *Una regla de elección social* f *satisface la propiedad de* ***Dominio*** d^g-***consistente(D***d^g***)*** *si:*

i) Hay al menos tres elementos en X*,*

ii) Hay al menos tres elementos en N*, y*

iii) f *está definida para cada perfil* d^g-*consistente.*

Definición 3.2.8 f *satisface la propiedad de* ***Explicaciones Transitivas*** d^g-***consistentes (ET***d^g***)*** *si para cada perfil* u d^g-*consistente existe un preorden total* $\preceq_u$ *tal que para cada agenda* V, $f_u(V) = min(V, \preceq_u)$.

Lo interesante es que, si modificamos la hipótesis del Teorema de Imposibilidad cambiando Dominio Estándar por Dominio d^g-consistente y Explicaciones Transitivas por Explicaciones Transitivas d^g-consistentes entonces el teorema sigue siendo válido cuando d^g satisface ciertas propiedades. En particular, la propiedad de Riqueza de la próxima definición.

Definición 3.2.9 (Propiedad de Riqueza.) *Una función de distancia* $d^g : X \times \mathscr{P}^*(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *satisface la Propiedad de* ***Riqueza*** *si dados* $x, y, z \in X$ *distintos entre si, se cumple que:*

i) $\exists Y \subseteq X \left[d^g(x,Y) < d^g(y,Y) < d^g(z,Y) \right]$,

ii) $\exists Y \subseteq X \left[d^g(x,Y) = d^g(y,Y) < d^g(z,Y) \right]$, *y*

iii) $\exists Y \subseteq X \left[d^g(x,Y) < d^g(y,Y) = d^g(z,Y) \right]$

En tal caso, diremos que d^g *es rica.*

Ahora estamos listos para enunciar el Teorema de Arrow modificado:

Teorema 3.2.1 ***(Teorema de Imposibilidad de Arrow para perfiles*** d^g-***consistentes)*** *Sean* d^g *una distancia rica entre elementos de* X *y subconjuntos no vacíos de* X *y* f *una función de elección social que satisface:*

1. *Dominio* d^g-*consistente,*

2. *Explicaciones Transitivas* d^g-*consistentes,*

3. *Independencia de Alternativas Irrelevantes, y*

4. *Pareto Débil.*

Entonces f *es dictatorial.*

Lo que resta de esta sección será dedicado a la demostración del nuevo Teorema de Imposibilidad.

Comenzamos definiendo ciertas propiedades respecto a algunos subconjuntos especiales del conjunto de votantes, para demostrar un par de lemas y finalmente un teorema que refleja la fortaleza de las hipótesis del Teorema de Imposibilidad.

Definición 3.2.10 *Un subconjunto* S *de* N*, no vacío, es* ***localmente decisivo para*** x ***contra*** y*, si para cada perfil* u *y cada agenda* V *si:*

i) $x \prec_i y, \forall i \in S$,

ii) $y \prec_k x, \forall k \in N \setminus S$, *y*

iii) $x \in V$,

entonces $y \notin f_u(V)$.

En tal caso, escribimos xD_Sy.

Definición 3.2.11 *Un subconjunto* S *de* N*, no vacío, es* ***globalmente decisivo para*** x ***contra*** y*, si para cada perfil* u *y cada agenda* V *si:*

i) $x \prec_i y, \forall i \in S$,*y*

ii) $x \in V$,

entonces $y \notin f_u(V)$.

En tal caso, escribimos $xD^*_S y$.

Si $xD^*_S y$ *para cualquier par de alternativas* x, y, *diremos simplemente que* S *es* ***decisivo***.

Notemos que:

- Si $xD^*_S y$ entonces $xD_S y$.
- Si f satisface Pareto Débil entonces N es decisivo.
- Si S es decisivo y $S = \{i\}$ entonces i es un dictador.

Lema 3.2.1 *(Primer Resultado de Contagio).*
Sean d^g *una distancia rica entre elementos de* X *y subconjuntos no vacíos de* X *y* f *una función de elección social que satisface* ***D***d^g, ***ET***d^g, ***IAI*** *y* ***PD*** *entonces,*
si $xD_S y$ *entonces* $xD^*_S z$, *para cualquier* $z \in X$ *que sea diferente de* x *y de* y.

Demostración:

Sean $S \subseteq N$, $S \neq \phi$ y $x, y \in X$ con $x \neq y$ tales que $xD_S y$.
Por Dd^g podemos considerar $z \in X$ tal que $z \neq x$ y $z \neq y$.
Mostraremos que $xD^*_S z$.
Sean u un perfil d^g-consistente y $V \in \mathscr{P}^*(X)$ tal que:

i) $x \prec_i z, \forall i \in S$,y

ii) $x \in V$,

Así tenemos,

$$u \restriction \{x, z\} = \left(\begin{array}{cc} z & \\ \underbrace{x}_{S} & \underbrace{\quad}_{N \backslash S} \end{array} \right)$$

lo cual significa que para los elementos de S, x es mejor que z y fuera de S no escribimos cómo es la relación entre x y z porque puede variar según los individuos.

Debemos ver que $z \notin f_u(V)$.

Como d^g es rica entonces $\forall i \in S$ existe $Y_i \subseteq X$ tal que

$$d^g(x, Y_i) < d^g(y, Y_i) < d^g(z, Y_i)$$

Definimos para cada $i \in S$, la relación $\preceq_{Y_i}$ de la siguiente manera:

$$a \preceq_{Y_i} b \Longleftrightarrow d^g(a, Y_i) \leq d^g(b, Y_i).$$

Luego, $\preceq_{Y_i}$ es un preorden total.

Por la definición de $\preceq_{Y_i}$ y de un preorden d^g-consistente tenemos que $\preceq_{Y_i}$ es d^g-consistente.

Notemos además que $\preceq_{Y_i}\restriction_{\{x,z\}} = \preceq_i\restriction_{\{x,z\}}$

Por otro lado, tenemos que para cada $k \in N \setminus S$ ocurre una de las siguientes situaciones:

1. $x \prec_k z$

2. $z \prec_k x$

3. $x \sim_k z$

Si se da el caso 1., razonado de manera análoga a lo hecho para cada $i \in S$ tenemos que, para cada $k \in N \setminus S$ existe un preorden total d^g-consistente tal que $\preceq_{Y_k}\restriction_{\{x,z\}} = \preceq_k\restriction_{\{x,z\}}$ y además $y \prec_{Y_k} x$.

De darse el caso 2., razonado de manera análoga a lo hecho para cada $i \in S$ tenemos que, para cada $k \in N \setminus S$ existe un preorden total d^g-consistente tal que $\preceq_{Y_k}\restriction_{\{x,z\}} = \preceq_k\restriction_{\{x,z\}}$ y además $y \prec_{Y_k} z$.

Si se da el caso 3.

Como d^g es rica entonces existe $Y_k \subseteq X$ tal que

$$d^g(x, Y_k) = d^g(z, Y_k) > d^g(y, Y_k)$$

Definimos para cada $k \in N \setminus S$, la relación $\preceq_{Y_k}$ de la siguiente manera:

$$a \preceq_{Y_k} b \Longleftrightarrow d^g(a, Y_k) \leq d^g(b, Y_k).$$

Luego, $\preceq_{Y_k}$ es un preorden total d^g-consistente.

Notemos además que $\preceq_{Y_k}\restriction_{\{x,z\}} = \preceq_k\restriction_{\{x,z\}}$ y $y \prec_{Y_k} z \sim_{Y_k} x$.

Así, podemos considerar $u' = (\preceq_{Y_1}, \ldots, \preceq_{Y_n})$ un perfil d^g-consistente tal que:

a) $u \restriction_{\{x,z\}} = u' \restriction_{\{x,z\}}$,

b) $x \prec_{Y_i} y \prec_{Y_i} z, \forall i \in S$, y

c) $y \prec_{Y_k} z \quad \wedge \quad$ y $\prec_{Y_k} x, \forall k \in N \setminus S$.

$$u' \upharpoonright_{\{x,y,z\}} = \left(\begin{array}{cc} z & x \wedge z \\ y & \text{como en } u \\ \underbrace{x}_{S} & \underbrace{y}_{N \setminus S} \end{array} \right)$$

Por PD $z \notin f_{u'}(\{y,z\})$. Luego, por ETd^g, $\quad y \prec_{u'} z$.

Como xD_Sy entonces $y \notin f_{u'}(\{y,x\})$. Luego, por ETd^g, $\quad x \prec_{u'} y$.

Tenemos entonces, por transitividad, que $x \prec_{u'} z$, lo cual es equivalente a $z \notin f_{u'}(\{x,z\})$.

Por IAI y $a)$ tenemos que $f_u(\{x,z\}) = f_{u'}(\{x,z\})$.

Por lo tanto, $z \notin f_u(\{x,z\})$, es decir, $x \prec_u z$. De donde, $z \notin min(V, \preceq_u)$. Es decir, $z \notin f_u(V)$.

■

Lema 3.2.2 *(Segundo Resultado de Contagio).*
*Sean d^g una distancia rica entre elementos de X y subconjuntos no vacíos de X y f una función de elección social que satisface **D**d^g, **ET**d^g, **IAI** y **PD** entonces, si xD_Sy entonces wD^*_Sy, para cualquier $w \in X$ diferente de x y de y.*

Demostración:

Sean $S \subseteq N$, $S \neq \phi$ y $\quad x, y \in X$ con $x \neq y$ tales que xD_Sy.

Consideremos $w \in X$ tal que $w \neq x$ y $w \neq y$.

Mostraremos que wD^*_Sy.

Sean u un perfil d^g-consistente y $V \in \mathscr{P}^*(X)$ tal que:

i) $w \prec_i y, \forall i \in S$,y

ii) $w \in V$,

Así,

$$u \upharpoonright_{\{y,w\}} = \left(\begin{array}{cc} y & \\ \underbrace{w}_{S} & \underbrace{\quad}_{N \setminus S} \end{array} \right)$$

Debemos ver que $y \notin f_u(V)$.

Como d^g es rica entonces para cada $i \in S$ existe un preorden total d^g-consistente $\preceq_{Y_i}$ tal que $\preceq_{Y_i}\upharpoonright_{\{y,w\}} = \preceq_i \upharpoonright_{\{y,w\}}$ y además $w \prec_{Y_i} x \prec_{Y_i} y$.

Por otro lado, tenemos que para cada $k \in N \setminus S$ ocurre una de las siguientes situaciones:

1. $w \prec_k y$
2. $y \prec_k w$
3. $w \sim_k y$

Si se da el caso 1. o el caso 2., razonado de manera análoga a lo hecho para cada $i \in S$ tenemos que, para cada $k \in N \setminus S$ existe un preorden total d^g-consistente tal que $\preceq_{Y_k}\restriction_{\{y,w\}}=\preceq_k\restriction_{\{y,w\}}$ y además $y \prec_{Y_k} x \wedge w \prec_{Y_k} x$.

Si se da el caso 3. entonces, como d^g es rica para cada $k \in N \setminus S$ existe $Y_k \subseteq X$ tal que

$$d^g(y, Y_k) = d^g(w, Y_k) < d^g(x, Y_k)$$

Definimos para cada $k \in N \setminus S$, la relación $\preceq_{Y_k}$ de la siguiente manera:

$$a \preceq_{Y_k} b \Longleftrightarrow d^g(a, Y_k) \leq d^g(b, Y_k).$$

Luego, $\preceq_{Y_k}$ es un preorden total d^g-consistente.

Notemos además que $\preceq_{Y_k}\restriction_{\{w,y\}}=\preceq_k\restriction_{\{w,y\}}$ y $y \prec_{Y_k} x \wedge w \prec_{Y_k} x$.

Así, podemos considerar $u' = (\preceq_{Y_1}, \ldots, \preceq_{Y_n})$ un perfil d^g-consistente tal que:

a) $u \restriction_{\{y,w\}}= u' \restriction_{\{y,w\}}$,

b) $w \prec_{Y_i} x \prec_{Y_i} y, \forall i \in S$, y

c) $y \prec_{Y_k} x \ \wedge \ w \prec_{Y_k} x, \forall k \in N \setminus S$.

$$u' \restriction_{\{x,y,z\}}= \left(\begin{array}{cc} y & x \\ x & y \ \wedge \ w \\ \underbrace{w}_{S} & \underbrace{\text{como en } u}_{N \setminus S} \end{array} \right)$$

Por PD $x \notin f_{u'}(\{x, w\})$. Luego, $w \prec_{u'} x$.

Como $xD_S y$ entonces $y \notin f_{u'}(\{y, x\})$. Luego, $x \prec_{u'} y$.

Tenemos entonces, por transitividad, que $w \prec_{u'} y$, equivalentemente $y \notin f_{u'}(\{y, w\})$

Como $f_u(\{y, w\}) = f_{u'}(\{y, w\})$ entonces $y \notin min(V, \preceq_u)$. Por lo tanto, $y \notin f_u(V)$.

∎

Teorema 3.2.2 *(Teorema General de Contagio)*
*Sean d^g una distancia rica entre elementos de X y subconjuntos no vacíos de X y f una función de elección social que satisface **D**d^g, **ET**d^g, **IAI** y **PD** entonces,*
si xD_Sy para algún par $x, y \in X$ entonces wD^*_Sz, para cualquier par w, z con $w \neq z$, es decir S es decisivo.

Demostración:

Sean $S \subseteq N$, $S \neq \phi$ y $x, y \in X$ con $x \neq y$ tales que xD_Sy.

Afirmación 1 *wD^*_Sz, para cualquier par $w, z \in \{x, y, t\}$ y cualquier $t \in X$, $t \neq x$ y $t \neq y$.*

Consideremos $t \in X$ tal que $t \neq x$ y $t \neq y$.
Estudiaremos la agenda $\{x, y, t\} \subseteq X$.
Por el Lema 3.2.1 tenemos que xD^*_St.
Por el Lema 3.2.2 tenemos que yD^*_St.
Por el Lema 3.2.1 tenemos que yD^*_Sx.
Por el Lema 3.2.2 tenemos que tD^*_Sx.
Por el Lema 3.2.1 tenemos que tD^*_Sy.
Por el Lema 3.2.2 tenemos que xD^*_Sy.
Así, queda demostrada la afirmación.
Consideremos ahora $w, z \in X$ tal que $w \neq z$. Debemos ver que wD^*_Sz.
Si w ó z es igual a x ó y se cumple lo deseado por la afirmación anterior.
En otro caso, consideramos $\{x, y, w\}$ y tenemos que wD^*_Sx. Luego, consideramos $\{w, x, z\}$ y tenemos que wD^*_Sz.

■

Demostración del Teorema de Imposibilidad de Arrow para perfiles d^g-consistentes.

Demostración:

Por PD, N es decisivo.
Sea $\mathcal{S} := \{M \subseteq N : M \text{ es decisivo}\}$.
$\mathcal{S} \neq \phi$ porque $N \in \mathcal{S}$.
Consideremos $S \in \mathcal{S}$ tal que $|S| \leq |M|$, $\forall M \in \mathcal{S}$, es decir S es de tamaño minimal.
Si $|S| = 1$, entonces $S = \{i\}$ para algún $i \in N$ y el individuo i es un dictador.
Mostraremos que $|S| = 1$ por reducción al absurdo.

Supongamos que $|S| \geq 2$.

Tomemos $i \in S$ y consideremos $S \backslash \{i\} \subseteq N$.

$S \backslash \{i\} \neq \phi$ porque suponemos que $|S| \geq 2$.

Por Dd^g consideremos la agenda $V = \{x, y, z\}$ y el perfil u d^g-consistente tal que u restringido a V este definido así:

$$u \upharpoonright_{\{x,y,z\}} = \begin{pmatrix} z & x & y \\ y & z & x \\ \underbrace{x}_{\{i\}} & \underbrace{y}_{S\backslash\{i\}} & \underbrace{z}_{N\backslash S} \end{pmatrix}$$

Note que un tal perfil existe porque d^g es rica.

Examinemos $f_u(\{y, z\})$.

Como S es decisivo entonces $z \notin f_u(\{y, z\})$. Así tenemos que $y \prec_u z$.

Veamos ahora que $x \preceq_u y$.

Por reducción al absurdo.

Supongamos que $y \prec_u x$, es decir, $x \notin f_u(\{x, y\})$.

$$u \upharpoonright_{\{x,y\}} = \begin{pmatrix} y & x & y \\ \underbrace{x}_{\{i\}} & \underbrace{y}_{S\backslash\{i\}} & \underbrace{x}_{N\backslash S} \end{pmatrix}$$

Como $x \prec_k y, \forall k \in (N \backslash S) \cup \{i\} \ \wedge \ y \prec_j x, \forall j \in S \backslash \{i\} \ \wedge \ x \notin f_u(\{x, y\})$ entonces $yD_{S\backslash\{i\}}x$.

Por el teorema general de contagio $S \backslash \{i\}$ es decisivo.

Esto contradice la minimalidad de S, es decir que $|S| \leq |M|$, $\forall M \in \mathcal{S}$.

Por lo tanto, $x \preceq_u y$.

Como $y \prec_u z \quad \wedge \quad x \preceq_u y$ entonces $x \prec_u z$. Lo que significa que $z \notin f_u(\{x, z\})$.
Ahora bien,

$$u \upharpoonright_{\{x,z\}} = \begin{pmatrix} z & x & x \\ \underbrace{x}_{\{i\}} & \underbrace{z}_{S\backslash\{i\}} & \underbrace{z}_{N\backslash S} \end{pmatrix}$$

Como $z \prec_k x, \forall k \in N \backslash \{i\}) \ \wedge \ x \prec_i z \ \wedge \ z \notin f_u(\{x, z\})$ entonces $xD_{\{i\}}z$.

Por el teorema general de contagio $\{i\}$ es decisivo.

Esto contradice la minimalidad de S, es decir que $|S| \leq |M|$, $\forall M \in \mathcal{S}$.

De esta manera queda demostrado que $|S| = 1$, es decir existe un dictador.

■

En el capítulo siguiente veremos que existen distancias ricas y no ricas. También, que en general el conjunto de los perfiles d^g-consistentes es un subconjunto propio del conjunto de todos los perfiles. Así, tendrá pleno sentido lo estudiado en el presente capítulo.

Capítulo 4

Reglas estructuradas, Distancias Ricas y No Ricas

4.1. Reglas de Elección Social definidas a partir de distancias

En esta sección definiremos reglas de elección a partir de distancias siguiendo las ideas presentadas en [3].

Definición 4.1.1 *Dado un conjunto A definimos $\mathcal{M}(A)$ como el conjunto formado por todos los multiconjuntos cuyos elementos están en A.*

Definición 4.1.2 *Dada la función de distancia $d^g : X \times \mathscr{P}^*(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ y h una función de agregación, definimos la distancia $d^{g,h}$ entre un elemento de X y un multiconjunto de $\mathscr{P}^*(X)$ así:*

$$d^{g,h} : X \times \mathcal{M}(\mathscr{P}^*(X)) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$d^{g,h}(x, \mu) = h(d^g(x, A_1), ..., d^g(x, A_k)),$$

donde $\mu = \{A_1, ..., A_k\}$.

Dado un perfil d^g-consistente, $u = (\preceq_1, \dots, \preceq_n)$, le asociamos $\rho_u \in \mathcal{M}(\mathscr{P}^*(X))$, lla-

mado el conjunto de códigos[1]*, definido de la siguiente manera:*

$$\rho_u = \{A_1, \ldots, A_n\},$$

donde A_i *es el testigo de que* $\preceq_i$ *es* d^g*-consistente, es decir,* $a \preceq_i b$ *si y solamente si* $d^g(a, A_i) \leq d^g(b, A_i)$.

Note que en si $g = min$ *el código de un preorden total* d^g*-consistente es único. Pero en general, para una función de agregación cualquiera no sabemos si el código es único. Nosotros conjeturamos que para la suma, es decir* $g = s$ *el código es único. De todas maneras, podemos suponer que tenemos una función* ρ_u *que asocia a un perfil* d^g*-consistente un conjunto de códigos.*

Ahora definimos la relación $\preceq_u^h$ *asociado a* u *así:*

$$x \preceq_u^h y \Longleftrightarrow d^{g,h}(x, \rho_u) \leq d^{g,h}(y, \rho_u)$$

Es fácil verificar que $\preceq_u^h$ *es un preorden total.*

Finalmente definimos,

$$f^h : \mathcal{P} \times \mathscr{P}^*(X) \longrightarrow \mathscr{P}^*(X), y$$

$$f_u^h(V) = min(V, \preceq_u^h)$$

Observe que nada más considerando $g, h \in \{max, min, s\}$ obtenemos 9 funciones de elección distintas. A continuación damos dos ejemplos con $g = min$ y h será una vez s y otra max.

Ejemplo 4.1.1 [2]

1. *Sea* $N = \{1, 2, 3, 4\}$*,* $X = \{0, 1\}^4$*,* d *la distancia de Hamming,*

$$g, h : \bigcup_{n \geq 1} (\mathbb{R}^+)^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

dadas por $g(x_1, ..., x_n) = min\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ *y* $h(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$

[1] En [3] este conjunto es llamado el conjunto de preferencias principales pues los códigos corresponden al primer nivel en el caso en que $g = min$ que fue el único caso estudiado allí.

[2] Ejemplos tomados de [3]

Codifiquemos las alternativas de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llll} x_0 = (0,0,0,0) & x_1 = (0,0,0,1) & x_2 = (0,0,1,0) & x_3 = (0,0,1,1) \\ x_4 = (0,1,0,0) & x_5 = (0,1,0,1) & x_6 = (0,1,1,0) & x_7 = (0,1,1,1) \\ x_8 = (1,0,0,0) & x_9 = (1,0,0,1) & x_{10} = (1,0,1,0) & x_{11} = (1,0,1,1) \\ x_{12} = (1,1,0,0) & x_{13} = (1,1,0,1) & x_{14} = (1,1,1,0) & x_{15} = (1,1,1,1) \end{array}$$

Así, $X = \{x_0, \cdots, x_{15}\}$.

Sea $u = (\preceq_1, \preceq_2, \preceq_3, \preceq_4)$, *tal que el conjunto de códigos asociado* $\rho_u = \{A_1, \cdots, A_4\}$ *viene dado de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{ll} A_1 = \{(1,1,1,1),(1,1,1,0)\} & A_2 = \{(1,1,1,1),(1,1,1,0)\} \\ A_3 = \{(0,0,0,0)\} & A_4 = \{(0,1,1,0),(1,1,1,0)\} \end{array}$$

Ilustraremos esta situación con la siguiente tabla:
Sea $V = X \setminus \{(0,1,1,0),(1,0,1,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0)\}$

V	A_1	A_2	A_3	A_4	$d^{min,s}$
(0,0,0,0)	3	3	0	2	8
(0,0,0,1)	3	3	1	3	10
(0,0,1,0)	2	2	1	1	6
(0,0,1,1)	2	2	2	2	8
(0,1,0,0)	2	2	1	1	6
(0,1,0,1)	2	2	2	2	8
(0,1,1,1)	1	1	3	1	6
(1,0,0,0)	2	2	1	2	7
(1,0,0,1)	2	2	2	3	9
(1,0,1,1)	1	1	3	2	7
(1,1,0,1)	1	1	3	2	7
(1,1,1,1)	0	0	4	1	**5**

De la tabla es fácil ver que $f_u^s(V) = \{(1,1,1,1)\}$, *pues* $(1,1,1,1)$ *es el vector que minimiza la "distancia"* $d^{min,s}$.

2. *Sean* N, X, d *y* g *como en el ejemplo anterior.*

Pongamos

$$h : \bigcup_{n \geq 1} (\mathbb{R}^+)^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

dada por $h(x_1, ..., x_n) = max\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$.

Consideremos $u = (\preceq_1, \preceq_2, \preceq_3, \preceq_4)$, *tal que el conjunto de códigos asociado* $\rho_u = \{A_1, \cdots, A_4\}$ *viene dado de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{ll} A_1 = \{(1,1,1,1),(1,1,1,0)\} & A_2 = \{(1,1,1,1),(1,1,1,0)\} \\ A_3 = \{(0,0,0,0)\} & A_4 = \{(0,1,1,0),(1,1,1,0)\} \end{array}$$

Ilustraremos esta situación con la siguiente tabla:
Sea $V = X \setminus \{(0,1,1,0),(1,0,1,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0)\}$

	A_1	A_2	A_3	A_4	$d^{min,max}$
(0,0,0,0)	*3*	*3*	*0*	*2*	*3*
(0,0,0,1)	*3*	*3*	*1*	*3*	*3*
(0,0,1,0)	*2*	*2*	*1*	*1*	***2***
(0,0,1,1)	*2*	*2*	*2*	*2*	***2***
(0,1,0,0)	*2*	*2*	*1*	*1*	***2***
(0,1,0,1)	*2*	*2*	*2*	*2*	***2***
(0,1,1,1)	*1*	*1*	*3*	*1*	*3*
(1,0,0,0)	*2*	*2*	*1*	*2*	***2***
(1,0,0,1)	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*
(1,0,1,1)	*1*	*1*	*3*	*2*	*3*
(1,1,0,1)	*1*	*1*	*3*	*2*	*3*
(1,1,1,1)	*0*	*0*	*4*	*1*	*4*

Es fácil ver que $f_u^{max}(V) = \{(0,0,1,0),(0,0,1,1),(0,1,0,0),(0,1,0,1),(1,0,0,0)\}$.

Un punto interesante cuando se estudian estas reglas es el de saber cuando d^g es rica pues sabemos que esa va a ser una condición suficiente para que el teorema de Arrow sea satisfecho.

La sección siguiente está dedicada al estudio de la propiedad de riqueza para d^{min} y d^s cuando d es la distancia de Hamming.

4.2. Distancias Ricas y no Ricas

Consideremos $X = \{0,1\}^n$ con $n \in \mathbb{N}$ y d la distancia de Hamming.

Las siguientes observaciones y notaciones sobre d, cuyas pruebas son inmediatas de las definiciones, nos serán de mucha utilidad en lo que sigue.

Observaciones:

O1 Dado $x = (x_1, ..., x_n) \in X$ sabemos que $x_i \in \{0,1\}, \forall i \in N$.

Para cada $i \in N$ definimos

$$\overline{x_i} = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i = 1 \\ 1 & \text{si } x_i = 0 \end{cases}$$

O2 Si $d(x,y) = t$ entonces $d(\overline{x}, y) = n - t$.

O3 Para cada vector $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ existe un único vector $\overline{x} \in X$ tal que $d(x, \overline{x}) = n$. A saber, $\overline{x} = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$.

Contrariamente a lo anunciado en [4] la distancia d^{min} no es rica. Esto es precisamente lo que nos dice el siguiente teorema:

Teorema 4.2.1 *Si d es la distancia de Hamming entonces d^{min} no es rica para todo $n \geq 3$.*

Demostración: La demostración se basa en mostrar que dados los vectores $x = (0,0,0,\ldots,0)$, $y = (1,0,0,\ldots,0)$ y $z = (0,1,0,\ldots,0)$ no existe $Y \subseteq X$ tal que

$$d^{min}(x,Y) < d^{min}(y,Y) < d^{min}(z,Y) \tag{4.1}$$

Por reducción al absurdo.

Supongamos que existe $Y \subseteq X$ tal que satisface (4.1).

Afirmación 1 $y, z \notin Y$

Si $y \in Y$ ó $z \in Y$ entonces $d^{min}(y,Y) = 0$ ó $d^{min}(z,Y) = 0$ respectivamente.

Esto contradice que $d^{min}(x,Y) < d^{min}(y,Y)$ ó $d^{min}(x,Y) < d^{min}(z,Y)$ respectivamente.

Afirmación 2 $x \notin Y$

Por la afirmación 1 tenemos que $d^{min}(y,Y) > 0$, luego, por (4.1), $d^{min}(z,Y) > 1$.

Pero si $x \in Y$ entonces $d^{min}(z,Y) \leq 1$. Por lo tanto, $x \notin Y$.

Sea $w = (w_1, \ldots, w_n) \in X$, definimos $|w|_0$ como el número de ceros que tiene w, y $|w|_1$ como el número de unos que tiene w.

Sea $w \in Y$ tal que $d(x, w) = d^{min}(x, Y)$.

Por las afirmaciones anteriores $w \neq x$, $w \neq y$ y $w \neq z$. Así, $d^{min}(x, Y) = d(x, w) = |w|_1$.

$w_1 \neq 1$, ya que de lo contrario tendríamos que $d(y, w) = |w|_1 - 1 \geq d^{min}(y, Y)$. Lo que contradice que

$$d^{min}(x, Y) < d^{min}(y, Y)$$

De manera análoga tenemos que $w_2 \neq 1$.

Por lo tanto, las coordenadas de w que tienen 1, tienen índices mayores o iguales a 3.

De donde, $d(y, w) = |w|_1 + 1$ y $d(z, w) = |w|_1 + 1$.

Como $d^{min}(x, Y) < d^{min}(y, Y)$ entonces $d^{min}(y, Y) = |w|_1 + 1$. Pero, esto contradice que

$$d^{min}(y, Y) < d^{min}(z, Y).$$

De esta manera concluye la demostración.

■

A diferencia del teorema anterior tenemos que d^s es rica. Para demostrarlo vamos a establecer una serie de lemas que prueban por separado cada una de las propiedades de riqueza.

Lema 4.2.1 *Sean $X = \{0, 1\}^n$ con $n \geq 3$, d la distancia de Hamming sobre X y $x, y, z \in X$ distintos entre sí. Entonces existe $Y \subseteq X$ tal que*

$$d^s(x, Y) < d^s(y, Y) < d^s(z, Y). \tag{4.2}$$

La demostración de este Lema consta de tres partes, que corresponden a los tres casos siguientes:

$$d(x, y) < d(x, z), \quad d(x, y) = d(x, z) \quad \text{ó} \quad d(x, y) > d(x, z)$$

Con el fin de ayudar al lector a seguir la prueba (que es una prueba por casos) presentamos a continuación, de manera esquemática y exhaustiva, el árbol de los casos analizados:

CASO 1. $d(x, y) < d(x, z)$

$$\text{CASO 2. } d(x,y)=d(x,z)=k\begin{cases} 2.1 \quad k=1 \\ 2.2 \quad 1<k \begin{cases} a)\text{Las coordenadas en que } y \text{ difiere de} \\ \quad x \text{ son distintas a las coordenadas} \\ \quad \text{en que } z \text{ difiere de } x \text{ y } k\neq n/2. \\ b)\text{Las coordenadas en que } y \text{ difiere de} \\ \quad x \text{ son distintas a las coordenadas en} \\ \quad \text{que } z \text{ difiere de } x \text{ y } k=n/2. \\ c)\text{Al menos en una de las coordenadas en} \\ \quad \text{que } y \text{ difiere de } x \text{ también } z \text{ difiere de } x. \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{CASO 3. } k=d(x,z)<d(x,y)=s\begin{cases} 3.1 \quad s=n\wedge k>\dfrac{n}{2} \\ 3.2 \quad s=n\wedge k=\dfrac{n}{2} \\ 3.3 \quad s=n\wedge k<\dfrac{n}{2}\begin{cases} a)\ n \text{ par} \\ b)\ n \text{ impar}\end{cases} \\ 3.4 \quad s<n\begin{cases} a)\text{Las coordenadas en que } x \text{ difiere de} \\ \quad z \text{ son distintas a las coordenadas en} \\ \quad \text{que } x \text{ difiere de } y. \\ b)\text{Al menos en una de las coordenadas en} \\ \quad \text{que } x \text{ difiere de } z \text{ también } x \text{ difiere de } y. \end{cases} \end{cases}$$

Demostración:

CASO 1. $d(x,y)<d(x,z)$.

Para este caso basta tomar, $Y=\{x\}$.

Así, $0=d^s(x,Y)<d(x,y)=d^s(y,Y)<d(x,z)=d^s(z,Y)$.

CASO 2. $d(x,y)=d(x,z)=k$

Notemos que $k\neq n$.

En efecto, si $k=n$ entonces necesariamente $y=z$, por **O**3. Pero, por hipótesis $y\neq z$.

CASO 2.1 Si $k=1$.

Luego, $d(y,z)=2$, ya que y difiere de x en una coordenada que es distinta de la única coordenada en la que difiere z de x. Sin pérdida de generalidad la situación es como está descrita por los vectores más abajo.

Consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio a x en una coordenada distinta de la coordenada por la que difiere de y y distinta también de la coordenada por la que difiere de z. La existencia de t está garantizada porque $n \geq 3$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es como en los siguientes vectores:

$$\begin{aligned} x &= (a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ y &= (\overline{a_1}, a_2, \ldots, a_n) \\ z &= (a_1, \overline{a_2}, \ldots, a_n) \\ t &= (a_1, a_2, \ldots, \overline{a_n}) \end{aligned}$$

Tenemos que

$d(x, t) = 1$

$d(y, t) = 2$

$d(z, t) = 2$

Luego, tomamos $Y = \{x, y, t\}$ y tenemos lo deseado, pues

$d^s(x, Y) = 0 + 1 + 1 = 2$

$d^s(y, Y) = 1 + 0 + 2 = 3$

$d^s(z, Y) = 1 + 2 + 2 = 5$

CASO 2.2 Si $1 < k$.

Hay tres posibilidades:

a) Las coordenadas en que y difiere de x son distintas a las coordenadas en que z difiere de x y $k \neq n/2$. Esto en particular nos dice que $2k < n$.

Consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio a x en una coordenada distinta de las coordenadas por las que difiere de y y distinta también de las coordenadas por las que difiere de z. Tal coordenada existe porque por las hipótesis $2k < n$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es como en los siguientes vectores:

$$\begin{aligned} x &= (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-k+1}, \ldots, a_n) \\ y &= (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}, a_{k+1}, \ldots, a_{n-k+1}, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

$$z = (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, \overline{a_{n-k+1}}, \ldots, \overline{a_n})$$
$$t = (a_1, \ldots, a_k, \overline{a_{k+1}}, \ldots, a_{n-k+1}, \ldots, a_n)$$

Así, tenemos que

$d(x,t) = 1$

$d(y,t) = k+1$

$d(z,t) = k+1$

Luego, tomando $Y = \{x, y, t\}$, se satisface (4.2), pues

$d^s(x,Y) = 0 + k + 1 = k + 1$

$d^s(y,Y) = k + 0 + (k+1) = 2k + 1$

$d^s(z,Y) = k + 2k + (k+1) = 4k + 1$

b) Las coordenadas en que y difiere de x son distintas a las coordenadas en que z difiere de x y $k = n/2$.

Consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio a x en una de las coordenadas por las que difiere de z, por tanto, distinta de cada coordenada por las que x difiere de y.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación está representada por los siguientes vectores:

$$x = (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n)$$
$$y = (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}, a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n)$$
$$z = (a_1, \ldots, a_k, \overline{a_{k+1}}, \ldots, \overline{a_{n-1}}, \overline{a_n})$$
$$t = (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}, \overline{a_n})$$

Así, tenemos que

$d(x,t) = 1$

$d(y,t) = k+1$

$d(z,t) = k-1$

Luego, tomando $Y = \{x, y, t\}$, tenemos que

$d^s(x,Y) = 0 + k + 1 = k + 1$

$d^s(y,Y) = k + 0 + (k+1) = 2k + 1$

$d^s(z,Y) = k + 2k + (k-1) = 2k + (2k-1)$

Como $k > 1$ entonces $2k - 1 > 1$. Así, se satisface claramente (4.2).

c) Al menos en una de las coordenadas en que y difiere de x también z difiere de x.

Sea l la cantidad de coordenadas en que tanto z como y difieren de x. Así, $l > 0$. Notemos además, que $k - l \geq 0$, pues, $k - l \geq 0$ es equivalente a $k \geq l$ y esta última desigualdad es verdadera por la definición de l. Pero además, $k \neq l$, pues de lo contrario tendríamos que $y = z$, lo cual es una contradicción. Entonces tenemos $k > l$, es decir, $k - l > 0$.

Notemos que: $d(z, y) = 2(k - l)$, porque $d(x, y) = k = d(x, z)$ y l es el número de coordenadas en que ambos y y z difieren de x.

Consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio a x en una de las coordenadas por las que difiere de y pero no de z, y $t' \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio a x en una de las coordenadas por la que difiere de z pero no de y.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación está representada por los siguientes vectores:

$$
\begin{aligned}
x &= (a_1, \ldots, a_{k-l+1}, \ldots, a_k, a_{k+1} \ldots, a_{k+(k-l)}, \ldots, a_n)\\
y &= (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{k-l+1}}, \ldots, \overline{a_k}, a_{k+1} \ldots, a_{k+(k-l)}, \ldots, a_n)\\
z &= (a_1, \ldots, \overline{a_{k-l+1}}, \ldots, \overline{a_k}, \overline{a_{k+1}} \ldots, \overline{a_{k+(k-l)}}, \ldots, a_n)\\
t &= (a_1, \ldots, a_{k-l+1}, \ldots, \overline{a_k}, a_{k+1} \ldots, a_{k+(k-l)}, \ldots, a_n)\\
t' &= (\overline{a_1}, \ldots, a_{k-l+1}, \ldots, a_k, a_{k+1} \ldots, a_{k+(k-l)}, \ldots, a_n)
\end{aligned}
$$

Así, tenemos que

$d(x, t) = 1$	$d(x, t') = 1$
$d(y, t) = k + 1$	$d(y, t') = k - 1$
$d(z, t) = k - 1$	$d(z, t') = k + 1$

Luego, tomando $Y = \{x, y, t, t'\}$, tenemos que

$$d^s(x, Y) = 0 + k + 1 + 1 = k + 2$$
$$d^s(y, Y) = k + 0 + (k + 1) + (k - 1) = 3k$$
$$d^s(z, Y) = k + 2(k - l) + (k - 1) + (k + 1) = 3k + 2(k - l)$$

Como $k > 1$, $3k > k + 2$ y como $k - l > 0$, $3k + 2(k - l) > 3k$. Así, se satisface (4.2).

CASO 3. $k = d(x,z) < d(x,y) = s$

CASO 3.1 $s = n$ y $k > \dfrac{n}{2}$

Tenemos que $d(z,y) = n - k$ por **O**2.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es la siguiente:

$$\begin{aligned}
x &= (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) \\
y &= (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}, \overline{a_{k+1}}, \ldots, \overline{a_n}) \\
z &= (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}, a_{k+1} \ldots, a_n) \\
\overline{z} &= (a_1, \ldots, a_k, \overline{a_{k+1}} \ldots, \overline{a_n})
\end{aligned}$$

Sea $Y = \{\overline{z}\}$. Entonces tenemos

$d^s(x,Y) = n - k$

$d^s(y,Y) = k$

$d^s(z,Y) = n$

Como $k > \dfrac{n}{2}$ entonces $n - k < k$. Así, se satisface (4.2).

CASO 3.2 $s = n$ y $k = \dfrac{n}{2}$

Tenemos que $d(x,\bar{z}) = d(y,\bar{z}) = \dfrac{n}{2}$.

Consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio a $\bar{z}$ en una de las coordenadas en que x no difiere de z.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es la siguiente:

$$\begin{aligned}
x &= (a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n) \\
y &= (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{k-1}}, \overline{a_k}, \overline{a_{k+1}}, \overline{a_{k+2}}, \ldots, \overline{a_n}) \\
z &= (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{k-1}}, \overline{a_k}, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n) \\
\overline{z} &= (a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, \overline{a_{k+1}}, \overline{a_{k+2}}, \ldots, \overline{a_n}) \\
t &= (a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \overline{a_{k+2}}, \ldots, \overline{a_n})
\end{aligned}$$

Así, tenemos que

$d(x,t) = k - 1$

$d(y,t) = k + 1$

$d(z,t) = n - 1$

Tomemos $Y = \{\overline{z}, t\}$, luego,

$d^s(x,Y) = \dfrac{n}{2} + (k-1) = n-1$

$d^s(y,Y) = \dfrac{n}{2} + (k+1) = n+1$

$d^s(z,Y) = n + (n-1) = 2n-1$

Como $n \geq 3$ tenemos que $2n-1 > n+1$. Por lo tanto, se satisface (4.2).

CASO 3.3 Si $s = n$ y $k < \dfrac{n}{2}$.

a) Supongamos primero que n es par.
Consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer $\dfrac{n}{2}$ cambios a x en coordenadas en que x no difiere de z, $t' \in X$ el vector que resulta de hacer $\dfrac{n}{2}$ cambios a x en coordenadas en que x no difiere de z, pero $t \neq t'$(la existencia de t' está garantizada porque $k < \dfrac{n}{2}$), y $r \in X$ el vector que resulta de hacer $\dfrac{n}{2} - k$ cambios a x en coordenadas en que x no difiere de z.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
x &= (a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_{(n/2)-1}, a_{n/2}, a_{(n/2)+1}, \ldots, a_{(n/2)+k+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n)\\
y &= (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}, \ldots, \overline{a_{(n/2)-1}}, \overline{a_{n/2}}, \overline{a_{(n/2)+1}}, \ldots, \overline{a_{(n/2)+k+1}}, \ldots, \overline{a_{n-1}}, \overline{a_n})\\
z &= (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}, \ldots, a_{(n/2)-1}, a_{n/2}, a_{(n/2)+1}, \ldots, a_{(n/2)+k+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n)\\
t &= (a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_{(n/2)-1}, a_{n/2}, \overline{a_{(n/2)+1}}, \ldots, \overline{a_{(n/2)+k+1}}, \ldots, \overline{a_{n-1}}, \overline{a_n})\\
t' &= (a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_{(n/2)-1}, \overline{a_{n/2}}, \overline{a_{(n/2)+1}}, \ldots, \overline{a_{(n/2)+k+1}}, \ldots, \overline{a_{n-1}}, a_n)\\
r &= (a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_{(n/2)-1}, a_{n/2}, a_{(n/2)+1}, \ldots, \overline{a_{(n/2)+k+1}}, \ldots, \overline{a_{n-1}}, \overline{a_n})
\end{aligned}
$$

Así, tenemos que:

$d(x,t) = \dfrac{n}{2}$	$d(x,t') = \dfrac{n}{2}$	$d(x,r) = \dfrac{n}{2} - k$
$d(y,t) = \dfrac{n}{2}$	$d(y,t') = \dfrac{n}{2}$	$d(y,r) = \dfrac{n}{2} + k$
$d(z,t) = \dfrac{n}{2} + k$	$d(z,t') = \dfrac{n}{2} + k$	$d(z,r) = \dfrac{n}{2}$

Tomando $Y = \{t, t', r\}$ tenemos:

$d^s(x,Y) = n + \dfrac{n}{2} - k$

$d^s(y,Y) = n + \dfrac{n}{2} + k$

$d^s(z,Y) = n + \dfrac{n}{2} + 2k$

Así, claramente Y satisface (4.2).

b) Ahora supongamos que n es impar.
Supongamos $k > 1$.

Consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer $\dfrac{n-1}{2}$ cambios a x en coordenadas en que x no difiere de z.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es la siguiente:

$$\begin{aligned}
x &= (a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_{(n+1)/2}, a_{((n+1)/2)+1}, \ldots, a_n) \\
y &= (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}, \ldots, \overline{a_{(n+1)/2}}, \overline{a_{((n+1)/2)+1}}, \ldots, \overline{a_n}) \\
z &= (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}, \ldots, a_{(n+1)/2}, a_{((n+1)/2)+1}, \ldots, a_n) \\
t &= (a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_{(n+1)/2}, \overline{a_{((n+1)/2)+1}}, \ldots, \overline{a_n})
\end{aligned}$$

Así, tenemos que:
$d(x,t) = \dfrac{n-1}{2}$
$d(y,t) = \dfrac{n-1}{2} + 1$
$d(z,t) = \dfrac{n-1}{2} + k$
Como $k > 1$ entonces $d(z,r) > d(y,r)$. Por lo tanto, basta tomar $Y = \{t\}$ para que se cumpla (4.2).

Supongamos ahora que $k = 1$
Estudiamos dos posibilidades: $n = 3$ y $n \geq 5$
Si $n = 3$ entonces, consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio a x en una de las coordenadas en que x no difiere de z, $t' \in X$ el punto que resulta de hacer un cambio en la otra coordenada en que x no difiere de z.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es la siguiente:

$$\begin{aligned}
x &= (a_1, a_2, a_3) \\
y &= (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}) \\
z &= (\overline{a_1}, a_2, a_3) \\
\overline{z} &= (a_1, \overline{a_2}, \overline{a_3}) \\
t &= (a_1, a_2, \overline{a_3}) \\
t' &= (a_1, \overline{a_2}, a_3)
\end{aligned}$$

Así, tenemos que:

$d(x,t) = 1$ $\qquad$ $d(x,t') = 1$

$d(y,t) = 2$ $\qquad$ $d(y,t') = 2$

$d(z,t) = 2$ $\qquad$ $d(z,t') = 2$

Tomando $Y = \{\overline{z}, t, t'\}$ tenemos:

$d^s(x,Y) = 2 + 1 + 1$

$d^s(y,Y) = 1 + 2 + 2$

$d^s(z,Y) = 3 + 2 + 2$

De donde es claro que se satisface (4.2).

Ahora, si $n \geq 5$ entonces consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio a x en una de las coordenadas en que x no difiere de z, $t' \in X$ un vector con las mismas condiciones de t, $t' \neq t$(esto es posible porque $n \geq 3$), y $r \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio a $\overline{z}$ en una de las coordenadas distintas a la única en que z y y coinciden. La existencia de r (diferente tanto de t como de t') está garantizada porque $n \geq 5$ (si $n = 3$ entonces r coincide con t ó t').

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es la siguiente:

$$\begin{aligned}
x &= (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n) \\
y &= (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}, \ldots, \overline{a_n}) \\
z &= (\overline{a_1}, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n) \\
\overline{z} &= (a_1, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}, \ldots, \overline{a_n}) \\
t &= (a_1, \overline{a_2}, a_3, a_4, \ldots, a_n) \\
t' &= (a_1, a_2, \overline{a_3}, a_4, \ldots, a_n) \\
r &= (a_1, a_2, \overline{a_3}, \overline{a_4}, \ldots, \overline{a_n})
\end{aligned}$$

Así, tenemos que:

$d(x,t) = 1$ $\qquad$ $d(x,t') = 1$ $\qquad$ $d(x,r) = n - 2$

$d(y,t) = n - 1$ $\qquad$ $d(y,t') = n - 1$ $\qquad$ $d(y,r) = 2$

$d(z,t) = 2$ $\qquad$ $d(z,t') = 2$ $\qquad$ $d(z,r) = n - 1$

Tomando $Y = \{\overline{z}, t, t', r\}$, se puede ver fácilmente que:

$d^s(x,Y) = 2n - 1$

$d^s(y,Y) = 2n + 1$

$d^s(z, Y) = 2n + 3$

Así, Y satisface (4.2).

CASO 3.4 Si $s < n$.

Hay dos posibilidades:

a) Las coordenadas en que x difiere de z son distintas a las coordenadas en que x difiere de y.

Supongamos que s es impar.
Notemos que, como $1 \leq k < s$ y suponemos s impar entonces $s \geq 3$. Luego, $\dfrac{s-1}{2} \geq 1$.

Consideremos entonces $t \in X$, el vector que resulta de hacer $\dfrac{s-1}{2}$ cambios a x en coordenadas en que difiere de y, $t' \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio a y en una de las coordenadas en que difiere de x, y $t'' \in X$ el vector que resulta de hacer $\dfrac{s+1}{2}$ cambios a x en coordenadas en que difiere de y, y no de z.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es la siguiente:

$$x = (a_1, .., a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, .., a_{k+((s-1)/2)}, a_{k+((s+1)/2)}, .., a_{k+s}, a_{k+s+1}, .., a_n)$$
$$y = (a_1, .., a_k, \overline{a_{k+1}}, \overline{a_{k+2}}, .., \overline{a_{k+((s-1)/2)}}, \overline{a_{k+((s+1)/2)}}, .., \overline{a_{k+s}}, a_{k+s+1}, .., a_n)$$
$$z = (\overline{a_1}, .., \overline{a_k}, a_{k+1}, a_{k+2}, .., a_{k+((s-1)/2)}, a_{k+((s+1)/2)}, .., a_{k+s}, a_{k+s+1}, .., a_n)$$
$$t = (a_1, .., a_k, \overline{a_{k+1}}, \overline{a_{k+2}}, .., \overline{a_{k+((s-1)/2)}}, a_{k+((s+1)/2)}, .., a_{k+s}, a_{k+s+1}, .., a_n)$$
$$t' = (a_1, .., a_k, a_{k+1}, \overline{a_{k+2}}, .., \overline{a_{k+((s-1)/2)}}, \overline{a_{k+((s+1)/2)}}, .., \overline{a_{k+s}}, a_{k+s+1}, .., a_n)$$
$$t'' = (a_1, .., a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, .., a_{k+((s-1)/2)}, \overline{a_{k+((s+1)/2)}}, .., \overline{a_{k+s}}, a_{k+s+1}, .., a_n)$$

Así, tenemos que:

$$d(x,t) = \frac{s-1}{2} \qquad d(x,t') = s-1 \qquad d(x,t'') = \frac{s+1}{2}$$
$$d(y,t) = \frac{s+1}{2} \qquad d(y,t') = 1 \qquad d(y,t'') = \frac{s-1}{2}$$
$$d(z,t) = k + \frac{s-1}{2} \qquad d(z,t') = k+s-1 \qquad d(z,t'') = \frac{s+1}{2} + k$$

Tomando $Y = \{x, t, t', t''\}$ tenemos:

$d^s(x, Y) = s + (s-1) = 2s - 1$

$d^s(y,Y) = s + (s+1) = 2s+1$

$d^s(z,Y) = s + (s-1) + 4k = 2s + (4k-1)$

Como $k \geq 1$ entonces $4k \geq 4$. Así, Y satisface claramente (4.2).

Si s es par entonces

consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio a y en una de las coordenadas en que difiere de x, y $t' \in X$ el vector que resulta de hacer $\frac{s}{2}$ cambios a x en coordenadas en que difiere de y.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es la siguiente:

$$x = (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2} \ldots, a_{k+(s/2)}, a_{k+(s/2)+1}, \ldots, a_{k+s}, a_{k+s+1}, \ldots, a_n)$$
$$y = (a_1, \ldots, a_k, \overline{a_{k+1}}, \overline{a_{k+2}} \ldots, \overline{a_{k+(s/2)}}, \overline{a_{k+(s/2)+1}}, \ldots, \overline{a_{k+s}}, a_{k+s+1}, \ldots, a_n)$$
$$z = (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}, a_{k+1}, a_{k+2} \ldots, a_{k+(s/2)}, a_{k+(s/2)+1}, \ldots, a_{k+s}, a_{k+s+1}, \ldots, a_n)$$
$$t = (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \overline{a_{k+2}} \ldots, \overline{a_{k+(s/2)}}, \overline{a_{k+(s/2)+1}}, \ldots, \overline{a_{k+s}}, a_{k+s+1}, \ldots, a_n)$$
$$t' = (a_1, \ldots, a_k, \overline{a_{k+1}}, \overline{a_{k+2}} \ldots, \overline{a_{k+(s/2)}}, a_{k+(s/2)+1}, \ldots, a_{k+s}, a_{k+s+1}, \ldots, a_n)$$

Así, tenemos que:

$d(x,t) = s-1$ $\qquad$ $d(x,t') = \frac{s}{2}$

$d(y,t) = 1$ $\qquad$ $d(y,t') = \frac{s}{2}$

$d(z,t) = k+s-1$ $\qquad$ $d(z,t') = \frac{s}{2} + k$

Tomando $Y = \{x, t, t'\}$ tenemos:

$d^s(x,Y) = (s-1) + \frac{s}{2}$

$d^s(y,Y) = s + 1 + \frac{s}{2}$

$d^s(z,Y) = s + \frac{s}{2} + 3k - 1$

Como $k \geq 1$ entonces $3k \geq 3$, luego, $3k > 2$. Así, $d^s(y,Y) < d^s(z,Y)$. Por lo tanto esa elección de Y satisface (4.2).

b) Al menos en una de las coordenadas en que x difiere de z también x difiere de y.

Llamemos l la cantidad de coordenadas en que tanto z como y difieren de x y r es el entero que satisface la ecuación siguiente

$$n = k + s - l + r,$$

es decir, r es el número de coordenadas en que los tres vectores x, y y z coinciden.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es la siguiente:

$$x = (a_1, \ldots, a_{k-l}, a_{k-l+1}, \ldots, a_k, a_{k+1} \ldots, a_{(k-l)+s}, a_{(k-l)+s+1}, \ldots, a_n)$$
$$y = (a_1, \ldots, a_{k-l}, \overline{a_{k-l+1}}, \ldots, \overline{a_k}, \overline{a_{k+1}} \ldots, \overline{a_{(k-l)+s}}, a_{(k-l)+s+1}, \ldots, a_n)$$
$$z = (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{k-l}}, \overline{a_{k-l+1}}, \ldots, \overline{a_k}, a_{k+1} \ldots, a_{(k-l)+s}, a_{(k-l)+s+1}, \ldots, a_n)$$

Veamos que basta tomar $Y = \{x, \overline{z}\}$.
Sabemos que:

$d(x,x) = 0$ $\qquad$ $d(x,\overline{z}) = n - k$

$d(y,x) = s$ $\qquad$ $d(y,\overline{z}) = n - d(y,z)$

$d(z,x) = k$ $\qquad$ $d(z,\overline{z}) = n$

Como $d(x,y) = s,\ d(x,z) = k$ y son l las coordenadas en que ambos y y z difieren de x, es decir en esas coordenadas ambos coinciden entonces $d(y,z) = (s - l) + k - l$, es decir, $d(y,z) = s + k - 2l$. Luego, $d(y,\overline{z}) = r + l$.
Por lo tanto,

$d^s(x,Y) = s + r - l$

$d^s(y,Y) = s + r + l$

$d^s(z,Y) = s + r + (2k - l)$

Como $l < k$, $l < 2k - l$ y por lo tanto $d^s(y,Y) < d^s(z,Y)$, y así, Y satisface (4.2).

■

Lema 4.2.2 *Sean $X = \{0,1\}^n$ con $n \geq 3$, d la distancia de Hamming sobre X y $x, y, z \in X$ distintos entre sí. Entonces existe $Y \subseteq X$ tal que*

$$d^s(x,Y) = d^s(y,Y) < d^s(z,Y) \tag{4.3}$$

La demostración de este Lema consta de dos partes, a saber(por la desigualdad triangular):

$$d(x,y) < d(x,z) + d(y,z) \quad \text{ó} \quad d(x,y) = d(x,z) + d(y,z)$$

Demostración:

CASO 1. $d(x, y) < d(x, z) + d(y, z)$.

Basta tomar $Y = \{x, y\}$, puesto que

$$d^s(x, Y) = 0 + d(x, y)$$
$$d^s(y, Y) = d(x, y) + 0$$
$$d^s(z, Y) = d(x, z) + d(y, z)$$

de donde claramente se satisface (4.3).

CASO 2. $d(x, y) = d(x, z) + d(y, z)$.

Pongamos $d(x, z) = k$ y $d(y, z) = r$.

Por la hipótesis, las k coordenadas en que difieren x de z es un subconjunto de las coordenadas en que difiere x de y.

Tenemos que:

$$d(x, \overline{z}) = n - k$$
$$d(y, \overline{z}) = n - r$$
$$d(z, \overline{z}) = n$$

Consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer k cambios a x de la siguiente manera: $k-1$ cambios en coordenadas en que difiere tanto de y como de z y un cambio en una de las coordenadas en que difiere de y, pero no de z.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es la siguiente:

$$x = (a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2} \ldots, a_{k+r}, a_{k+r+1} \ldots, a_n)$$
$$y = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_k}, \overline{a_{k+1}}, \overline{a_{k+2}} \ldots, \overline{a_{k+r}}, a_{k+r+1} \ldots, a_n)$$
$$z = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_k}, a_{k+1}, a_{k+2} \ldots, a_{k+r}, a_{k+r+1} \ldots, a_n)$$
$$t = (a_1, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_k}, \overline{a_{k+1}}, a_{k+2} \ldots, a_{k+r}, a_{k+r+1} \ldots, a_n)$$

Así, tenemos que

$$d(x, t) = k$$

$d(y,t) = r$

$d(z,t) = 2$

Por lo tanto, basta tomar $Y = \{\overline{z}, t\}$. Pues así,

$$d(x,Y) = d(y,Y) = n < n+2 = d(z,Y).$$

∎

Lema 4.2.3 *Sean $X = \{0,1\}^n$ con $n \geq 3$, d la distancia de Hamming sobre X y $x, y, z \in X$ distintos entre sí. Entonces existe $Y \subseteq X$ tal que*

$$d^s(x,Y) < d^s(y,Y) = d^s(z,Y) \tag{4.4}$$

Demostración:

Pongamos $k = d(x,y)$ y $r = d(x,z)$.

CASO 1. Las coordenadas en las que x difiere de y son distintas a las coordenadas en las que x difiere de z.

Consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio a y en una de las coordenadas en que y difiere de x, y $t' \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio en z en una de las coordenadas en que z difiere de x.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es la siguiente:

$$\begin{aligned}
x &= (a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+r}, a_{k+r+1} \ldots, a_n)\\
y &= (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_k}, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+r}, a_{k+r+1} \ldots, a_n)\\
z &= (a_1, a_2, \ldots, a_k, \overline{a_{k+1}}, \overline{a_{k+2}} \ldots, \overline{a_{k+r}}, a_{k+r+1}, \ldots, a_n)\\
t &= (a_1, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_k}, a_{k+1}, a_{k+2} \ldots, a_{k+r}, a_{k+r+1}, \ldots, a_n)\\
t' &= (a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \overline{a_{k+2}}, \ldots, \overline{a_{k+r}}, a_{k+r+1} \ldots, a_n)
\end{aligned}$$

Así, tenemos que:

$d(x,t) = k-1 \qquad d(x,t') = r-1$

$d(y,t) = 1 \qquad d(y,t') = k+r-1$

$d(z,t) = r+k-1 \qquad d(z,t') = 1$

Tomando $Y = \{t, t'\}$ tenemos que

$$d^s(x,Y) = (r-1) + (k-1)$$
$$d^s(y,Y) = r+k$$
$$d^s(z,Y) = r+k$$

De donde claramente Y satisface (4.4).

CASO 2 Al menos una coordenada en que x difiere de y coincide con alguna coordenada en que x difiere de z.

Llamemos l la cantidad de coordenadas en que x difiere tanto de y como de z a la vez. Así, tenemos que $l > 0$.

Consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer $r-l$ cambios a x en coordenadas en que x difiere de z pero no de y, y $t' \in X$ el vector que resulta de hacer $k-l$ cambios a x en coordenadas en que x difiere de y pero no de z.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es la siguiente:

$$\begin{aligned}
x &= (a_1, \ldots, a_{k-l-1}, a_{k-l}, a_{k-l+1} \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+r-l}, a_{k+r-l+1}, \ldots, a_n)\\
y &= (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{k-l-1}}, \overline{a_{k-l}}, \overline{a_{k-l+1}} \ldots, \overline{a_k}, a_{k+1}, \ldots, a_{k+r-l}, a_{k+r-l+1}, \ldots, a_n)\\
z &= (a_1, \ldots, a_{k-l-1}, a_{k-l}, \overline{a_{k-l+1}} \ldots, \overline{a_k}, \overline{a_{k+1}}, \ldots, \overline{a_{k+r-l}}, a_{k+r-l+1}, \ldots, a_n)\\
t &= (a_1, \ldots, a_{k-l-1}, a_{k-l}, a_{k-l+1} \ldots, a_k, \overline{a_{k+1}}, \ldots, \overline{a_{k+r-l}}, a_{k+r-l+1}, \ldots, a_n)\\
t' &= (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{k-l-1}}, \overline{a_{k-l}}, a_{k-l+1} \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+r-l}, a_{k+r-l+1}, \ldots, a_n)
\end{aligned}$$

Así, tenemos que:

$d(x,t) = r-l \qquad d(x,t') = k-l$

$d(y,t) = k+r-l \qquad d(y,t') = l$

$d(z,t) = l \qquad d(z,t') = r+k-l$

Tomando $Y = \{t, t'\}$ tenemos que

$$d^s(x, Y) = (r - l) + (k - l)$$
$$d^s(y, Y) = r + k$$
$$d^s(z, Y) = r + k$$

Como $l > 0$ entonces $(r - l) + (k - l) < r + k$. Así, Y satisface (4.4).

■

Como corolario inmediato de estos tres lemas tenemos lo siguiente:

Teorema 4.2.2 *Sean $X = \{0, 1\}^n$ con $n \geq 3$, y d la distancia de Hamming sobre X. Entonces d^s es rica.*

En realidad 3 es el mínimo entero tal que la distancia d^s es rica de manera no trivial cuando d es la distancia de Hamming. Observe que cuando $n = 1$ no hay sino dos puntos en X y por lo tanto la distancia es trivialmente rica. Pero si $n = 2$ se pierde la propiedad de riqueza como lo establece el teorema siguiente:

Teorema 4.2.3 *Sean $X = \{0, 1\}^2$ y d la distancia de Hamming sobre X. Entonces d^s no es rica.*

Basta mostrar que d^s no se satisface la condición $i)$ de la definición 3.2.2. En efecto, sean $x = (0, 0)$, $y = (1, 0)$ y $z = (0, 1)$. Mostraremos que no existe $Y \subseteq X$ tal que

$$d^s(x, Y) < d^s(y, Y) < d^s(z, Y) \tag{4.5}$$

Demostración:

Razonamos por reducción al absurdo.

Supongamos que existe $Y \subseteq X$ tal que satisface (4.5).

Pongamos $w = (1, 1)$. Así, $X = \{x, y, z, w\}$.

Es fácil verificar que Y no puede ser un singleton.

Ahora veremos que ningún subconjunto de X de dos elementos puede ser un subconjunto de Y, suponiendo que Y satisface la condición $i)$.

Los posibles subconjuntos de dos elementos de X son:

$$\{y, z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{x, w\}, \{y, w\}, \{z, w\}$$

Analicemos cada caso:

- $\{y, z\} \subseteq Y$

  Sabemos que $d(y, z)+d(y, y) = d(z, y)+d(z, z)$. Además, tanto x como w son equidistantes de y y de z. Así, si alguno de estos vectores formara parte o no de Y entonces no se satisface que

  $$d^s(y, Y) < d^s(z, Y)$$

  Por lo tanto, $\{y, z\} \nsubseteq Y$.

- $\{x, y\} \subseteq Y$

  Sabemos que $d(x, x) + d(x, y) = d(y, x) + d(y, y)$.

  Por el caso anterior $z \notin Y$.

  Por otro lado, como $d(x, w) > d(y, w)$ entonces $w \notin Y$, ya que si no $d^s(x, Y) > d^s(y, Y)$.

  Por lo tanto, $\{x, y\} \nsubseteq Y$.

- $\{x, z\} \subseteq Y$

  Sabemos que $d(x, x) + d(x, z) = d(z, x) + d(z, z)$.

  Por el caso anterior $y \notin Y$.

  Por otro lado, como $d(x, w) > d(z, w)$ entonces $w \notin Y$, ya que si no $d^s(x, Y) > d^s(z, Y)$.

  Por lo tanto, $\{x, z\} \nsubseteq Y$.

  Solo falta verificar qué pasa cuando $\{x, w\} = Y$, $\{y, w\} = Y$ ó $\{z, w\} = Y$. Pues, notemos que no podemos agregar a Y uno ni dos vectores más de X, por los casos anteriores.

  Veamos que ninguno de estos casos es posible. En efecto,

  - $\{x, w\} = Y$

    $d(x, \{x, w\}) = 0 + 3$

    $d(y, \{x, w\}) = 1 + 1$

    $d(z, \{x, w\}) = 1 + 1$

Esto contradice (4.5).

- $\{y, w\} = Y$

  $d(x, \{y, w\}) = 1 + 3$

  $d(y, \{y, w\}) = 0 + 1$

  $d(z, \{y, w\}) = 2 + 1$

  Esto contradice (4.5).

- $\{z, w\} = Y$

  $d(x, \{z, w\}) = 1 + 3$

  $d(y, \{z, w\}) = 2 + 1$

  $d(z, \{z, w\}) = 0 + 1$

  Esto contradice (4.5).

∎

Finalmente, mostraremos que en general el conjunto de los perfiles d^g-consistentes es un subconjunto propio del conjunto de todos los perfiles. Como corolario del teorema que mostraremos a continuación.

La proposición siguiente son observaciones que expresan una simetría de la estructura de los hipercubos dados por la distancia de Hamming en $\{0, 1\}^n$.

Proposición 4.2.1 *Sea d la distancia de Hamming. Entonces se cumple:*

O4 *Para cada par $x, y \in X$ $d^s(x, X) = d^s(y, X)$. Más precisamente, para cualquier $x \in \{0, 1\}^n$ se tiene*

$$d(x, X) = \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \cdot i \tag{4.6}$$

En particular, si $n = 3$ entonces, $d^s(x, X) = 12$, para cualquier $x \in X$.

O5 *Si $d^s(x, A) = d^s(y, A)$, $A \subset X$ y $x, y \in X$ entonces $d^s(x, X \setminus A) = d^s(y, X \setminus A)$.*

Demostración: Para probar O4 basta ver que la equación (4.6) se cumple. Pero observe que para un vector x fijo hay exactamente $\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}$ vectores a distancia i de x. De allí es inmediato (4.6).

Para probar O5 nos servimos de O4. En efecto, suponga que $d(x, A) = d(y, A)$ entonces

$$\begin{aligned} d(x, X \setminus A) &= \left[\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot i\right] - d(x, A) \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot i\right] - d(y, A) \\ &= d(y, X \setminus A) \end{aligned}$$

■

Teorema 4.2.4 *Sean $X = \{0,1\}^3$ y d la distancia de Hamming sobre X. Entonces para cada $A \subseteq X$ no vacío, existen $y_1, y_2 \in X$, $y_1 \neq y_2$ tales que*

$$d^s(y_1, A) = d^s(y_2, A) \tag{4.7}$$

Demostración: Sea $A \subseteq X$ no vacío.

Hay 8 casos posibles, que corresponden a la cardinalidad de A: $|A| = i$ para $i = 1, \ldots, 8$.

El caso en que la cardinalidad es 8 es decir $A = X$, se deduce inmediatamente de **O**4 de la proposición 4.2.1.

Por **O**5 de la proposición 4.2.1, basta ver los casos en que la cardinalidad está entre 1 y 4 inclusives.

$|A| = 1$. Es decir, $A = \{(a_1, a_2, a_3)\}$.

Tomando $y_1 = (\overline{a_1}, a_2, a_3)$ y $y_2 = (a_1, \overline{a_2}, a_3)$ se satisface (4.7).

$|A| = 2$. En este caso, $A = \{a, b\}$.

Tomando $y_1 = a$ y $y_2 = b$ se satisface (4.7).

$|A| = 3$. Luego, $A = \{a, b, c\}$.

Subcaso 1. Uno de los tres vectores equidista de los otros dos.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $d(a, b) = d(a, c)$.

Luego, $\begin{aligned} d^s(b, A) &= d(b, a) + d(b, b) + d(b, c) \\ d^s(c, A) &= d(c, a) + d(c, b) + d(c, c) \end{aligned}$

Así, tomando $y_1 = b$ y $y_2 = c$ se satisface (4.7).

Subcaso 2. Ninguno de los vectores equidista de los otros dos. Es decir,

$$d(a,b) \neq d(a,c) \ \wedge \ d(a,b) \neq d(c,b) \ \wedge \ d(a,c) \neq d(c,b)$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$d(a,b) = 1 \ \wedge \ d(b,c) = 2 \ \wedge \ d(a,c) = 3$$

y que la situación es como la de los siguientes vectores siguiente:

$$\begin{aligned} a &= (a_1, a_2, a_3) \\ b &= (\overline{a_1}, a_2, a_3) \\ c &= (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}) \end{aligned}$$

Consideremos $y_1, y_2 \in X$ los únicos dos vectores que están a distancia 1 de a y al mismo tiempo a distancia 1 de b. Luego, por la observación **O**2, $d(y_1, c) = d(y_2, c) = 2$. Entonces claramente,

$$d(y_1, A) = 1 + 1 + 2 = d(y_2, A)$$

$|A| = 4.$ Dividiremos este caso en subcasos mutuamente excluyentes. Usaremos la simetría del cubo para hacer el razonamiento más simple.

Subcaso 1 Existe $a \in A$ tal que $\overline{a} \in A$.

Pongamos $A = \{a, \overline{a}, b, c\}$ y tomemos $y_1 = b, \ y_2 = c$..

Así, tenemos los siguiente:

$$\begin{aligned} d^s(y_1, A) &= d(b,a) + d(b,\overline{a}) + d(b,b) + d(b,c) \\ &= n + d(b,c) && \text{(por } \mathbf{O}2) \\ d^s(y_2, A) &= d(c,a) + d(c,\overline{a}) + d(c,b) + d(c,c) \\ &= n + d(c,b) && \text{(por } \mathbf{O}2) \end{aligned}$$

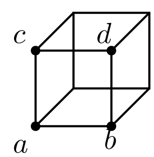
De donde, claramente se satisface (4.7).

Subcaso 2. No existe $a \in A$ tal que $\overline{a} \in A$. Es decir que $d(x,y) < 3$, para cualquier par $x, y \in A$. Pongamos $A = \{a, b, c, d\}$.

A su vez, en este subcaso, tenemos tres posibilidades mutuamente excluyentes:

- Los cuatro puntos en la misma cara del cubo.

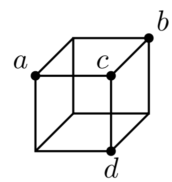
Sin pérdida de generalidad, por la simetría del cubo, podemos suponer que la situación es como en la figura siguiente:



es decir, $d(a,b) = d(a,c) = d(b,d) = d(c,d) = 1$ y $d(a,d) = d(b,c) = 2$. Tomando $y_1 = a$ y $y_2 = b$ se satisface (4.7).

- Tres puntos en una cara.

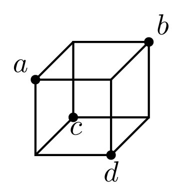
  Sin pérdida de generalidad, por la simetría del cubo, podemos suponer que la situación es como en la figura siguiente:



es decir, $d(a,c) = d(b,c) = d(c,d) = 1$ y $d(a,b) = d(a,d) = d(b,d) = 2$. Tomando $y_1 = d$ y $y_2 = b$ se satisface (4.7).

- Dos puntos en una cara.

  Sin pérdida de generalidad, por la simetría del cubo, la única situación posible es como en la figura siguiente:



es decir, $d(a,c) = d(b,c) = d(c,d) = d(a,b) = d(a,d) = d(b,d) = 2$. Tomando $y_1 = a$ y $y_2 = b$ se satisface (4.7).

■

Como corolario inmediato del resultado precedente obtenemos:

Corolario 4.2.1 *Ningún orden lineal de* $\{0,1\}^3$ *es* d^s*-consistente.*

A su vez esto nos dice lo siguiente:

Corolario 4.2.2 *La clase de perfiles* d^s*-consistentes es una clase propia de la clase de todos los perfiles.*

Capítulo 5

Observaciones finales y perspectivas

La noción de riqueza que hemos estudiado es una condición suficiente para probar el teorema de Arrow. Queda abierta la pregunta de determinar cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que el teorema de Arrow se cumpla para los perfiles d^g-consistentes. En particular no sabemos si vale el teorema de imposibilidad para los perfiles d^{min}-consistentes.

Otra pregunta abierta interesante es determinar las propiedades abstractas sobre la función de agregación g de manera que la distancia d^g sea rica.

Bibliografía

[1] K. J. Arrow, "Social Choice and Individual Values", 2nd ed., Wiley, New York, 1963.

[2] J. S. Kelly. *Social Choice Theory: An Introduction.* Berlin, Springer - Verlag, 1988.

[3] J. F. Leal. *Posibilidad e Imposibilidad en la Teoría de Elección Social. Trabajo Especial de Grado.* Universidad de Los Andes. Julio 2003.

[4] J. F. Leal y R. Pino Pérez. *Teorema de Arrow para perfiles d-consistentes. Manuscrito.* Junio 2005.

[5] R. Pino Pérez. Comunicación personal.

[6] The Mac Tutor History of Mathematics archive.
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/ history/Biographies/Borda.html

[7] The Mac Tutor History of Mathematics archive.
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Voting.html