Universidad de Los Andes
Departamento de Física

Semestre B-12
Mecánica Clásica

TAREA IV

1. a) El elemento de volumen en el espacio de fase n-dimensional para el sistema dinámico $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ es $\Delta\Gamma = \prod_{i=1}^{n} dx_i$.
   a) Calcule $\frac{d(\Delta\Gamma)}{dt}$. [3]
   b) La ecuación de movimiento unidimensional amortiguado y forzado de una partícula de masa m sujeta a un resorte de constante k es
   $$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = A\cos\nu t,$$
   donde $\omega^2 = k/m$, $\lambda > 0$ es el coeficiente de fricción del medio, A es la amplitud de la fuerza externa que actúa sobre la partícula y ν es la frecuencia de esa fuerza. Use el resultado de (a) para demostrar que este sistema es disipativo. [2]

2. Considere la transformación infinitesimal de rotación
   $$\begin{aligned} \mathbf{R} = &\quad \mathbf{r} + \epsilon(\mathbf{\Phi} \times \mathbf{r}) \\ \mathbf{P} = &\quad \mathbf{p} + \epsilon(\mathbf{\Phi} \times \mathbf{p}), \end{aligned}$$
   donde $\mathbf{\Phi}$ es el vector a lo largo del eje de rotación, $|\mathbf{\Phi}| = \phi$ es el ángulo de rotación y ϵ es un parámetro infinitesimal.
   a) Demuestre que esta transformación es canónica. [2]
   b) Suponga que esta transformación es generada por la función $F_2 = \mathbf{r}\cdot\mathbf{P} + \epsilon G(\mathbf{r}, \mathbf{P})$. Determine G. [3]

3. Una partícula con carga q y masa m se mueve en un plano sujeta a un potencial central $V = \frac{1}{2}kr^2$ y a un campo magnético perpendicular al plano, tal que $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$.
   a) Determine la ecuación de Hamilton-Jacobi para este sistema, en coordenadas polares. [2]
   b) Encuentre la solución para la trayectoria de la partícula en términos de integrales explícitas. [3]

4. El Lagrangiano de un trompo con un punto fijo, moviéndose en el campo gravitacional terrestre, en términos de los ángulos de Euler es
   $$L = I_{33}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{I_{33}}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)^2 - mgd\sin\theta\sin\psi,$$
   donde I_{33} es el momento de inercia con respecto al eje de simetría axial del trompo, m es su masa, y d es la distancia entre el punto fijo del trompo y su centro de masa. Este sistema se conoce como el *trompo de Kovalevskaya.*
   a) Encuentre las ecuaciones de movimiento en la formulación Hamiltoniana. [2]
   b) Demuestre que la siguiente cantidad se conserva en este sistema [3]
   $$\begin{aligned} K \quad = \quad & \left[(\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi)^2 - (\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi)^2 - \frac{mgd}{I_{33}}\sin\theta\sin\psi\right]^2 \\ & + \left[2\,(\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi)(\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi) - \frac{mgd}{I_{33}}\sin\theta\cos\psi\right]^2. \end{aligned}$$