

**UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES
V E N E Z U E L A**

Centro de Física Fundamental

Área de Caos y Sistemas Complejos

**Comportamientos colectivos
inducidos por diversidad
en redes dinámicas**

Trabajo de grado presentado ante la ilustre
Universidad de Los Andes
como requisito parcial para optar al Título de:
Licenciada en Física

Presentado por:
Br. Andrea P. Valdéz D.

Tutor:
Dr. Mario Cosenza

Mérida, Mayo de 2010

*A Dios y a mi Madre,
por caminar conmigo a lo largo no sólo de mi carrera sino de mi vida,
haciendo de cada paso que doy una experiencia única, y del camino
un hermoso sendero lleno de lo que nos mantiene vivos, que parece ser
tan armonioso como una bella melodía y resulta ser tan o más caótico
que la Naturaleza misma que nos rodea; gracias por hacer de mi camino,
un hermoso sendero, lleno de amor.*

*La Naturaleza está constituida de tal manera
que es experimentalmente imposible determinar
sus movimientos absolutos.*

Albert Einstein

Resumen

La diversidad en las propiedades de los elementos en un sistema complejo es una situación frecuente en múltiples contextos. En este trabajo se investiga una red de mapas caóticos globalmente acoplados como un modelo con ingredientes mínimos para estudiar el efecto de distintas fuentes de heterogeneidad en el comportamiento colectivo de un sistema complejo. Se estudia la heterogeneidad en la intensidad de acoplamientos, en los parámetros locales y en el grado de no linealidad de los mapas, y su efecto en el comportamiento colectivo del sistema. En todos los casos, la heterogeneidad se describe mediante una cantidad que mide la dispersión de los parámetros en consideración. Se investiga el surgimiento de diversos comportamientos colectivos, como la sincronización y la evolución del campo medio, en función del grado de heterogeneidad de los distintos parámetros del sistema. Se estudia el efecto de la heterogeneidad de parámetros variable en el tiempo. Los resultados muestran que la heterogeneidad puede inducir orden macroscópico en coexistencia con caos robusto en las dinámicas locales de los sistemas.

Agradecimientos

No sólo quiero agradecer a los que me ayudaron en la realización de esta tesis, sino que quisiera empezar por manifestar mi agradecimiento a los que hicieron posible que llegara hasta este punto de mi carrera. En primer lugar, debo dar infinitas gracias a Dios por no abandonarme aunque yo lo haya hecho durante los primeros años de mi carrera científica. A mis ángeles terrenales, que fueron todas mis grandes amigas; por el apoyo, ánimos, sus maravillosos consejos, las enseñanzas de vida, por todos los buenos y malos momentos compartidos y por su presencia en mi vida. Ellas fueron siempre como caídas del cielo. A mi madre y abuela, por tenerme presente en sus oraciones y por estar siempre allí para mí, incondicionalmente.

A mi maestro, más que tutor, Dr. Mario Cosenza, por enseñarme todo lo fundamental para ser una gran profesional y persona, como él; gracias Profe por sus consejos, apoyo, empuje, y lo más importante, gracias por introducirme a este mundo caótico que tanto me cautivó y que cambió radicalmente mi perspectiva; gracias por abrir mis ojos ante este mundo físico que me era totalmente desconocido.

Fueron claves y grandes apoyos en mis primeros pasos en este gran mundo de Caos, mis compañeros caóticos, gracias por su amistad, por su invaluable ayuda y por acudir siempre a mis gritos de auxilio. A todo el grupo de Caos, excelentes profesionales y compañeros. De la misma manera, le debo un millón de gracias a la Profe Mayerlin Uzcátegui, por su disposición para atender mis llamados de emergencias, por hacer posible la edición técnica de este trabajo. Igualmente al Profesor Kay Tucci por sus críticas constructivas y su ayuda técnica.

Y a quien me arranca los suspiros y día a día me hace un poco más feliz, mi novio y prometido Oscar, por todo el apoyo, por ser mi complemento perfecto y por hacer realidad mis más lindos sueños.

Gracias a todos por hacer posible una de mis más anheladas metas.

Índice general

Resumen	I
Agradecimientos	II
Introducción	1
1. Caos robusto	5
1.1. ¿Qué es caos robusto?	5
1.2. Escenarios de caos robusto	6
2. Comportamientos colectivos en redes de mapas acoplados globalmente	15
2.1. Sincronización	16
2.2. Estados desincronizados	17
2.2.1. Comportamiento colectivo periódico	17
2.2.2. Bandas caóticas	19
2.2.3. Turbulencia global	20
2.3. Antecedentes de la heterogeneidad en redes de mapas acoplados globalmente	21
2.3.1. Heterogeneidad con la dinámica local de mapas logísticos	21
2.3.2. Heterogeneidad con la dinámica local de mapas logarítmicos	24
2.3.3. Heterogeneidad en la dinámica local de mapas singulares	28
2.3.4. Heterogeneidad en otros contextos	29

3. Comportamientos colectivos inducidos por heterogeneidad en los acoplamientos de RMAG con mapas singulares	31
3.1. Modelo con acoplamiento heterogéneo	32
3.2. Heterogeneidad en los acoplamientos	32
3.2.1. Comportamientos colectivos en función de z	32
3.2.2. Comportamientos colectivos en función de b	34
3.3. Influencia del ancho de la heterogeneidad en los acoplamientos	36
4. Comportamientos colectivos inducidos por diversidad en la dinámica local de mapas singulares	43
4.1. Heterogeneidad en el parámetro local b	44
4.1.1. Modelo con dinámica local heterogénea	44
4.1.2. Comportamientos colectivos en función de z	44
4.2. Heterogeneidad variable en la dinámica local	50
4.2.1. Comportamientos colectivos de una red con heterogeneidad variable	50
4.3. Heterogeneidad en el exponente z	53
4.3.1. Modelo con exponente de singularidad heterogéneo	53
4.3.2. Comportamientos colectivos en función de b	53
Conclusiones	60
Bibliografía	62

*... La limitada linealidad
y la universalidad del caos determinista...
¿alguna contradicción en esto?*

Introducción

Desde pequeños, a algunos nos criaron respondiendo nuestros porqués con respuestas lógicas que corresponden a leyes físicas, y cuando esto no les era posible, recurrían a Dios, que particularmente es el mismo método que ahora uso con mis sobrinos, con la única diferencia de que ahora se sabe que esas pocas cosas explicables con sencillas leyes de la Física son una particularidad de la naturaleza caótica que nos rodea. Incluso en los primeros años de mi carrera universitaria me enseñaron que los fenómenos que no se podían predecir eran la excepción de las leyes físicas, sencillamente por el hecho de no poder tomar en consideración para las ecuaciones todos los parámetros que afectan o que existen en el fenómeno, y en cierta forma nos hicieron creernos pequeños dioses al decirnos que si alguien en algún momento se ponía juicioso a buscar todos esos parámetros que se desconocían, teníamos la predicción segura de lo que sucedería en ese fenómeno en particular. Luego de que Lorenz se tropezara con su atractor en 1963, a pesar de que sus resultados pasaron desapercibidos por casi una década, se abrieron las puertas al conocimiento de lo que ahora conocemos como *caos determinista*, conocido así porque el sistema caótico no posee variables ni parámetros al azar. El comportamiento irregular surge de la no linealidad. Ya a finales del siglo XIX, Poincaré pensaba en este tipo de caos, es decir, en el comportamiento que surgía por la sensibilidad de un sistema a sus condiciones iniciales; inclusive reconocía la existencia de innumerables fenómenos que no eran completamente aleatorios, que simplemente no respondían a una dinámica lineal; aquellos a los que pequeños cambios en las condiciones iniciales conducían a enormes cambios en su evolución. De hecho, la mayoría de las cosas en la Naturaleza

no actúan de manera lineal, tales como el clima, la sangre cuando fluye a través del corazón, las neuronas, la turbulencia, los atascos de vehículos, la forma en la que florecen las flores en un prado, la propagación de epidemias, la bolsa de valores o las trayectorias de los vuelos de un grupo de pájaros. De esta forma nos damos cuenta de que en la frase inicial, en la parte superior de la página, no existe nada contradictorio, por el contrario ahora se nos hace obvio que la mayoría de los fenómenos de la Naturaleza claramente son impredecibles debido a la limitación de la linealidad y más comprensibles al aceptar la universalidad de su naturaleza caótica.

Muchos sistemas en la Naturaleza sujetos a interacciones globales presentan comportamientos colectivos que no son susceptibles de ser derivados trivialmente a partir del conocimiento del comportamiento de los elementos constituyentes aislados. Por ejemplo, fenómenos que aparecen naturalmente en sistemas físicos, químicos, biológicos y sociales; tales como ondas de densidad de carga, osciladores químicos, en redes de uniones Josephson, en la dinámica neuronal y celular, en la autoorganización de individuos de una misma sociedad con determinadas condiciones, entre otros, exhiben comportamientos organizados.

En la mayoría de los estudios sobre estos sistemas se ha asumido homogeneidad, en el sentido de que la dinámica de los elementos y las interacciones entre ellos son idénticas. Desde hace un poco más de una década, se empezó a estudiar el comportamiento colectivo que surge al introducir diversidad en los sistemas, que es lo que conocemos como heterogeneidad. La importancia de introducir heterogeneidad en sistemas dinámicos radica en que este fenómeno es muy común; es decir, los elementos que constituyen dichos sistemas no son idénticos en general. En las redes de uniones Josephson cada unidad es diferente, lo mismo pasa con las células y las neuronas, de igual forma sucede con los sistemas sociales donde cada individuo es distinto y/o también cada elemento del sistema puede tener diferente manera de interactuar con el resto. De esta manera, encontramos diversidad en una gran variedad de contextos. De aquí la importancia de estudiar el comportamiento colectivo inducido por diversidad en redes de elementos dinámicos.

En este trabajo, la heterogeneidad es el ingrediente que agregaremos para generar diversidad en redes dinámicas acopladas globalmente, por ser éstas una clase importante de sistemas que manifiestan efectos colectivos ordenados o comportamientos colectivos no triviales. Nuestro objetivo es investigar diversas fuentes de heterogeneidad, tanto en las dinámicas locales como en la conectividad de los elementos, y su influencia en el surgimiento de comportamientos colectivos. Adicionalmente, nos proponemos estudiar el efecto de heterogeneidad variable en el tiempo.

En el Capítulo 1, se presenta una revisión del concepto de caos robusto, su interés, aplicaciones y escenarios, con el objetivo de definir la dinámica local de los elementos que constituyen el sistema que estudiaremos en esta Tesis.

El Capítulo 2 presenta algunos tipos de comportamientos colectivos que surgen en redes dinámicas acopladas globalmente, y contiene los antecedentes del tema de la heterogeneidad, relacionados con la dinámica local de los mapas logístico, logarítmico y singulares. También se presentan otras investigaciones de sistemas heterogéneos aplicados a diversos contextos.

En el Capítulo 3 se presentan nuestras contribuciones originales acerca de los comportamientos colectivos inducidos por heterogeneidad en las intensidades de acoplamiento en una red formada por mapas de la familia de mapas singulares $f(x_t) = b - |x_t|^z$. Esto es equivalente a considerar heterogeneidad en las conexiones de la red. Se muestran los diagramas de bifurcación del campo medio en función, tanto del exponente z , como del parámetro local b . Para cada caso se realiza un estudio de la sincronización del sistema a partir del cálculo de su desviación estándar media, se obtienen los gráficos del campo medio respecto al ancho de la distribución de la heterogeneidad y se calculan los estados de sincronización en función del ancho de la distribución aleatoria de los acoplamientos.

En el Capítulo 4 investigamos los comportamientos colectivos inducidos por heterogeneidad en la dinámica local de la red y se estudia el efecto de la heterogeneidad variable en el tiempo para parámetros del sistema. Exploramos situaciones novedosas de estos sistemas. Introducimos heterogeneidad en los mapas singulares $f(x_t) = b - |x_t|^z$, tanto en el parámetro local b como en el exponente de singularidad z . Para cada caso se muestran los diagramas de bifurcación del campo medio en función de los parámetros z, b , se realiza el estudio de la sincronización de este

sistema; finalmente, se calcula el campo medio y la sincronización con respecto al ancho de la distribución de la heterogeneidad de b y z .

Los resultados de este trabajo son analizados y discutidos en las Conclusiones.

Capítulo 1

Caos robusto

1.1. ¿Qué es caos robusto?

En este trabajo estamos interesados en estudiar el efecto de la heterogeneidad en el comportamiento colectivo de sistemas de elementos caóticos. En tal sentido, nos enfocaremos en dinámicas locales que presentan caos robusto.

Se sabe que los sistemas con dinámica caótica reproducen dos tipos de atractores: a uno se le conoce como *caos frágil*, cuyos atractores desaparecen con perturbaciones de un parámetro o coexisten con otros atractores; la existencia de ventanas periódicas en algunas regiones caóticas trae como consecuencia que pequeños cambios de los parámetros pueden destruir el caos, implicando su fragilidad. Contrario a esta situación está lo que conocemos como *caos robusto*, se dice que un atractor es caótico robusto si para algunos valores de parámetros existe un vecindario en el espacio de parámetros con ausencia de ventanas periódicas y donde el atractor es único.

Aunque el término *caos robusto* ha sido utilizado en la literatura, algunos autores consideran que su empleo no es apropiado. J. Gallas [1] argumenta que en Física la noción de *robusto* está tradicionalmente asociada a la teoría de perturbaciones, a la estabilidad en el espacio de fases, no en el diagrama de fases. Robusto significa resistencia a las perturbaciones. En Física, los diagramas de fases tienen fases homogéneas que son necesariamente robustas. De otro modo, éstas no podrían ser directamente observadas de manera experimental. Por otro lado, en Matemáticas, las

nociones topológicas asociadas a los términos *denso* o *conexo* resultan más apropiadas para describir la ausencia de ventanas periódicas inmersas en el caos. Por estas razones, Gallas prefiere hablar de *caos denso* o, equivalentemente, *caos homogéneo*, que son los nombres tradicionales en la Física Estadística adecuados para esta situación.

El interés en la explotación del caos robusto ha tenido un incremento significativo en los últimos años para diversas aplicaciones en el mundo real, las más comunes se han visto en las comunicaciones, en la ingeniería eléctrica, en la criptografía, en los problemas de la dinámica neuronal, de las interferencias electromagnéticas, de procesos químicos y hasta de procesos económicos, entre otros. Tanto para las aplicaciones mencionadas, como para los objetivos de este trabajo, es necesario obtener operaciones confiables en el rango caótico, es por esto que se requiere del empleo de *caos robusto*.

1.2. Escenarios de caos robusto

Existen varios escenarios en los cuales podemos encontrar caos robusto, o por así decirlo, varios métodos para generarlo [2], algunos de ellos son:

I) Mapas uniformes a trozos en 1-D

Un modelo de esta clase de mapas es estudiado por Potapov y Ali en [3], con redes neuronales cuya dinámica viene dada por el mapa: $x_{k+1} = |\tanh s(x_k - c)|$, donde mostraron que para cierto rango de valores de los parámetros s y c el sistema no puede tener soluciones periódicas estables lo cual provee, en este caso, el caos robusto.

II) Mapas unimodales y uniformes en 1-D

Este es un escenario interesante porque varios artículos mostraron que el caos robusto se podía encontrar en esta clase de sistemas, pero únicamente para el caso 2-dimensional y a trozos [4, 5, 6, 7, 8, 9], y se hizo la suposición de que era imposible que existiera en mapas unimodales y uniformes en una dimensión. Sin embargo, Andrecut y Ali lanzaron dos contraejemplos [10, 11], probando que los mapas unidimensionales y unimodales que se muestran a continuación exhiben atractores caóticos robustos:

$$f(x, \alpha) = \frac{1 - x^\alpha - (1 - x)^\alpha}{1 - 2^{1-\alpha}}, \quad (1.1)$$

$$f(\phi(x), \nu) = \frac{1 - \nu^{+\phi(x)}}{1 - \nu^{+\phi(c)}}, \quad (1.2)$$

donde α y ν son parámetros y $\phi(x)$ es una función unimodal con derivada Schwarziana positiva. Andrecut y Ali formularon un teorema en el cual establecen las condiciones generales para generar caos robusto en un rango bien definido de sus parámetros para esta clase de mapas unimodales, donde el problema radicaba ahora en cómo construir el mapa $\phi(x)$ unimodal. Posteriormente, han aparecido artículos que muestran procedimientos específicos para construir estos mapas mediante la composición de dos mapas unimodales [11, 12, 13].

También se han utilizado mapas de este tipo para generar caos robusto para representar problemas de la dinámica de optimización en la economía [14].

III) Mapas uniformes a trozos en 2-D

El problema de la eficiente conversión de potencia eléctrica de una forma a otra es un área de muchas aplicaciones prácticas, el cual exhibe fenómenos no lineales que manifiestan caos robusto y que pueden ser modelados por este tipo de mapas. Un ejemplo importante de este escenario es el estudiado por Elhadj y Sprott en [15], en el cual consideraron el siguiente mapa unificado que contiene el sistema de Hénon y el de Lozi:

$$U(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - 1.4 f_\alpha(x) + y \\ 0.3x \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

donde $0 \leq \alpha \leq 1$ es el parámetro de bifurcación y f_α está definida por:

$$f_\alpha(x) = \alpha|x| + (1 - \alpha)x^2,$$

donde se puede observar que si $\alpha = 0$ se tiene el mapa de Hénon original y para $\alpha = 1$ se tiene el mapa de Lozi. Lo que probaron Elhadj y Sprott, es que para α entre cero y uno, se tiene un tipo diferente de atractor caótico, que

no se destruye con pequeños cambios en α . Esto fue verificado calculando el exponente de Lyapunov numéricamente y el diagrama de bifurcación del mapa, ambos mostrados en la figura 1.1. Note la ausencia de ventanas periódicas en todo el rango caótico.

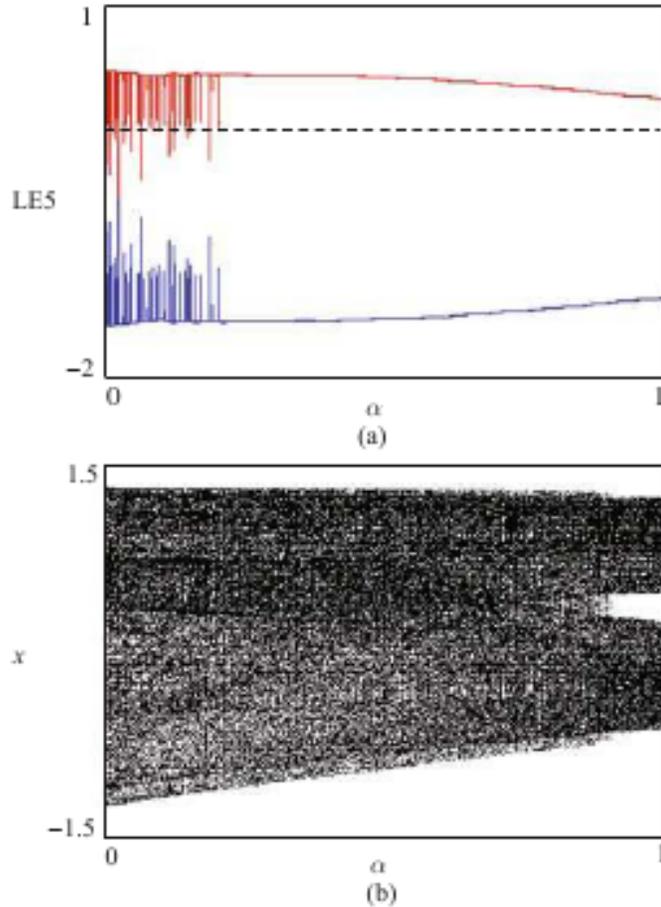


Figura 1.1: (a) Variación del exponente de Lyapunov para el mapa caótico unificado (1.3) para $0 \leq \alpha \leq 1$. (b) Diagrama de bifurcación del mapa caótico de la ecuación (1.3) para $0 \leq \alpha \leq 1$. [15]

Otros ejemplos en los que se encuentra caos robusto en mapas uniformes a trozos en 2-D se encuentran en las referencias [8, 9, 16].

IV) Mapas no-uniformes

Un ejemplo de caos robusto en mapas no-uniformes es el estudiado en [17], donde se considera un modelo de redes neuronales retroalimentadas; a esto se le conoce como perceptron y se define como:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \cdot x + b > 0 \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (1.4)$$

donde ω es un vector de valores reales, $\omega \cdot x$ es el producto punto que calcula la suma ponderada, y b es una constante que no depende de ningún valor de entrada. El valor de $f(x)$ (0 o 1) es usado para clasificar el vector x , tanto positivo como negativo, en el caso de ser un problema de clasificación binaria. Las propiedades de la serie de tiempo del perceptron son generadas a partir de funciones de transferencia llamadas *monotónica* y *no-monotónica* [18]. Se demuestra que un perceptron con una función monotónica puede producir sólo caos frágil, mientras que un perceptron con una función no-monotónica puede generar caos robusto para cierto rango de valores de sus parámetros.

Sistemas de tiempo-contínuo

Esta clase de sistemas también constituyen un escenario de caos robusto; ejemplos de esto se tienen en atractores extraños de tipo-Lorenz e hiperbólicos.

V) Sistemas tipo-Lorenz

Para ilustrar esta clase de sistemas, consideraremos el sistema original de Lorenz [19] dado por las ecuaciones (1.5) cuyo atractor es bien conocido (figura 1.2). Una aproximación muy exitosa para modelar el comportamiento observado por Lorenz fue realizada en [20, 21], donde construyeron los así llamados modelos geométricos, que son modelos de flúidos en tres dimensiones, con los que se demostró que el atractor de Lorenz es robusto al persistir bajo pequeñas perturbaciones de los coeficientes en las ecuaciones diferenciales.

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (1.5)$$

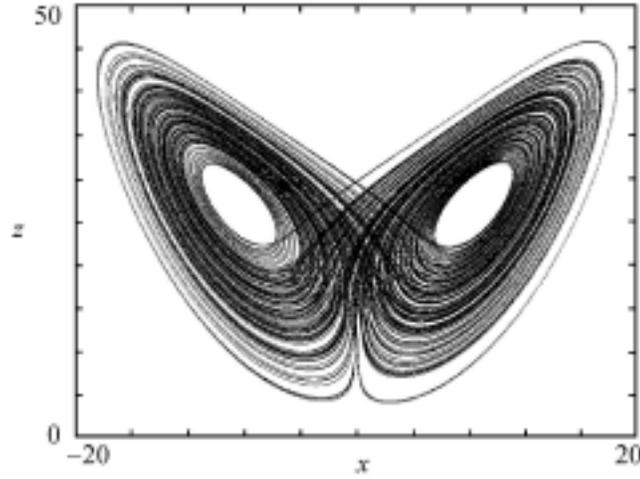


Figura 1.2: Atractor caótico obtenido de (1.5) para $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = \frac{8}{3}$. [19]

VI) Sistemas hiperbólicos

Generalmente la mayoría de los sistemas físicos conocidos no pertenecen a la clase de sistemas con atractores hiperbólicos, sin embargo un ejemplo físico de éstos fue encontrado en [22], donde obtuvieron, a partir de las ecuaciones de Kirchhoff, el atractor de Smale-Williams (un atractor robusto), compuesto por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2\pi u + (h_1 + A_1 \cos 2\pi\tau/N)x - \frac{1}{3}x^3, \\ \dot{u} = 2\pi(x + \epsilon_2 y \cos 2\pi\tau), \\ \dot{y} = -4\pi v + (h_2 - A_2 \cos(2\pi\tau)/N)y - \frac{1}{3}y^3, \\ \dot{v} = 4\pi(y + \epsilon_1 x^2), \end{cases} \quad (1.6)$$

donde las variables x y u son voltajes y corrientes normalizadas en un circuito LC de un primer oscilador, respectivamente; y y v son los voltajes y corrientes normalizadas de un segundo oscilador; los parámetros A_1 y A_2 determinan la amplitud de la oscilación; h_1 y h_2 determinan el umbral de la bifurcación; ϵ_1 y ϵ_2 son los parámetros del acoplamiento; y N el número de osciladores acoplados, en este caso $N = 2$.

Este sistema se construyó como un dispositivo de laboratorio y se encontraron soluciones numéricas y experimentales. Este ejemplo de sistema físico con atractor caótico hiperbólico es de considerable relevancia, ya que abrió la posibilidad de aplicaciones reales para este tipo de sistemas.

VII) Caos robusto en láseres

Otro escenario de caos robusto en sistemas de tiempo continuo es el recientemente estudiado por Gallas en [1], donde el autor considera un modelo de láser estudiado por Shilnikov en [23], definido por:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x(1 - z) - Bx^3 - by, \\ \dot{z} = -a(z - x^2), \end{cases} \quad (1.7)$$

con $B = 0$. Shilnikov calculó el diagrama de fase de este sistema, observando un escenario que involucra la aparición y destrucción de caos, y bifurcaciones de regímenes caóticos típicos para el modelo de láser que quería representar. Por su parte, J. Gallas realizó el diagrama de fase correspondiente al exponente de Lyapunov máximo en el espacio de parámetros (a, b) , mostrado en la figura 1.3. Se observa, para un determinado rango de valores de los parámetros a y b (en las zonas coloreadas de la figura 1.3), la presencia de caos robusto, o como Gallas prefiere denominarlo: *caos homogéneo*.

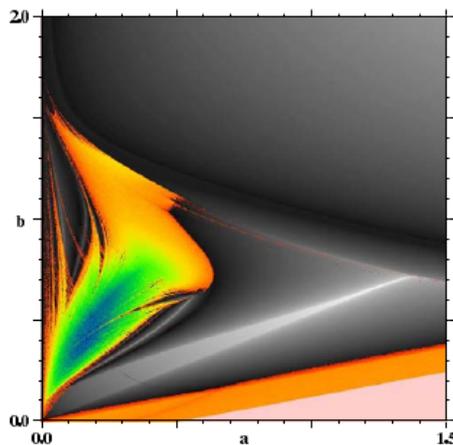


Figura 1.3: Diagrama de fase en el plano (a, b) del exponente de Lyapunov máximo, para 800×800 puntos. Los colores (azul, verde, amarillo, anaranjado y rojo) indican el dominio de caos (exponente de Lyapunov máximo positivo) mientras que blanco denota periodicidad (exponente de Lyapunov máximo negativo), negro indica el máximo exponente de Lyapunov cero, y la región rosada representa las soluciones del sistema que divergen.

VIII) Mapas Singulares

Finalmente, como un método muy sencillo y eficiente de generar caos robusto bien definido en un rango de parámetros, se encuentra el modelo de mapas singulares introducido por Alvarez y Cosenza en [24], el cual utilizaremos en este trabajo para representar la dinámica local de los sistemas de mapas acoplados que investigaremos. La forma funcional de la familia de mapas singulares es

$$f(x_t) = b - |x_t|^z, \quad (1.8)$$

donde $x_t \in (-\infty, \infty)$, b es un parámetro real y el exponente z describe el orden de la singularidad en el origen y está definido como $|z| < 1$. Esta familia de mapas no son unimodales y poseen derivada Schwarziana positiva para todo el dominio de $|z| < 1$, de modo que no se satisface el teorema de Singer, y por lo tanto, estos mapas no pertenecen a la clase de universalidad de Feigenbaum, es decir, no exhiben una secuencia de bifurcación de período doble. En cambio, sucede lo contrario, donde un punto fijo estable pierde su estabilidad en algún valor crítico de un parámetro, induciendo el caos, y de hecho esto es lo que ocurre. En las figuras (1.4 y 1.5) se muestran parte de los resultados obtenidos en [24].

La primera (figura 1.4) muestra dos diagramas de bifurcación de los iterados del mapa (1.8) para diferentes valores del exponente de singularidad z , en los cuales se demuestra la naturaleza caótica robusta de esta familia de mapas al no existir en ellos alguna secuencia de bifurcación ni ventanas de periodicidad dentro de la zona caótica. Por el contrario, existe un rango bien definido del parámetro local b donde el mapa es completamente caótico.

En la segunda (figura 1.5) se muestran las regiones donde existe caos robusto en el espacio de parámetros (b, z) para esta familia de mapas y se indican las transiciones al caos; con una línea gruesa, la transición al caos vía intermitencia tipo-III, que se asocia con la inversa de un período doble de bifurcación, donde un punto fijo pierde su estabilidad conduciendo de manera directa al caos, y con una línea más delgada, se señala la transición vía intermitencia tipo-I, que ocurre por una bifurcación tangente.

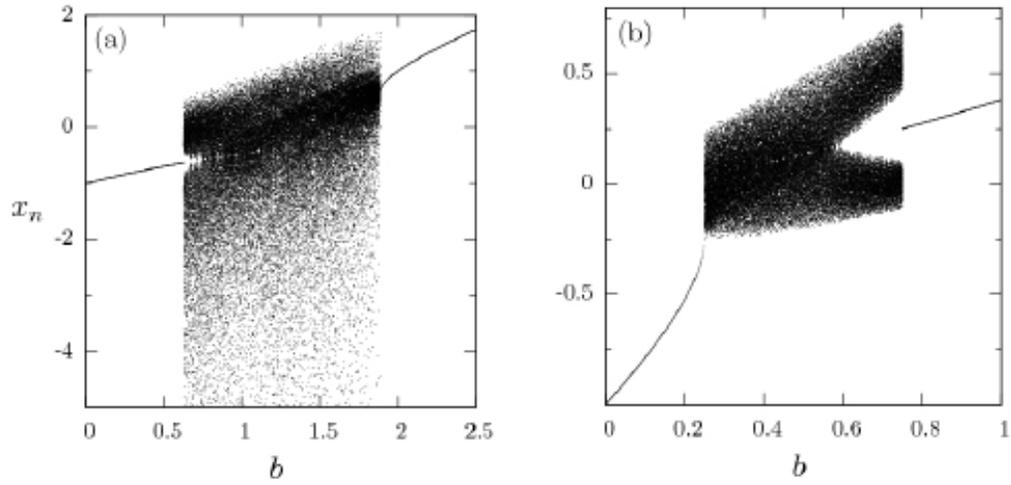


Figura 1.4: Diagramas de bifurcación del mapa (1.8) como función del parámetro b para (a) $z = -0.5$ y (b) $z = 0.5$ [24].

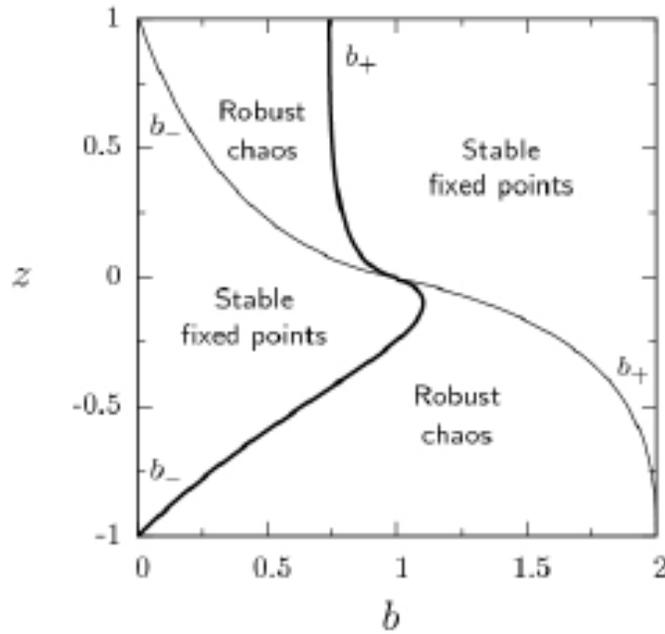


Figura 1.5: Las fronteras de las regiones de caos robusto de los mapas singulares en el espacio de parámetros (b, z) . La línea gruesa indica la transición al caos vía intermitencia tipo-III, y la línea delgada, la transición vía intermitencia tipo-I [24].

La figura 1.5 resulta muy útil para generar caos robusto con la combinación apropiada de parámetros b y z ; por ejemplo, tomaremos ahora el parámetro local b fijo y el diagrama de bifurcación que resulta al variar z entre $[-1, 1]$ es la figura 1.6, en la que se tomaron dos valores distintos del parámetro local b . Esta figura demuestra la correspondencia con los límites críticos de la transición al caos y de los rangos caóticos en la figura 1.5. En el diagrama (a) se observan claramente las dos regiones de caos robusto para $b = 0,6$ y la transición al caos; al incrementar z , primero se sale de la primera región caótica con intermitencia tipo-III y se entra a la segunda región vía intermitencia tipo-I. En (b) se obtuvo el diagrama de bifurcación para el parámetro local fijo en $b = 1,4$, mostrando su correspondiente región caótica con transición vía intermitencia tipo-I. Estos resultados validan lo obtenido por [24] en la figura (1.5).

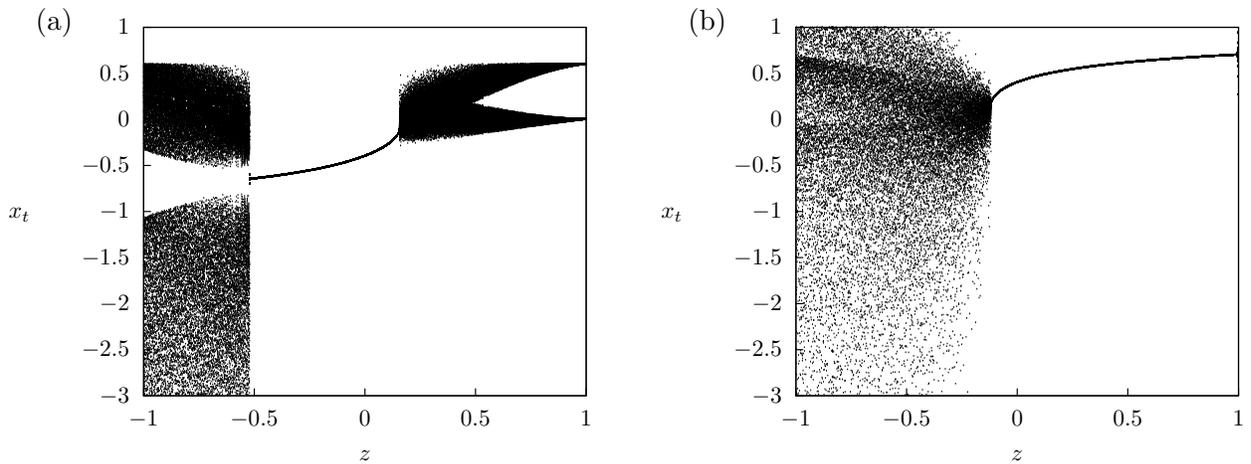


Figura 1.6: Diagramas de bifurcación del mapa (1.8) como función del parámetro z para (a) $b = 0.6$ y (b) $b = 1.4$.

*El azar no es más que la medida
de la ignorancia del hombre.*

Henri Poincaré, 1903

Capítulo 2

Comportamientos colectivos en redes de mapas acoplados globalmente

Las redes de mapas acoplados globalmente (RMAG) constituyen una clase de sistemas dinámicos espacio temporales de relevante importancia que describen una gran variedad de fenómenos en diversos contextos. Estos sistemas poseen interacciones globales, es decir, cada elemento experimenta la influencia de todos los otros elementos en el sistema. En particular, sistemas con interacciones globales pueden exhibir comportamientos colectivos no triviales.

Las redes de mapas acoplados globalmente fueron introducidas por Kaneko [25], con la siguiente forma funcional

$$x_{t+1}(i) = (1 - \epsilon)f(x_t(i)) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t(j)) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N), \quad (2.1)$$

donde $x_t(i)$ representa el estado del elemento i -ésimo de la red en el tiempo discreto t , ϵ es el parámetro de acoplamiento, N el número de elementos de la red y $f(x_t(i))$ describe la dinámica interna de cada elemento (dinámica local). La interacción global viene dada por el campo medio del sistema.

En este capítulo se revisan algunos conceptos y definiciones que resultan útiles para el estudio de los comportamientos colectivos que emergen en los sistemas de RMAG que vamos a estudiar en esta tesis.

2.1. Sincronización

Uno de los primeros investigadores en interesarse en el problema de la sincronización, fue Christiaan Huygens (1629-1695), reconocido por sus aportes a la Mecánica y la Óptica. En febrero de 1665, Huygens cayó en cama debido a una gripe, situación que lo condujo a observar por largo tiempo dos relojes de péndulo (que él mismo había construido) que estaban en una de las paredes de su habitación. Se dió cuenta de que los péndulos se habían sincronizado, y su formación intelectual era tal que supuso que no actuaban así por casualidad. De este modo, empezó a experimentar con ellos, y notó que de alguna forma éstos interactuaban y, como lo único que los relacionaba era la pared en la que colgaban, procedió a colocarlos en diferentes paredes y volvió a su cama a observarlos; de allí concluyó que era el acoplamiento de los relojes a través de la pared lo que generaba la sincronización entre ellos. Huygens fundó las bases del estudio de los osciladores acoplados, a partir de las cuales los científicos empezaron a aplicar estos conceptos a diversos sistemas (eléctricos, electromecánicos, biológicos, etc). Más recientemente, Pecora y Carrol mostraron experimentalmente la existencia de sincronización de oscilaciones caóticas; observaron que comportamientos caóticos pueden fundirse en una única trayectoria [26]. Estos resultados crearon nuevas expectativas en el estudio y las aplicaciones de los sistemas caóticos.

La sincronización caótica se define como una conformidad en el tiempo de dos o más procesos caóticos, caracterizada por una métrica entre algunas variables de estos procesos [27]. El fenómeno de sincronización también puede ser visto como una manifestación de la tendencia a la auto-organización en sistemas complejos.

En este trabajo, caracterizaremos el estado de sincronización de un sistema, tal como una RMAG, a partir del promedio temporal de la desviación estándar instantánea $\sigma(t)$, definida por la expresión,

$$\sigma(t) = \sqrt{\langle x_t^2 \rangle - \langle x_t \rangle^2}, \quad (2.2)$$

y las cantidades $\langle x_t^2 \rangle$ y $\langle x_t \rangle$ son

$$\langle x_t^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_t^2(i), \quad (2.3)$$

$$\langle x_t \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_t(j), \quad (2.4)$$

así, la expresión final vendría dada por

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{T - t_0} \sum_{t=t_0}^T \sigma_t, \quad (2.5)$$

donde t_0 es el número de iteraciones descartadas y T es el número total de iteraciones.

La condición para que exista sincronización es que $\langle \sigma \rangle = 0$, situación que corresponde a $x_t(i) = x_t(j)$, $\forall i \neq j$. Se puede demostrar que el número de elementos de la red, N , no influye en la condición de sincronización del sistema de RMAG.

El campo medio del sistema se define como

$$h_t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t(j)), \quad (2.6)$$

2.2. Estados desincronizados

Para ciertos rangos de parámetros en las RMAG, se observan algunos comportamientos emergentes muy interesantes que corresponden a estados desincronizados, y han sido estudiados por Cosenza y González en sistemas de mapas logarítmicos globalmente acoplados [28]. Estos comportamientos son:

2.2.1. Comportamiento colectivo periódico

En la referencia [28], los autores encontraron que en un sistema de mapas logarítmicos acoplados globalmente, donde los mapas locales presentan caos robusto, el

campo medio del sistema h_t muestra la existencia de atractores globales periódicos, como se muestra en la figura 2.1. Aparecen estados periódicos colectivos como un conjunto de segmentos que corresponden a las fluctuaciones intrínsecas de órbitas periódicas del campo medio. Este es un fenómeno de comportamiento colectivo no trivial, en el cual cantidades macroscópicas en un sistema de elementos caóticos exhiben una evolución regular en el tiempo a pesar de la presencia de caos local.

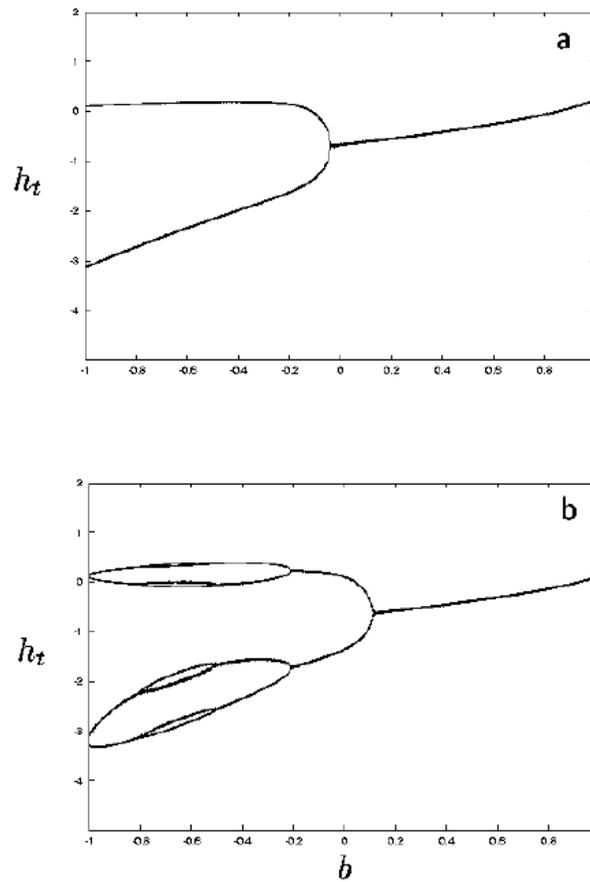


Figura 2.1: Diagramas de bifurcación del campo medio h_t del sistema de la ecuación (2.1), como función del parámetro b del mapa $f(x_t) = b + \ln |x_t|$, para dos valores de acoplamiento: (a) $\epsilon = 0.2$ y (b) $\epsilon = 0.25$ [28].

2.2.2. Bandas caóticas

En la figura 2.2 se muestra el diagrama de bifurcación del campo medio h_t en función del parámetro de acoplamiento ϵ , con el parámetro local b de mapas logarítmicos fijo dentro del rango caótico. Se observa que, cerca de la frontera de la región de sincronización, los estados colectivos descritos por el campo medio toman la forma de bandas caóticas, las cuales posteriormente se fusionan para dar lugar a la sincronización caótica completa.

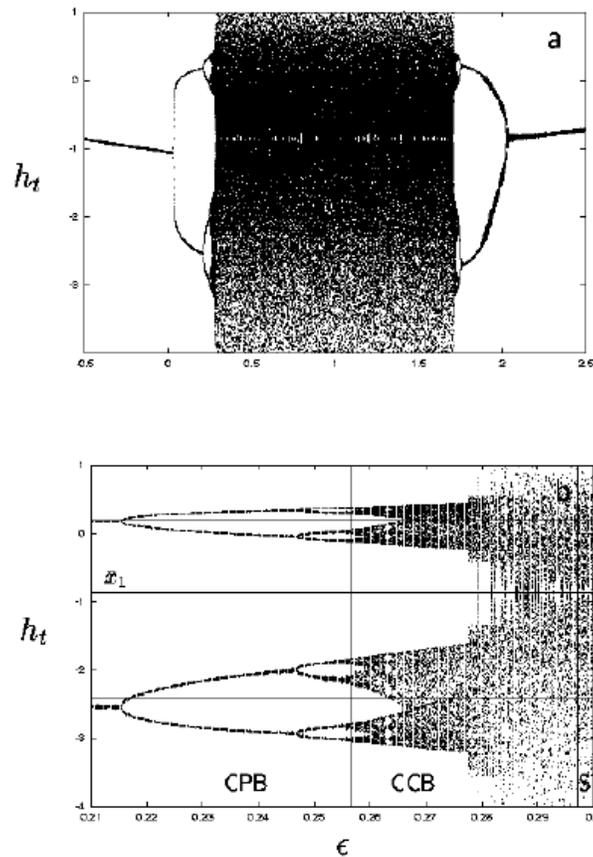


Figura 2.2: (a) Diagrama de bifurcación del campo medio h_t como función del acoplamiento ϵ , con parámetro local fijo en $b = -0.7$. (b) Magnificación de la parte izquierda de (a). Las líneas horizontales indican el valor del punto fijo inestable \bar{x}_1 y los valores de las órbitas de período dos inestables a cada lado de \bar{x}_1 , para el mapa logarítmico con $b = -0.7$. Las líneas verticales señalan los límites aproximados de diferentes estados colectivos: S (estado sincronizado), CCB (bandas caóticas) y CPB (comportamiento colectivo periódico) [28].

2.2.3. Turbulencia global

El estado de turbulencia global corresponde a estados colectivos de puntos fijos, de manera similar a las fases turbulentas reportadas por Kaneko en mapas tienda globalmente acoplados [29]. En la figura 2.3 se muestra el diagrama de bifurcación del campo medio h_t resultante del acoplamiento global de mapas logarítmicos como función del parámetro local b , para dos valores del parámetro de acoplamiento ϵ .

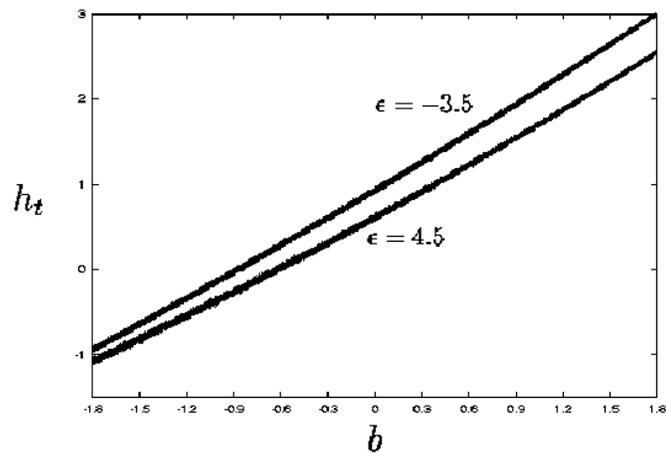


Figura 2.3: Diagrama de bifurcación de h_t vs. b para dos valores diferentes del parámetro de acoplamiento ϵ , correspondiente a estados globalmente turbulentos [28].

2.3. Antecedentes de la heterogeneidad en redes de mapas acoplados globalmente

Lo que llamamos diversidad en este trabajo se refiere a la *heterogeneidad* del sistema, es decir, sistemas con parámetros no idénticos, tanto en su dinámica local como en sus acoplamientos. En esta tesis estudiaremos heterogeneidad en redes de mapas acoplados globalmente (RMAG).

Recientemente ha surgido bastante interés en la investigación de esta clase de sistemas dinámicos, especialmente en el contexto del estudio actual de redes complejas que describen sistemas sociales, biológicos, químicos, etc. En este capítulo haremos una revisión de los trabajos más relevantes sobre el tema de la heterogeneidad en RMAG, los cuales nos sirven de motivación.

2.3.1. Heterogeneidad con la dinámica local de mapas logísticos

Distribución del parámetro local a

Este sistema fue el estudiado por Shibata y Kaneko [30], quienes consideraron una RMAG dada por la expresión

$$x_{t+1}(i) = (1 - \epsilon)f_i(x_t(i)) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N f_j(x_t(j)) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N), \quad (2.7)$$

donde la variable del elemento i -ésimo de la red es $x_t(i)$ en tiempo discreto t , ϵ es el parámetro de acoplamiento, N el número de elementos de la red y $f_i(x_t(i))$ es la dinámica interna de cada elemento (dinámica local), que en este caso está dada por el mapa logístico,

$$f_i(x) = 1 - a(i)x^2, \quad (2.8)$$

en esta última, $a(i)$ es el parámetro local del mapa i , el cual es distribuido en el intervalo $[a_0 - \frac{\Delta a}{2}, a_0 + \frac{\Delta a}{2}]$, por:

$$a(i) = a_0 + \frac{\Delta a(2i - N)}{2N}, \quad (2.9)$$

donde i es el número de celda y a_0 el valor central de la distribución. Hay que señalar que para $\Delta a = 0$ se tiene el caso homogéneo de una RMAG, como se puede observar en la ecuación (2.9).

Para medir la amplitud de las oscilaciones en la dinámica del campo medio, Kaneko y Shibata usaron la desviación cuadrática media (DCM) de la distribución del campo medio, dada por

$$\langle(\delta h)^2\rangle = \langle(h - \langle h\rangle)^2\rangle \quad (2.10)$$

donde $h_t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_j(x_t(j))$, es el campo medio.

Kaneko y Shibata encontraron que, contraria a la situación que se podría esperar cuando los elementos de la red no son idénticos (se esperaría que la dinámica colectiva fuera destruída), la DCM se mantiene finita incluso en el límite de una red de gran tamaño (ver la figura 2.4). Ésto implica la existencia de alguna estructura y coherencia en la dinámica del campo medio. Además, los autores mostraron que el comportamiento colectivo obtenido al distribuir heterogéneamente los parámetros $a(i)$ es similar al que se obtiene al hacer una distribución heterogénea en los acoplamientos $\epsilon(i)$.

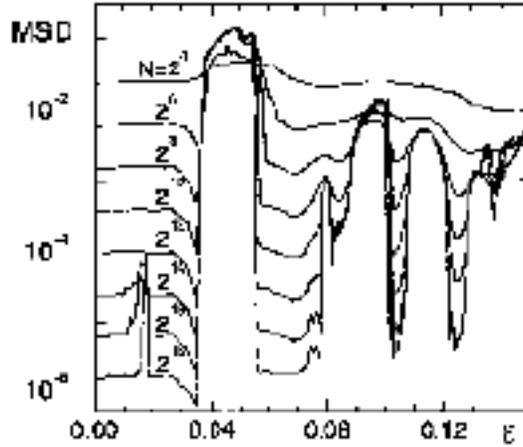


Figura 2.4: Desviación cuadrática media (MSD) del campo medio vs. acoplamiento (ϵ). Con, $a = 1.9$, $\Delta a = 0.05$ y el número de elementos vá desde $N = 2^4$ hasta $N = 2^{18}$ [30].

Ruido interno

Antes de publicar el artículo que mencionamos en la subsección anterior, Kaneko en 1992 ya tenía la idea de la importancia de la heterogeneidad en los sistemas espacio temporales, al estudiar la influencia del ruido en la dinámica local [29]. Este sistema consiste de mapas logísticos con ruido, de la forma

$$f_i(y) = 1 - ay^2 + s(i) , \quad (2.11)$$

donde $s(i)$ es un número aleatorio distribuido en un intervalo definido por $[-\alpha, \alpha]$, teniendo así ruido estático, fijo en el tiempo para cada mapa. Estos mapas se acoplaron globalmente por medio de la ecuación (2.7).

Kaneko notó que, la desviación cuadrática media (MSD) disminuye en función del tamaño del sistema hasta que éste alcanza un tamaño crítico N_c , a partir del cual un aumento de N conlleva al aumento de la cantidad MSD hasta alcanzar un comportamiento similar al caso sin ruido. Es decir, que el ruido interno de cierta manera induce la sincronización.

Distribución de los parámetros de acoplamiento

Sistemas con acoplamiento heterogéneo de mapas logísticos globalmente acoplados, fueron estudiados en [31] por Kaneko, en los cuales la dinámica del elemento i viene dada por

$$x_{t+1}(i) = (1 - \epsilon(i))f(x_t(i)) + \frac{\epsilon(i)}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t(j)), \quad (2.12)$$

y los acoplamientos se encuentran distribuidos sobre el intervalo $\epsilon(i) \in [\epsilon_{min}, \epsilon_{max}]$ como sigue,

$$\epsilon(i) = \epsilon_{min} + (\epsilon_{max} - \epsilon_{min})(i/N). \quad (2.13)$$

En este sistema se encuentra formación de *clusters* (subconjuntos de elementos sincronizados) que dependen de la intensidad del acoplamiento en cada elemento, de tal modo que elementos con un acoplamiento $\epsilon(i) > 0.22$ forman un sólo cluster, y a medida que se disminuye la intensidad del acoplamiento, se incrementa el número de clusters en el sistema.

Ruido externo

Para observar el efecto del ruido externo en sistemas de RMAG con la dinámica local del mapa logístico, Shibata, Chawanya y Kaneko en [32] consideraron el sistema de la siguiente forma

$$x_{t+1}(i) = (1 - \epsilon)f_i(x_t(i)) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N f_j(x_t(j)) + \xi_t(i), \quad (2.14)$$

donde $\xi_t(i)$ es un proceso Gaussiano aleatorio. Los resultados obtenidos en [32] muestran que el ruido microscópico reduce la complejidad del movimiento colectivo, y que el ruido microscópico puede suprimir el número de grados de libertad en un nivel macroscópico.

2.3.2. Heterogeneidad con la dinámica local de mapas logarítmicos

Este tipo de sistemas fue estudiado por González en [33]. La dinámica local está descrita por el mapa logarítmico, definido como

$$f(x_t) = b + \ln |x_t|, \quad (2.15)$$

La figura 2.5 muestra el diagrama de bifurcación de este mapa, donde se observa la existencia de caos robusto en el intervalo $b \in [-1, 1]$.

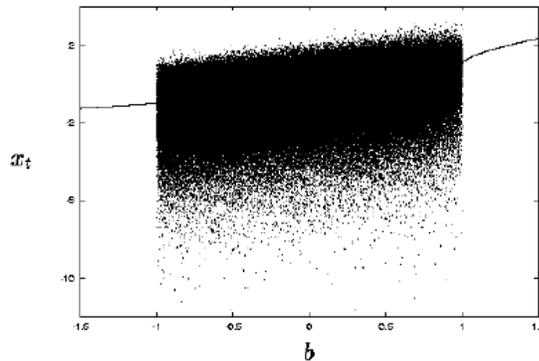


Figura 2.5: Diagrama de bifurcación del mapa logarítmico [33].

De la misma manera que en los casos anteriores, el acoplamiento global de estos mapas viene dado por la ecuación (2.7).

Distribución del parámetro local b

En este caso, la heterogeneidad en el parámetro local b viene dada por

$$f_i(x_t) = b(i) + \ln |x_t|, \quad (2.16)$$

donde los parámetros locales $b(i)$ se distribuyen aleatoriamente dentro de la región donde la dinámica local es completamente caótica, $b(i) \in [-1, 1]$ (ver figura 2.5), y donde no existen ventanas de periodicidad. De esta manera, cualquier orden colectivo que aparezca no se puede atribuir a la presencia de órbitas periódicas estables de las dinámicas locales.

La figura 2.6 muestra el campo medio del sistema de los mapas 2.16 acoplados globalmente en función del parámetro de acoplamiento ϵ [33]. Se observan varios tipos de comportamientos colectivos, tales como comportamientos colectivos periódicos (no triviales) y bandas caóticas para diferentes rangos del parámetro de acoplamiento. La gráfica correspondiente al caso de mapas homogéneos, con b fijo, se muestran en la figura 2.7. Comparando ambas figuras, notamos en ciertos rangos de acoplamiento el surgimiento de comportamientos colectivos periódicos en el caso heterogéneo, no presentes en el caso homogéneo. Luego, resulta evidente que los comportamientos colectivos ordenados son inducidos por la heterogeneidad en la dinámica local.

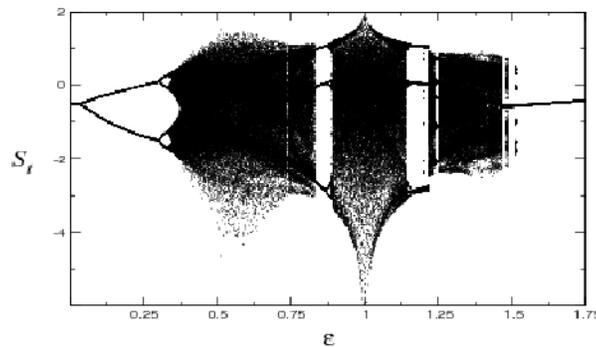


Figura 2.6: Diagrama de bifurcación del campo medio S_t en función del parámetro de acoplamiento global ϵ , en el caso de la distribución de la heterogeneidad en el parámetro $b(i)$, en una RMAG de mapas logarítmicos [33].

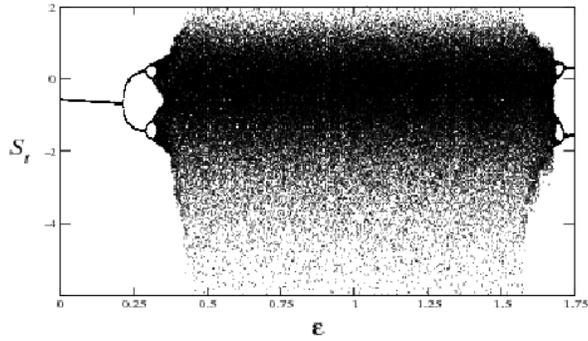


Figura 2.7: Diagrama de bifurcación del campo medio S_t en función del parámetro de acoplamiento global ϵ , en el caso homogéneo, con el parámetro local fijo, $b = 0$, en una RMAG de mapas logarítmicos [33].

Análisis del campo medio S_t vs. Δb

La figura 2.8 muestra el campo medio en función del ancho Δb de la distribución de parámetros locales, centrado en el valor $b_0 = 0$, y manteniendo fijo el parámetro de acoplamiento ϵ . El caso homogéneo corresponde a $\Delta b = 0$ donde $b(i) = 0, \forall i$, y el caso de máxima heterogeneidad corresponde a $\Delta b = 1$. Para $\Delta b = 0$ se observa la coincidencia con el caso homogéneo, con $\epsilon = 0.835$ (comparar con la figura 2.7). De la misma manera, para $\Delta b = 1$ se observa la coincidencia con el caso heterogéneo, con parámetro de acoplamiento $\epsilon = 0.835$ (ver figura 2.6). A partir de este análisis, se pudo demostrar cómo la heterogeneidad en el parámetro local influye en el surgimiento de comportamientos colectivos no triviales en sistemas caóticos extendidos.

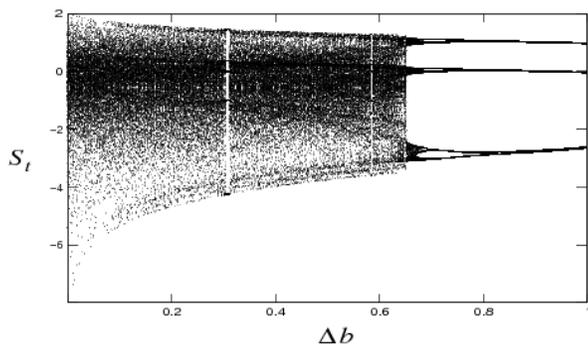


Figura 2.8: Campo medio S_t en función del intervalo Δb centrado $b_0 = 0$, con $\epsilon = 0.835$, en una RMAG de mapas logarítmicos [33].

Distribución de los parámetros de acoplamiento

La heterogeneidad en los acoplamientos de una RMAG de mapas logarítmicos se introdujo en la referencia [33], distribuyendo los parámetros de acoplamiento $\epsilon(i)$ de manera aleatoria en la región $\epsilon(i) \in [0, 1]$.

La figura 2.9 muestra el campo medio del sistema en función del parámetro b , donde se pueden observar bandas caóticas. La figura 2.10 muestra el campo medio del sistema en función del ancho de la distribución del parámetro ϵ , con $b = -0.9$ fijo. Se observa la aparición de comportamiento colectivo de período dos, cuatro, ocho y bandas caóticas de períodos ocho, cuatro y dos.

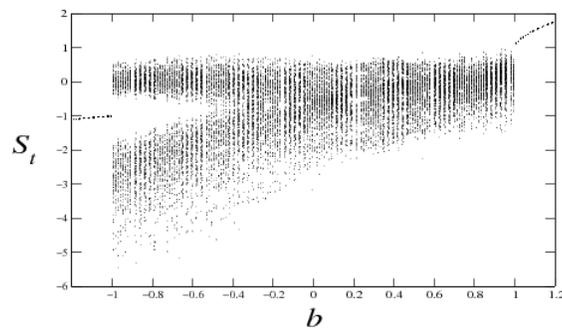


Figura 2.9: Diagrama de bifurcación del campo medio S_t en función de b , con $N = 10^5$. Escenario con distribución heterogénea del parámetro de acoplamiento $\epsilon(i)$, en una RMAG de mapas logarítmicos [33].

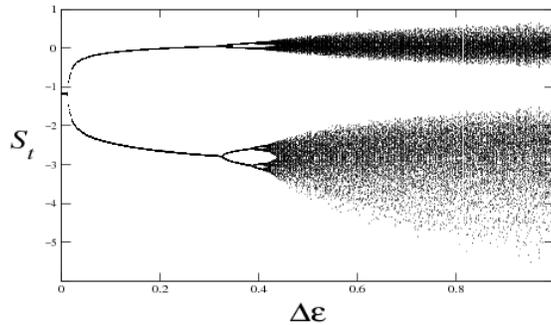


Figura 2.10: Campo medio S_t en función del intervalo $\Delta\epsilon$. Parámetro local fijo en $b = -0.9$ que corresponde al estado asintótico de banda caótica de período dos, observado en la figura 2.9 con $\Delta\epsilon = 1$. En contraste, para $\Delta\epsilon = 0$, se tienen los elementos desacoplados, cuyos valores concuerdan con el caso homogéneo para $b = -0.9$ y $\epsilon = 0$, en una RMAG de mapas logarítmicos [33].

2.3.3. Heterogeneidad en la dinámica local de mapas singulares

En esta sección haremos una revisión de algunos resultados de González [33], con sistemas de RMAG donde la dinámica local corresponde a la familia de mapas singulares, expresados por la ecuación (1.8),

$$f(x_t) = b - |x_t|^z, \quad (2.17)$$

esta dinámica local en RMAG se estudiará más a fondo en esta tesis.

Distribución del parámetro local

La figura 2.11 muestra el rango de valores $[b_1 = 0.250, b_2 = 0.750]$ donde se distribuyen los parámetros $b(i)$, con el valor del exponente $z = 0.5$ fijo. Estos mapas heterogéneos son acoplados por la expresión (2.7).

En la figura 2.12 se observa el campo medio del sistema en función del acoplamiento ϵ . Esta figura ha sido denominada “*el cangrejo*”, por su forma particular. En ella se observan comportamientos colectivos de período dos, cuatro, seis, ocho, diez y bandas caóticas.

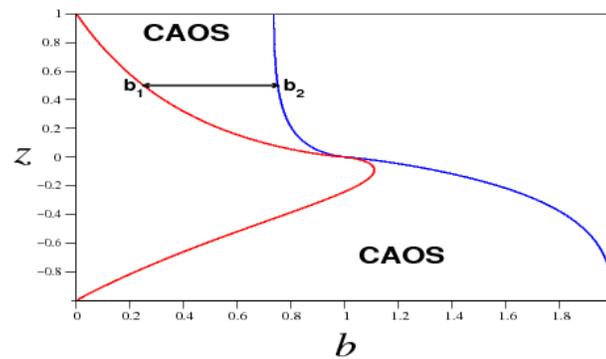


Figura 2.11: Zona de distribución de los valores de $b(i)$ dentro de la región caótica según lo indicado en la figura 1.5, con $z = 0.5$, $b_1 = 0.25$ y $b_2 = 0.75$, en una RMAG de mapas singulares [33].

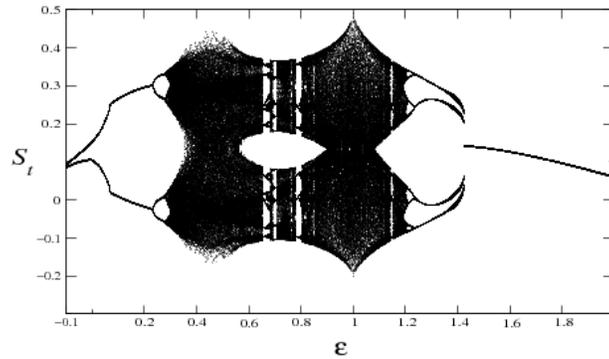


Figura 2.12: Campo medio S_t vs. ϵ , con parámetro local $b(i)$ distribuido aleatoriamente, con exponente $z = 0.5$ fijo, en una RMAG de mapas singulares [33].

2.3.4. Heterogeneidad en otros contextos

Como hemos mencionado, la heterogeneidad existe en una gran variedad de contextos, situación por la cual los científicos han mostrado gran interés en su exploración. A continuación se muestran algunos ejemplos del estudio de la heterogeneidad en sistemas dinámicos.

- **En la óptica no-lineal**, se ha representado un sistema de dinámica caótica de láser con acoplamiento global, donde cada modo de excitación depende de la longitud de onda, haciendo de éste un sistema heterogéneo [34]; también ha logrado controlar numéricamente el nivel de caos en un modelo de láseres multimodo (con heterogeneidad introducida en su frecuencia) utilizando perturbaciones periódicas de parámetros de control accesibles [35]; y en [36] se estudió el efecto de acoplar dos determinados láseres caóticos de diferentes modos longitudinales para duplicar la frecuencia; entre otros.
- **En conjuntos de osciladores de fase acoplados** [37], se estudió el efecto de introducir ruido en su dinámica colectiva, cuyas frecuencias naturales son idénticas pero cuyo acoplamiento no es el mismo en todo el ensamble, donde además la intensidad del ruido también puede ser heterogénea, representando la diversidad en las respuestas individuales a fluctuaciones externas. En este trabajo se mostró que la transición a la desincronización inducida por el ruido puede ser completamente suprimida incluso para valores grandes de la intensidad de ruido.

- **En un modelo de redes neuronales** [38], se ha estudiado el comportamiento que surge al acoplar no-difusivamente, o por así decirlo, al conectar, diferentes unidades, que llaman conexiones no-simétricas. Se demuestra que, al contrario de lo que ocurre con redes acopladas difusivamente, la sincronización en redes con acoplamiento no-difusivo puede ser dramáticamente diferente al comportamiento de sus unidades constituyentes. Estos resultados se aplican a dos modelos de dinámica neuronal que consisten en sistemas acoplados de mapas tienda y de mapas logísticos. Este modelo neuronal sencillo puede producir comportamiento colectivo complejo a través de la coordinación de las acciones de sus componentes.

El curso del conocimiento se enfrenta a una realidad no mecánica: el universo empieza a parecerse más a un gran pensamiento que a una máquina...

James Jeans, *The Mysterious Universe*.

Capítulo 3

Comportamientos colectivos inducidos por heterogeneidad en los acoplamientos de RMAG con mapas singulares

Interesantes comportamientos emergentes inducidos por la diversidad¹ se han observado en una gran variedad de sistemas, como se mostró en el capítulo anterior. En este capítulo, nuestro objetivo es estudiar este tipo de comportamientos en sistemas de redes de mapas acoplados globalmente (RMAG), donde la dinámica local corresponde a mapas singulares, cuyas propiedades se estudiaron en la sección 1.2. Aquí introduciremos heterogeneidad en el parámetro de acoplamiento; de esta manera podemos representar una red dinámica en la que cada elemento interactúa de manera distinta con los demás. Esta clase de sistemas se encuentran en la Naturaleza; ejemplos de estos son: una sociedad con individuos de características similares que se comunican de diferentes maneras entre ellos; o un conjunto de neuronas cuyas conexiones poseen diferentes intensidades para cada una de ellas. Como

¹en este trabajo con el término de *diversidad* nos referimos a la *heterogeneidad*

un modelo general para describir heterogeneidad en la conectividad de un sistema, investigaremos qué ocurre al acoplar de diferentes maneras mapas singulares con caos robusto.

3.1. Modelo con acoplamiento heterogéneo

Consideramos un sistema con acoplamiento heterogéneo de mapas globalmente acoplados [31] definido por

$$x_{t+1}(i) = (1 - \epsilon(i))f(x_t(i)) + \frac{\epsilon(i)}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t(j)), \quad (3.1)$$

donde la dinámica local de los elementos se describe mediante los mapas singulares, que en este caso son homogéneos (con idénticos parámetros), cuya forma funcional es

$$f(x_t(i)) = b - |x_t(i)|^z, \quad (3.2)$$

con $|z| < 1$.

Los valores b y z que consideraremos se toman en el rango de las regiones caóticas que se muestran en la figura 1.5 del espacio de parámetros (b, z) .

3.2. Heterogeneidad en los acoplamientos

3.2.1. Comportamientos colectivos en función de z

Los parámetros de acoplamiento se distribuyen con probabilidad uniforme en el intervalo $\epsilon(i) \in [-0.5, 2.5]$, de manera de cubrir un amplio rango de acoplamiento. Escogeremos un valor fijo $b = 1.11$ y un rango de los exponentes $z \in [-1, -0.023]$ dentro de la región de caos robusto de los mapas singulares, como se muestra en la figura 3.1.

En la figura 3.2 se muestra el campo medio h_t como función de z , con $b = 1.11$ fijo y $\epsilon(i) \in [-0.5, 2.5]$. En esta figura surgen los siguientes comportamientos emergentes:

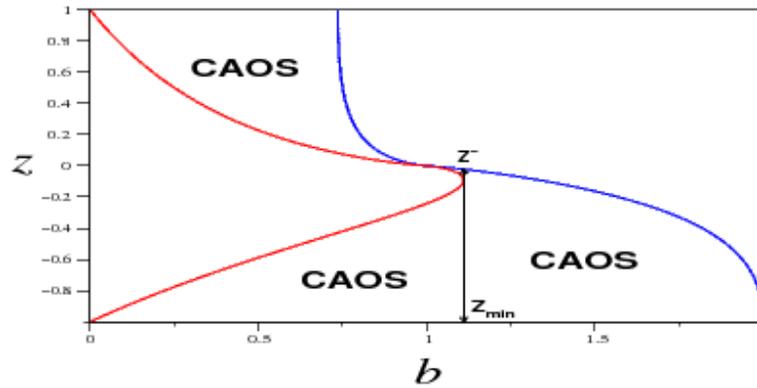


Figura 3.1: Valores de z dentro de la región caótica para $b = 1.11$ [33].

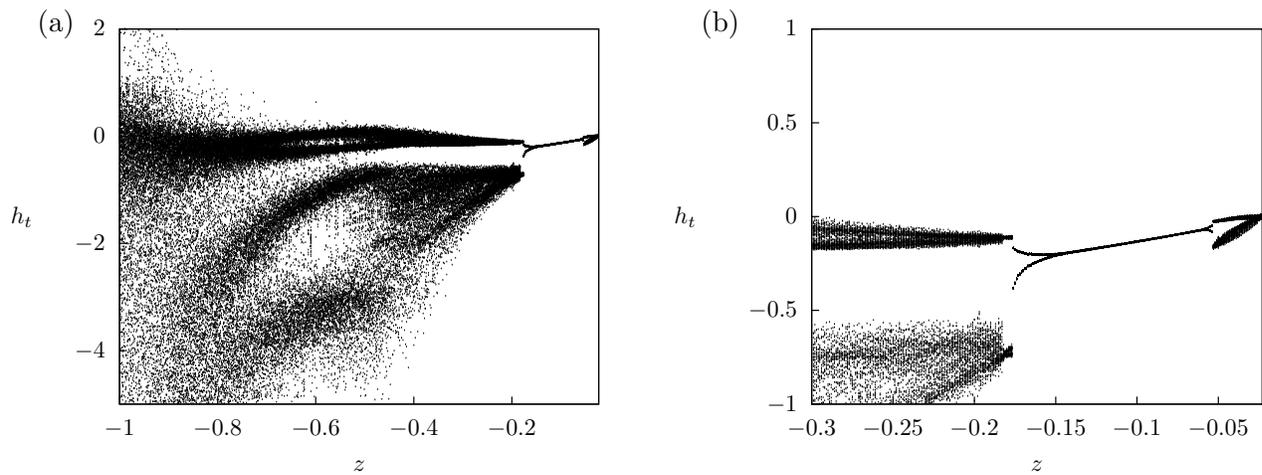


Figura 3.2: (a) Diagrama de bifurcación del campo medio h_t en función del exponente de singularidad z con $\epsilon(i) \in [-0.5, 2.5]$, con $b = 1.11$ y el tamaño del sistema $N = 10^5$. Para cada valor de z , se desprecian las primeras 3000 iteraciones y se grafican las siguientes 100. (b) Magnificación de (a) en el intervalo $z \in [-0.3, -0.023]$.

- Bandas caóticas de períodos:
 - i) dos para $z \in [-0.493, -0.177]$
 - ii) dos para $z \in [-0.053, -0.032]$
 - iii) uno para $z \in [-0.031, -0.023]$

- Comportamientos colectivos de períodos:

i) dos para $z \in [-0.176, -0.151]$

ii) dos para $z \in [-0.057, -0.054]$

iii) uno (turbulencia) para $z \in [-0.150, -0.058]$

La figura 3.3 muestra la desviación estándar media $\langle \sigma \rangle$ de los estados del sistema correspondientes a la figura 3.2. En la parte (a) se observa que la sincronización aumenta con el incremento del exponente z dentro de la región caótica. La parte (b) muestra una magnificación de (a), evidenciando que la sincronización completa no se alcanza. Esta situación está asociada al apareamiento de bandas caóticas, las cuales surgen en la figura 3.2 precisamente en los intervalos más cercanos a la sincronización.

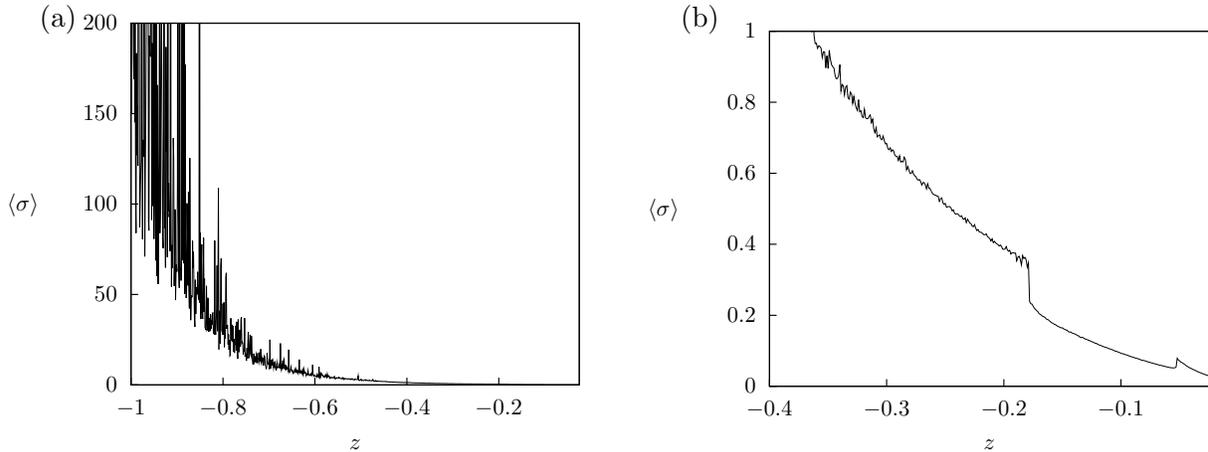


Figura 3.3: (a) Desviación estándar media $\langle \sigma \rangle$ de los $x_t(i)$, en función del exponente de singularidad z . Con $b = 1.11$ y $N = 10^5$ celdas. (b) Magnificación de (a) en el intervalo de z que se aproxima a la sincronización $z \in [-0.4, -0.023]$.

3.2.2. Comportamientos colectivos en función de b

La figura 3.4 muestra el campo medio h_t de la RMAG con mapas singulares con acoplamientos distribuidos en el intervalo $\epsilon(i) \in [0, 2]$, en función del parámetro local b en el rango que se muestra en la figura 2.11, con $z = 0.5$ fijo.

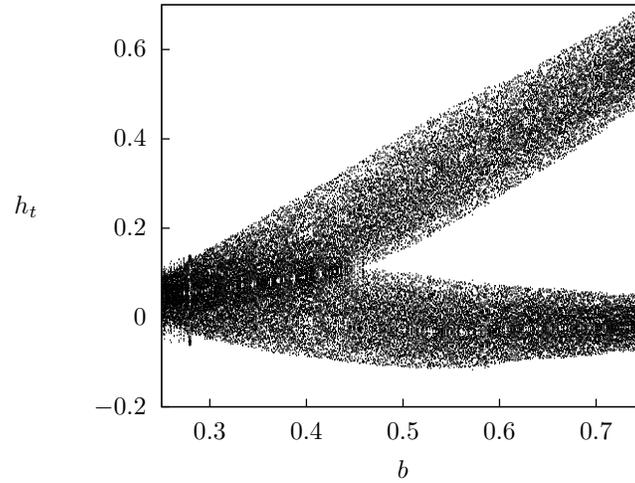


Figura 3.4: Diagrama de bifurcación del campo medio h_t en función del parámetro local b , en el caso de distribución de la heterogeneidad en el parámetro de acoplamiento $\epsilon(i) \in [0, 2]$, con el exponente de singularidad fijo en $z = 0.5$ y $N = 10^5$. Para cada valor de b , se desprecian las primeras 3000 iteraciones y se grafican las siguientes 100.

Se observan los siguientes comportamientos:

- Bandas caóticas de:
 - i) período uno para $b \in [0.250, 0.460]$
 - ii) período dos para $b \in [0.461, 0.750]$

El cálculo de la desviación estándar media para este caso de distribución de la heterogeneidad en el parámetro de acoplamiento se muestra en la figura 3.5, en la cual se observa que este sistema de RMAG tiende a la sincronización al aumentar b , sin llegar a alcanzarla.

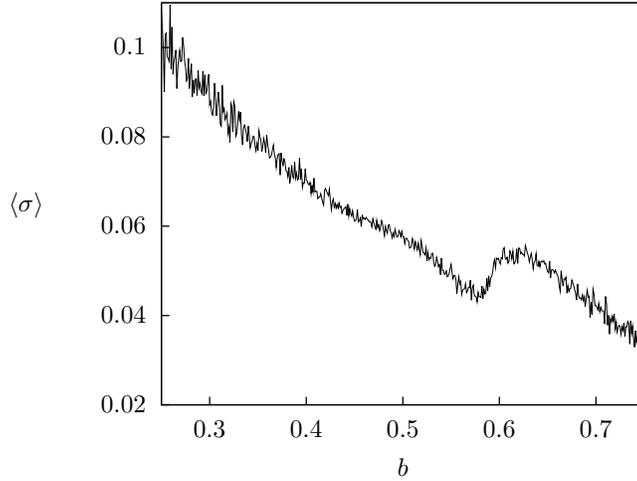


Figura 3.5: Desviación estándar media $\langle \sigma \rangle$ de los $x_t(i)$, en función del parámetro local b . Con $z = 0.5$ y $N = 10^5$ celdas. Para cada valor de b , se desprecian las primeras 1000 iteraciones y se promedian las siguientes 100.

3.3. Influencia del ancho de la heterogeneidad en los acoplamientos

Con el objetivo de estudiar el efecto de la heterogeneidad en el comportamiento de redes dinámicas, realizamos un análisis del campo medio del sistema h_t como una función del ancho del intervalo en la distribución de los parámetros de acoplamiento del sistema; de esta manera caracterizaremos los estados colectivos en función de $\Delta\epsilon$.

La distribución de los parámetros $\epsilon(i)$ se realiza de la siguiente manera:

$$\epsilon(i) = \epsilon_{min} + \Delta\epsilon \cdot \gamma \quad (\Delta\epsilon \in [0, \epsilon_{max} - \epsilon_{min}]), \quad (3.3)$$

siendo ϵ_{max} y ϵ_{min} los valores máximo y mínimo de la distribución de la heterogeneidad del ϵ , respectivamente, y γ es una función que genera números aleatorios distribuidos uniformemente en el intervalo $[0, 1]$.

De esta manera, se puede notar que para $\Delta\epsilon = 0$ se tendrá una distribución homogénea del parámetro de acoplamiento, es decir, $\epsilon(i) = \epsilon_{min}$, $\forall i$, y por otra parte, cuando $\Delta\epsilon = \epsilon_{max} - \epsilon_{min}$, se tendrá el caso de la heterogeneidad distribuida en todo el ancho del intervalo $\epsilon \in [\epsilon_{min}, \epsilon_{max}]$.

En la figura 3.6 se muestra la gráfica que resulta al variar el ancho del intervalo de heterogeneidad $\Delta\epsilon$ para los valores de parámetros fijos en $b = 1.11$ y $z = -0.10$. Se observa un comportamiento de turbulencia global en promedio, pues parece ser una banda caótica de período uno, pero el ancho de la banda se puede reducir hasta llegar a ser un punto fijo al aumentar el número de elementos N .

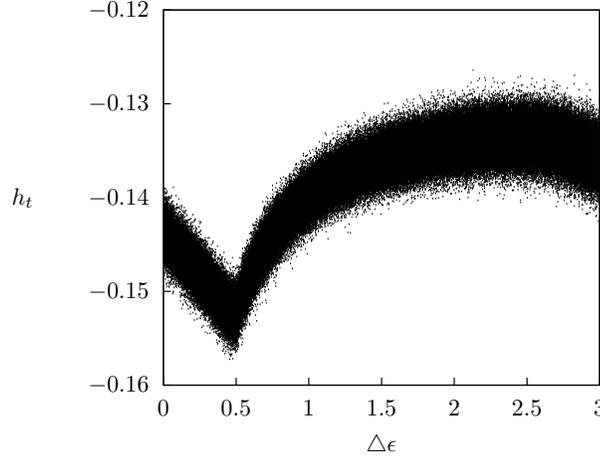


Figura 3.6: Campo medio h_t en función del tamaño de la distribución de la heterogeneidad en el parámetro de acoplamiento $\Delta\epsilon$. Con $b = 1.11$ y $z = -0.10$.

Para $\Delta\epsilon = 0$ se tiene el caso homogéneo con parámetros $\epsilon = \epsilon_{min} = -0.5$, con b fijo y z en los valores mencionados, de una RMAG, que coincide con el caso homogéneo que se muestra en la figura 3.7, en la cual observamos la correspondencia para $z = -0.10$. Para $\Delta\epsilon = 3$, se tiene el caso de distribución de la heterogeneidad en el intervalo $\epsilon(i) = [-0.5, 2.5]$, con $b = 1.11$ y para el valor de $z = -0.10$, que es exactamente el caso de heterogeneidad estudiado en la figura 3.2. Se observa correspondencia para dicho valor del exponente z donde existe turbulencia global.

También estudiamos el comportamiento del sistema en función del $\Delta\epsilon$ para el valor del exponente $z = -1.16$, que en el caso de distribución de la heterogeneidad en todo el intervalo de $\epsilon = [-0.5, 2.5]$, corresponde al comportamiento colectivo de período dos observado en la figura 3.2 para este valor de z . Esta gráfica se muestra en la figura 3.8, en la cual observamos que, para $\Delta\epsilon = 0$, coincide con el caso homogéneo (ver figura 3.7) con parámetros $\epsilon = \epsilon_{min} = -0.5$ y $b = 1.11$

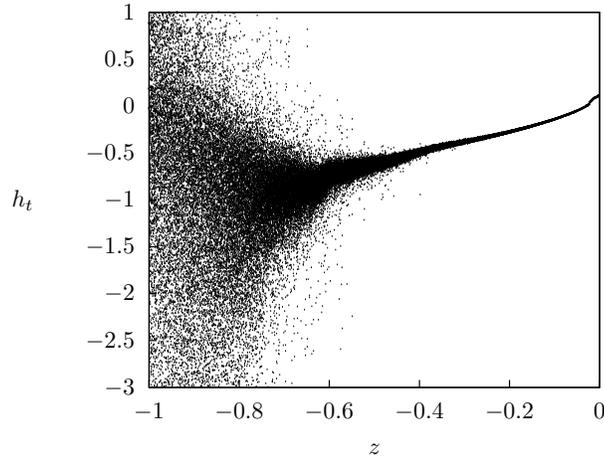


Figura 3.7: Campo medio h_t en función del exponente de singularidad z . Con $b = 1.11$ y $\epsilon = -0.5$.

en $z = -1.16$. Se observa cómo el campo medio se empieza a bifurcar en $\Delta\epsilon = 1$ con un período doble. Igualmente verificamos que el ancho de las bandas disminuye al aumentar N , de manera que el período dos colectivo se hace mejor definido. Para $\Delta\epsilon = 3$ esta gráfica se corresponde con el caso estudiado en la figura 3.2, donde se observa comportamiento colectivo de período dos. Este resultado muestra la posibilidad de inducir comportamientos colectivos periódicos mediante la adición de heterogeneidad en los acoplamientos del sistema.

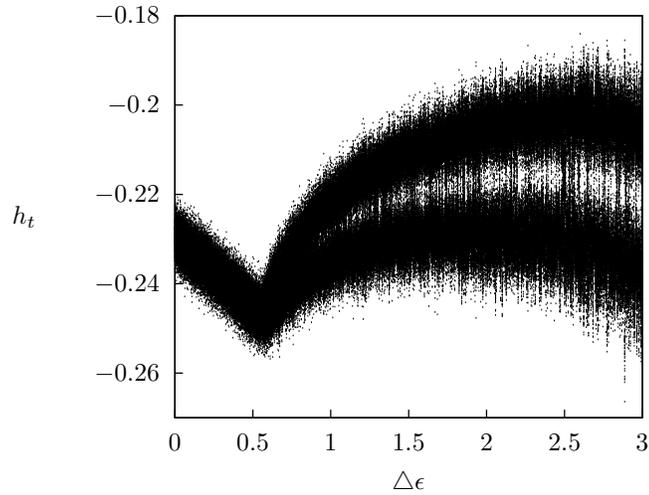


Figura 3.8: Campo medio h_t en función del tamaño de la distribución de la heterogeneidad en el parámetro de acoplamiento $\Delta\epsilon$. Con $b = 1.11$ y $z = -0.16$.

Para el estudio de la heterogeneidad del parámetro de acoplamiento como una función del exponente de singularidad z , realizamos el cálculo de la desviación estándar media $\langle\sigma\rangle$. Se obtuvieron las gráficas de $\langle\sigma\rangle$ vs. $\Delta\epsilon$ para los dos valores del exponente de singularidad $z = -0.10$ y $z = -0.16$ (figuras 3.9(a) y 3.9(b), respectivamente). Se puede observar que el sistema se aproxima a la sincronización en la medida en que el ancho del intervalo de la heterogeneidad en los acoplamiento es más amplio.

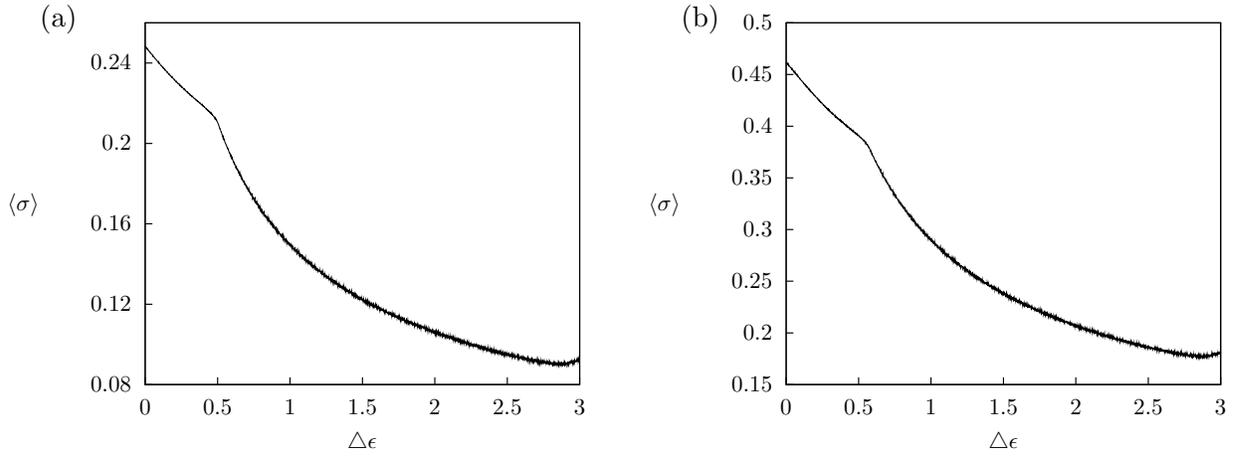


Figura 3.9: (a) Desviación estándar media $\langle\sigma\rangle$ de las celdas $x_t(i)$, en función del tamaño del intervalo de la distribución de la heterogeneidad en el parámetro de acoplamiento $\Delta\epsilon$. Con $b = 1.11$ y $z = -0.10$.(b) Desviación estándar media $\langle\sigma\rangle$ de las celdas $x_t(i)$, en función del tamaño del intervalo de la distribución de la heterogeneidad en el parámetro de acoplamiento $\Delta\epsilon$. Con $b = 1.11$ y $z = -0.16$. En las dos figuras, para cada valor de $\Delta\epsilon$, se desprecian las primeras 1000 iteraciones y se grafica el promedio de las siguientes 100.

Estos resultados son contraintuitivos, puesto que no se esperaría que la heterogeneidad en las interacciones de los elementos de un sistema contribuya a la sincronización del mismo.

Las figuras 3.10 y 3.11 muestran el campo medio h_t vs. $\Delta\epsilon$, con exponente fijo $z = 0.5$, para dos valores diferentes del parámetro local b . En ambas figuras se puede apreciar que para $\Delta\epsilon = 2$ existe correspondencia con la figura 3.4 para los dos valores del parámetro local; en la figura 3.4 para $b = 0.3$ coincide con el comportamiento

colectivo de banda caótica de período uno, y para $b = 0.7$ con comportamiento colectivo de banda caótica de período dos.

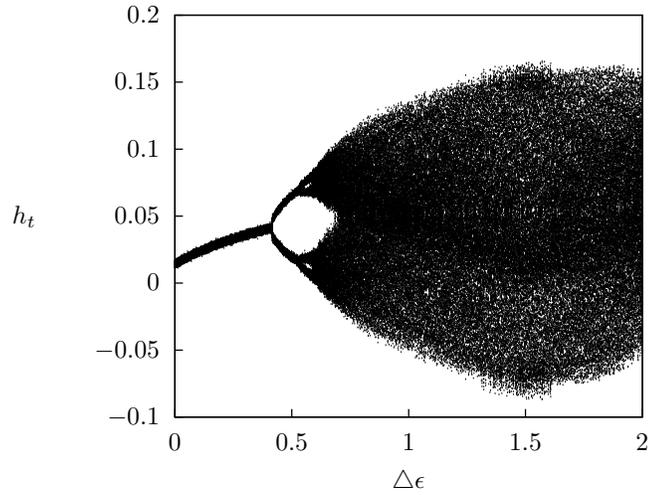


Figura 3.10: Campo medio h_t en función del tamaño de la distribución de la heterogeneidad en el parámetro de acoplamiento $\Delta\epsilon$. Parámetros locales fijos $b = 0.3$ y $z = 0.5$.

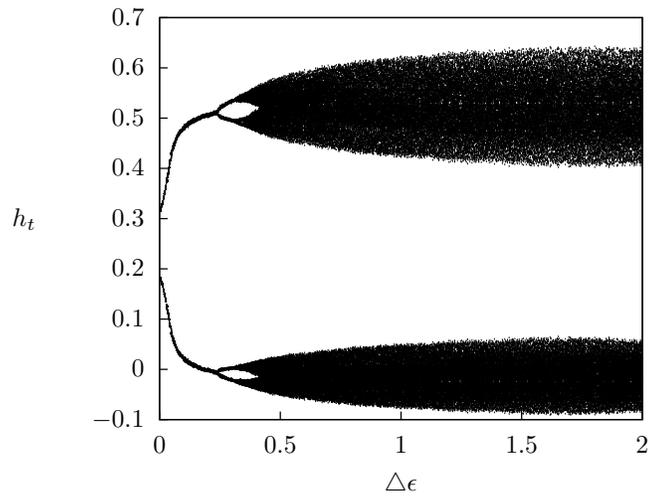


Figura 3.11: Campo medio h_t en función del tamaño de la distribución de la heterogeneidad en el parámetro de acoplamiento $\Delta\epsilon$. Parámetros locales fijos $b = 0.7$ y $z = 0.5$.

La figura 3.12 muestra el campo medio h_t en función de b , para el caso homogéneo $\Delta\epsilon = 0$. Se puede observar la correspondencia del comportamiento colectivo de período uno en $b = 0.3$ con el $\Delta\epsilon = 0$ de la figura 3.10 y el comportamiento colectivo de período dos en $b = 0.7$ con el $\Delta\epsilon = 0$ de la figura 3.11.

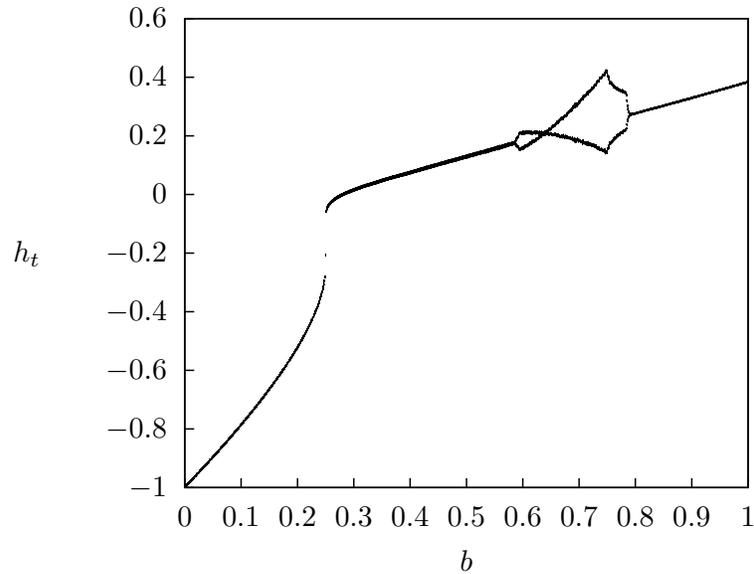


Figura 3.12: Campo medio h_t en función del parámetro local b . Con $z = 0.5$ y $\epsilon = 0$.

Las figuras 3.13 y 3.14 muestran la desviación estándar media $\langle\sigma\rangle$ en función del $\Delta\epsilon$, para los dos valores del parámetro local $b = 0.3$ y $b = 0.7$, respectivamente. Nuevamente observamos que la heterogeneidad en los acoplamientos induce sincronización en el sistema.

Los resultados de este capítulo son un claro ejemplo de cómo la heterogeneidad en los sistemas (en este caso, en las interacciones o acoplamientos entre los elementos) contribuye a la aparición de comportamientos colectivos no presentes en sistemas homogéneos. Esto constituye uno de los resultados más relevantes de esta Tesis.

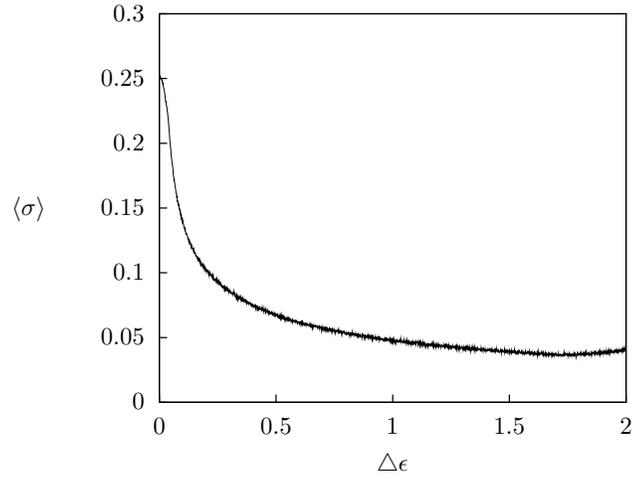


Figura 3.13: Desviación estándar media $\langle \sigma \rangle$ de las celdas $x_t(i)$, en función del tamaño del intervalo de la distribución de la heterogeneidad en el parámetro de acoplamiento $\Delta \epsilon$. Con $b = 0.7$ y $z = 0.5$.

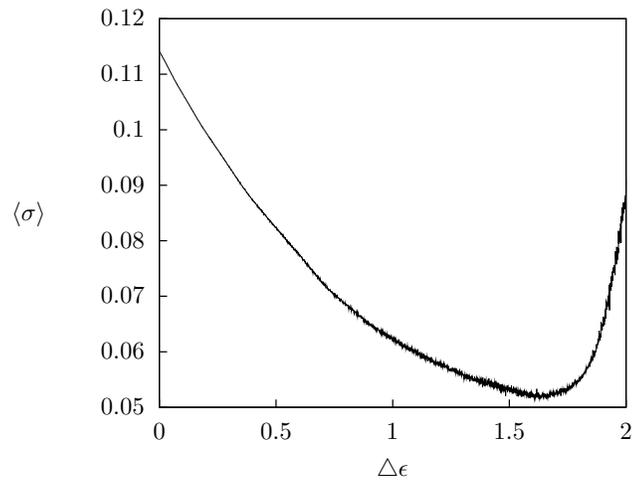


Figura 3.14: Desviación estándar media $\langle \sigma \rangle$ de las celdas $x_t(i)$, en función del tamaño del intervalo de la distribución de la heterogeneidad en el parámetro de acoplamiento $\Delta \epsilon$. Con $b = 0.3$ y $z = 0.5$.

*¿Para qué repetir los errores antiguos,
habiendo tantos errores nuevos que cometer?*

Bertrand Russel

Capítulo 4

Comportamientos colectivos inducidos por diversidad en la dinámica local de mapas singulares

La presencia de diversidad es la situación más común en muchos sistemas. Esto ocurre en sistemas sociales, donde cada individuo tiene sus determinadas características; en sistemas de redes celulares o neuronales, donde cada célula tiene funciones propias; de la misma manera ocurre en varios contextos en los que existen sistemas constituidos por elementos interrelacionados entre sí. En este Capítulo estudiaremos los comportamientos colectivos de esta clase de sistemas de elementos acoplados de manera difusiva y global, mediante un modelo de RMAG cuya dinámica local está descrita por mapas singulares. En un primer estudio, introduciremos heterogeneidad en el parámetro local b de estos mapas, e investigaremos el comportamiento del sistema como una función del exponente de singularidad z ; de la misma manera realizaremos el estudio del comportamiento inducido por la heterogeneidad en el exponente z de los mapas singulares, como una función tanto del parámetro local b , como de su acoplamiento ϵ .

4.1. Heterogeneidad en el parámetro local b

4.1.1. Modelo con dinámica local heterogénea

Para investigar el efecto de la heterogeneidad en los parámetros locales de una RMAG, consideraremos la expresión utilizada por [30] para mapas logísticos acoplados globalmente,

$$x_{t+1}(i) = (1 - \epsilon)f_i(x_t(i)) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N f_j(x_t(j)) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N), \quad (4.1)$$

donde, en nuestro caso, la dinámica local estará dada por mapas singulares, y la heterogeneidad en su parámetro local b tiene la forma,

$$f_i(x_t(i)) = b(i) - |x_t|^z. \quad (4.2)$$

Los valores de $b(i)$ se tomarán distribuidos en un intervalo donde existe caos robusto.

4.1.2. Comportamientos colectivos en función de z

Tomaremos los valores de $b(i)$ distribuidos en el intervalo $[0.875, 1.75]$. Las figuras 4.1 y 4.2 muestran el campo medio h_t de la RMAG de la ecuación (4.1), en función del exponente z de la dinámica local para dos valores distintos del acoplamiento ϵ . En ambas gráficas, el rango de z pertenece a la región de caos robusto de los mapas singulares. Nótese que a pesar de que, tanto los valores heterogéneos de b como los valores de z de la dinámica local corresponden a caos robusto, el comportamiento colectivo del sistema muestra estructuras definidas tales como bandas caóticas y comportamientos colectivos de período dos.

La desviación estándar media se calculó en ambos casos, se obtuvieron las gráficas que se muestran en las figuras 4.3 y 4.4 para los valores de acoplamiento $\epsilon = 0.5$ y $\epsilon = 0.2$, respectivamente.

Se puede notar en las figuras 4.3 y 4.4 la disminución de la desviación $\langle \sigma \rangle$ con el aumento del exponente z , sin alcanzar la sincronización completa para ningún valor de z . Es de esperarse que este sistema no pueda alcanzar $\langle \sigma \rangle = 0$ porque no existe solución sincronizada tal que $x_t(i) = x_t(j), \forall i, j$. Sin embargo, vemos que la presencia de heterogeneidad en los parámetros locales puede inducir un grado apreciable de sincronización para ciertos rangos del exponente z .

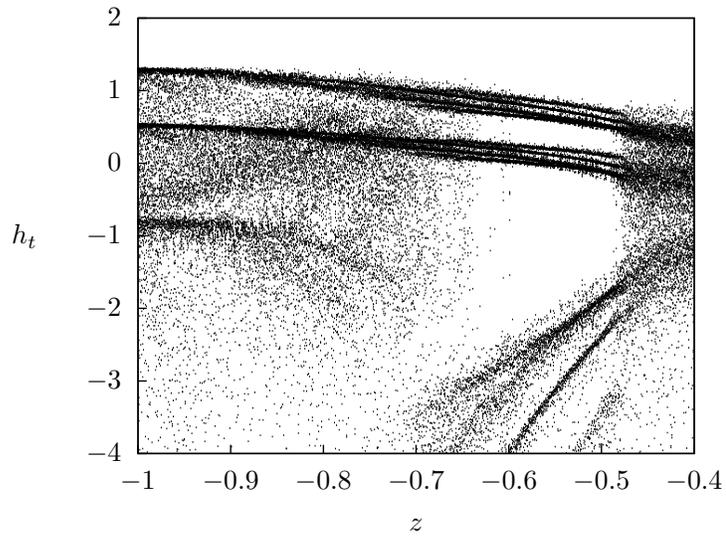


Figura 4.1: Diagrama de bifurcación del campo medio h_t en función del exponente de singularidad z , en el caso de distribución del parámetro local $b(i) \in [0.875, 1.75]$. Con el parámetro de acoplamiento fijo en $\epsilon = 0.5$ y $N = 10^5$.

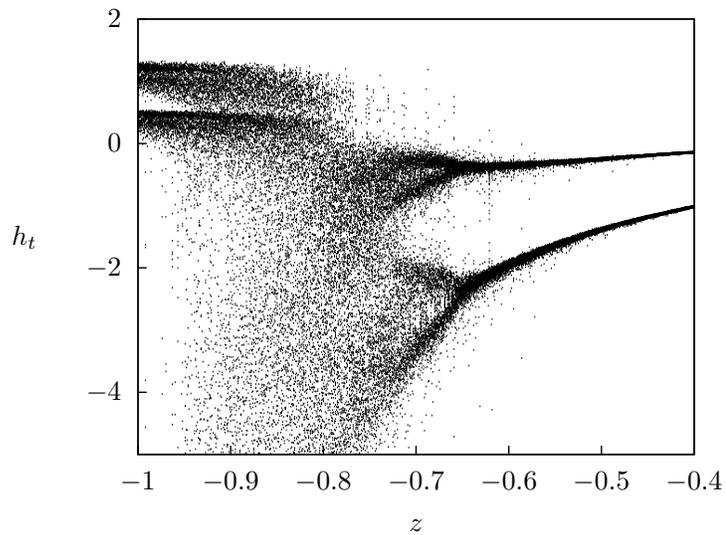


Figura 4.2: Diagrama de bifurcación del campo medio h_t en función del exponente de singularidad z , en el caso de distribución del parámetro local $b(i) \in [0.875, 1.75]$. Con el parámetro de acoplamiento fijo en $\epsilon = 0.2$ y $N = 10^5$.

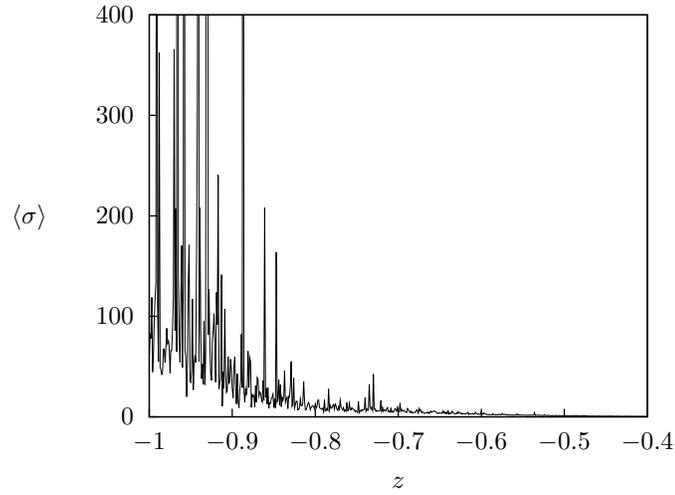


Figura 4.3: Desviación estándar media $\langle \sigma \rangle$ de los estados colectivos $x_t(i)$, para el caso de distribución de la heterogeneidad en los $b(i)$, en función del exponente z . Con $\epsilon = 0.5$. Para cada valor de z se despreciaron las primeras 1000 iteraciones, y se grafica el promedio de las siguientes 100.

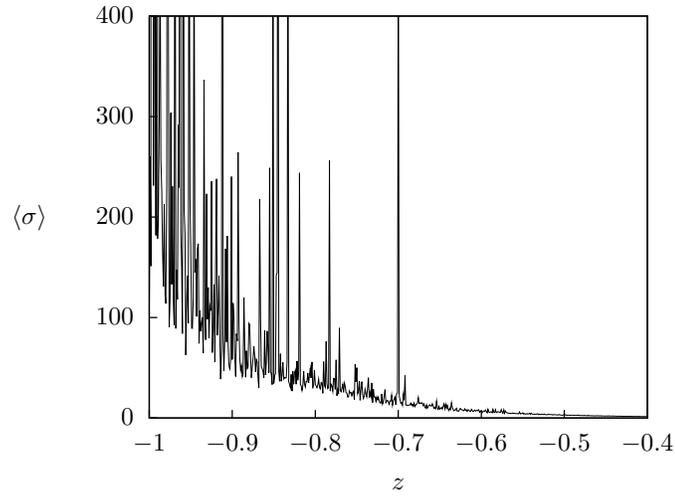


Figura 4.4: Desviación estándar media $\langle \sigma \rangle$ de los estados colectivos $x_t(i)$, para el caso de distribución de la heterogeneidad en los $b(i)$, en función del exponente z . Con $\epsilon = 0.2$. Para cada valor de z se despreciaron las primeras 1000 iteraciones, y se grafica el promedio de las siguientes 100.

Influencia del ancho de la heterogeneidad en los parámetros locales b

Consideraremos a continuación la distribución de los parámetros locales $b(i)$ dada por la siguiente expresión,

$$b(i) = b_{min} + \Delta b \cdot \gamma, \quad \Delta b \in [0, b_{max} - b_{min}], \quad (4.3)$$

donde γ es una función que genera números aleatorios distribuidos uniformemente en el intervalo $[0, 1]$, $b_{max} = 1.750$ y $b_{min} = 0.875$, de manera que los $b(i)$ pertenezcan al rango de caos robusto para el valor del exponente $z = -0.55$.

En las figuras 4.5 y 4.6 se observan el campo medio h_t en función del ancho Δb , para distintos valores del parámetro de acoplamiento y del exponente de singularidad.

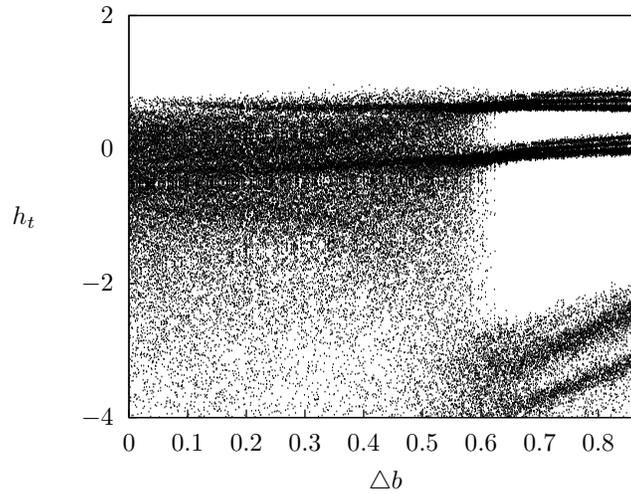


Figura 4.5: Campo medio h_t en función del tamaño de la distribución de la heterogeneidad en el parámetro local, Δb . Con parámetro de acoplamiento y exponente fijos en $\epsilon = 0.5$ y $z = -0.55$.

Nótese que en ambos casos el incremento de la heterogeneidad en los parámetros locales b induce la emergencia de bandas caóticas y comportamientos colectivos periódicos. El campo medio en función de z para el caso homogéneo $\Delta b = 0$ con los parámetros de la figura 4.6, se muestra en la figura 4.7. La parte (b) es una ampliación de (a), observe que para el valor $z = -0.5$ el comportamiento del campo medio coincide con el comportamiento observado en la figura 4.6 para $\Delta b = 0$.

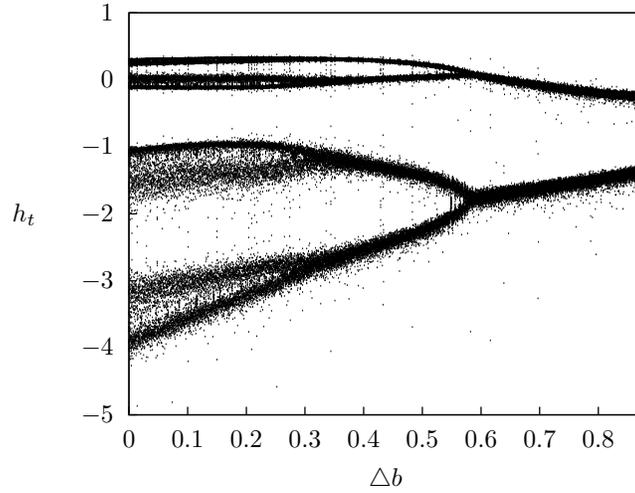


Figura 4.6: Campo medio h_t en función del tamaño de la distribución de la heterogeneidad en el parámetro local, Δb . Con parámetro de acoplamiento y exponente fijos en $\epsilon = 0.2$ y $z = -0.5$.

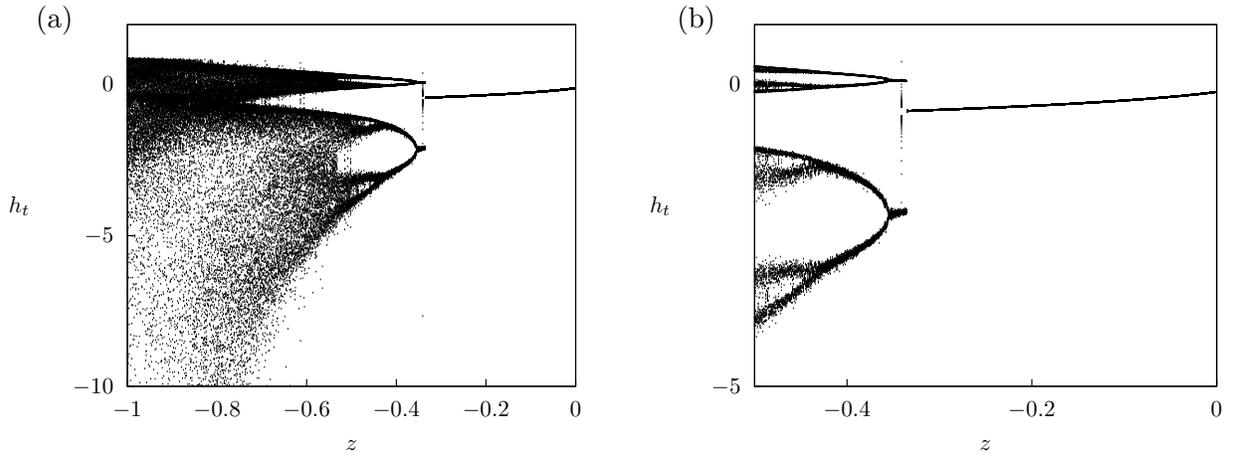


Figura 4.7: (a) Campo medio h_t en función del exponente de singularidad z , con $b = 0.875$ y $\epsilon = 0.2$. (b) Magnificación de (a) en el rango $z \in [-0.5, 0]$.

Las figuras 4.8 y 4.9 muestran las desviaciones $\langle \sigma \rangle$ vs. Δb , para los valores de parámetros correspondiente a las figuras 4.5 y 4.6, respectivamente. En estos casos observamos que el incremento en la dispersión de los valores $b(i)$ no aumenta apreciablemente la desincronización del sistema.

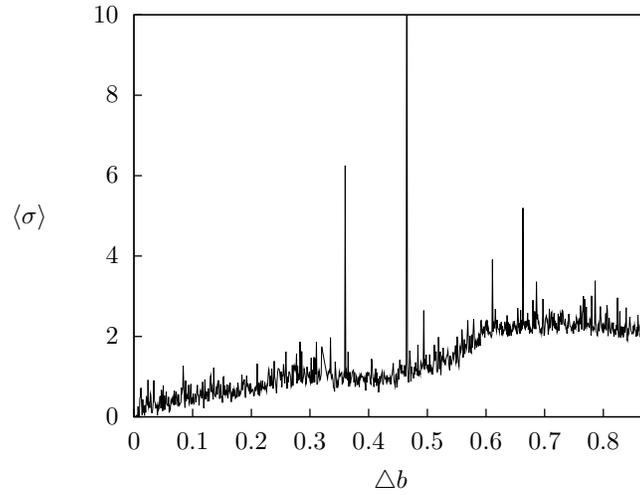


Figura 4.8: Desviación estándar media $\langle \sigma \rangle$ en función de la variación del intervalo de distribución de la heterogeneidad en el parámetro local Δb . Con $\epsilon = 0.5$ y $z = -0.55$.

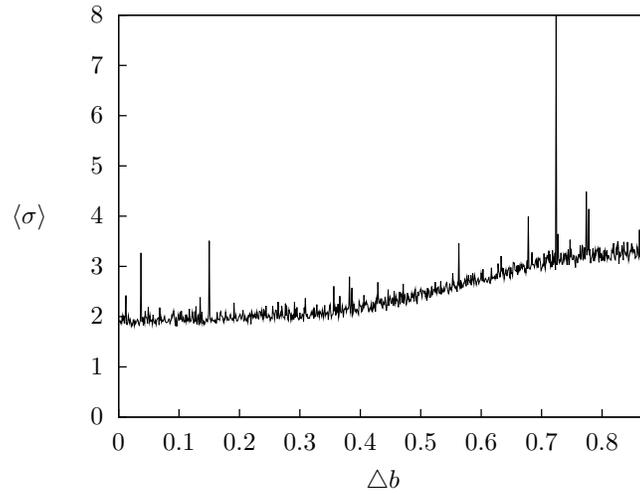


Figura 4.9: Desviación estándar media $\langle \sigma \rangle$ en función de la variación del intervalo de distribución de la heterogeneidad en el parámetro local Δb . Con $\epsilon = 0.2$ y $z = -0.5$.

4.2. Heterogeneidad variable en la dinámica local

En la Naturaleza existen muchos sistemas cuyos elementos cambian sus características en el tiempo. Hasta ahora hemos estudiado el efecto de la heterogeneidad en la dinámica colectiva de redes de mapas singulares cuyos parámetros son diferentes, pero permanecen constantes con el transcurrir del tiempo; tal es el caso de la heterogeneidad en los parámetros de acoplamiento, (Capítulo 3), y el caso de la heterogeneidad de la dinámica local b . En ambos casos, la distribución de estos parámetros no cambia con las iteraciones, es decir, es estática.

En esta sección veremos el efecto de introducir heterogeneidad dependiente del tiempo en los parámetros locales de una RMAG.

4.2.1. Comportamientos colectivos de una red con heterogeneidad variable

Consideramos la expresión de la ecuación (4.1) para redes de mapas acoplados globalmente, con la misma dinámica local de los mapas singulares, que en este caso quedaría definimos por

$$f_i(x_t(i)) = b_t(i) - |x_t|^z, \quad (4.4)$$

donde los parámetros $b_t(i)$ se distribuyen aleatoriamente de manera uniforme en cada iteración t en el intervalo $[0.25, 0.75]$ correspondiente a la región de caos robusto en la figura 2.11, con exponente fijo en $z = 0.5$. Esta heterogeneidad variable en el tiempo se puede asociar con un ruido interno (ruido local).

En la figura 4.10 se muestra el campo medio h_t en función del acoplamiento ϵ . Se observan los siguientes comportamientos colectivos no triviales:

- Bandas caóticas de períodos:
 - I) cuatro para $\epsilon \in [0.777, 0.789]$
 - II) cuatro para $\epsilon \in [1.204, 1.218]$
- Comportamientos colectivos de períodos:
 - I) dos para $\epsilon \in [0.414, 0.701]$
 - II) cuatro para $\epsilon \in [0.702, 0.755]$

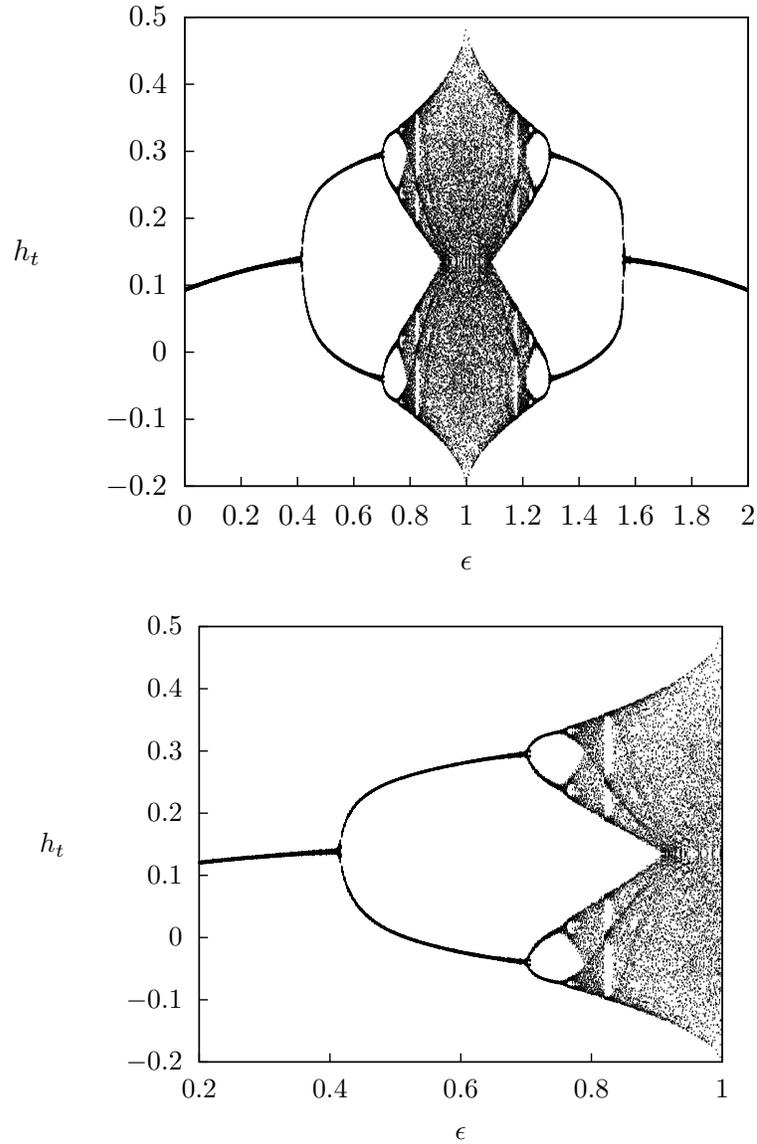


Figura 4.10: Panel superior: diagrama de bifurcación del campo medio h_t en función del parámetro de acoplamiento ϵ , en el caso de distribución variable de la heterogeneidad en el parámetro local $b_t(i) \in [0.250, 0.750]$, con el exponente de singularidad fijo en $z = 0.5$ y $N = 10^5$ celdas. Panel inferior: magnificación del diagrama de bifurcación de la figura de arriba en el rango de valores del acoplamiento $\epsilon \in [0.2, 1]$.

III) ocho para $\epsilon \in [0.756, 0.776]$

IV) seis para $\epsilon = 0.822$

- v) ocho para $\epsilon \in [1.219, 1.242]$
- vi) seis para $\epsilon = 1.179$
- vii) cuatro para $\epsilon \in [1.243, 1.294]$
- viii) dos para $\epsilon \in [1.295, 1.557]$

■ Turbulencia global para:

- i) $\epsilon \in [0, 0.413]$
- ii) $\epsilon \in [1.558, 2]$

La figura 4.10 constituye uno de los resultados más notables de esta Tesis, puesto que demuestra que la variabilidad temporal de los parámetros locales distribuidos induce comportamientos colectivos ordenados en una red dinámica.

El cálculo de la desviación estándar media para este sistema se muestra en la figura 4.11, en la cual se observa que sólo existe el estado de sincronización completa para el valor del parámetro de acoplamiento $\epsilon = 1$. Esto es consecuencia de la anulación del término de la dinámica del i -ésimo elemento de la red representada por la ecuación (4.1), de manera que ésta viene dada únicamente por la contribución del campo medio. Si se mira la figura 4.10, se puede notar que para $\epsilon = 1$ es donde el comportamiento colectivo corresponde al comportamiento de un solo mapa singular en su rango de caos robusto.

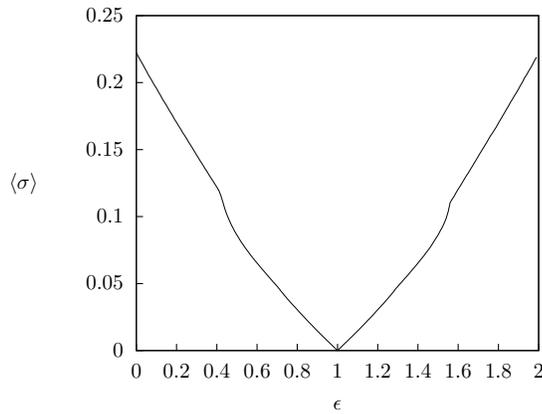


Figura 4.11: $\langle \sigma \rangle$ para el caso de distribución de la heterogeneidad variable en los $b_t(i) \in [0.250, 0.750]$, en función del parámetro de acoplamiento ϵ , con el exponente fijo en $z = 0.5$.

4.3. Heterogeneidad en el exponente z

4.3.1. Modelo con exponente de singularidad heterogéneo

En esta sección consideramos la RMAG dada por la expresión de la ecuación (4.1), donde introducimos heterogeneidad en la dinámica local de los mapas singulares, pero esta vez específicamente en el exponente de singularidad z , de manera que la familia de funciones singulares locales queda representada por,

$$f_i(x_t(i)) = b - |x_t|^{z(i)}. \quad (4.5)$$

Los valores de $z(i)$ se tomarán distribuidos en un intervalo donde existe caos robusto.

4.3.2. Comportamientos colectivos en función de b

Consideraremos los exponentes de singularidad distribuidos uniformemente y de manera aleatoria en el intervalo $z(i) \in [-1, -0.4]$, el cual se encuentra en la región de caos robusto.

En las figuras 4.12 y 4.13 se muestran el campo medio de este sistema en función del parámetro local b , con distintos valores de parámetro de acoplamiento fijo. En el primer caso, se observan ventanas muy pequeñas con comportamientos colectivos de períodos cuatro y cinco para $b = 1.631$ y $b = 1.741$, respectivamente.

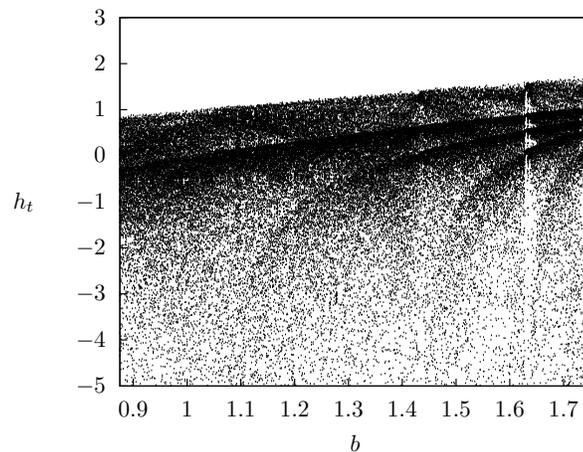


Figura 4.12: Diagrama de bifurcación del campo medio h_t en función del parámetro local b , en el caso de distribución de la heterogeneidad en el exponente de singularidad $z(i) \in [-1, -0.4]$, con el parámetro de acoplamiento fijo en $\epsilon = 0.5$ y $N = 10^5$.

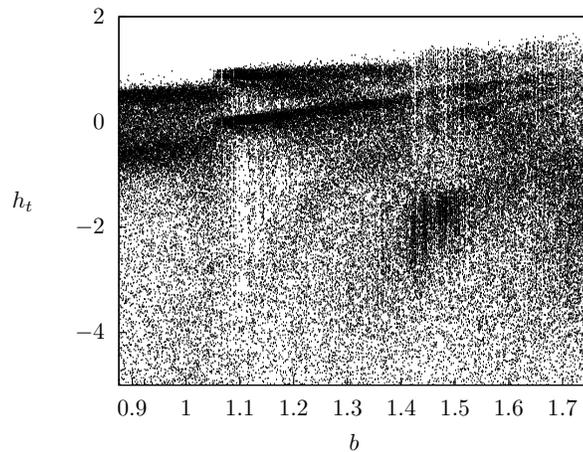


Figura 4.13: Diagrama de bifurcación del campo medio h_t en función del parámetro local b , en el caso de distribución de la heterogeneidad en el exponente de singularidad $z(i) \in [-1, -0.4]$, con el parámetro de acoplamiento fijo en $\epsilon = 0.2$ y $N = 10^5$.

La desviación estándar media se calculó para ambos casos de acoplamiento, como se muestra en las figuras 4.14 (a) y (b) para los valores de acoplamiento $\epsilon = 0.5$ y $\epsilon = 0.2$, respectivamente. Se puede notar en ambas figuras grandes fluctuaciones en la sincronización de los elementos, existiendo valores de b para los cuales se tiende a la sincronización.

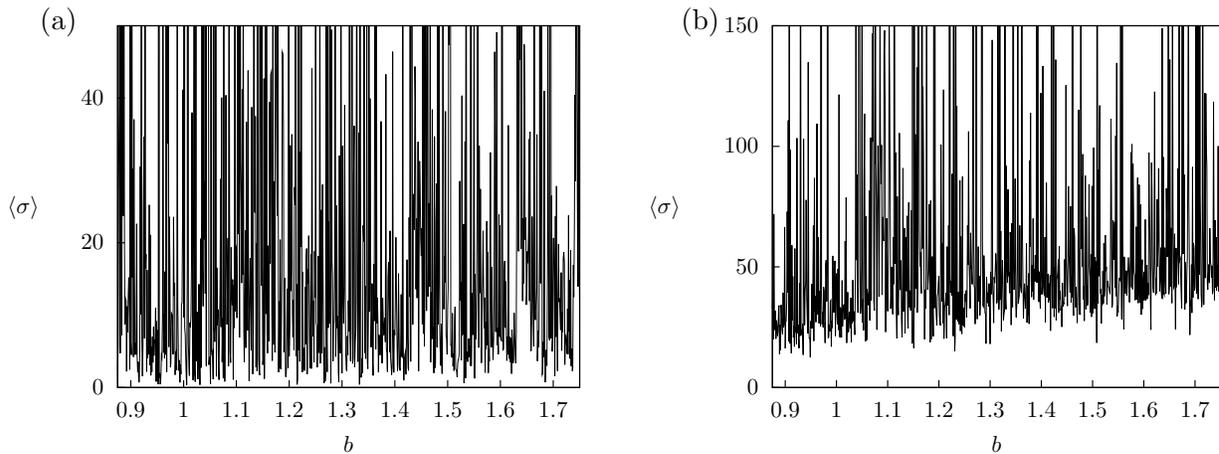


Figura 4.14: (a) Desviación $\langle \sigma \rangle$ de los estados colectivos para el caso de distribución de la heterogeneidad en los $z(i)$, en función de b . Con $\epsilon = 0.5$. (b) Desviación $\langle \sigma \rangle$ de los estados colectivos para el caso de distribución de la heterogeneidad en los $z(i)$, en función de b . Con $\epsilon = 0.2$.

Influencia del ancho de la heterogeneidad en los exponentes z

Consideraremos a continuación la distribución de los parámetros locales $b(i)$ dada por la siguiente expresión,

$$z(i) = z_{min} + \Delta z \cdot \gamma \quad (\Delta z \in [0, z_{max} - z_{min}]), \quad (4.6)$$

donde γ es una función que genera números aleatorios distribuidos uniformemente en el intervalo $[0, 1]$, $z_{max} = -0.4$ y $z_{min} = -1$, de manera que los $z(i)$ pertenezcan al rango de caos robusto para el valor del parámetro local $b = 1.6$.

En las figuras 4.15 (a) y (b) se observan el campo medio h_t en función del ancho Δz , para distintos valores del parámetro de acoplamiento ϵ y del parámetro local b . Se observan bandas caóticas.

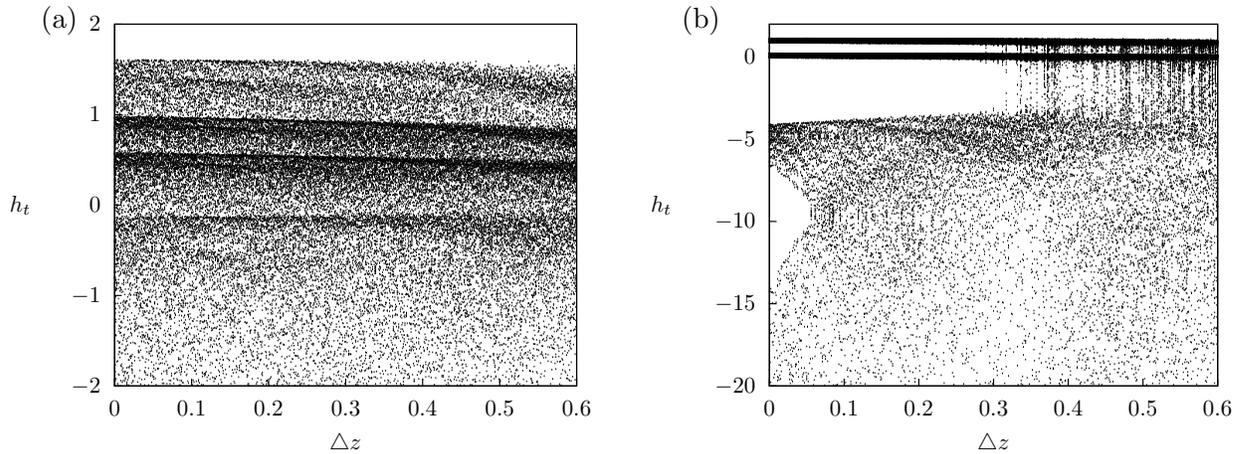


Figura 4.15: (a) Campo medio h_t en función del ancho de la distribución de la heterogeneidad en el exponente de singularidad, Δz . Con parámetro local y de acoplamiento fijos en $b = 1.6$ y $\epsilon = 0.5$. (b) Campo medio h_t en función del ancho de la distribución de la heterogeneidad en el exponente de singularidad, Δz . Con parámetro local y de acoplamiento fijos en $b = 1.1$ y $\epsilon = 0.2$.

Para las figuras anteriores calculamos la desviación estándar media $\langle \sigma \rangle$ en función de Δz , como se muestra en las figuras 4.16 y 4.17. Se observa que la heterogeneidad en los exponentes z puede inducir cierto grado de sincronización para algunos valores de parámetros.

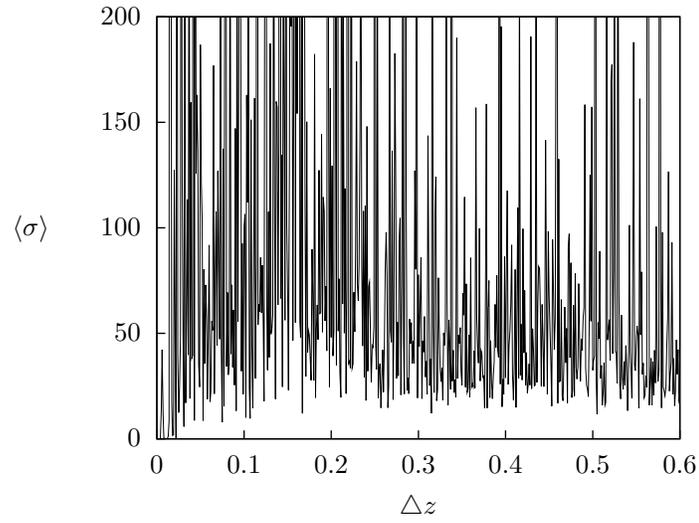


Figura 4.16: Desviación estándar media $\langle \sigma \rangle$ en función de la variación del intervalo de distribución de la heterogeneidad en el exponente de singularidad Δz . Con $\epsilon = 0.5$ y $b = 1.6$.

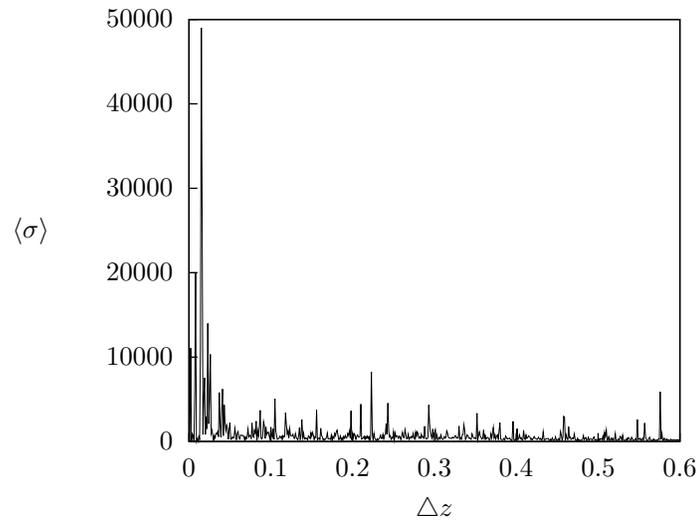


Figura 4.17: Desviación estándar media $\langle \sigma \rangle$ en función de la variación del intervalo de distribución de la heterogeneidad en el exponente de singularidad Δz . Con $\epsilon = 0.2$ y $b = 1.1$.

La figura 4.18 muestra el campo medio h_t en función del ancho Δz , pero ahora la distribución de los $z(i)$ se realiza dentro de la región de caos robusto para $z > 0$ de los mapas singulares. Los valores $z(i)$ están dados por la ecuación (4.6), donde ahora $z_{min} = 0.085$ y $z_{max} = 1$, con parámetro $b = 0.735$.

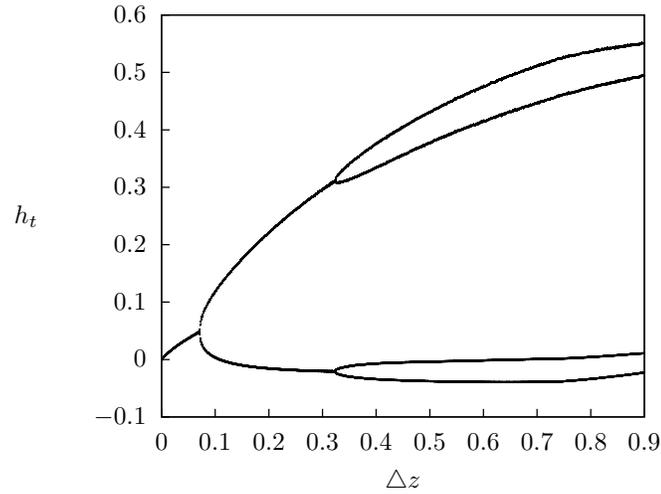


Figura 4.18: Campo medio h_t en función del ancho de la distribución de la heterogeneidad en el exponente de singularidad, Δz . Con parámetro local y de acoplamiento fijos en $b = 0.735$ y $\epsilon = 0.2$.

En la figura 4.18 se observa la presencia de:

- Turbulencia global para $\Delta z \in [0, 0.069]$
- Comportamientos colectivos de períodos:
 - i) dos para $\Delta z \in [0.070, 0.325]$
 - ii) cuatro para $\Delta z \in [0.326, 0.9]$

En contraste con las gráficas de la figura 4.15, vemos que para una distribución heterogénea de exponentes en el rango positivo de z con caos robusto, existe emergencia de comportamientos colectivos periódicos no triviales.

En la figura 4.19 se muestra la desviación estándar media $\langle \sigma \rangle$, en función del Δz , para los mismos parámetros de la figura 4.18. Nótese que la desviación es pequeña, indicando que los elementos en el sistema se mueven en conjunto en órbitas periódicas colectivas con pequeñas dispersiones.

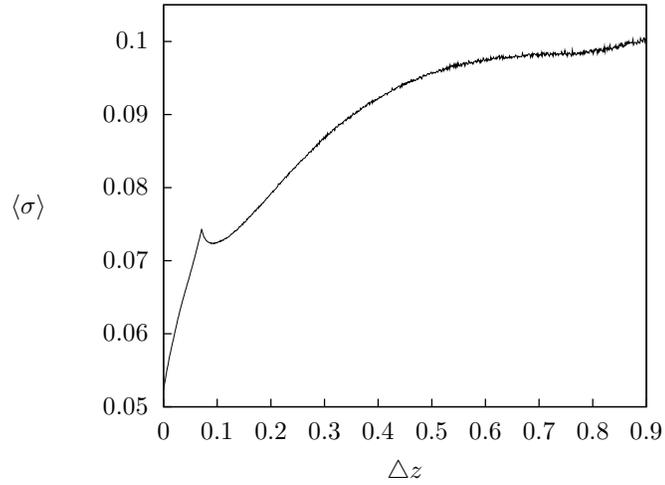


Figura 4.19: Desviación estándar media $\langle \sigma \rangle$, en función del ancho del intervalo de la distribución de la heterogeneidad en exponentes z positivos, Δz , con $\epsilon = 0.2$ y $b = 0.735$.

Para finalizar este Capítulo, estudiamos el caso $\Delta z = 0$, correspondientes a un sistema homogéneo. Las figuras 4.20 y 4.21 muestran el campo medio h_t en función del parámetro local b , para $z = -1$ fijo y dos valores del parámetro de acoplamiento.

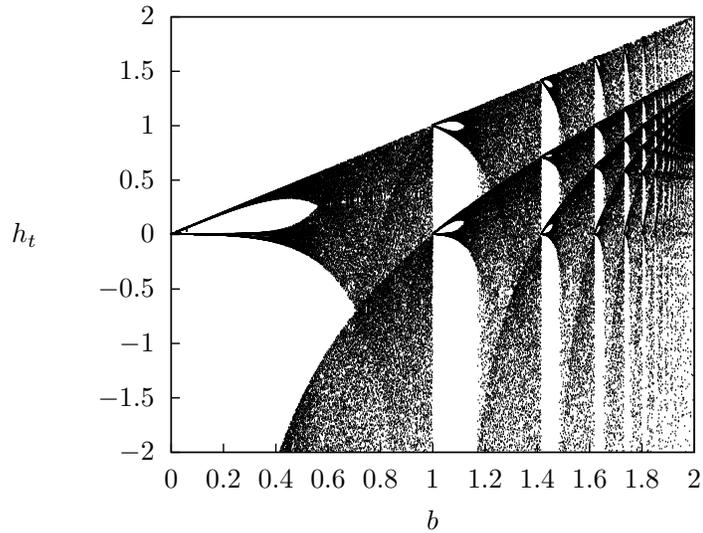


Figura 4.20: Campo medio h_t en función del parámetro local b . Con $z = -1$ y $\epsilon = 0.5$.

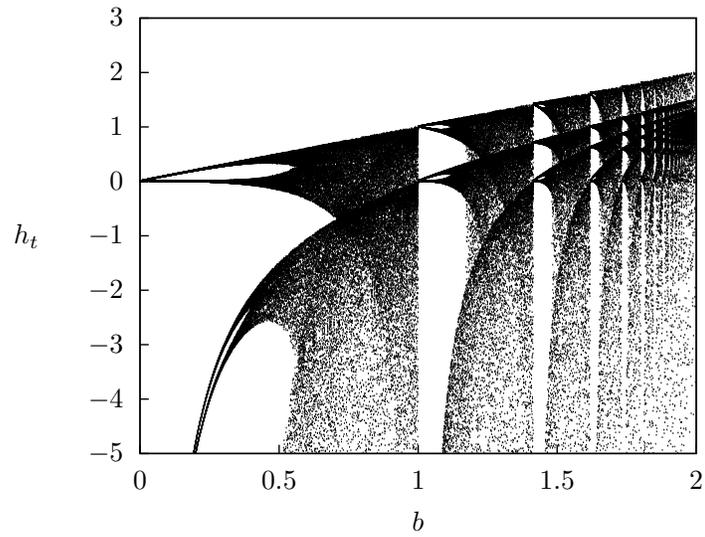


Figura 4.21: Campo medio h_t en función del parámetro local b . Con $z = -1$ y $\epsilon = 0.2$.

Las figuras 4.20 y 4.21, junto con los casos de heterogeneidad, ponen en evidencia la extraordinaria riqueza de comportamientos colectivos no triviales que pueden surgir en sistemas de elementos caóticos globalmente acoplados.

*El hombre encuentra a Dios detrás de
cada puerta que la ciencia logra abrir.*

Albert Einstein

Conclusiones

En este trabajo, hemos estudiado el efecto de la heterogeneidad en el surgimiento de comportamientos colectivos de redes dinámicas. Nos hemos enfocado en una clase importante de sistemas que manifiestan efectos colectivos no triviales, modelados mediante redes de mapas caóticos acoplados globalmente. Como fuente de caos local hemos considerado la familia de mapas singulares $f(x_t) = b - |x_t|^z$, que presentan caos robusto en un rango definido de sus parámetros b y z .

Hemos escogido esta familia de mapas para representar la dinámica local porque la presencia de caos robusto asegura la operación confiable de un sistema en el régimen caótico, como hemos visto en nuestra revisión del tema en el Capítulo 1. En particular, la emergencia de comportamientos colectivos ordenados en sistemas que poseen caos robusto en sus elementos, no es susceptible de ser atribuida a la presencia de ventanas periódicas en la dinámica local. Cualquier comportamiento emergente debe ser producto de las interacciones, lo cual es una propiedad característica de los sistemas complejos.

Nuestros resultados muestran que la heterogeneidad en los acoplamientos entre los mapas inducen comportamientos colectivos ordenados (figuras 3.2 y 3.4), además de favorecer la tendencia hacia la sincronización del sistema (figuras 3.3 y 3.5). Estos resultados son relevantes en el contexto de sistemas sociales y biológicos, donde la diversidad en la intensidad de las interacciones entre los elementos es un hecho común, que coexiste con el fenómeno de coherencia y de consenso.

Hemos considerado dos fuentes de heterogeneidad en la dinámica local de nuestro sistema, tanto en el parámetro b como en el exponente de singularidad z . Encon-

tramos que la heterogeneidad en los parámetros locales b puede favorecer la sincronización en ciertos rangos de valores del exponente z (figuras 4.3 y 4.4). Por otro lado, en ciertos casos la heterogeneidad en los exponentes de singularidad z es capaz de inducir comportamientos colectivos periódicos no presentes en la dinámica local de los mapas (figuras 4.17 y 4.18).

En el estudio de la heterogeneidad local variable, hallamos comportamientos colectivos emergentes que demuestran que, la variabilidad temporal de los parámetros locales distribuidos, induce comportamientos colectivos ordenados en una red dinámica (figura 4.10). La heterogeneidad variable es un fenómeno que se puede encontrar en sistemas sociales. Nuestro resultado sugiere que a pesar de las variaciones individuales, es posible alcanzar estados con cierto grado apreciable de consenso social.

La heterogeneidad en los parámetros de un sistema puede relacionarse, de cierta forma con la presencia de alguna fuente de ruido. Se sabe [32] que la inclusión de ruido en sistemas dinámicos puede favorecer la aparición de sincronización. Los resultados de esta Tesis muestran que, la heterogeneidad, además de ayudar a la sincronización, es capaz de inducir comportamientos colectivos ordenados en un sistema dinámico.

Bibliografía

- [1] Gallas J., International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 20, No. 2 (2010) 197-211.
- [2] Z. Elhadj and J. Sprott, Front. Phys. China, 2008, 3(2):195-204.
- [3] A. Potapov and M. K. Ali, Phy. Lett. A, 2000, 277(6): 310.
- [4] E. Barreto, B. Hunt, C. Grebogi, and J. A. York, Phys. Rev. Lett., 1997, 78: 4561.
- [5] R. Lozi, Colloque C5, Supplément au n°8, 1978, 39: 9.
- [6] M. Henón, Commun. Math. Phys., 1976, 50: 69.
- [7] B. Robert and C. Robert, Int. J. Control, 2002, 75(16-17): 1356.
- [8] S. Banerjee and C. Grebogi, Phys. Rev. E, 1999, 59(4): 4052.
- [9] S. Banerjee, J. A. York, and C. Grebogi, Phys. Rev. Lett., 1998, 80(14): 3049.
- [10] M. Andrecut and M. K. Ali, Inter. J. Mod. Phys. B, 2001, 15(2): 177.
- [11] M. Andrecut and M. K. Ali, Mod. Phys. Lett. B, 2001, 15(12-13): 391.
- [12] M. Andrecut and M. K. Ali, Phys. Rev. E, 2001, 64: 025203(R).
- [13] M. A. Jafarizadeh and S. Behnia, J. Nonlinear. Math. Phys., 2002, 9(1): 26.
- [14] M. Majumdar and T. Mitra, Economic Theory, 1994, 4(5): 677.
- [15] Z. Elhadj and J. C. Sprott., A Unified Piecewise Smooth Chaotic Mapping that contains the Hénon and the Lozi Systems, submitted.

- [16] M. A. Hassouneh, E. Habed, and S. Banerjee, Feedback Control of Border Collision Bifurcations in Two-dimensional Discrete-time Systems, ISR Technical Research Report, 2002.
- [17] B. Widrow and M. A. Lehr, 30 Years of Adaptive Neural Networks: Perceptron, Madaline, and Backpropagation, Proc. IEEE, 1990, 78(9): 1415.
- [18] A. Priel and I. Kanter, Europhys. Lett., 2000, 51(2): 230.
- [19] E. N. Lorenz, J. Atmos. Sci., 1963, 20:130.
- [20] J. Guckenheimer and R. F. Williams, Publ. Math. IHES, 1979, 50: 307.
- [21] V. S. Afraimovich, V. V. Bykov, and L. P. Shilnikov, Trans. Moscow Math. Soc., 1982, 44: 153.
- [22] S. Kuznetsov and E. Seleznev, Journal of Experimental and Theoretical Physics, 2006, 102(2): 355.
- [23] Shilnikov, A. L., Comput. Math. Appl., 34, 245-251 (1997).
- [24] O. Alvarez-Llamoza and M. G. Cosenza. CIENCIA 15(4), 438 - 443, 2007.
- [25] K. Kaneko, Phys. Rev. Lett., 63, 219 (1989).
- [26] L.M. Pecora, T.L. Carroll, Phys. Rev. 64, 821, (1990).
- [27] Iacyle G. da Silva, Tesis Doctoral, Universitat de Les Illes Balears, Palma de Mallorca (2006).
- [28] M. G. Cosenza and J. González; Prog. Theor. Phys. 100, 21 (1998).
- [29] K. Kaneko; Physica D 55, 368-384 (1992).
- [30] T. Shibata and K. Kaneko, Europhys. Lett., 38 (6), pp. 417-422 (1997).
- [31] K. Kaneko; Physica D 75, 55-73 (1994).
- [32] T. Shibata, T. Chawanya and K. Kaneko, Phys. Rev. Lett., 82, pp. 4424-4427 (1999).

- [33] Javier González Estévez, Tesis de Maestría, Universidad de Los Andes, Mérida (2001).
- [34] C. Bracikowski and R. Roy, Chaos in a multimode solid-state laser system, Chaos. 1 (1991) 49.
- [35] P. Colet and Y. Braiman, Phys. Rev. E 53, 200-206 (1996)
- [36] T. Kuruvilla and V. M. Nandakumaran, Pramana 54, 3, 393-402 (2000).
- [37] D. H. Zanette, arXiv.org e-Prints archive: 0903.3860v1 (2009)
- [38] F. Bauer, F. M. Atay and J. Jost, MPI-MIS Preprint Series 46/2009.