

*Universidad de Los Andes*  
Mérida - Venezuela

# Quimeras en redes de osciladores caóticos hiperbólicos

Rebeca León

Tutor:

Dr. Mario Cosenza



**Centro de Física Fundamental**  
**Grupo de Caos y Sistemas Complejos**  
<http://www.ciens.ula.ve/cff/caoticos>

# Nuestra motivación:

“Solo pueden obtenerse en sistemas de redes de osciladores caóticos no hiperbólicos.”

- N. Semenova et al. “Impact of hyperbolicity on chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic oscillators”

“La emergencia de estados de *clustering* se debe a las ventanas periódicas en la dinámica local.”

- S. Manrubia, A. Mikhailov, D. Zanette, "Emergence of Dynamical Order", World Scientific (2004).

“Pueden surgir en sistemas cuya dinámica local sea un mapa caótico hiperbólico, puesto que dependen de la interacción entre la dinámica local y la topología de la red.”

- A. V. Cano, M. G. Cosenza “Chimeras and clusters in networks of hyperbolic chaotic oscillators”

# Nuestra propuesta:

- ▶ Estudiar la emergencia de estados quiméricos en un sistema compuesto por dos poblaciones globalmente acopladas de mapas caóticos hiperbólicos: El mapa de Lozi y el mapa de Andrecut-Ali.
- ▶ La aparición de estados quiméricos en este sistema provee soporte adicional al análisis realizado por A.V. Cano y M. G. Cosenza, quienes plantean que su formación está relacionada con la interacción global.

# Comportamientos colectivos y su caracterización:

$$\sigma^a(t) = \left[ \frac{1}{N_a} \sum_{i=1}^{N_a} (x_i^a(t) - \bar{x}^a(t))^2 \right]^{1/2}$$

$$\sigma^b(t) = \left[ \frac{1}{N_b} \sum_{j=1}^{N_b} (x_j^b(t) - \bar{x}^b(t))^2 \right]^{1/2}$$

$$\langle \sigma^a \rangle = \frac{1}{T - \tau} \sum_{t=\tau}^T \sigma^a(t)$$

$$\langle \sigma^b \rangle = \frac{1}{T - \tau} \sum_{t=\tau}^T \sigma^b(t)$$

$$\langle \delta \rangle = \frac{1}{T - \tau} \sum_{t=\tau}^T |\bar{x}^a(t) - \bar{x}^b(t)|$$

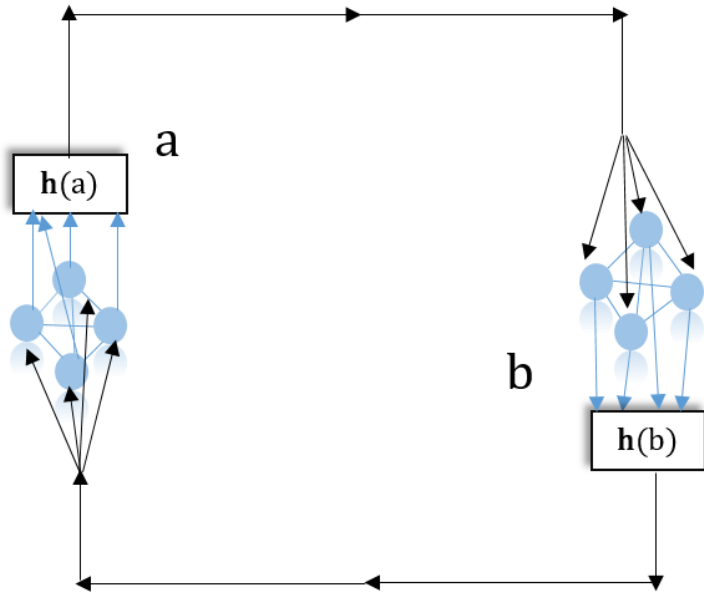
*Sincronización completa:*  $\langle \sigma^a \rangle = 0$ ,  
 $\langle \sigma^b \rangle = 0$  y  $\langle \delta \rangle = 0$ .

*Sincronización generalizada:*  $\langle \sigma^a \rangle = 0$ ,  
 $\langle \sigma^b \rangle = 0$  y  $\langle \delta \rangle \neq 0$ .

*Estado quimérico:*  $\langle \sigma^a \rangle = 0$ ,  
 $\langle \sigma^b \rangle \neq 0$  ó viceversa y  $\langle \delta \rangle \neq 0$ .

*Desincronización:*  $\langle \sigma^a \rangle \neq 0$ ,  
 $\langle \sigma^b \rangle \neq 0$ ,  $\langle \delta \rangle \neq 0$ .

# Dos poblaciones de osciladores caóticos hiperbólicos:



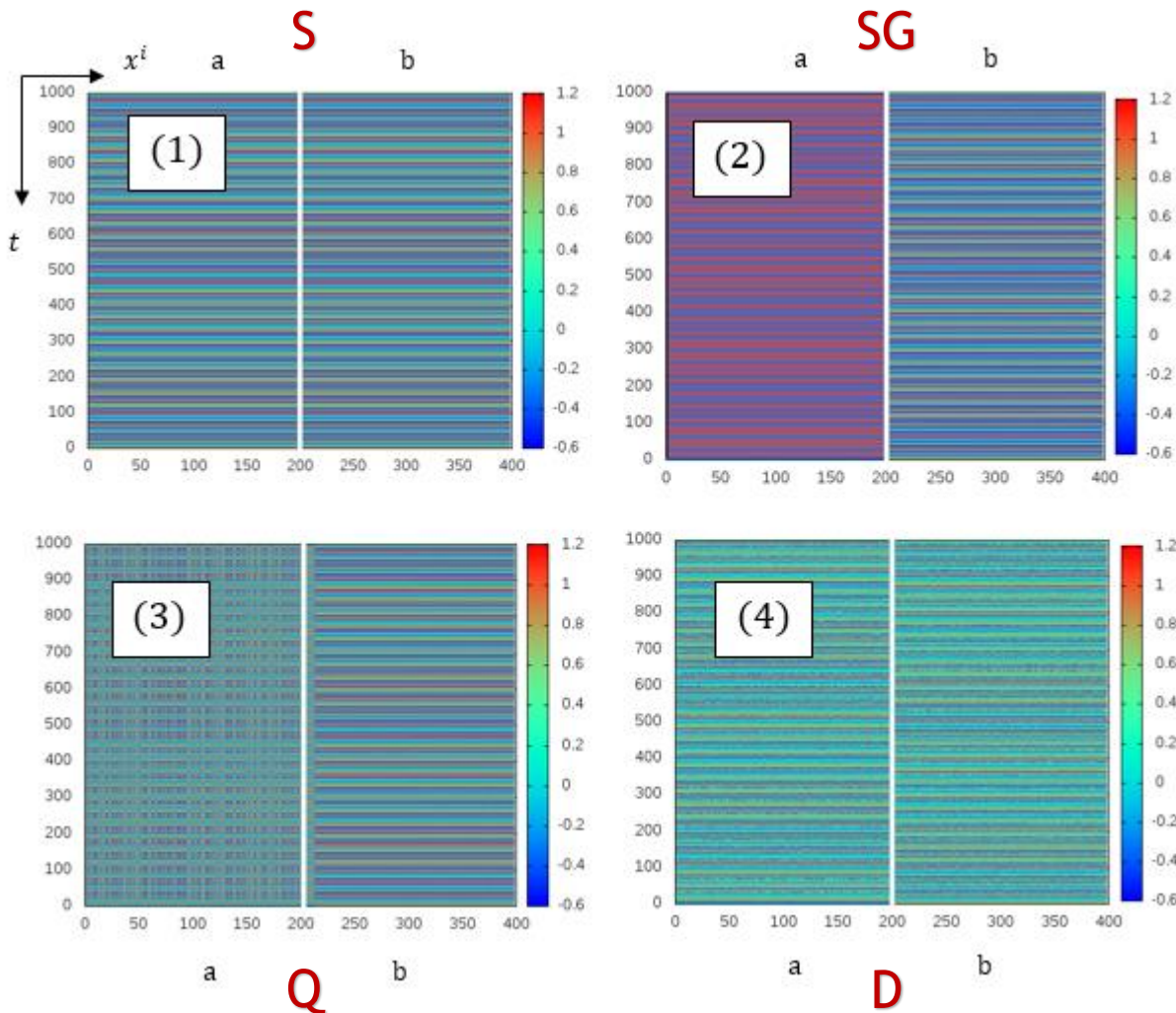
$$\left. \begin{aligned} x_{t+1}^a &= (1 - \varepsilon) f(x_t^i, y_t^i) + \varepsilon h_b + \mu h_a \\ y_{t+1}^a &= \beta x_t^i \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x_{t+1}^b &= (1 - \varepsilon) f(x_t^j, y_t^j) + \varepsilon h_a + \mu h_b \\ y_{t+1}^b &= \beta x_t^j \end{aligned} \right\}$$

Donde: 
$$h_b = \frac{1}{N_b} \sum_{j=1}^{N_b} f(x_t^j, y_t^j)$$

$$h_a = \frac{1}{N_a} \sum_{i=1}^{N_a} f(x_t^i, y_t^i)$$

# Dos poblaciones interactuantes de mapas de Lozi:



Dinámica local del sistema:

$$x^{t+1} = 1 - \alpha |x^t| + y^t$$

$$y^{t+1} = \beta x^t$$

Se fijó  $\alpha=1.4$  y  $\beta=0.3$ .

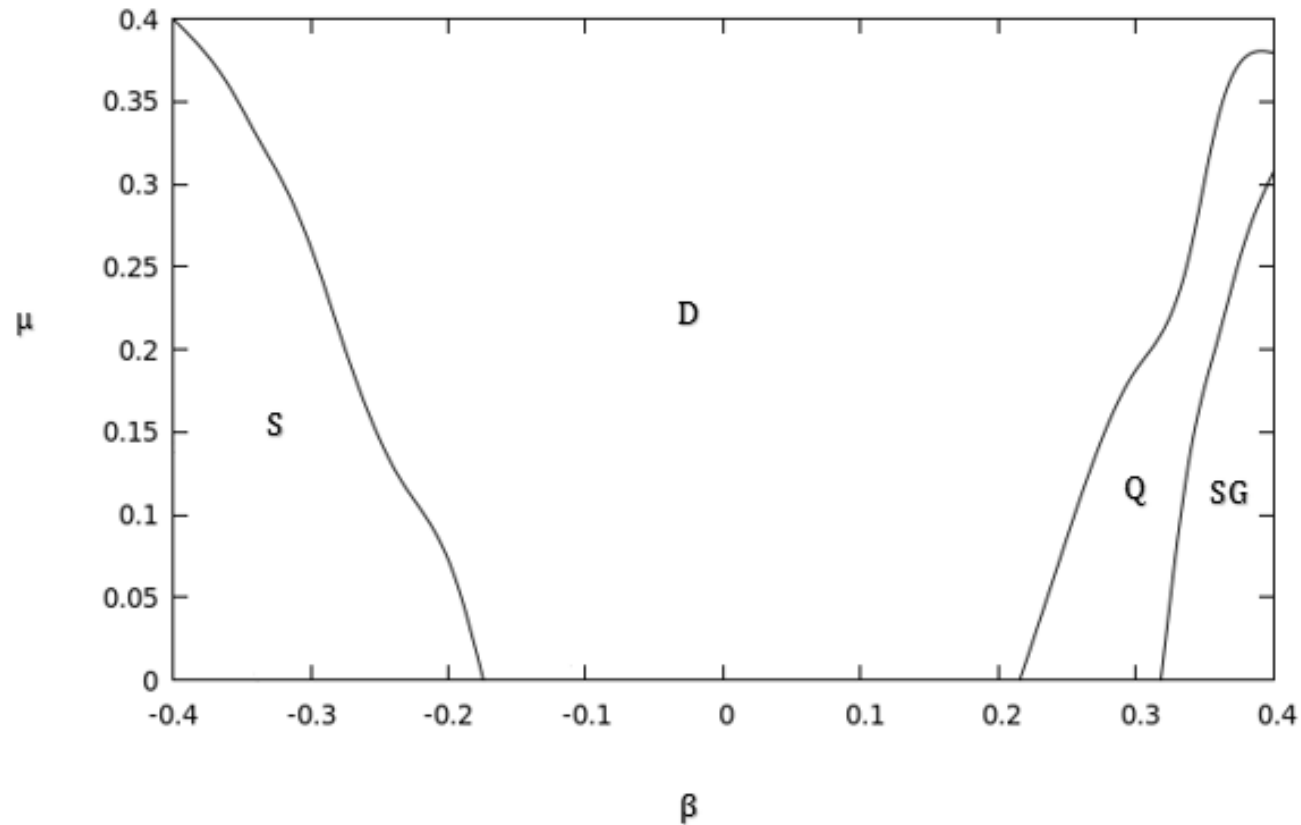
(1)  $\varepsilon= 0.45$ ,  $\mu=0.3$

(2)  $\varepsilon= 0.17$ ,  $\mu=0.3$

(3)  $\varepsilon= 0.22$ ,  $\mu=0.3$

(4)  $\varepsilon= 0.10$ ,  $\mu=0.3$

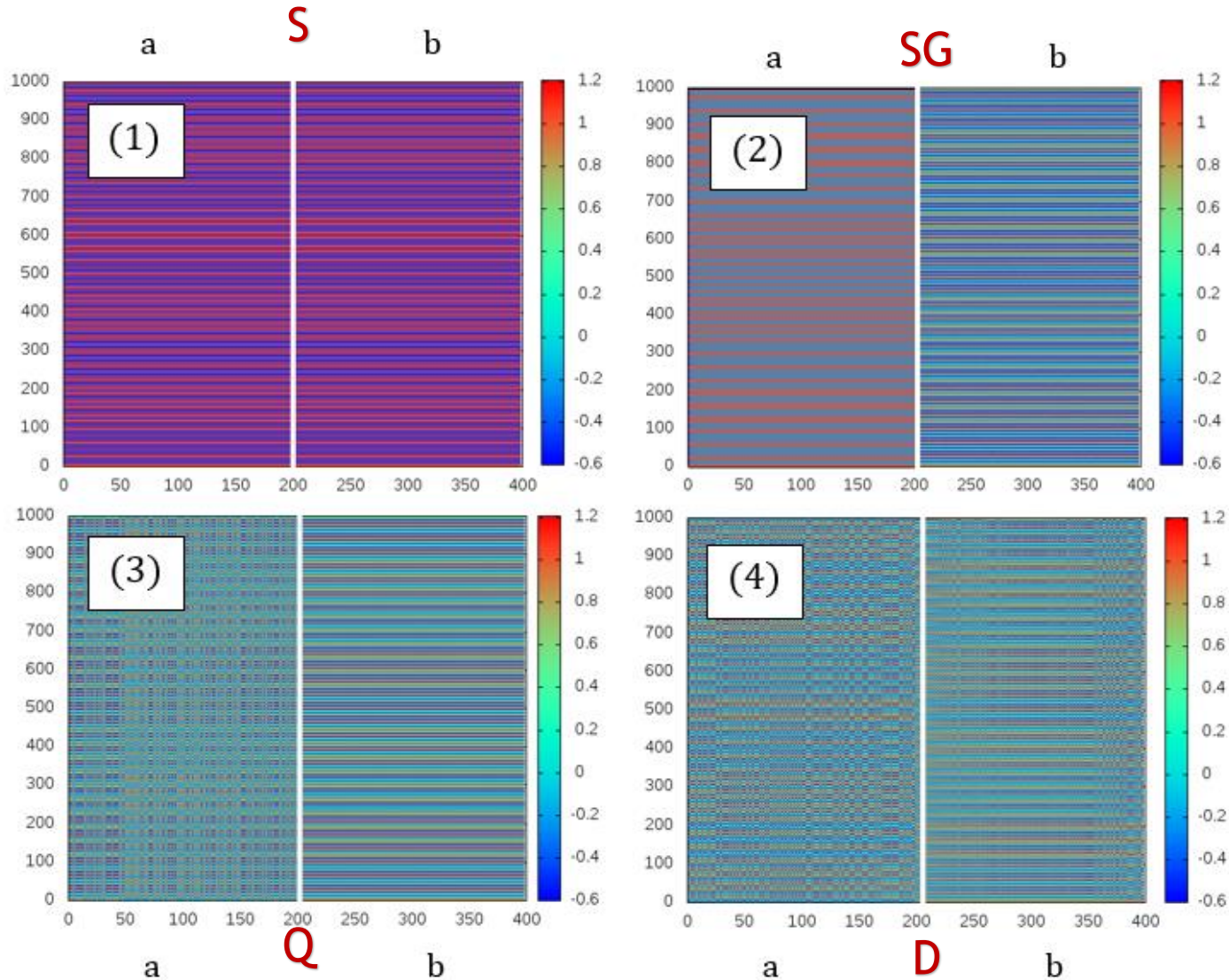
## Diagrama de fase del sistema:



Se fijó  
 $\varepsilon=0.22$

Cada etiqueta muestra un comportamiento colectivo; S: sincronización completa, SG: sincronización generalizada, Q: Quimeras, D: Desincronización.

# Dos poblaciones interactuantes de mapas de Lozi con acoplamiento local nulo:



(1)  $\epsilon = 0.45$

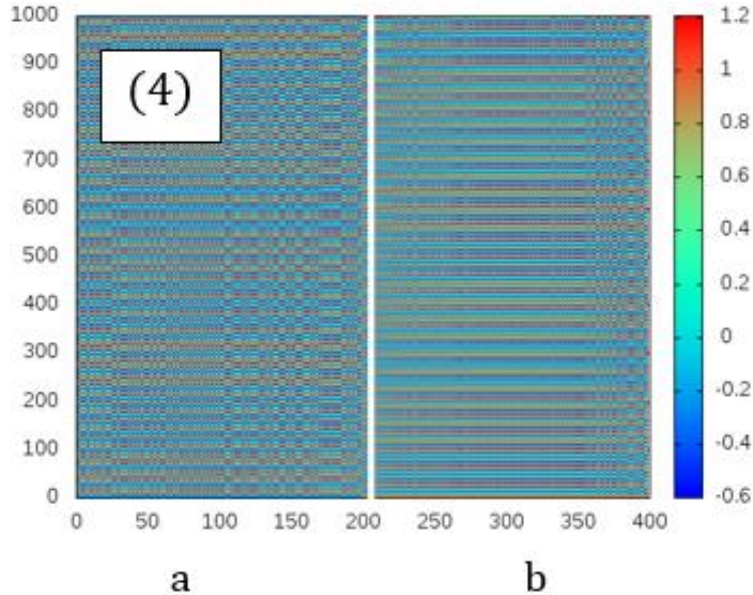
(2)  $\epsilon = 0.15$

(3)  $\epsilon = 0.25$

(4)  $\epsilon = 0.09$



# Formación de quimeras dentro de cada población:



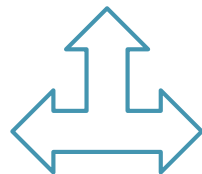
Se calculó la fracción promedio de elementos pertenecientes a un cluster al tiempo  $t$ , para 50 realizaciones de condiciones iniciales:

$$p^a(t) = 1 - \frac{1}{N_a} \sum_{i=1, k=1}^{N_a} \prod_{k \neq i} \Theta(d_{ij}(t) - \delta) = 0.841$$

$$p^b(t) = 1 - \frac{1}{N_b} \sum_{j=1, l=1}^{N_b} \prod_{l \neq j} \Theta(d_{ij}(t) - \delta) = 0.861$$

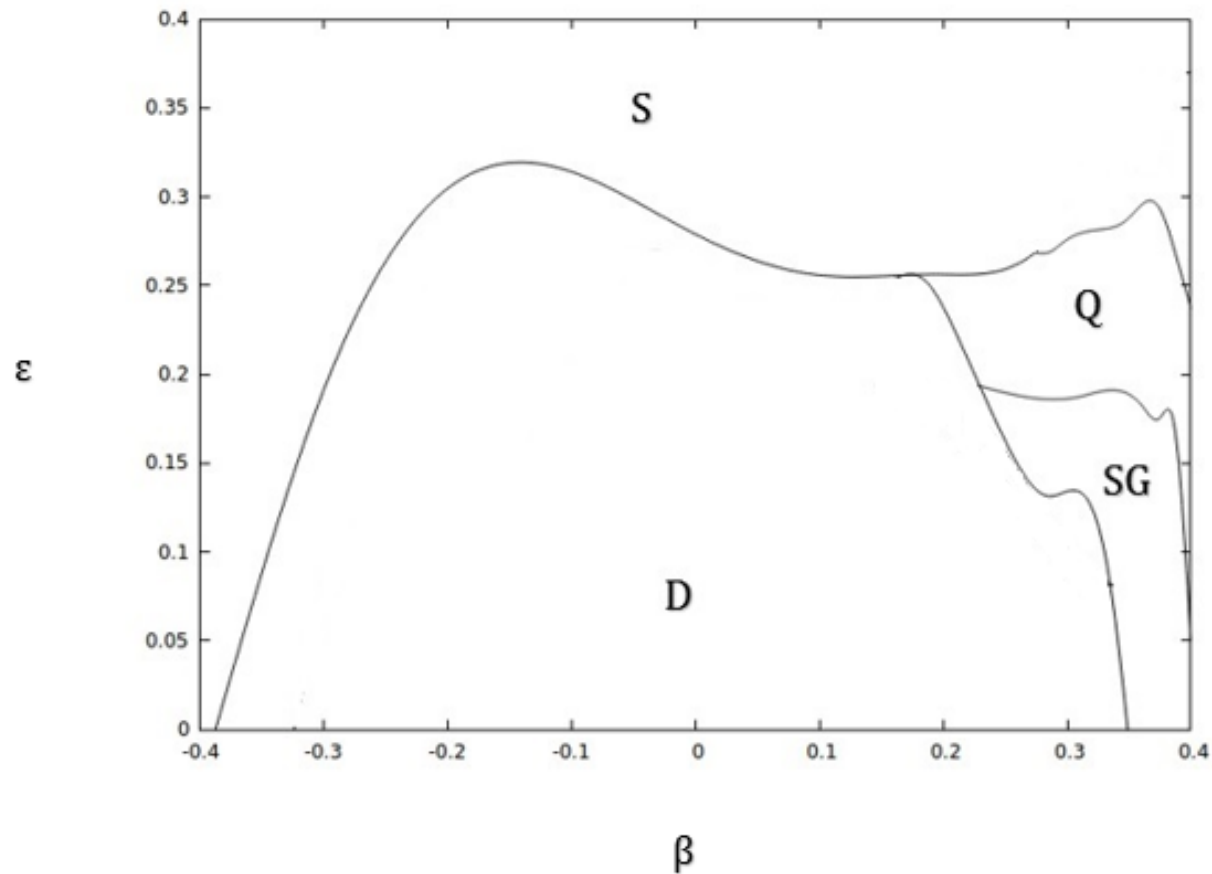
De acuerdo a A.V. Cano y M.G. Cosenza un estado quimérico viene dado por:

$$p_{min} < p < 1$$



¡Estos resultados nos indican que dentro de cada población hay una quimera!

## Diagrama de fase del sistema:



Cada etiqueta muestra un comportamiento colectivo; S: sincronización completa, SG: sincronización generalizada, Q: Quimeras, D: Desincronización.

# Dos poblaciones interactuantes de mapas de Andrecut-Ali:

- ▶ La dinámica general de este sistema viene dada por las ecuaciones:

$$x_{t+1}^a = (1 - \varepsilon) f(x_t^i, y_t^i) + \varepsilon h_b + \mu h_a$$

$$x_{t+1}^c = (1 - \varepsilon) f(x_t^j, y_t^j) + \varepsilon h_a + \mu h_c$$

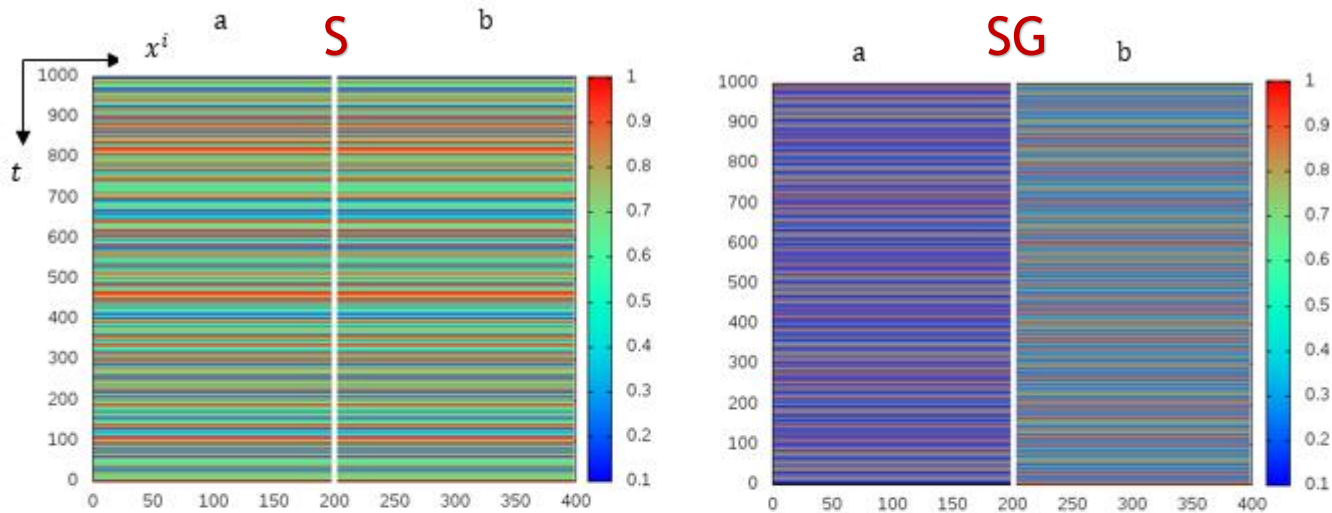
$$h_c = \frac{1}{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} f(x_t^j, y_t^j)$$

$$h_a = \frac{1}{N_a} \sum_{j=1}^{N_a} f(x_t^i, y_t^i)$$

La dinámica local del sistema viene dada por:

$$f(x) = \frac{1 - b^{(1-x)x}}{1 - \sqrt[4]{b}}$$

# Comportamientos colectivos en dos poblaciones interactuantes de mapas de Andre-cut-Ali:

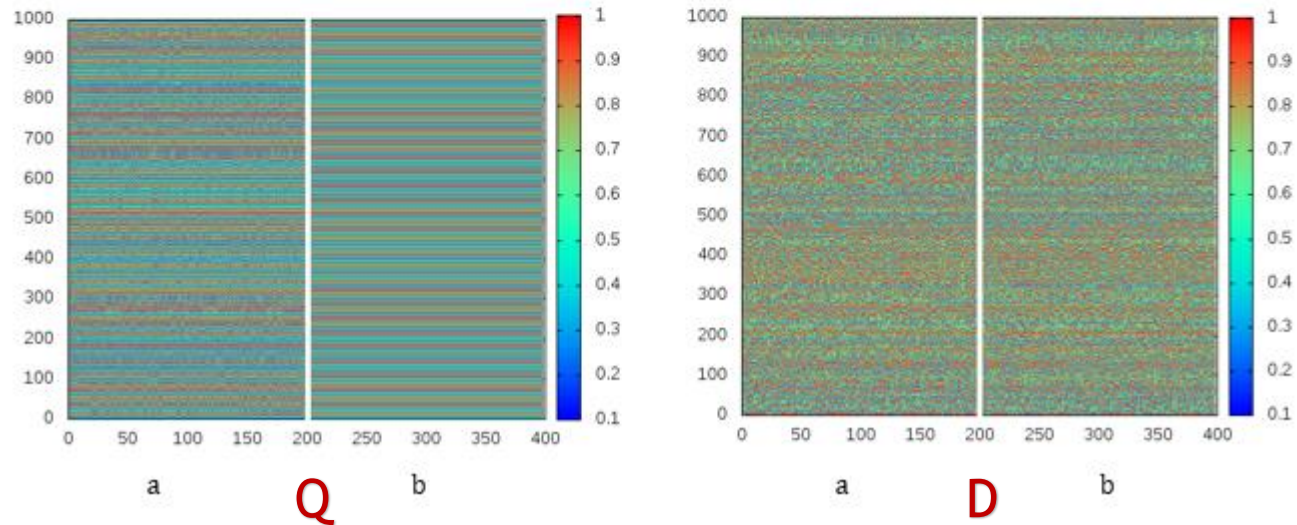


(1)  $\varepsilon = 0.53, \mu = 0.1$

(2)  $\varepsilon = 0.29, \mu = 0.1$

(3)  $\varepsilon = 0.16, \mu = 0.1$

(4)  $\varepsilon = 0.11, \mu = 0.1$



# Conclusiones:

- ▶ El principal resultado de esta investigación es la observación de quimeras en sistemas cuya dinámica local posee caos robusto.
- ▶ Se encontraron resultados novedosos, tales como el hecho de que incluso cuando el sistema exhibe un comportamiento desincronizado, dentro de una población pueden coexistir regiones de sincronización y de desincronización.
- ▶ En los tres casos que se analizaron en esta tesis se encontraron estados quiméricos, y adicionalmente se observaron comportamientos colectivos de sincronización completa, estados de cluster, sincronización generalizada y desincronización.
- ▶ las quimeras son fenómenos universales que pueden emerger en sistemas de dos poblaciones interactuantes, incluso cuando la dinámica local posee caos robusto.

# Futuras extensiones:

- ▶ Formación de estados quiméricos y otros comportamientos colectivos de sincronización dentro de sistemas de tiempo continuo, cuya dinámica local posea caos hiperbólico, además se sugiere estudiar la influencia de la topología de la red en la emergencia de tales comportamientos.
- ▶ Con la finalidad de estudiar a fondo la influencia del tamaño de las poblaciones en la emergencia de estos estados se propone analizar la distribución de probabilidad como función del parámetro de acoplamiento global.