Universidad de Los Andes
Mérida - Venezuela

Postgrado en Física Fundamental

Defensa de Tesis Doctoral

Modelos de dinámica social en redes coevolutivas

M. Sc. José Luis Herrera

Tutor: Dr. Mario Cosenza

Centro de Física Fundamental
Grupo de Caos y Sistemas Complejos
http://www.ciens.ula.ve/cff/caoticos

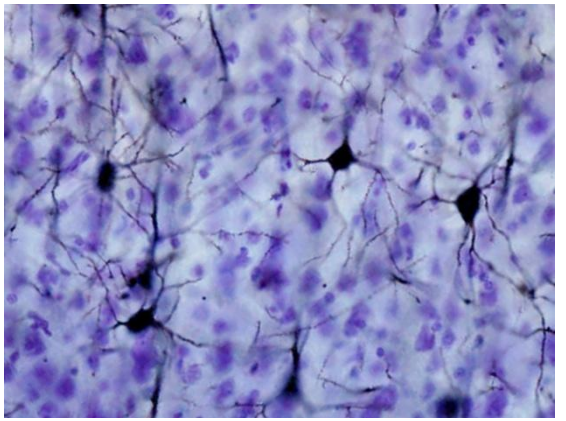
Sistemas complejos

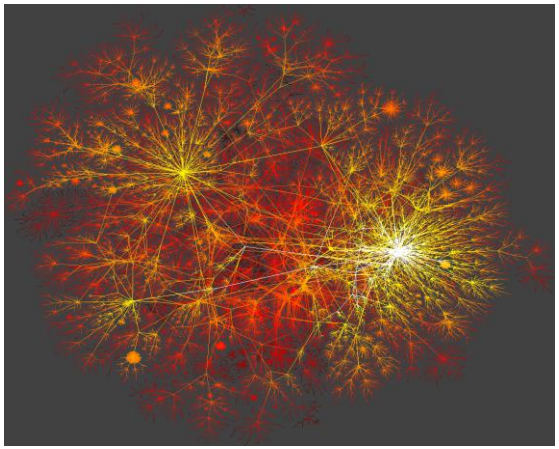
Sistemas complejos: comportamientos colectivos (estructuras, patrones, funcionalidad) no presentes en elementos aislados; *emergen* de las interacciones entre elementos del sistema. No linealidad.

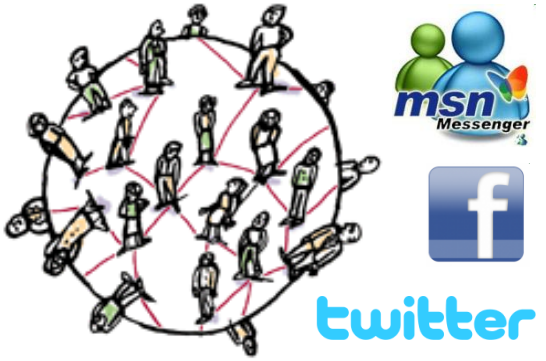
Ejemplos: sistemas caóticos u osciladores acoplados, colonias de insectos, cardúmenes, tráfico, sistemas fisiológicos, cerebro, economía, redes, sistemas sociales.

Comportamientos colectivos universales: sincronización, formación de patrones, auto-organización, transición orden-desorden, red de conectividad, adaptación → Interdisciplinariedad.

Comportamiento complejo no requiere causas complejas (no muchos parámetros).

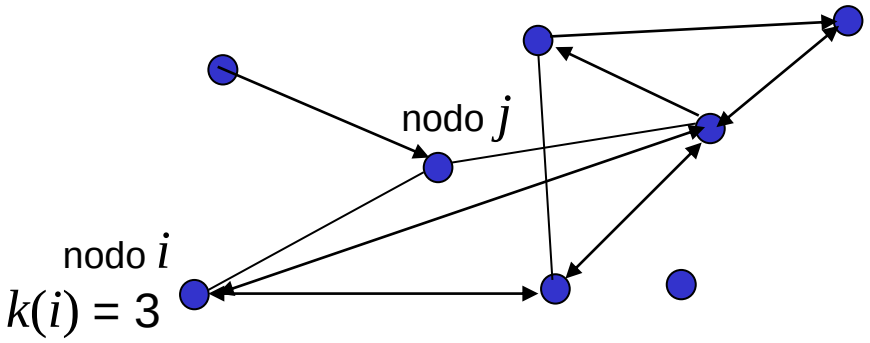






Redes

Sistema complejo: elementos dinámicos + red de interacciones (conexiones).



$i = 1,2,\ldots,N$ (tamaño del sistema)

$\nu_i =$ conjunto de vecinos del nodo i

k_i = # vecinos (grado) del nodo i

$\varepsilon_{ij} =$ intensidad de acoplamiento i,j.

E_i = # enlaces entre vecinos de i

Modelos: ecs. diferenciales, mapas acoplados, autómatas celulares.

- **Longitud característica:**

Distancia promedio entre todos los pares de nodos.

$$\ell = \frac{1}{\frac{1}{2}n(n-1)} \sum_{i>j} d_{ij},$$

- **Coeficiente de agrupamiento:**

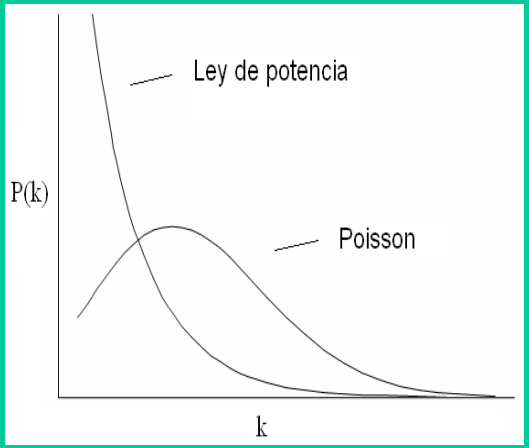
Fracción de enlaces existentes entre los vecinos de un nodo, promediado entre todos los nodos.

$$C_i = \frac{E_i}{\frac{1}{2}k_i(k_i-1)}, \qquad C = \langle C_i \rangle_i$$

$$C_i = \frac{\text{number of pairs of node i that are connected}}{\text{number of pairs of neighbors of node i}}$$

- **Distribución de grado:**

Probabilidad de obtener un nodo con grado *k*.



- **Modularidad:**

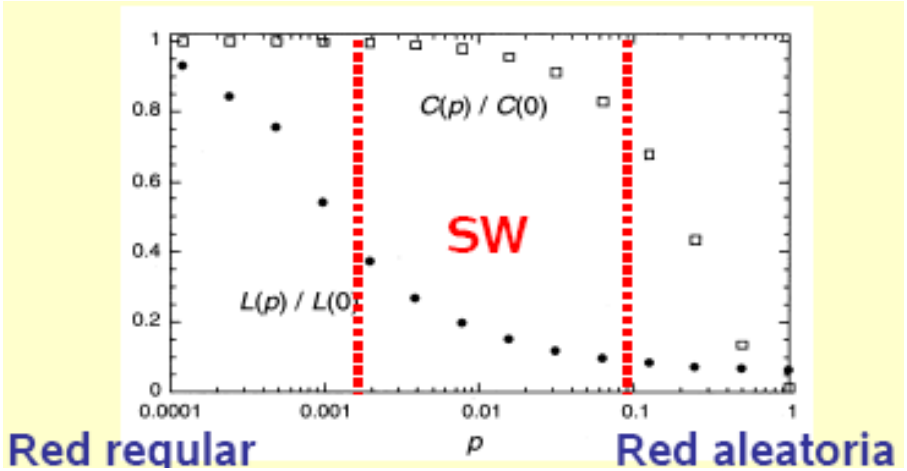
Conjuntos de nodos muy conectados entre sí, (comunidades) con pocas conexiones entre diferentes conjuntos.

$$Q(c) = \frac{1}{2m} \sum_{ij} \left(A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m} \right) \delta(c_i, c_j)$$

Redes complejas

Redes de pequeño mundo (SW):

D. J. Watts, S. H. Strogatz, *Nature* **393**, 440 (1998).



Backstrom, et. al. (2012)
arxiv.org/abs/1111.4570

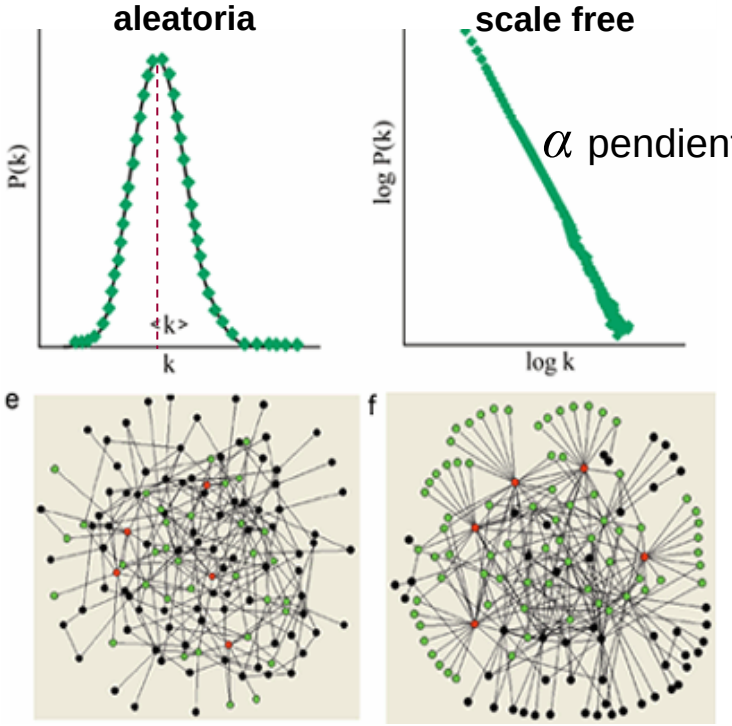
721 Millones de usuarios
69 billones de enlaces
4,74 grados de separación

¡El mundo es pequeño!

Distancia media << Tamaño del sistema
Efecto ubicuo en sistemas naturales y artificiales.

Redes libres de escala:

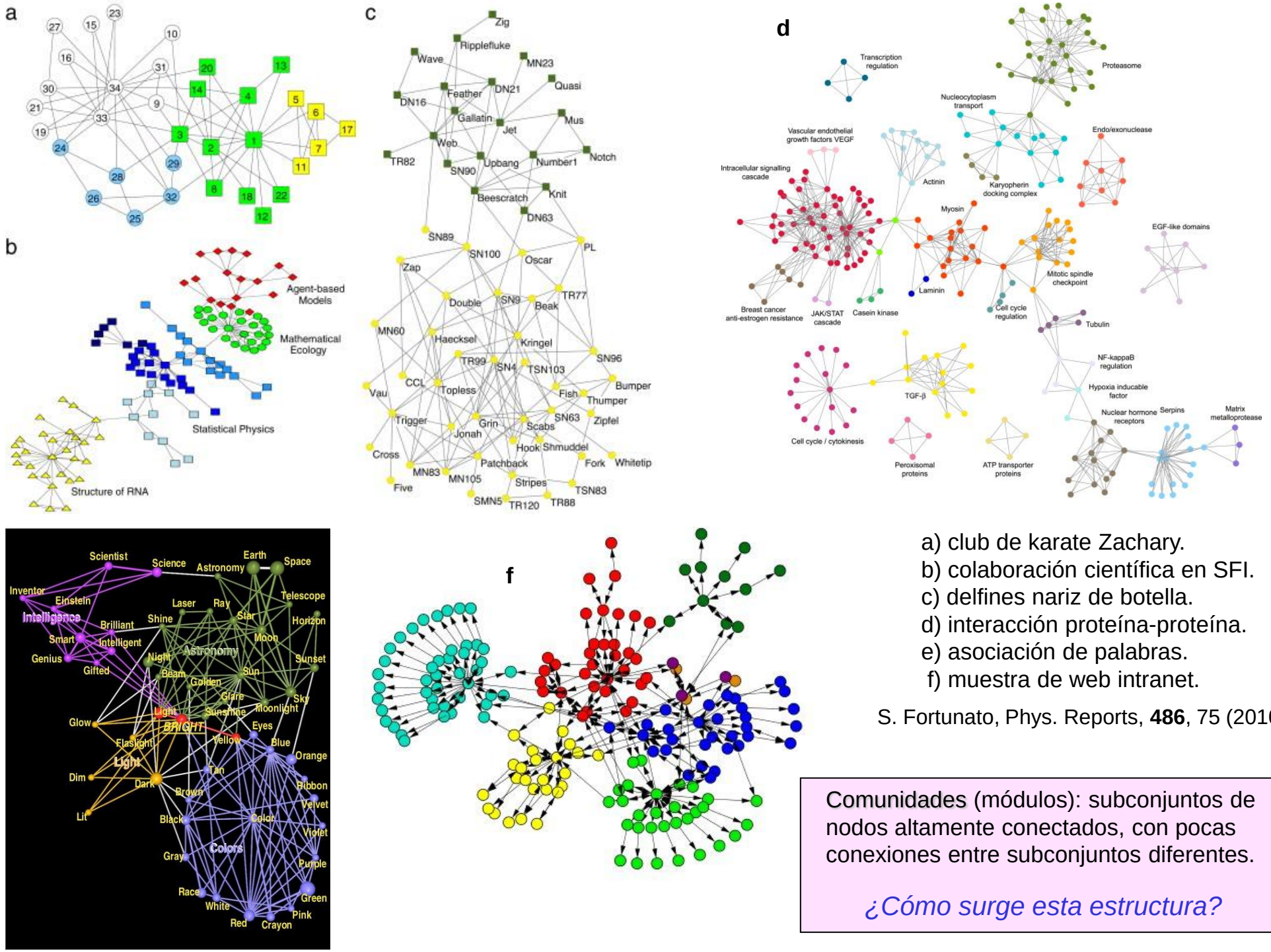
A. Barabasi, R. Albert , *Science* 286, 509 (1999).



$$P(k) \propto k^{-\alpha}$$

Ejemplos: www, internet, proteínas, lenguaje, citas científicas, rutas tráfico, organizaciones, llamadas telefónicas, distribución de recursos, etc.

Estructura de comunidades en redes



a) club de karate Zachary.
b) colaboración científica en SFI.
c) delfines nariz de botella.
d) interacción proteína-proteína.
e) asociación de palabras.
f) muestra de web intranet.

S. Fortunato, Phys. Reports, **486**, 75 (2010)

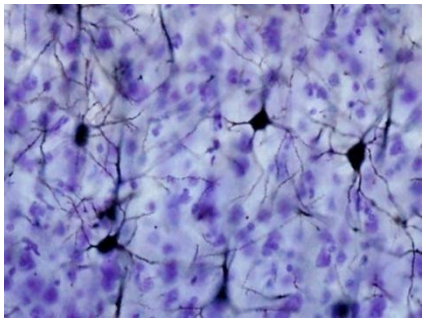
Comunidades (módulos): subconjuntos de nodos altamente conectados, con pocas conexiones entre subconjuntos diferentes.

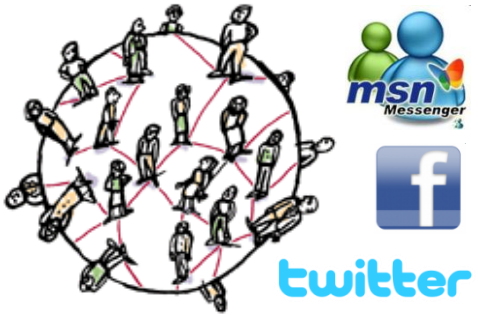
¿Cómo surge esta estructura?

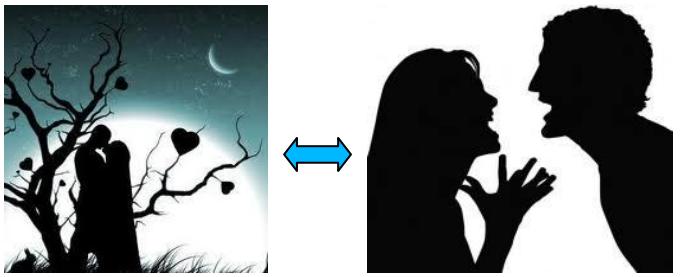
Sistemas dinámicos coevolutivos

Muchos sistemas complejos se pueden describir como redes dinámicas de elementos interactivos, donde, tanto los estados de los elementos como las conexiones entre ellos, cambian en el tiempo.

Ejemplos: redes de comunicación y transporte, cerebro, redes biológicas, sociales, económicas.

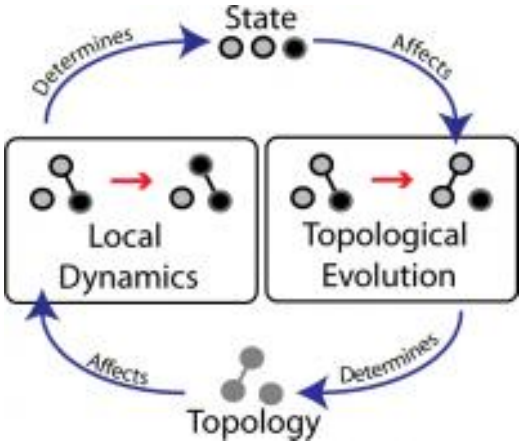






Coevolución: El estado de un agente cambia por influencia de sus conexiones (entorno).
Las conexiones de un agente cambian como consecuencia de su estado.

Redes dinámicas coevolutivas (adaptativas): acoplamiento topología ↔ dinámica local.



¿Qué procesos determinan la coevolución en un sistema?
¿La dinámica local controla la topología de la red
o la topología controla la dinámica local?

- **Nuestra propuesta:** marco general para el estudio de sistemas coevolutivos.

Caracterización de redes reales locales

Red de estudiantes de la Facultad de Ingeniería, ULA

Nodos = Estudiantes de ingeniería.
Enlaces = coincidencia en una sección.

Estructura de pequeño mundo.
Alta conectividad.

Datos: OREFI

	1973-2009	Aleatorio
Nodos (N)	9337	9337
Coef. Agrup. (C)	0.4843	0.054
Diámetro (D)	4	3.59
Long. Carac. (L)	1.9502	1.9462
Grado promedio ($\hat{k}$)	500	500

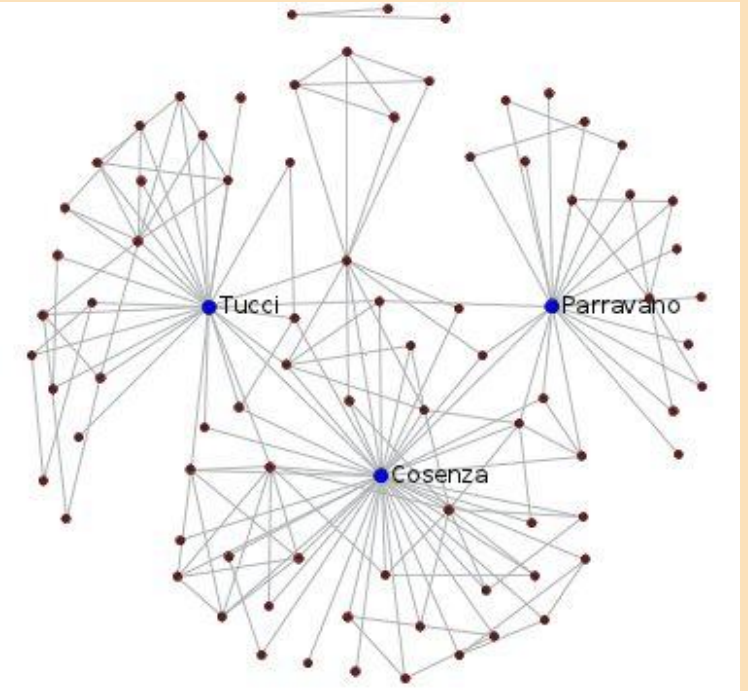
Red de colaboración científica: Grupos de Caos y Sistemas Complejos, ULA

Nodos = Profesores/estudiantes.
Enlaces = coautoría de un artículo

N	C	D	L	$\hat{k}$	M	Q	k_M	k_K	k_P
83	0.711	5	2.4	4.25	136	0.510	40	26	23

Red modular o comunidades:
Interdisciplinariedad.

Datos: www/ciens.ula.ve/cff/caoticos



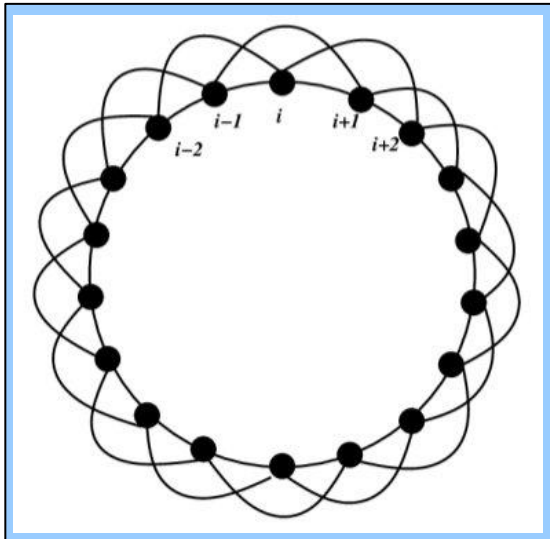
Efecto de la topología en dinámica económica

Modelos usuales: interacciones aleatorias tipo gas (Yakovenko 2009).

Nuestra propuesta: interacciones locales son importantes → topología de la red.

Modelo de intercambio económico estratificado en redes.

J.L. Herrera, M.G. Cosenza, K. Tucci, Physica A **390**, 1453 (2011).



riqueza total constante

$w_i(t)$ = riqueza de i $\quad \beta_i$ = aversión al riesgo de i $\quad k$ = # vecinos de i

interacción $i, j \in \nu_i$ si: $|w_i(t) - w_j(t)| < u$ $\quad u$: ancho del estrato.

riqueza intercambiada en una interacción:

$$\Delta w(t) = \min\left[(1-\beta_i)w_i(t);(1-\beta_j)w_j(t)\right]$$

Probabilidad de favorecer al agente con menor riqueza entre i,j:

$$r = \frac{1}{2} + f \times \frac{|w_i(t) - w_j(t)|}{w_i(t) + w_j(t)} \qquad f \in [0,1/2]$$

f =0, aleatorio.
f =1/2, al más pobre.

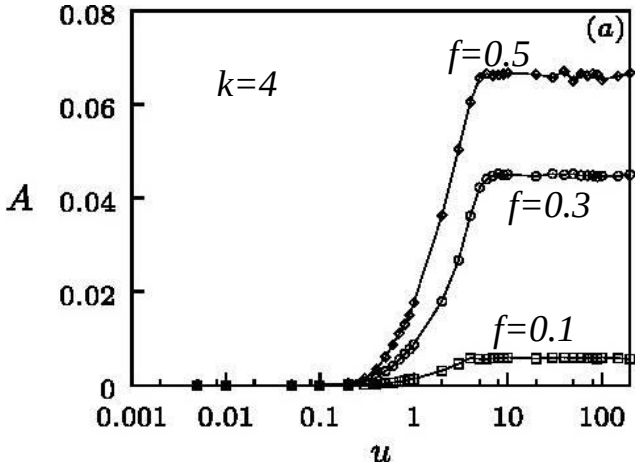
Actividad:
Cantidad de riqueza promedio intercambiada para t muy largo:

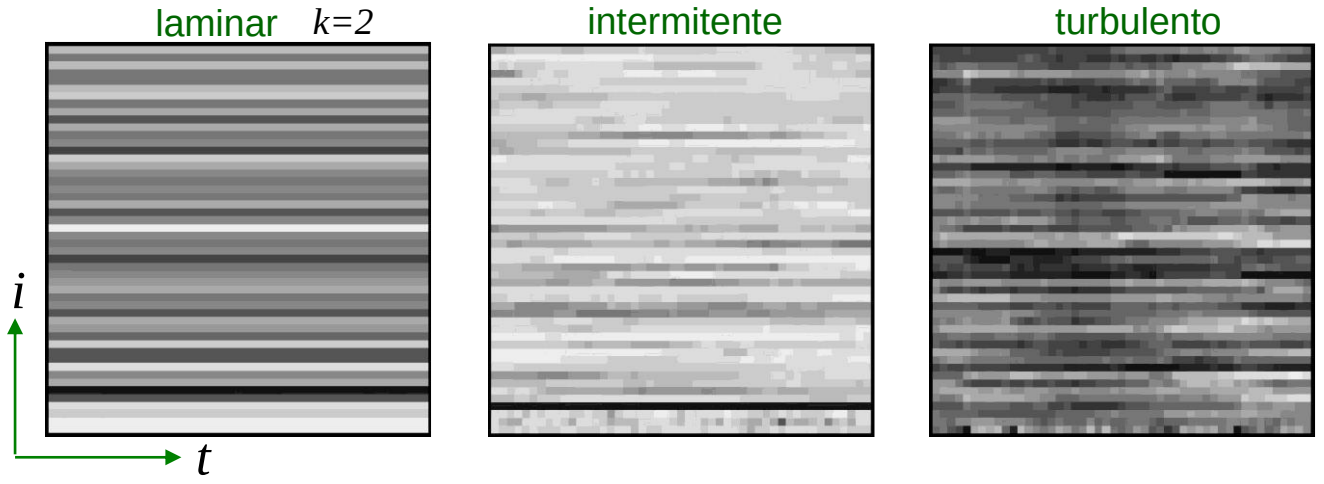
$$A = \frac{1}{T-\tau}\sum_{t=\tau}^{T}\Delta w(t)$$

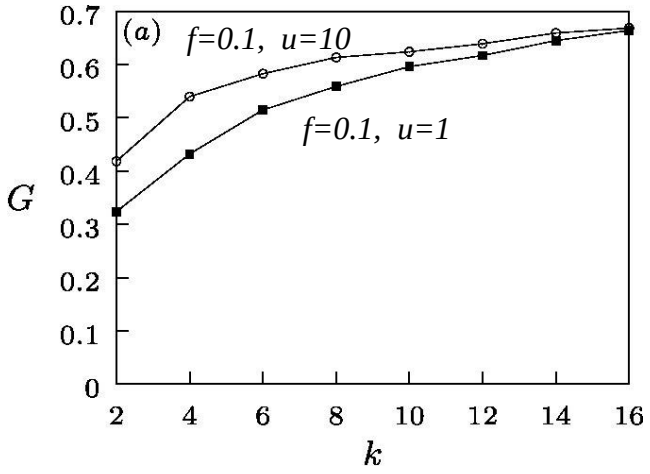
Coeficiente de Gini: $G \in [0,1]$
desviación de distribución equitativa;
grado de desigualdad en el sistema.

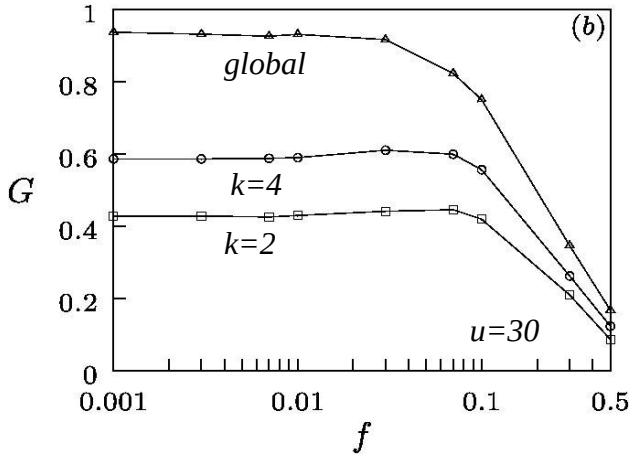
$$G(t) = \frac{1}{2N}\frac{\sum_{i,j=1}^{N}|w_i(t) - w_j(t)|}{\sum_{i=1}^{N} w_i(t)}$$

Efecto de la topología en un sistema económico



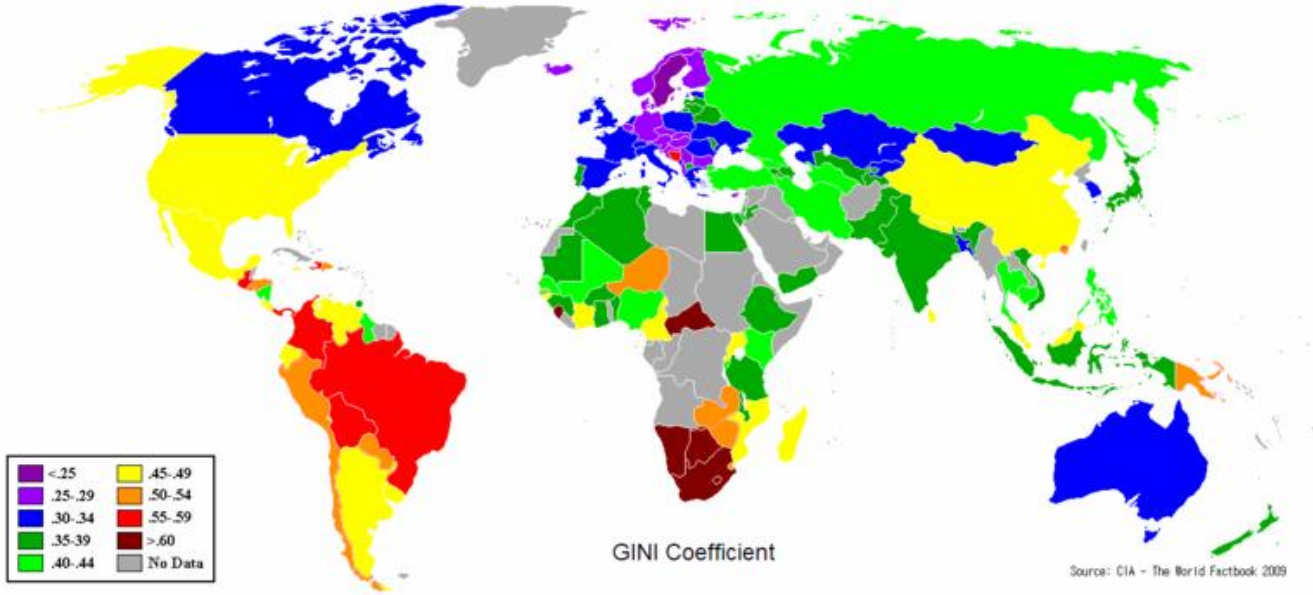






J.L. Herrera, M.G. Cosenza, K. Tucci, Physica A **390**, 1453 (2011).
J. L. Herrera, M.G. Cosenza, K. Tucci. Revista Científica UNET **21**, 8 (2009).

Se pueden obtener valores de G similares a los reales,
en contraste con modelos previos sin localidad espacial.



Modelo de epidemias en redes coevolutivas

Epidemia tipo SIR en redes coevolutivas:

J. L. Herrera, G. González-Parra, Revista de Ingeniería UCV (2012)

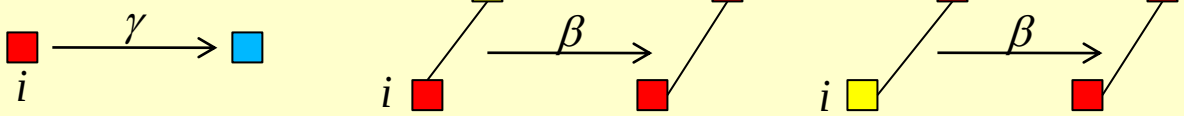
Tres estados:
s: susceptible
i: infectado
r: recuperado

β : probabilidad de infección

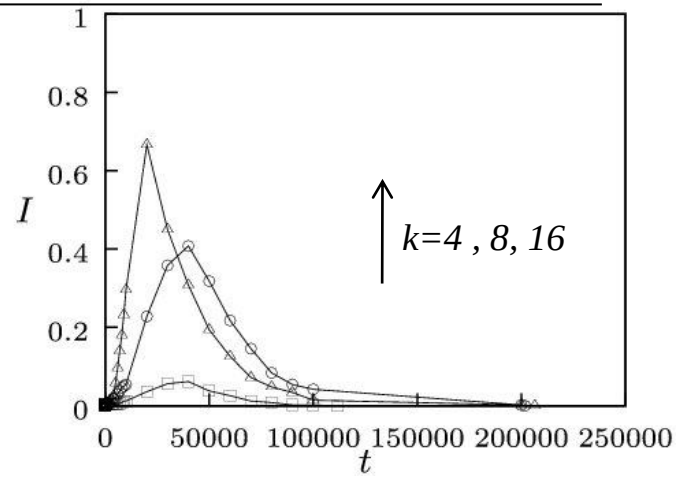
γ: probabilidad de recuperación

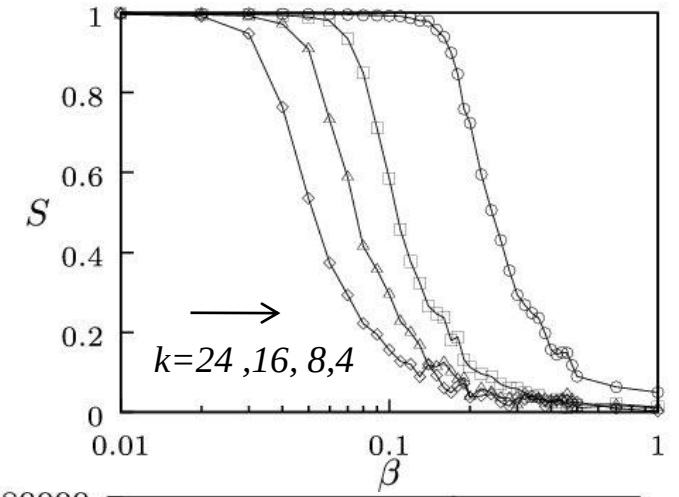
Red inicial aleatoria con $N=500$ nodos, k vecinos promedio.
Un solo nodo infectado. $\gamma = 0.02$

Se escoge un nodo i.
Posibilidades de cambio:



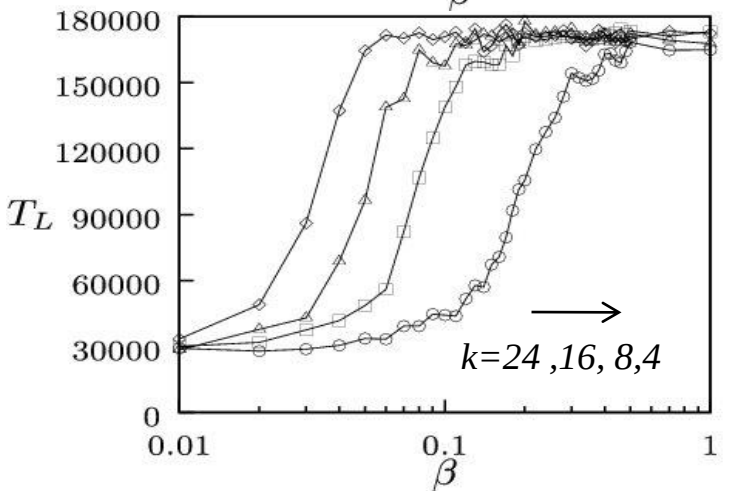
con probabilidad $(1-\beta)$ se efectúa una reconexión.





S: fracción de nodos susceptibles I: fracción de nodos infectados

Estado asintótico $I=0$. T_L : tiempo para alcanzar estado asintótico.



- Recableado previene la propagación de epidemias.
- Se aísla la enfermedad y ésta desaparece.
- A mayor vecindad, mayor el número de infectados
- A mayor vecindad, menor β para causar epidemia.

Modelo coevolutivo de formación opinión con campos globales

$i = 1,2,\ldots,N$ (tamaño del sistema)

ν_i = conjunto de vecinos de i

$\bar{k}$ = grado promedio de la red

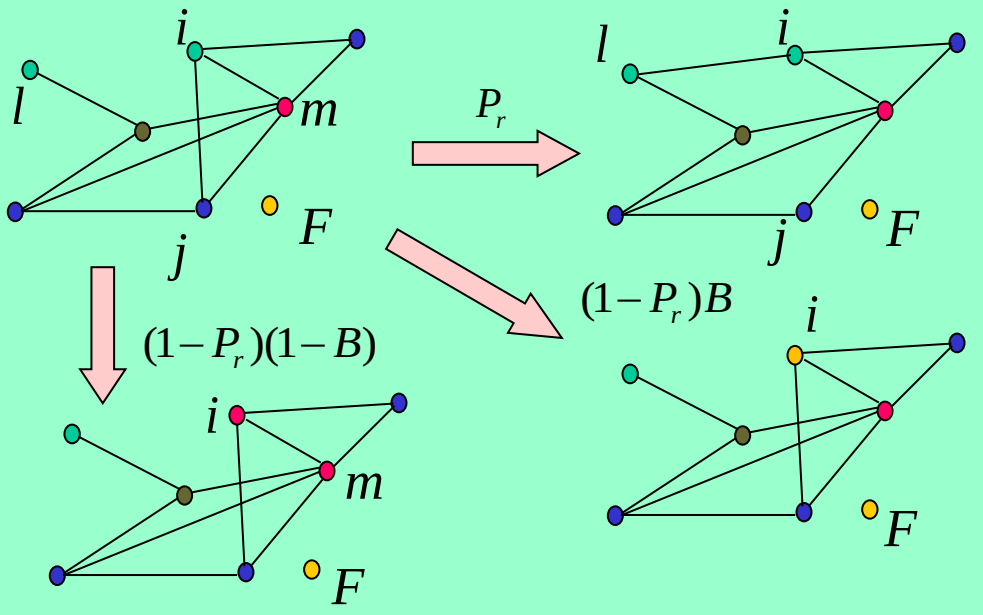
g_i = variable de estado de i (color)

P_r = prob. de reconexión de i con $l \notin \nu_i \mid g_l = g_i$

B = intensidad del campo F aplicado $\forall i$

$(1-P_r)B$ = prob. de copiar estado g_F de F

$(1-P_r)(1-B)$ = prob. de copiar estado de $m \in \nu_i \mid g_m \neq g_i$



Campo global:

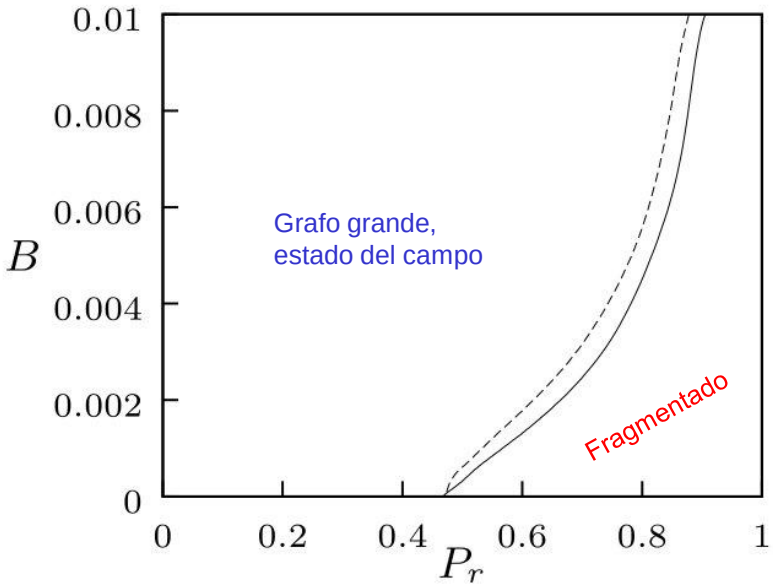
interacción común a todos los elementos del sistema.

- Externo: estado fijo en el tiempo. Se escoge al comienzo.
- Autónomo: depende de estados de elementos,
  Aquí: moda estadística, estado más abundante en el sistema.

Origen del campo (externo, endógeno) es irrelevante.
Elementos no distinguen naturaleza del campo a nivel local.

Campo global impone su estado si B es suficientemente grande.

Recableado puede prevenir imposición del campo,
pero conduce a fragmentación en subgrafos en distintos estados.



Coevolución general de topología y dinámica en redes

J.L. Herrera, M.G. Cosenza, K. Tucci, J.C. González-Avella, EPL **95**, 58006 (2011)

Coevolución consiste en la coexistencia de dos procesos en una red:

- **Recableado:** nodo cambia sus conexiones con escala de tiempo (probabilidad) P_r
- **Dinámica local:** nodo cambia su variable de estado con escala de tiempo (probabilidad) P_c

Nuestras premisas:

1. Recableado y dinámica local pueden ser *independientes* entre sí.
2. Proceso de recableado consiste en dos acciones básicas: *desconexión* ("repulsión¨) y *conexión* ("atracción") entre nodos.

- Ambas acciones, desconexión y conexión, está dirigidas por algún criterio de comparación de los estados de los nodos.

Definimos:

$d \in [0,1]$ = probabilidad de que dos nodos en estados *idénticos* sean *desconectados*.
$\rightarrow$ 1-d: dos nodos en estados diferentes resulten desconectados.

$r \in [0,1]$ = probabilidad de que dos nodos en estados *idénticos* sean *conectados*.
$\rightarrow$ 1-r: dos nodos en estados diferentes resulten conectados.

- Un proceso de recableado se puede caracterizar con una etiqueta dr: punto en espacio (d,r).
  Caso simple: ambas acciones siempre se aplican en recableado $\rightarrow$ conservación de número de conexiones.

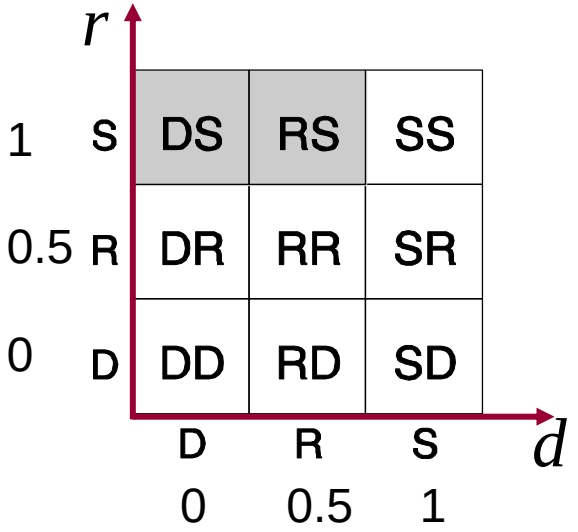
- Un modelo de coevolución es un acoplamiento o *relación funcional* entre P_r y P_c

Ejemplos de procesos de recableado

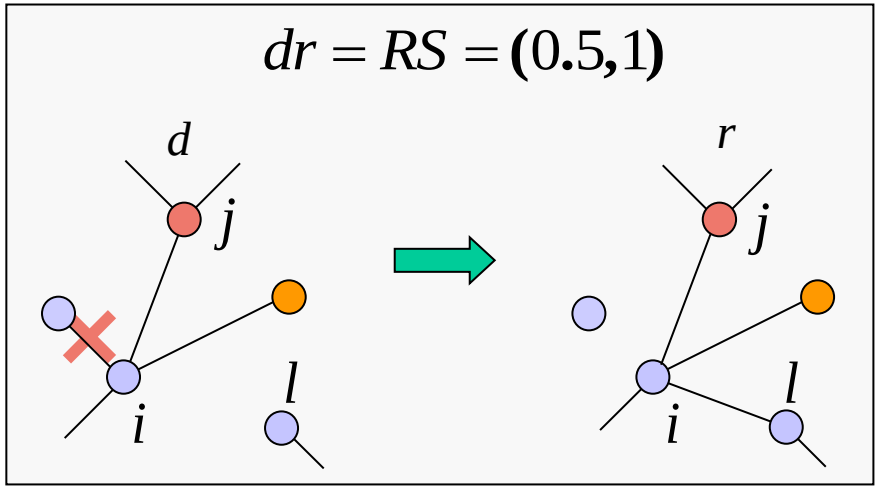
- Forma de proceso recableado: $dr \rightarrow d$ (descon.), r (recon.) entre nodos con igual estado-
- Proceso de recableado dr entre nodos ocurre con probabilidad (velocidad) Pr.

Ejemplos de procesos discretos de recableado:
Cada acción *d* o *r* puede tomar 3 valores distintos:

S (similitud):
entre nodos del mismo estado (prob.=1).
R (aleatorio):
sin importar el estado (prob.=0.5).
D (disimilitud):
entre nodos de diferentes estados (prob.=0)



Ejemplo:



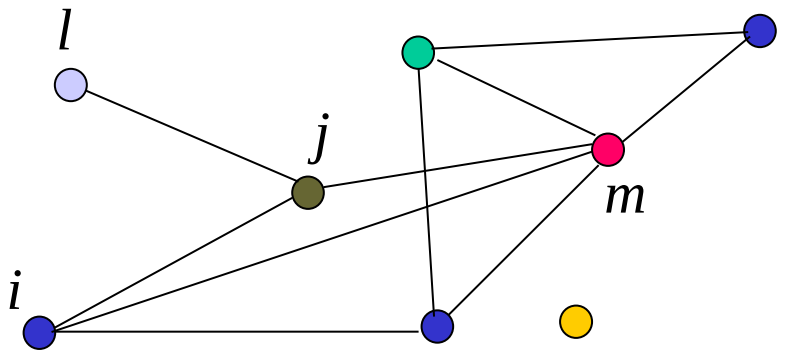
RS: i se desconecta de vecino j escogido al azar, y luego se conecta con l que comparte el mismo estado que i.

Recableados propuestos en la literatura
se pueden clasificar bajo este esquema.

RS: P. Holme, M.E.J. Newman, *PRE* **74**, 056108 (2006).

DS: F. Vazquez et al, *PRL* **100**, 108702 (2008).

Dinámica coevolutiva



$i = 1,2,\ldots,N$ (tamaño del sistema)

ν_i = conjunto de vecinos de nodo i

k_i = # vecinos (grado) de i

$\bar{k}$ = grado promedio de la red

g_i = variable de estado de i (color)

- Sistema dinámico coevolutivo puede ser representado por: d, r, P_r, P_c.

- Proceso de cambio de estado de nodos ocurre con probabilidad P_c.
  Ejemplo: modelo del votante (regla simple de imitación). $g_i \in \{1,2,\ldots,G\}$.

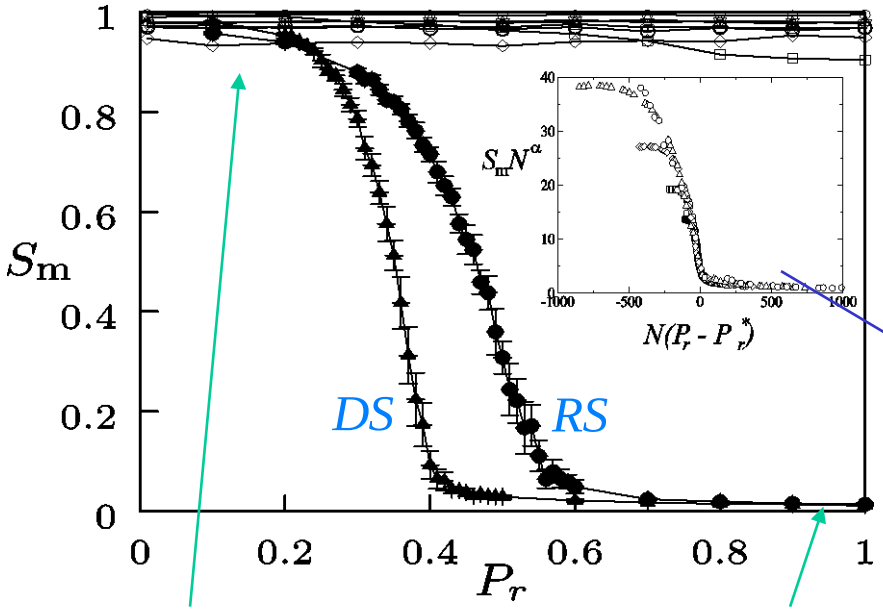
- Red inicial aleatoria $(N, \bar{k})$. Dados un proceso de recableado dr con P_r y dinámica de nodos con P_c, y comenzando con estados distribuidos aleatoriamente, la dinámica coevolutiva se define:

1. Seleccionar i tal que $k_i > 0$.
2. Con probabilidad P_r, aplicar el proceso de recableado dr:
   cortar vínculo (i, j), $j \in \nu_i$ mediante la acción d, y crear vínculo (i, l), $l \notin \nu_i$ con la acción r.
3. Escoger aleatoriamente $m \in \nu_i$ tal que $g_m \neq g_i$. Con probabilidad P_c, hacer $g_i = g_m$.

Comportamiento colectivo: transición de fragmentación

- Competencia entre el cambio de estado (aumenta # conexiones nodos similares) y recableado (puede favorecer separación) puede conducir a la fragmentación de la red: *formación de dominios*.
- Dominio: componente o subgrafo donde todos los nodos con el mismo estado.
- Parámetro de orden, tamaño promedio normalizado del dominio más grande del sistema S_m

Procesos de recableado discreto *dr*



otros

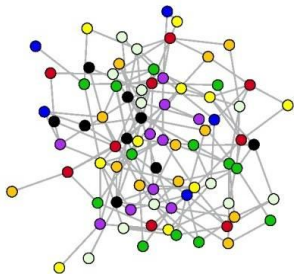
$N = 3200$

$\bar{k} = 4$

$G = 320$

$P_c = 0.6$

red inicial aleatoria:



Valor crítico $P_r^* = 0.541 \ \ (RS)$

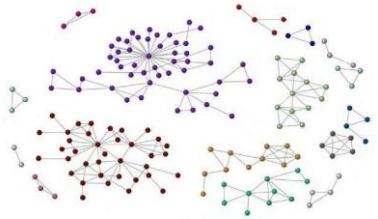
$P_r^* = 0.380 \ \ (DS)$

Análisis de tamaño finito (*RS*):

$$S_m N^\alpha = F\left(N(P_r - P_r^*)\right)$$

$S_m \to 1$

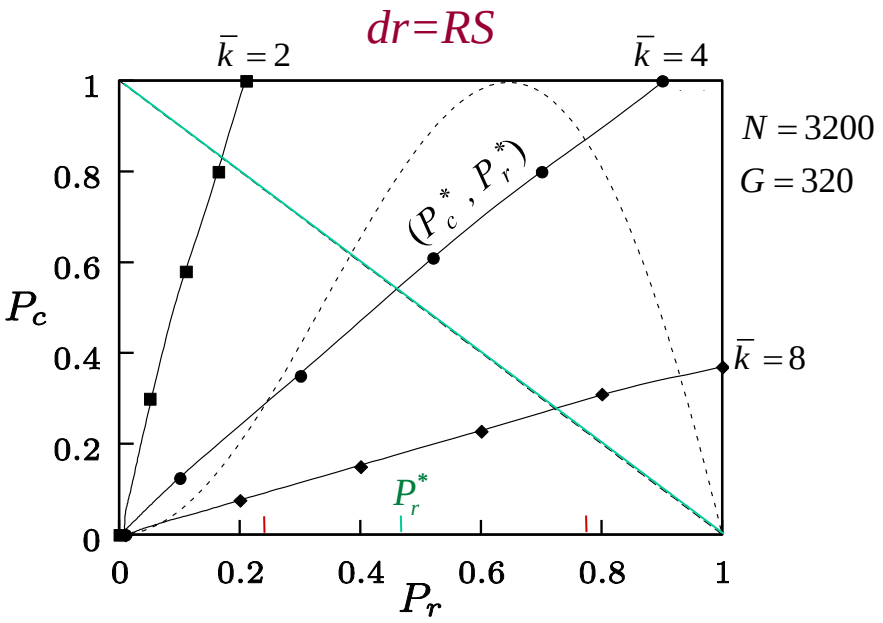
$S_m \to 0$



Red final:

Transición de fase (orden-desorden)
un domino grande → dominios pequeños

Diagrama de fases en espacio (P_c, P_r)



Frontera crítica para cada $\bar{k}$: (P_c^*, P_r^*)

arriba de (P_c^*, P_r^*): $S_m \to 1$ un dominio grande.

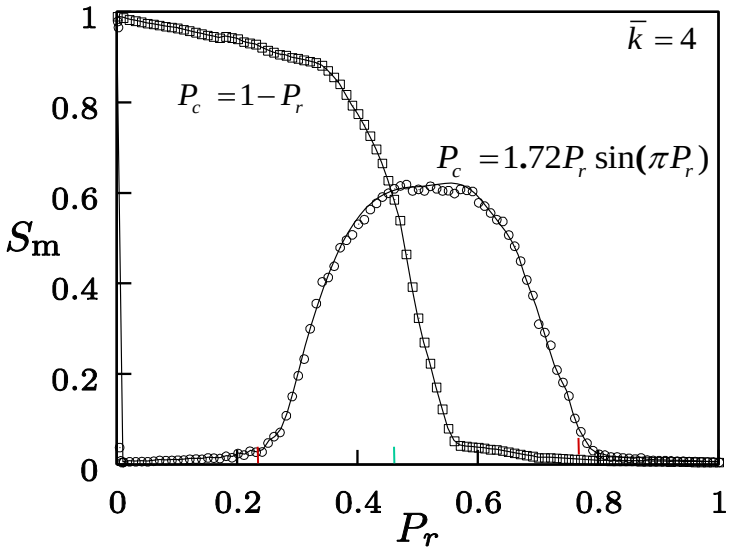
debajo de (P_c^*, P_r^*): $S_m \to 0$ dominios pequeños (red fragmentada).

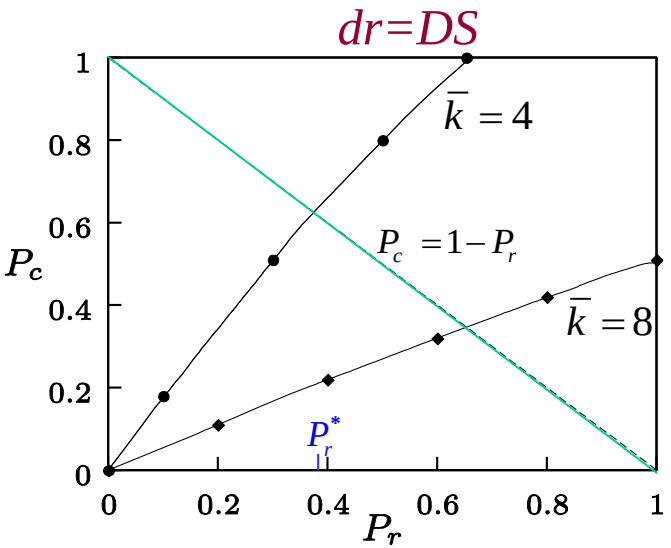
— $P_c = 1 - P_r$, predict : $P_r^* = 0.458$ for $\bar{k} = 4$.

concuerda con:
P. Holme, M.E.J. Newman, *PRE* **74**, 056108 (2006).

Un modelo de coevolución se caracteriza por un proceso dr y $P_c = f(P_r)$.

····· $P_c = 1.72 P_r \sin(\pi P_r)$, predict :
un dominio grande $P_r \in (0.25, 0.77)$ para $\bar{k} = 4$.





$G = 2$

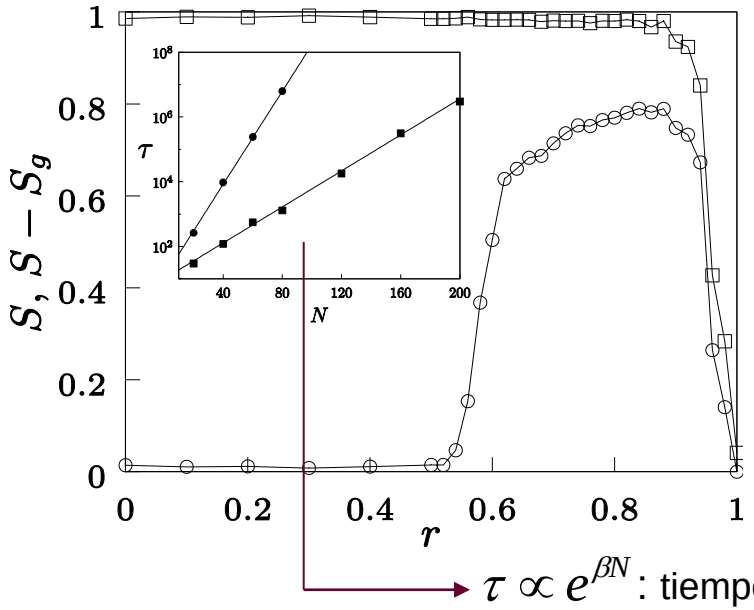
$P_c = 1 - P_r \to$
$P_r^* = 0.375$ $(\bar{k} = 4)$

concuerda con:
F. Vazquez et al,
PRL **100**, 108702 (2008).

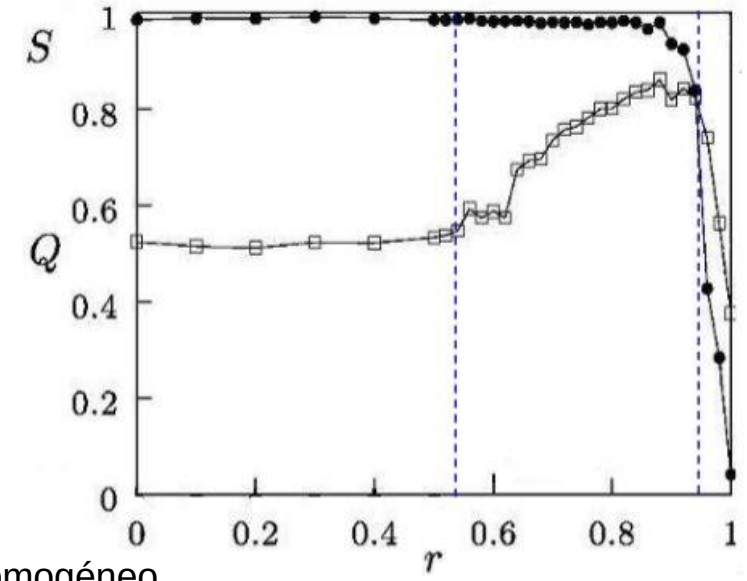
Procesos de recableado continuo

S : tamaño normalizado del subgrafo más grande de la red

S_g : tamaño normalizado del subconjunto de nodos conectados que comparten mismo estado, sobre subgrafo más grande

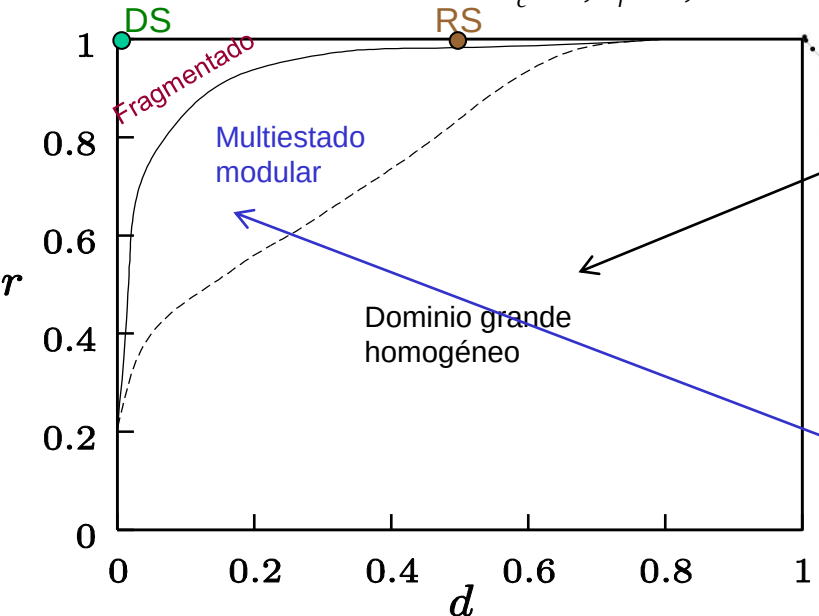


$P_c = 1$
$P_r = 1$
$d = 0.2$
$\bar{k} = 4$
$G = 20$
$N = 200$



$\tau \propto e^{\beta N}$: tiempo de decaimiento al estado homogéneo

Diagrama de fase (d,r) $P_c = 1, P_r = 1, \bar{k} = 4$



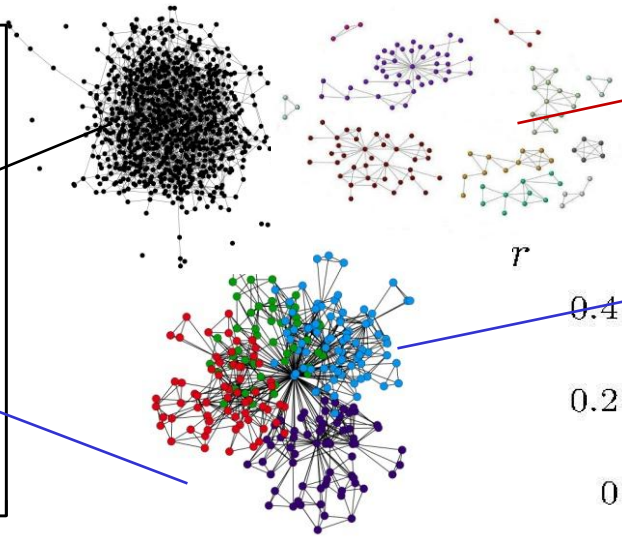
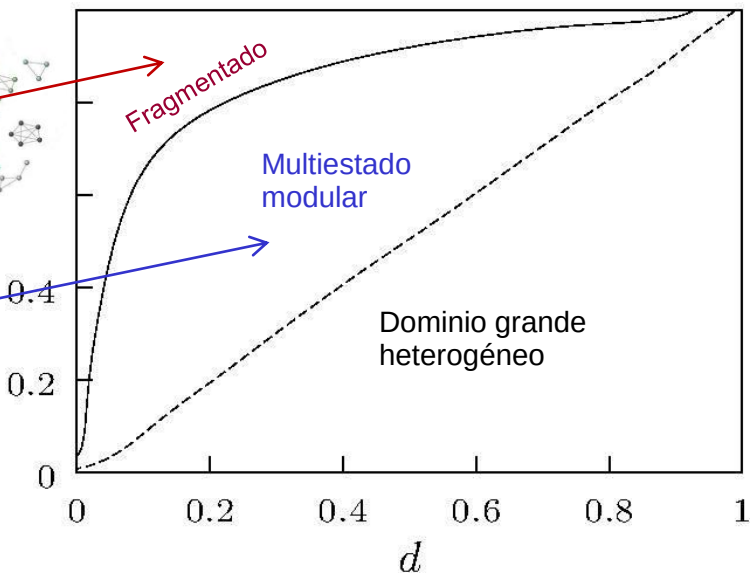


Diagrama de fase (d,r) $P_c = 0, P_r = 1, \bar{k} = 4$



Conclusiones I

- Sistemas complejos se pueden describir mediante redes de elementos dinámicos interactivos.
- Existen propiedades estadísticas y topológicas universales en redes (pequeño mundo, libre de escala).
- Estructuras de comunidades son ubicuas en muchos sistemas reales*.
- Muchos sistemas son coevolutivos: topología y estados se influyen y cambian mutuamente*.

Caracterización de redes locales reales:

- Red de estudiantes de la Facultad de Ingeniería, ULA, es de tipo pequeño mundo.
- Red de coautores caóticos muestra estructura modular → interdisciplinariedad

Influencia de la topología de la red en dinámica económica estratificada:

- Formación de patrones espaciotemporales.
- Localidad permite distribución más equitativa de recursos en economía estratificada.
- Valores de coeficiente de Gini similares a valores reales.

Modelos de sistemas coevolutivos:

- Modelo de propagación de epidemias (SIR) coevolutivo.

- β grande → T_L grande. Recableado puede prevenir propagación de epidemia (movilidad).
- Para sistemas altamente conectados, mayor prob. de propagación de epidemia.

- **Modelo coevolutivo de formación de opiniones con campos globales**:

- Campo global externo o autónomo producen efectos similares; origen del campo es irrelevante. (resultado también obtenido en otros contextos: sincronización caótica).
- Campo global impone su estado para intensidades suficientemente grandes.
- Dinámica coevolutiva puede prevenir imposición de campos débiles → fragmentación de la red.

Conclusiones II

Marco general para sistemas coevolutivos: dinámica ↔ topología.

- Coevolución: coexistencia de dos procesos, dinámica local (P_c) y recableado de la red (P_r).
- Proceso de recableado dr: dos acciones, desconexión (d) y reconexión (r).
- Dado un proceso de recableado *dr* → un modelo coevolutivo es $P_c = f(P_r)$ en plano (P_r, P_c).
- Para dinámica local de votante: transición de fragmentación en espacios (P_r, P_c), (d, r).
  → frontera crítica depende de $\bar{k}$.

- Resultados previos y nuevos pueden ser obtenidos dentro de este esquema.
- Plano (d,r): región de coexistencia de múltiples estados en una red conectada grande, por tiempos largos (aumenta con N) → estructura de comunidades emerge en la red.
- Formación de comunidades está asociada al proceso de recableado; requiere cierto grado de tolerancia a diversidad local.
  P_c controla el tamaño de región modular.
- *Coevolución*: mecanismo para la formación y persistencia de comunidades.

- Extensiones futuras: caracterización y comparación de otras redes en nuestro país, tratamiento analítico de coevolución tipo campo medio, no conservación de # conexiones, influencia del ruido, diferentes dinámicas para nodos (caótica), heterogeneidad, intensidad variable de conexiones, propiedades topológicas.