

*Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias*



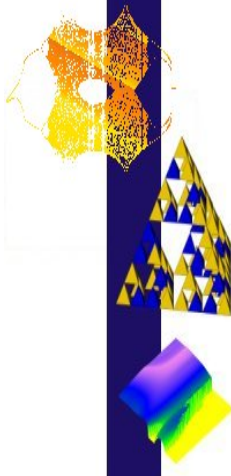
Defensa de Tesis de Licenciatura:
***Flujos caóticos robustos
con interacciones globales***

Br. María Palazzi

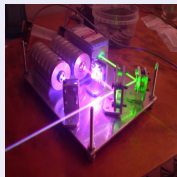
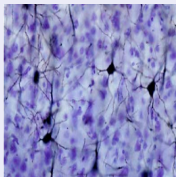
Tutor:
Dr. Mario Cosenza

*Centro de Física Fundamental
Área de Caos y Sistemas Complejos*

www.ciens.ula.ve/cff/caoticos



- Muchos sistemas se describen como un conjunto de elementos dinámicos no lineales sujetos a interacciones mutuas.
- Producto de las interacciones entre elementos del sistema surgen comportamientos colectivos (sincronización, formación de clusters, colapso de amplitud) no presentes en los elementos aislados.
- Usualmente se asume que los elementos son idénticos, pero lo más común es encontrar elementos heterogéneos interactuando en un sistema.
- Ej. sistemas caóticos, colonias de insectos, cerebro, circuitos eléctricos, células cardíacas, sistemas sociales.



Nuestro problema:

- Investigamos un sistema globalmente acoplado de flujos caóticos robustos. Consideramos elementos con parámetros locales homogéneos y heterogéneos. Investigamos el surgimiento de sincronización caótica y colapso de amplitud.
- Para introducir heterogeneidad en los parámetros locales de elementos caóticos es necesario tener regiones caóticas confiables.

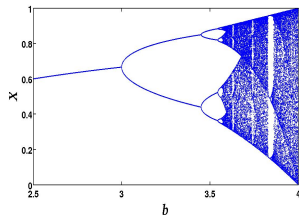
Caos Frágil en mapas y flujos.

Caos.

- Caos: sensibilidad extrema a cambios en las condiciones iniciales de un sistema para ciertos valores de parámetros.

Mapa logístico.

- $f(x_t) = bx_t(1 - x_t)$.
- Diagrama de Bifurcación en función de b .



Ecuaciones de Sprott.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -Az - y + |x| - 1.\end{aligned}$$

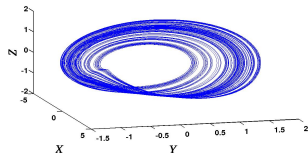
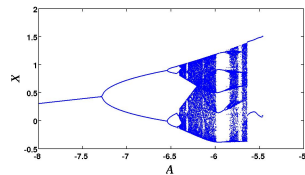


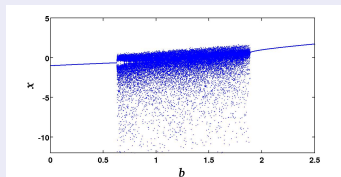
Diagrama de Bifurcación de x en función de A para una sección de Poincaré.



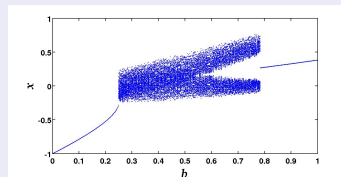
<http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/abscahos.htm>

Mapas Singulares

- $f(x_t) = b - |x_t|^z$ con $|z| < 1$.
- Diagrama de Bifurcación en función de b con $z = -0.5$.



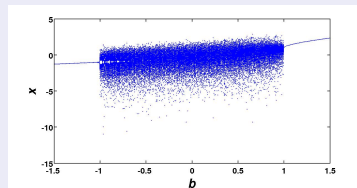
- Diagrama de Bifurcación en función de b con $z = 0.5$.



O. Alvarez y M. G. Cosenza. CIENCIA 15(4), 438-443, 2007

Mapa Logarítmico

- $f(x_t) = b - \ln|x_t|$
- Diagrama de Bifurcación. Caos para $b \in [-1, 1]$

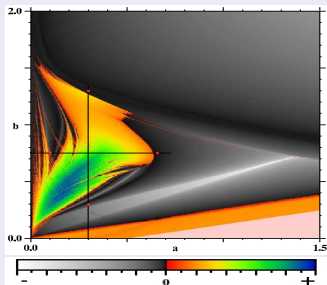


M. Cosenza y J. González, Prog. Theor. Phys. **100**, 21 (1998).

Ecuaciones de Shimizu-Morioka.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x(1-z) - by \\ \dot{z} &= -a(z-x^2).\end{aligned}$$

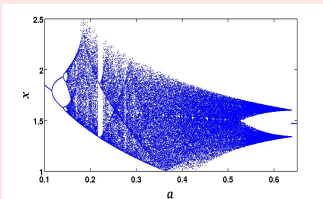
- Introducido como una aproximación al modelo de Lorenz.
- Representa el comportamiento de un láser bajo ciertas condiciones.
- J. A. Gallas encontró una extensa región de caos robusto.



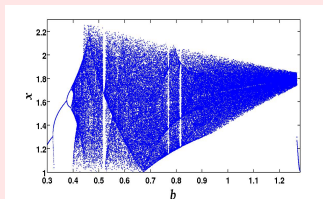
A. L. Shilnikov, *Comput. Math. Appl.*, 34,(1997) 245-251.
J. A. Gallas, *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, Vol. 20, No. 2
(2010) 197-211.

Diagramas de Bifurcación

- Diagrama de Bifurcación de x en función de a con $b = 0.75$ de una sección de Poincaré.



- Diagrama de Bifurcación de x en función de b con $a = 0.3$ de una sección de Poincaré.

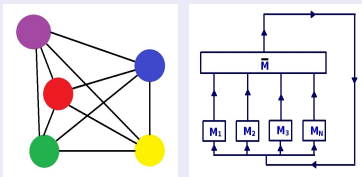


Acoplamiento global

Todos interactúan con todos de manera idéntica.

- $\dot{\mathbf{m}}_i = \mathbf{F}(\mathbf{m}_i) + \epsilon \bar{\mathbf{m}}$,
- donde $i = 1, 2, \dots, N$, ϵ es el parámetro de acoplamiento y $\mathbf{m}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$

- Además $\bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{m}_j(t)$ siendo $\bar{\mathbf{m}}(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \\ \bar{z}(t) \end{pmatrix}$.



Sincronización

- Elementos acoplados evolucionan idénticamente en el tiempo. Es decir, $x_i(t) = x_j(t), \forall i, j$
- Para caracterizar la sincronización $\sigma_i(t) = \frac{1}{\sqrt{(x_i(t) - \bar{x})^2 + (y_i(t) - \bar{y})^2 + (z_i(t) - \bar{z})^2}}$
- Definimos el promedio $\langle \sigma(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i(t)$.
- Introducimos la cantidad estadística $S = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \langle \sigma(t) \rangle$, después de transientes.
- La condición para la sincronización es $S = 0$.

Colapso de Amplitud (sincronización en un punto fijo).

- El cese simultáneo de las oscilaciones en un sistema de elementos acoplados. "Amplitude death"

V. Resmi, G. Ambika, and R. E. Amritkar. General mechanism for death in coupled systems. ArXiv-preprints, January 2011.
Awadhesh Prasad. Amplitude death in coupled chaotic oscillators. ArXiv e-prints, (2005).
Dennis J. Selkoe. Journal of Alzheimer's Disease, (3), (2001), 75-80

Flujos Homogéneos con acoplamiento global difusivo en todas las variables locales

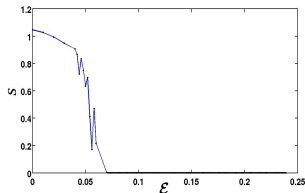
Caso Homogéneo:

$$\frac{dx_i}{dt_i} = y_i + \epsilon(\bar{x} - x_i)$$

$$\frac{dy_i}{dt_i} = x_i(1 - z_i) - by_i + \epsilon(\bar{y} - y_i)$$

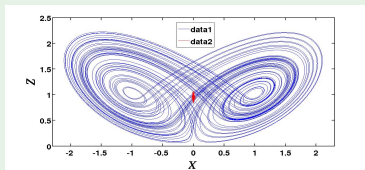
$$\frac{dz_i}{dt_i} = -a(z_i - x_i^2) + \epsilon(\bar{z} - z_i)$$

- considerando $i = 1 \dots N$ y $N = 10000$.
- donde $a = 0.375$ y $b = 0.81$.
- La cantidad S de la sincronización en función de ϵ



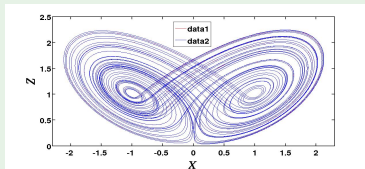
Con $\epsilon = 0$

proyección en el plano x-z para un elemento del sistema y para la media de todos los elementos.



Con $\epsilon = 0.08$ (estado sincronizado)

proyección en el plano x-z para un elemento del sistema y para la media de todos los elementos.



Flujos homogéneos con acoplamiento global difusivo en una variable local

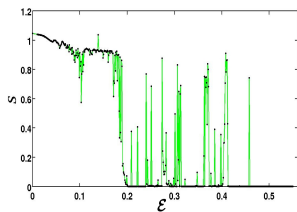
Caso Homogéneo:

$$\frac{dx_i}{dt_i} = y_i$$

$$\frac{dy_i}{dt_i} = x_i(1 - z_i) - by_i$$

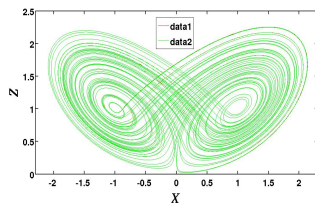
$$\frac{dz_i}{dt_i} = -a(z_i - x_i^2) + \epsilon(\bar{z} - z_i)$$

- donde $a = 0.375$ y $b = 0.81$.
- La cantidad \mathcal{S} de la sincronización en función de ϵ .



Con $\epsilon = 0.42$ (estado sincronizado)

proyección en el plano x-z para un elemento y para la media de los elementos.



Flujos Homogéneos con acoplamiento global no difusivo en una variable local.

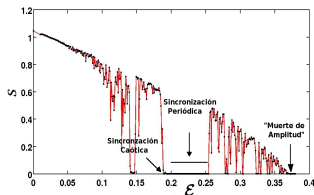
Caso Homogéneo:

$$\frac{dx_i}{dt_i} = y_i$$

$$\frac{dy_i}{dt_i} = x_i(1 - z_i) - by_i$$

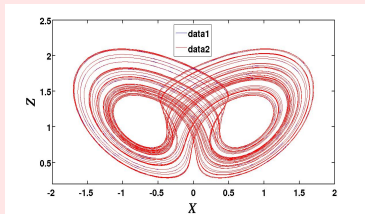
$$\frac{dz_i}{dt_i} = -a(z_i - x_i^2) + \epsilon \bar{z}$$

- considerando $i = 1 \dots N$ y $N = 10000$
- donde $a = 0.375$ y $b = 0.81$
- La cantidad S de la sincronización en función de ϵ



Con $\epsilon = 0.19$ estado sincronizado caóticamente

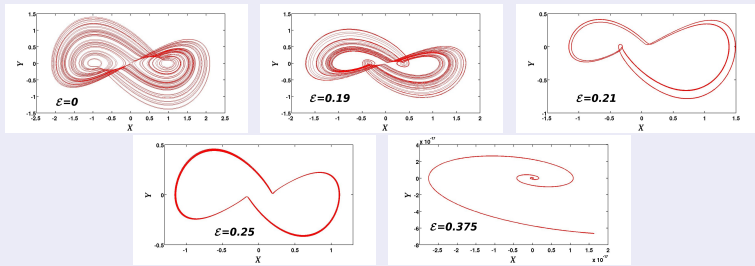
proyección en el plano x-z para un elemento del sistema y para la media de todos los elementos.



La órbita del estado sincronizado no coincide con la órbita de los elementos desacoplados.

Flujos Homogéneos con acoplamiento global no difusivo en una variable local: Colapso de amplitud

- Proyecciones en el plano x-y de un elemento del sistema para diferentes valores de ϵ .



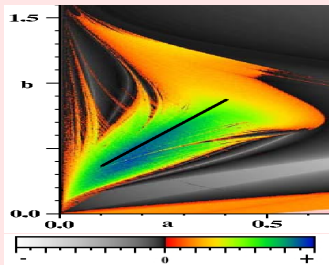
- El sistema desacoplado posee tres estados estacionarios $x = y = z = 0$ y $x = \pm 1, y = 0, z = 1$.
- El sistema acoplado de esta manera presenta dos estados estacionarios posibles:

$$x = 0, y = 0, z = k = \text{cte si } a = \epsilon$$
$$x = \sqrt{1 - \frac{\epsilon}{a}}, y = 0, z = 1 \quad \text{sólo si } \epsilon \leq a.$$

- El estado estacionario obtenido es $x = y = 0, z = k = 3$ y ocurre justamente cuando $\epsilon = a = 0.375$.

Flujos Heterogéneos: Distribución de los parámetros locales.

Tomamos los valores de parámetros a , b en una región del diagrama de fase del plano (a, b) donde existe caos robusto.



La pendiente $m = 1,67$ y el corte $b_0 = 0.2$.

Tomamos valores $a_i \in [0.1, 0.4]$ aleatorios y se calculamos los b_i con la ecuación de la recta.

Gráfico de los a_i y b_i calculados para verificar la recta.

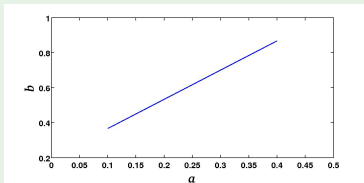
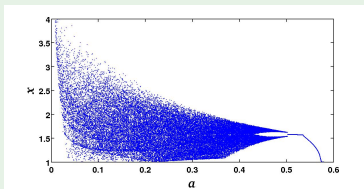


Diagrama de bifurcación de x en función de a_i para los b_i correspondientes a la recta $b_i = 1.67a_i + 0.2$.



Flujos heterogéneos con acoplamiento difusivo en todas las variables locales

Caso Heterogéneo:

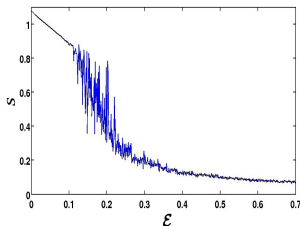
$$\frac{dx_i}{dt_i} = y_i + \epsilon(\bar{x} - x_i)$$

$$\frac{dy_i}{dt_i} = x_i(1 - z_i) - b_i y_i + \epsilon(\bar{y} - y_i)$$

$$\frac{dz_i}{dt_i} = -a_i(z_i - x_i^2) + \epsilon(\bar{z} - z_i)$$

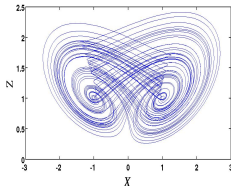
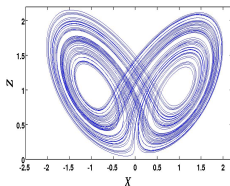
donde $a_i \in [0.1, 0.4]$ y $b_i = 1.67a_i + 0.2$

- La cantidad S de la sincronización en función de ϵ



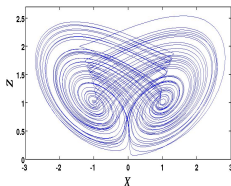
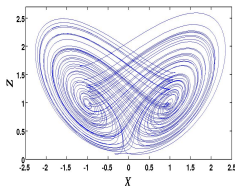
Con $\epsilon = 0$

proyección en el plano x-z para dos elementos del sistema.



Con $\epsilon = 0.49$.

proyección en el plano x-z para dos elementos del sistema.



Flujos Heterogéneos con acoplamiento global difusivo en una variable local.

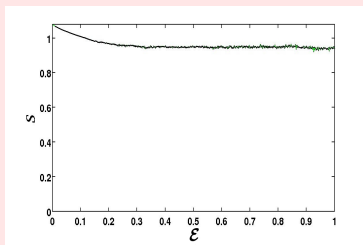
Caso Heterogéneo:

$$\frac{dx_i}{dt_i} = y_i$$

$$\frac{dy_i}{dt_i} = x_i(1 - z_i) - b_i y_i$$

$$\frac{dz_i}{dt_i} = -a_i(z_i - x_i^2) + \epsilon(\bar{z} - z_i)$$

- donde $a_i \in [0.1, 0.4]$ y $b_i = 1.67a_i + 0.2$.
- La cantidad S de la sincronización en función de ϵ .



- La sincronización no aparece fácilmente en este caso.

Flujos Heterogéneos con acoplamiento global no difusivo en una variable local.

Caso Heterogéneo:

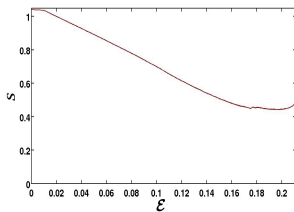
$$\frac{dx_i}{dt_i} = y_i$$

$$\frac{dy_i}{dt_i} = x_i(1 - z_i) - b_i y_i$$

$$\frac{dz_i}{dt_i} = -a_i(z_i - x_i^2) + \epsilon \bar{z}$$

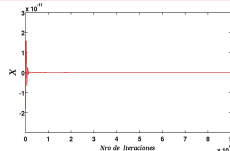
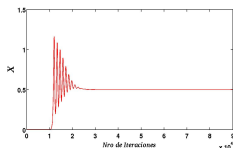
donde $a_i \in [0.1, 0.4]$ y $b_i = 1.67a_i + 0.2$

- La cantidad S de la sincronización en función de ϵ

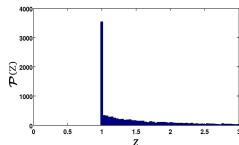
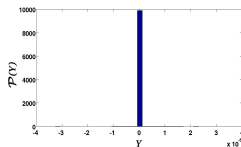
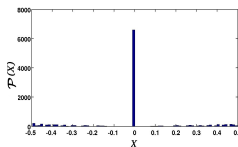


Con $\epsilon = 0.21$

Evolución temporal de la variable x para dos elementos del sistema.



Histograma de los estados de los elementos del sistema.



ACOPLAMIENTO	CASO HOMOGÉNEO	CASO HETEROGÉNEO
Difusivo en todas las variables locales	Sincronización caótica a partir de un ϵ crítico.	Tiende a la sincronización caótica.
Difusivo en una de las variables locales	Sincronización caótica para ciertos intervalos del parámetro ϵ .	No aparece fácilmente la sincronización.
No difusivo en una de las variables locales	Sincronización caótica, periódica y en un punto fijo (colapso de amplitud).	Tiende a la sincronización en un punto fijo.

- Al igual que ocurre con mapas discretos, los acoplamientos globales inducen sincronización en un sistema de flujos idénticos para ciertas intensidades del acoplamiento.
- **Para un acoplamiento global no difusivo en una variable encontramos el fenómeno de colapso de amplitud, en ausencia de retardo, considerando elementos idénticos.**
- A pesar de la heterogeneidad en los parámetros locales, siguen existiendo rangos del parámetro de acoplamiento donde el sistema tiende a la sincronización.
- **En el caso heterogéneo para un acoplamiento global no difusivo en una variable y en ausencia de retardo, nos encontramos ante el fenómeno de colapso de amplitud. Esta vez el sistema tiende a la sincronización en el punto fijo formando clusters.**
- Para ninguno de los casos estudiados hemos encontrado el surgimiento de comportamientos colectivos periódicos, en contraste con el caso correspondiente de mapas caóticos robustos acoplados.