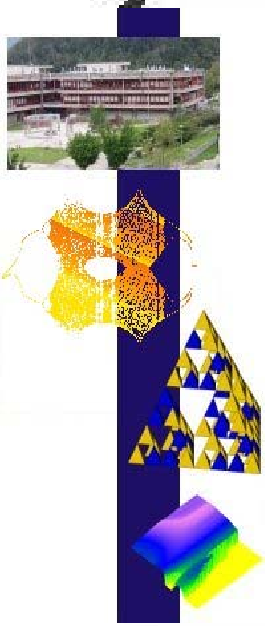
Universidad de Los Andes
Mérida - Venezuela

Postgrado en Física Fundamental
Area de Caos y Sistemas Complejos

Transiciones de sincronización en flujos caóticos



M.Sc. Gilberto Paredes

http://www.ciens.ula.ve/cff/caoticos

Tutor: Dr. Mario Cosenza

Condiciones para el Caos en sistemas continuos

- Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales tienen solución en términos funciones elementales (superposición).

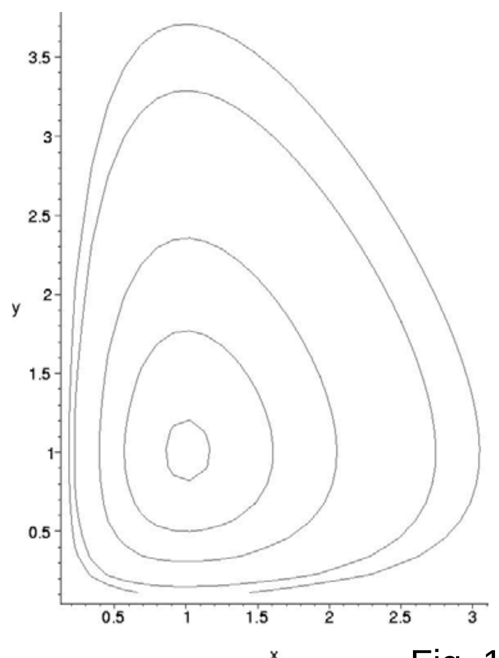
  - Teorema de Poincaré-Bendixson

Únicos estados asintóticos de sistemas dinámicos de 2 variables son:

$$\dot{x} = f(x, y)$$
$$\dot{y} = g(x, y)$$

Flujo: Trayectoria en el espacio de fases de un sistema dinámico

Ciclos límites



Puntos fijos

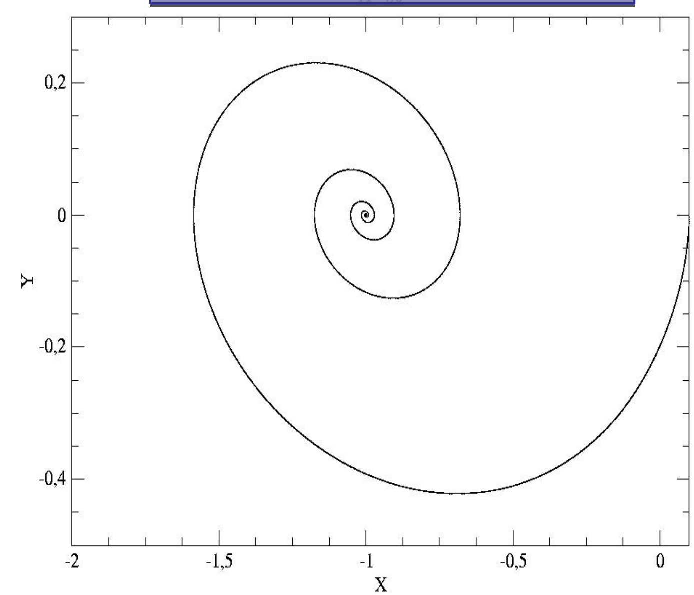


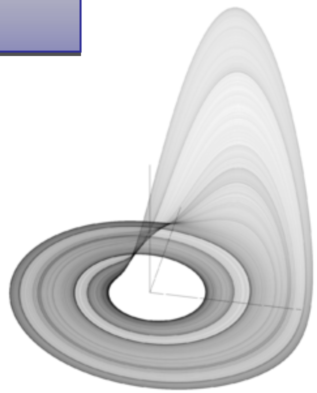
Fig. 1. Sistemas de dos variables.

Caos requiere al menos 3 variables y una no linealidad

Modelos de EDOS que presentan caos

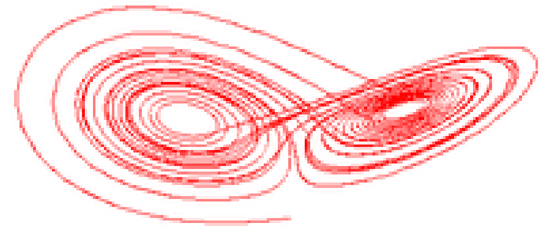
[(1)]Rössler

$$\dot{x} = -y - z$$
$$\dot{y} = x + ay$$
$$\dot{z} = b + z(x - c)$$



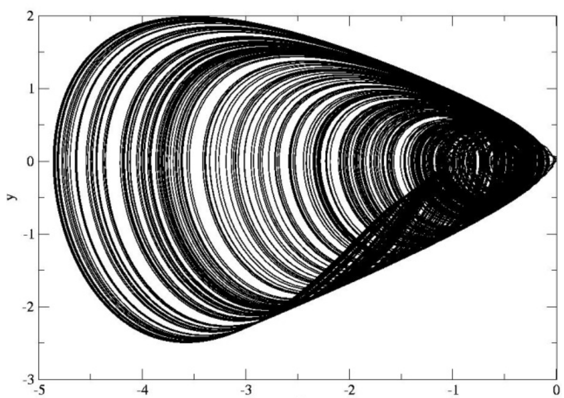
[(2)]Lorenz

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y} = (r - z)x - y$$
$$\dot{z} = xy - bz$$

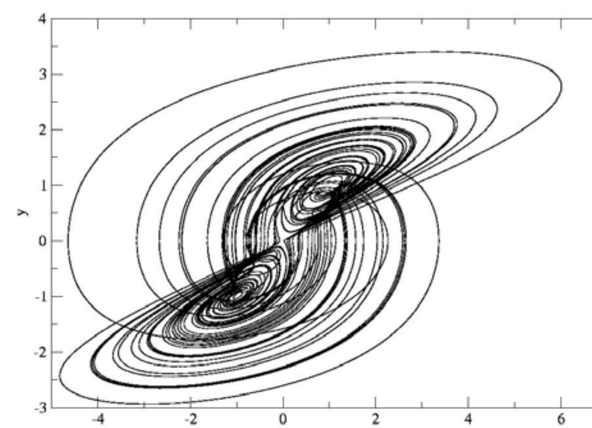


[(3)]Sprott

$$\dot{x} = -y$$
$$\dot{y} = x + z$$
$$\dot{z} = xz + 3y^2$$



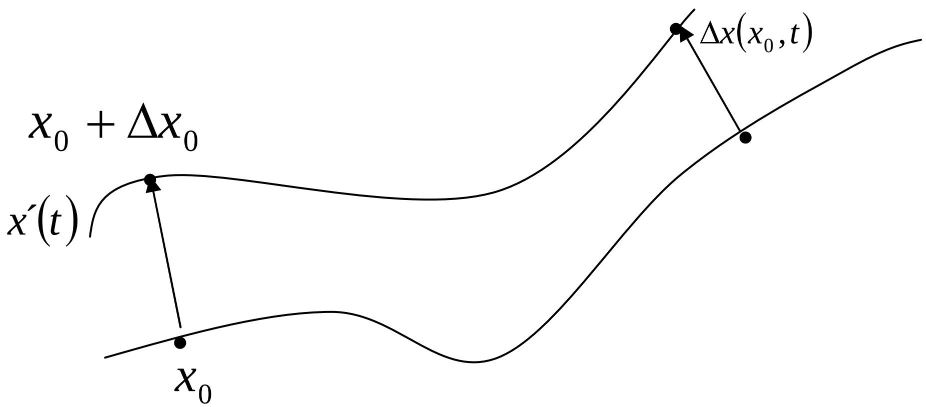
$$\dot{x} = yz$$
$$\dot{y} = x - y$$
$$\dot{z} = 1 - xy$$



[(1)]O. E. R¨ossler. *Phys. Lett.* A, 57(5):397, 1976.
[(2)]E. N. Lorenz. *J. Atmos. Sci.*, 20:130–141, 1963.
[(3)]J.C Sprott. Phys. Rev. E **50**, 2 (1994)

Exponentes de Lyapunov

(1)Exponente de Lyapunov



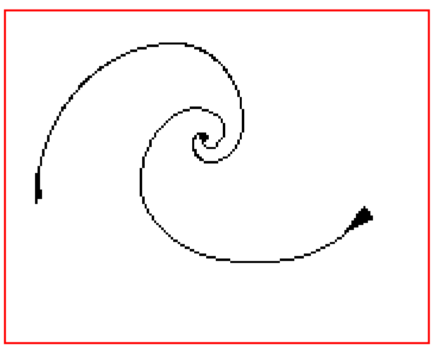
$$\lambda = \underset{t\to\infty}{Lim}\ \underset{\Delta x_0\to 0}{Lim}\ \frac{1}{t}\ln\left(\frac{\Delta x(x_0,t)}{\Delta x_0}\right)$$

Espacio de fase n dimensional

$$\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots..\lambda_n\}$$

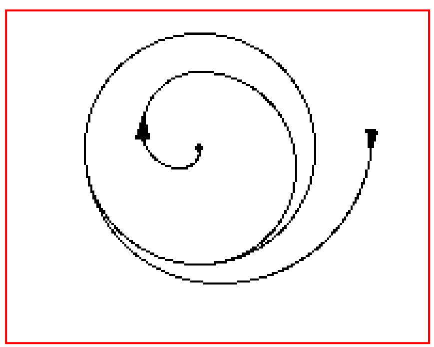
Tipos de Orbitas

$x(t)$



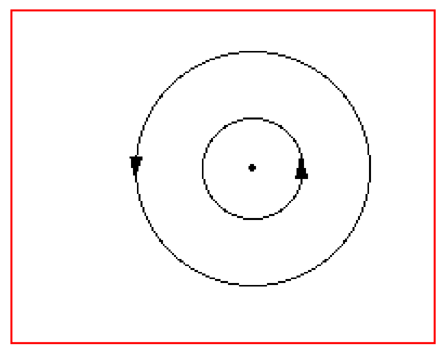
Disipativo
Atracción a un punto fijo

$\lambda < 0$



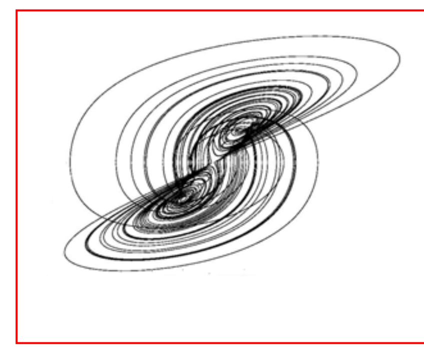
Disipativo
Atracción a una orbita

$\lambda < 0$



Conservativo
Neutral

$\lambda = 0$

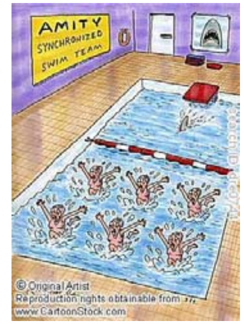


Caótico
inestable

$\lambda > 0$

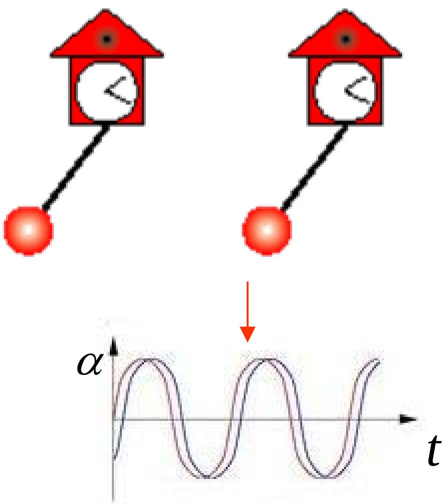
Sincronización

Ajuste de ritmos debido a su interacción.

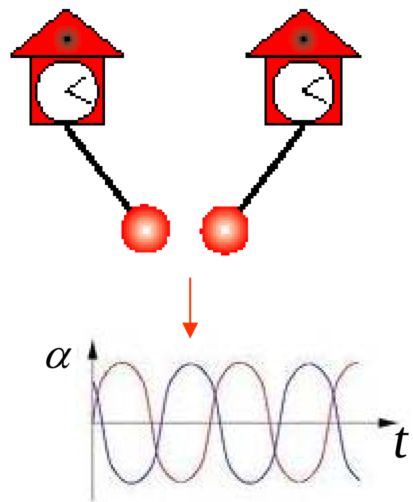


•Algunos estados de sincronización

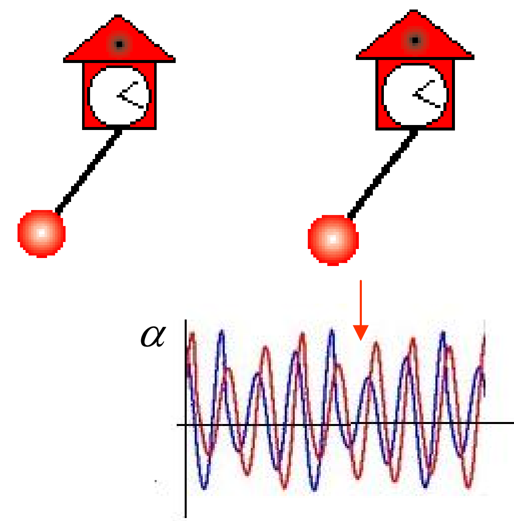
• En fase



• Antifase



• Sin sincronía



•Sincronización en sistemas continuos

$$\dot{x}_n = f(x_n)$$

$$x_1(t) = x_2(t) = \ldots\ldots = x_n(t) = x(t)$$

Acoplamiento Maestro-Esclavo[1]

Las diferencias

$$\Delta w = v - V$$

$$v \;\; \text{y} \, V \; \Delta w \rightarrow 0 \; t \rightarrow \infty$$

$$\dot{u} = g(u,v) \quad \dot{v} = h(u,v) \qquad (1)$$

$$\dot{V} = g(u(t),V)$$

$V(t)$ converge $v(t)$ $t \rightarrow \infty$

Fig.1. Los atractores para el sistema forzado de Rossler y el Sistema respuesta $(x'-z')$ y la variable forzadora $y(t)$.

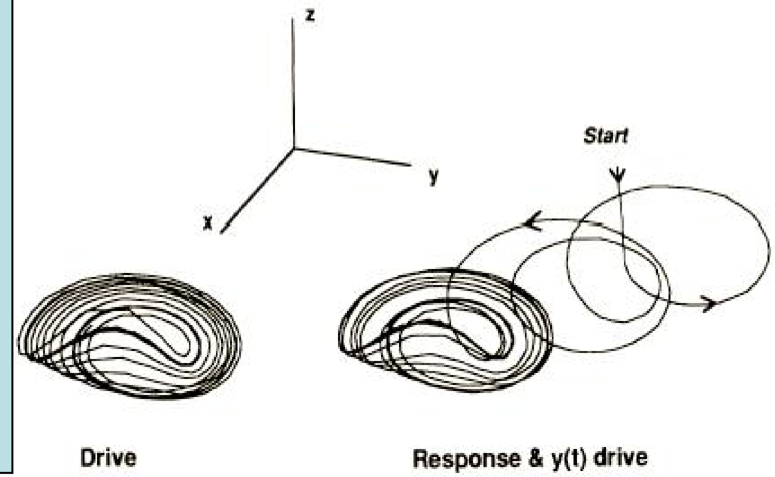
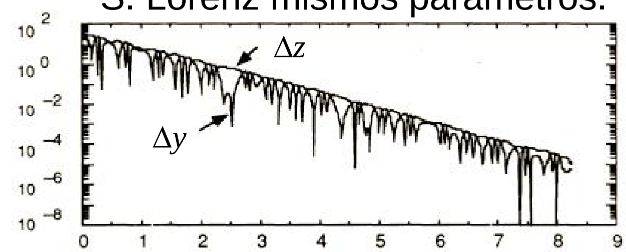
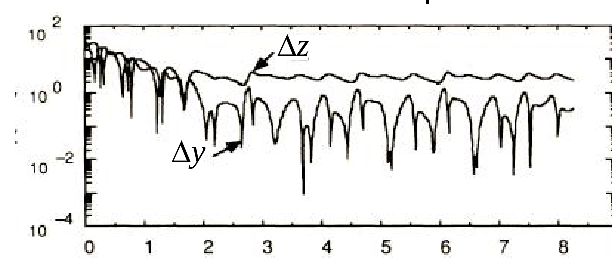


Fig.2. las diferencias $(y'-y)$ y $(z'-z')$ entre las variables Respuesta y su contraparte forzadora para el sistema de Lorenz. (a) Cuando los parámetros son los mismos. (b) parámetros distintos.

S. Lorenz mismos parámetros.



S. Lorenz diferentes parámetros.



Sistema	Drive	Respuesta	Sub exp. De Lyapunov
Rossler	x	(x, y)	$(+0.2,-8.89)$
	y	(x, z)	$(-0.056,-8.81)$
	z	(x, y)	$(+0.1,+0.1)$
Lorenz	x	(y, z)	$(-1.81,-1.86)$
	y	(x, z)	$(-2.67,-9.99)$
	z	(x, y)	$(+0.0108,-11.01)$

[1]Pecora and Carrol. Phys. Rev, L. 64 (8): 1995.

Acoplamiento con el ambiente[1]

El medio ambiente

[1] G. Katriel, Physica D. 237, 2933 (2008)

La función de acoplamiento tiene una dinámica de modulación sobre los sistemas dinámicos.

Modelo matemático

$$\dot{x}_k = f\left(x_k, y\right) \qquad 1 \le k \le n$$

$$\dot{y} = g\left(y\right) + \frac{\beta}{n}\sum_{j=1}^{n} h\left(x_j, y\right)$$

$$\beta = \frac{nV_{cell}}{V_{ext}}$$

V_{cell} Volumen celda individual

V_{ext} Volumen del ambiente externo

Sistemas biológicos[2]

[2] A. Goldbeter, ´Biochemical Oscillations and Cellular Rhythms´, Cambridge U. Press (Cambridge), 1996

x_k Vector cuyas componentes son las concentraciones (moles/v) de varias especies bioquímicas

y Vector de concentraciones de varias especies bioquímicas en ele exterior de las células

En general, tales casos ocurren debido a la interacción con el medio común de los sistemas dinámicos. Nos referimos a tales sistemas como un acoplamiento través del Medio común o environment.

Sistemas caóticos acoplados a un ambiente común [1]

Acoplamiento a través del ambiente

Rössler

$$\dot{x}_{i1} = -x_{i2} - x_{i3} + \beta_i y$$

$$\dot{x}_{i2} = -x_{i1} + a x_{i2}$$

$$\dot{x}_{i3} = b + x_{i3}\left(x_{i1} - c\right)$$

$$a = b = 0.1, \; c = 18$$

$$\dot{y} = -ky - \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1,2} \beta_i x_{i1}$$

$(\beta_1, \beta_2) = (1,1)$ AS $(\beta_1, \beta_2) = (1,-1)$ PS

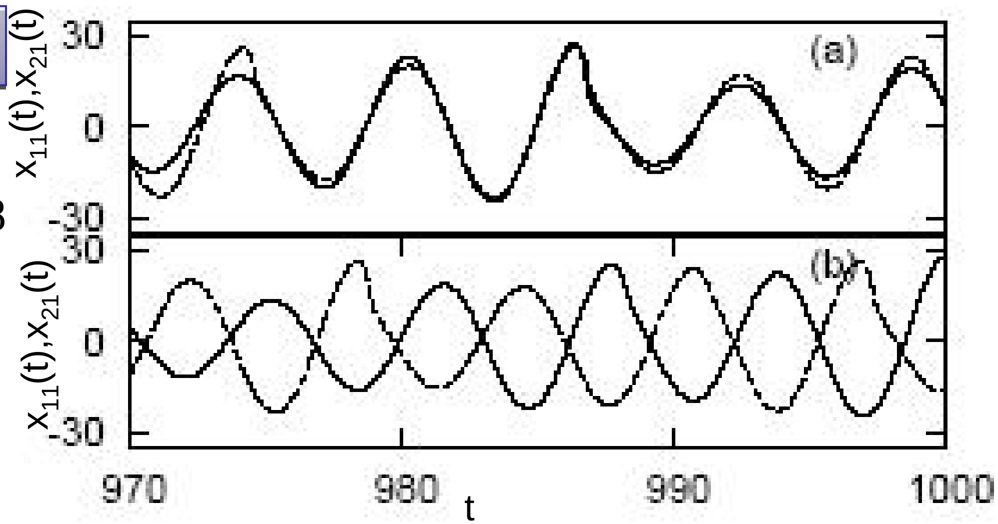


Fig. 1. Series de tiempo de la primera variable x_{i1} de dos osciladores de Rossler acoplados con el ambiente. (a) Sincronización en fase $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.2, \; \beta_1 = -\beta_2 = 1)$ (b) Sincronización en antifase $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.2, \; \beta_1 = \beta_2 = 1$.

Exponentes de Lyapunov

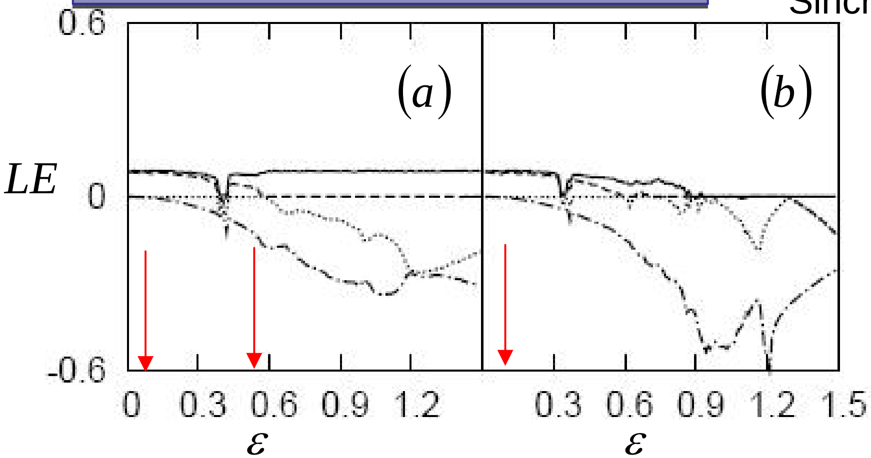


Fig.2. Los cuatro exponente mas grades de Lyapunov (LE) En función de la intensidad de acoplamiento ε de los dos sistemas de Rössler acoplados através de un ambiente.

[1] V. Resmi et al. Phys. Rev. E81. (2010)

Modelos

Acoplamiento a través del ambiente

Lorenz

$$\dot{x}_{i1} = \sigma\left(x_{i2} - x_{i1}\right) + \varepsilon_1 \beta_i y$$

$$\dot{x}_{i2} = \left(r - x_{i3}\right) x_{i1} - x_{i2}$$

$$\dot{x}_{i3} = x_{i1} x_{i2} - b x_{i3}$$

$$\sigma = 10, r = 28, b = {}^{8}\!/_{3}$$

$$\dot{y} = -ky - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1,2} \beta_i x_{i1}$$

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_i = 0 \quad \text{para } i \neq 1$$

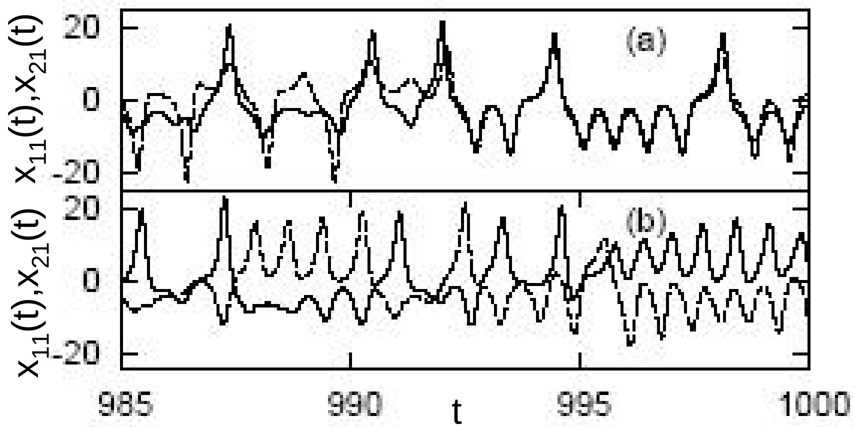


Fig. 2. Series de tiempo de la primera variable x_{i1} de dos osciladores de Lorenz acoplados con el ambiente. (a) Sincronización en fase $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 9.0, \ \beta_1 = -\beta_2 = 1)$ (b) Sincronización en antifase $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 8.0, \ \beta_1 = \beta_2 = 1$.

Exponentes de Lyapunov

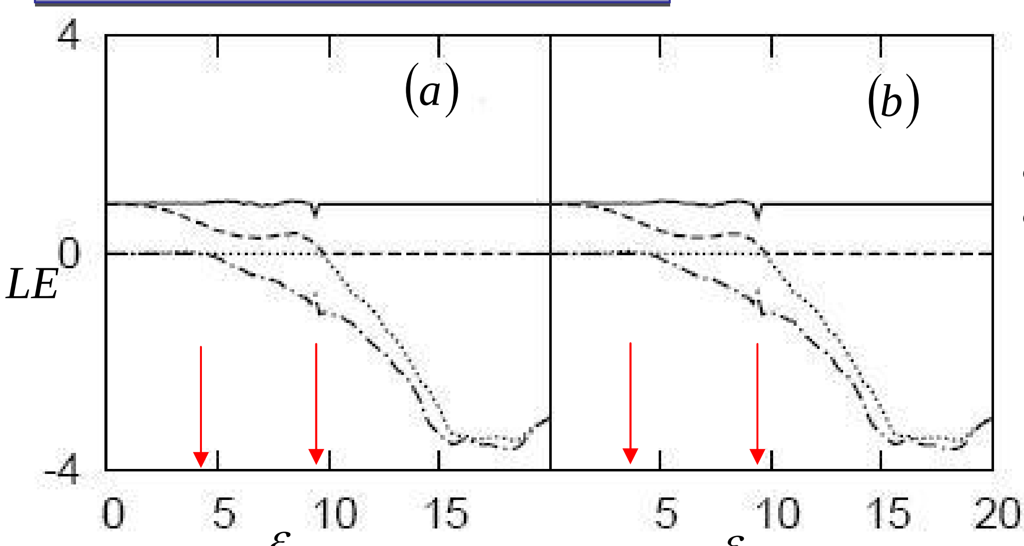


Fig.2. Los cuatro exponente mas grades de Lyapunov (LE) En función de la intensidad de acoplamiento ε de los dos sistemas de Lorenz acoplados através de un ambiente.

Modelos

Modelo neuronal Hindmarsh-Rose

$$\dot{x}_{1,2} = y_{1,2} + a x_{1,2}^2 - x_{1,2}^3 - z_{1,2} + I + \varepsilon_1 \beta_{1,2} w$$

$$\dot{y}_{1,2} = 1 - b x_{1,2}^2 - y_{1,2}$$

$$\dot{z}_{1,2} = -r z_{1,2} + sr\left(x_{1,2} + c\right)$$

$$\dot{w} = -kw - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1,2} \beta_i x_{i1}$$

$$a = 3, b = 5, r = 0.005, s = 4, c = 1.6, I = 3.05$$

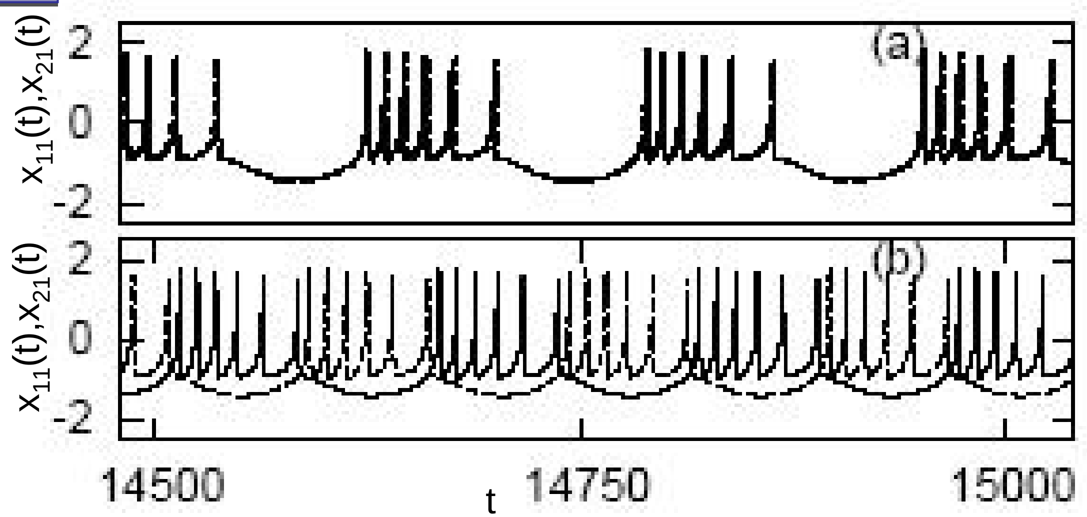


Fig. 1. Series de tiempo de la primera variable x_{i1} de dos osciladores de Hindmarsh Rose acoplados con el ambiente. (a) Sincronización en fase $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.4,\ \beta_1 = -\beta_2 = 1)$ (b) Sincronización en antifase $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.4,\ \beta_1 = \beta_2 = 1)$.

Van der Pol

$$\ddot{v}_k + \left(v_k^2 - 1\right)\dot{v}_k + v_k = y, \quad 1 \le k \le 3$$

$$\dot{y} = -y + \frac{\beta}{3}\left(v_1 + v_2 + v_3\right).$$

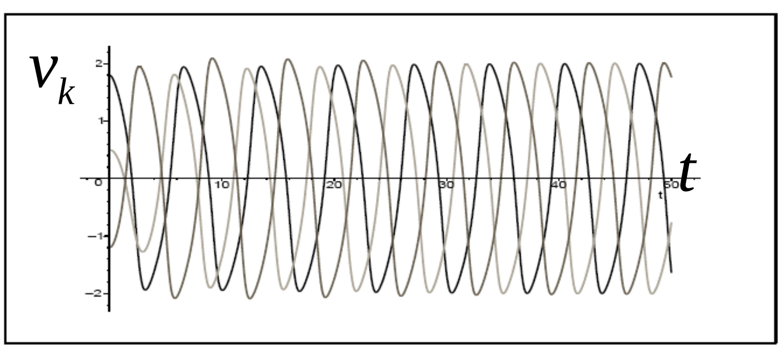


Fig2. $v_k(t)$ vs. t para $\beta = -0.5$

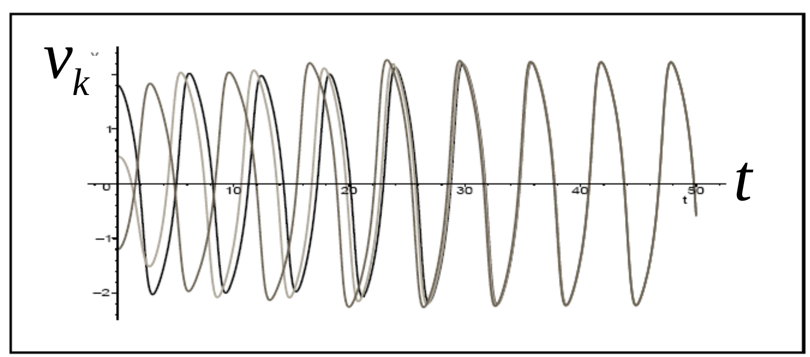
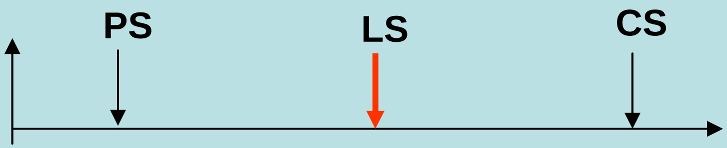


Fig3. $v_k(t)$ vs. t para $\beta = 0.5$

Simulación numérica LS[1]

(1)Sincronización con retardo



Si uno de ellos es desplazado en el tiempo

$$x_1(t) \approx x_2(t-\tau)$$

Caracterizar LS

$$S^2(\tau) = \frac{\left\langle \left[x_2(t+\tau) - x_1(t)\right]^2 \right\rangle}{\left[\left\langle x_1^2(t)\right\rangle \left\langle x_2^2(t)\right\rangle\right]^{1/2}}$$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow S(\tau) \approx 1 \;\; \forall \tau$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \sigma = 0 \text{ para } \tau = 0$$ SC

(1) M.G. Rosenblum et al. Phys. Rev. Lett 78. (1997)

Sistema de Rössler

$$a = 0.165,\; c = 10,\; f = 0.2$$

$$\dot{x}_{1,2} = -\omega_{1,2} y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2})$$

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \Delta$$

$$\dot{y}_{1,2} = \omega_{1,2} x_{1,2} + a y_{1,2}$$

$$\omega_0 = 0.97 \quad \Delta = 0.02$$

$$\dot{z}_{1,2} = f + z_{1,2}(x_{1,2} - c)$$

D $\begin{cases} 1: \varepsilon = 0.01 \\ 2: \varepsilon = 0.015 \end{cases}$

I $\begin{cases} 3: \varepsilon = 0.05 \\ 4: \varepsilon = 0.075 \end{cases}$

F $\begin{cases} 5: \varepsilon = 0.15 \\ 6: \varepsilon = 0.2 \end{cases}$

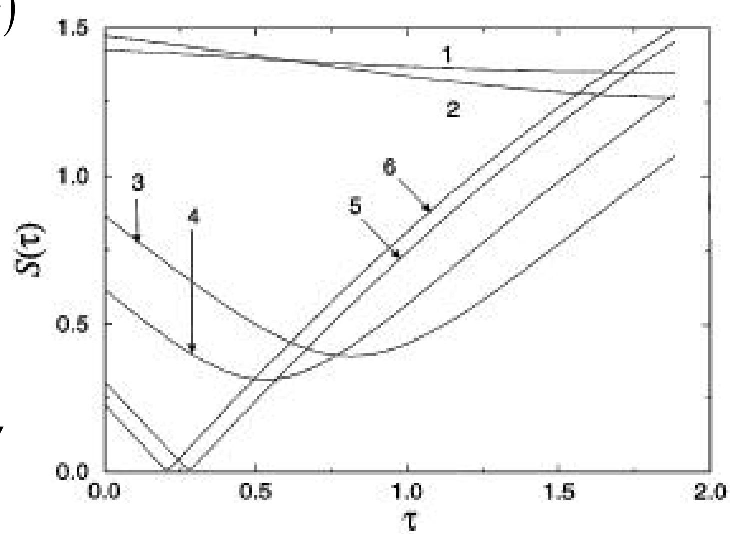


Fig. 1. Función de similaridad $S(\tau)$ para diferentes valores de la intensidad de acoplamiento. ε

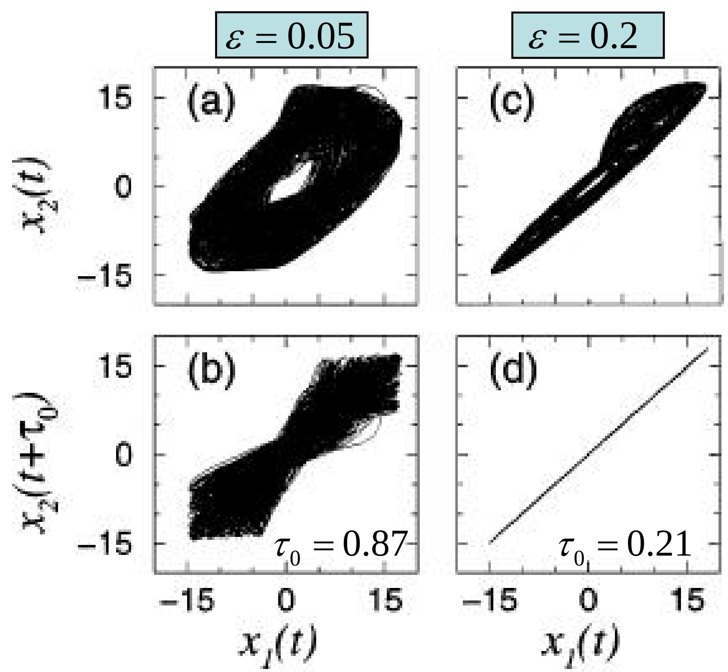


Fig. 2. Régimen de sincronización en fase y retardo.

Transition entre los diferentes tipos de Sinc.

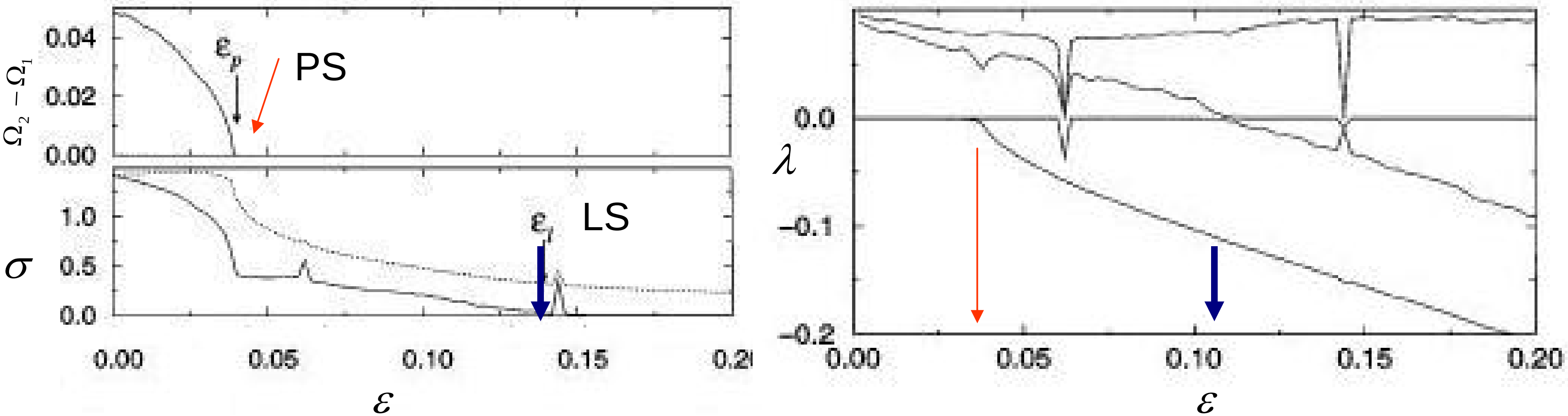


Fig. 1. Diferencia de frecuencias $\Omega_1 - \Omega_2$, mínimo de la función de similaridad σ, y los cuatro exponentes mas grandes de Lyapunov λ de los dos sistemas acoplados de Rossler vs el acoplamiento ε

LS aparece como una coincidencia del corrimiento en el tiempo de los dos estados del sistema.

$$x_1\left(t+\tau_0\right) = x_2\left(t\right)$$

Colapso de Amplitud. (AD)[1]

Osciladores de Landau-Stuart

$$\dot{z} = \left(1 + i\omega - |z|^2\right)z$$

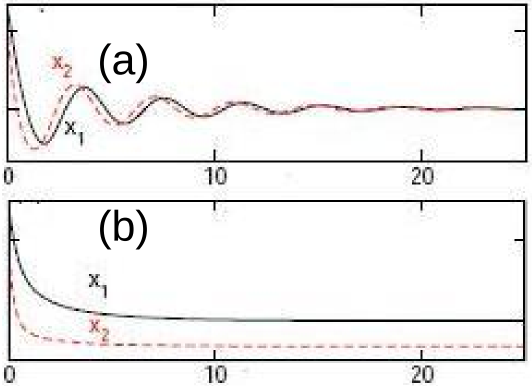


Fig. 1 Componentes x de los dos osciladores mostrando AD. (a) con oscilación $\varepsilon = 1.25$ y (b) decrecimiento de la amplitud en $\varepsilon = 2.75$.

Osciladores de Lorenz

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= 10\left(y_i(t) - x_i(t)\right) \\ \dot{y}_i(t) &= x_i(t)z_i(t) - y_i(t) + \varepsilon\left(x_j(t) - y_i(t)\right) \quad i,j = 1,2,\ i \neq j \\ \dot{z}_i(t) &= x_i(t)y_i(t) - \tfrac{8}{3} z_i(t) \end{aligned}$$

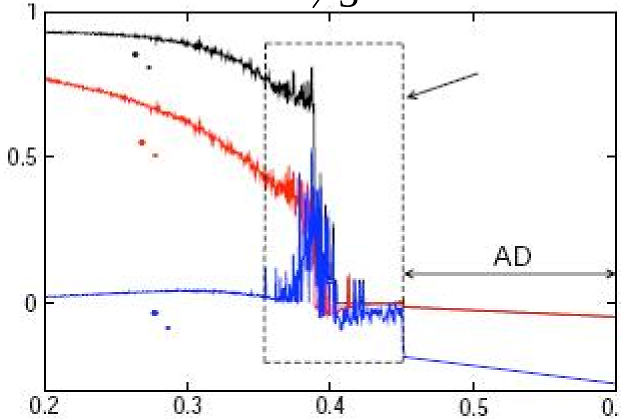


Fig.2 Los tres exponentes de Lyapunov mas grandes en función de ε para los osciladores (1).

Recientemente 2011

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= -y_i(t) - z_i(t) \\ \dot{y}_i(t) &= x_i(t) + (a - \varepsilon)y_i(t) + \varepsilon\bar{y}(t - \tau) \\ \dot{z}_i(t) &= b + z_i(t)\left[x_i(t) - c\right] \end{aligned} \qquad \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i(t)$$

$$a = 0.25 \quad b = 0.56 \quad c = 7.74$$

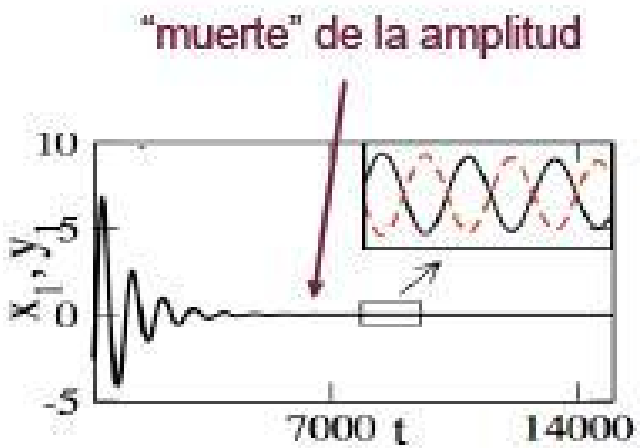


Fig. 3. Series de tiempo de x,y de (2).

(1) **Amplitude death in coupled chaotic oscillators**
Awadhesh Prasad. Phys. Rev. E72. (2005)

Conclusiones

•La sincronización en sistema maestro esclavo es lograda solo si los sub-exponentes de lyapunov del subsistema esclavo son negativos

•Se encuentra que dos sistemas caóticos pueden sincronizarse a través de un ambiente común. El mecanismo de acoplamiento es general y puede ser ajustado para obtener sincronización (Completa, en fase, antifase).

•La transición entre los diferentes tipos de sincronización están relacionados a cambios en el espectro de Lyapunov.

•**Para acoplamientos grandes, se observa la sincronización con retardo.**

•El retardo induce AD en osciladores globalmente acoplados