



Universidad de Los Andes
Mérida - Venezuela

Colapso de amplitud inducido por retardo en sistemas caóticos acoplados

Victor Rodríguez
Postgrado en Física Fundamental

Tutor: Mario Cosenza

<http://www.ciens.ula.ve/cff/caoticos>

Centro de Física Fundamental
Área de Caos y Sistemas Complejos



Introducción

- **Muchos modelos de fenómenos reales son formulados en términos de osciladores acoplados.**

El colapso de amplitud “Amplitude Death” en un sistema autónomo consiste en el cese de las oscilaciones como resultado de las interacciones.

Casos de desórdenes neuronales

D. J. Selkoe, *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **924**, 17 (2000).
B. Caughey, P.T. Lansbury Jr., *Annu. Rev. Neurosci.* **26**, 267 (2003).

Modelo de corrosión electroquímica

CHAOS **20**, 023126 (2010)
Suppression and generation of rhythms in conjugately coupled nonlinear systems
Moumita Dasgupta M. Rivera P. Parmananda

Sistemas de osciladores acoplados con un campo retroalimentado del mismo sistema

En la naturaleza, la interacción entre elementos de un sistema se realiza a velocidades finita, lo que implica que la transferencia de información no se realiza de forma instantánea.

El retardo puede inducir muerte en osciladores acoplados

Time Delay Induced Death in Coupled Limit Cycle Oscillators
D. V. Ramana Reddy,* A. Sen, and G. L. Johnston†
Institute for Plasma Research, Bhat, Gandhinagar 382428, India
(Received 19 December 1997)

Nuestros objetivos:

- Estudiar un sistema de **N** osciladores tipo **Rossler** acoplados con retardo.
- Implementar un método para resolver ecuaciones diferenciales en la plataforma ISyS.
- Caracterizar el efecto del **acoplamiento** y del **retardo**, en la emergencia de **comportamientos colectivos** y en el **colapso de las amplitudes** del sistema

Modelos neuronales.

A. L. Hodgkin and A. F. Huxley, *J. Physiol. (London)* **117**, 500 (1952).

En osciladores acoplados en una red small world.

PHYSICAL REVIEW E **68**, 055103(R) (2003)
Oscillator death on small-world networks
Zhonghuai Hou and Houwen Xin†

General mechanism for death in coupled systems
V. Resmi* and G. Ambika†
Indian Institute of Science Education and Research, Pune - 411021, India
R. E. Amritkar†
Physical Research Laboratory, Ahmedabad - 380009, India

Sistemas caóticos acoplados con retardo

Caso general de dos sistemas caóticos acoplados



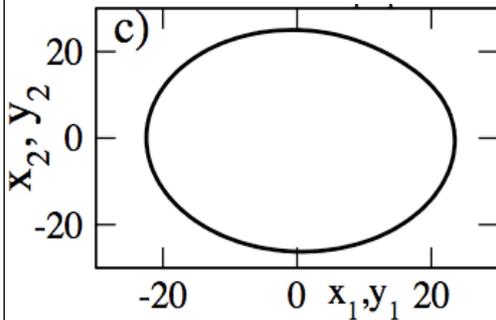
$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}_x(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_x(\mathbf{y}(t - \tau), \mathbf{x}(t)) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}_y(\mathbf{y}) + \mathbf{h}_y(\mathbf{x}(t - \tau), \mathbf{y}(t))\end{aligned}$$

Ejemplo: Cuando la dinámica de cada oscilador es la misma (Rossler), y la influencia del uno sobre el otra es reciproca.

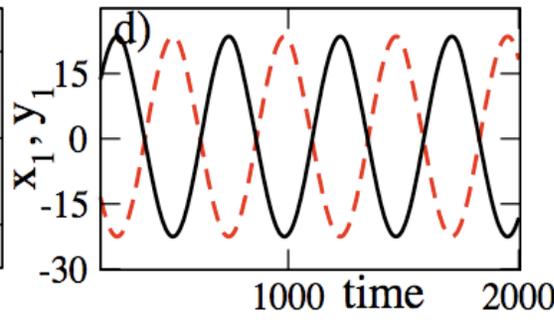
$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= -x_2 - x_3 \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_1 + ax_2 + \epsilon[y_2(t - \tau) - x_2(t)] \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= b + x_3(x_1 - c_1) \\ \frac{dy_1(t)}{dt} &= -y_2 - y_3 \\ \frac{dy_2(t)}{dt} &= y_1 + ay_2 + \epsilon[x_2(t - \tau) - y_2(t)] \\ \frac{dy_3(t)}{dt} &= b + y_3(y_1 - c_2)\end{aligned}$$

Retardo

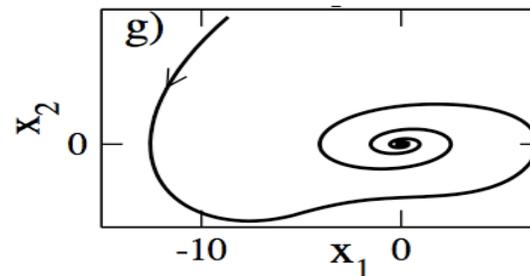
Atractor con $\tau = 0.6$



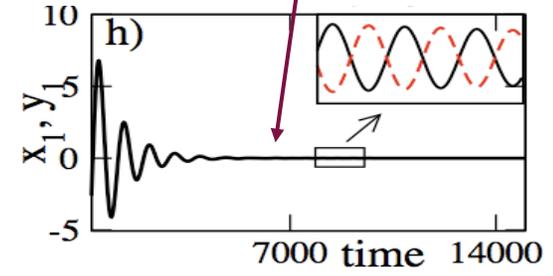
Serie de tiempo



Atractor con $\tau = 2$



“muerte” de la amplitud



Serie de tiempo

Amplitude death in coupled chaotic oscillators

Awadhesh Prasad
Department of Physics and Astrophysics
University of Delhi, Delhi 110 007, India

2005

Nuestro modelo

El sistema de Rossler viene expresado por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -y(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) + ay(t) \\ \dot{z}(t) &= b + z(t)[x(t) - c]\end{aligned}$$

Este sistema presenta caos robusto para $a = b = 0.1$; $c = 14$.

O. Rössler, Phys. Lett. **57A**, 397 (1976)

Consideremos dos tipos de topología para la interacción de los osciladores

Una red con acoplamiento global

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= -y_i(t) - z_i(t) \\ \dot{y}_i(t) &= x_i(t) + (a - \epsilon)y_i(t) + \epsilon\bar{y}(t - \tau) \\ \dot{z}_i(t) &= b + z_i(t)[x_i(t) - c]\end{aligned}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(t)$$

Retardo

Constante de acoplamiento

Indice que representa el i-ésimo oscilador

$$i = 1 \dots N$$

Una anillo unidimensional con acoplamiento de primeros vecinos

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= -y_i(t) - z_i(t) \\ \dot{y}_i(t) &= x_i(t) + (a - \epsilon)y_i(t) + \frac{\epsilon}{|2|} [y_{i+1}(t - \tau) + y_{i-1}(t - \tau)] \\ \dot{z}_i(t) &= b + z_i(t)[x_i(t) - c]\end{aligned}$$

Cada uno de los vecinos del i-ésimo oscilador

Para caracterizar el comportamiento colectivo se definieron dos cantidades macroscópicas

Mínima unidad de tiempo del sistema

La actividad del sistema

$$A(t) = \frac{1}{T - t_r} \sum_{t=t_r}^T \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i(t) - y_i(t - h)| \right]$$

Stratified economic exchange on networks

J. L. Herrera, M. G. Cosenza, K. Tucci

Physica A 390 (2011) 1453-1457

Trasiente

Y la desviación estándar para cuantificar la sincronización del sistema

$$\bar{\sigma}_y = \frac{1}{T - t_r} \sum_{t=t_r}^T \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i(t) - \bar{y})^2}$$

Método Numérico

Para resolver el sistema de ecuaciones planteado, utilizamos una adaptación del método de Runge-Kutta.

Considérese la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(t, y(t), y(t - \tau)), \quad t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t) &= \phi(t), \quad t < t_0 \end{aligned}$$

Numerical Methods for Delay Differential Equations

Alfredo Bellen and Marino Zennaro
Dipartimento di Scienze Matematiche
Universita di Trieste, Italy 2005

La condición inicial del problema viene expresada por una función continua

Cuando el paso de integración "h" es constante, es decir,

$h = \frac{\tau}{m}$ $m \geq 1$ con m entero, la relación de recurrencia viene dada por

siendo

$$t_{n+1}^j - t_{n+1-m}^j = \tau \rightarrow t_{n+1-m}^j = t_{n+1}^j - \tau = t_{n+1}^j - c_j h,$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^4 b_i f(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i, Y_{n+1-m}^i),$$

$$c_j = \sum_{i=1}^4 a_{ij} \quad j = 1, \dots, 4$$

$$Y_{n+1}^i = y_n + h \sum_{i=1}^4 a_{ij} (t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i, Y_{n+1-m}^i)$$

realizando un cambio en la notación

$$k_{n+1}^i = f(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i, Y_{n+1-m}^i), \quad i = 1, \dots, 4$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^4 b_i K_{n+1}^i$$

Para integrar nuestro sistema de ecuaciones tenemos que tomar en cuenta ciertos detalles

- **Tenemos un sistema compuesto de N osciladores acoplados.**
- **Cada oscilador está definido por tres ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas con retardo.**
- **Habrà que integrar un sistema de 3N ecuaciones diferenciales simultáneamente.**
- **Para ello se tendrá que calcular los respectivos coeficientes K; para cada una de las variables, para cada uno de los osciladores, en cada instante de tiempo "n" y en cada etapa de la recurrencia "i" simultáneamente.**

Implementación Numérica

Implementamos en la plataforma ISyS* el método para resolver el sistema planteado

De este modo podemos distinguir dos casos límites, que son los que estudiamos

Definimos las siguientes funciones

$$e(y, z) = -y(t) - z(t),$$

$$f(x, y, d, |\nu_i|) = x(t) + (a - \epsilon)y(t) + \frac{\epsilon}{|\nu_i|}d, \quad \text{donde} \quad d = \sum_{j=1}^{|\nu_i|} y_j(t - \tau),$$

$$g(x, z) = b + z(t)[x(t) - c].$$

Cardinalidad del subconjunto de vecinos del elemento "i"

acoplamiento local

$$|\nu_i| = 2 \quad \forall i,$$

acoplamiento global

$$|\nu_i| = N \quad \forall i.$$

Paso de integración constante.

Con esto podemos plantear la siguiente relación de recurrencia para nuestro sistema

$$x_i(t+h) = x_i(t) + \frac{1}{6}(k^1 x_i + 2k^2 x_i + 2k^3 x_i + k^4 x_i),$$

$$y_i(t+h) = y_i(t) + \frac{1}{6}(k^1 y_i + 2k^2 y_i + 2k^3 y_i + k^4 y_i),$$

$$z_i(t+h) = z_i(t) + \frac{1}{6}(k^1 z_i + 2k^2 z_i + 2k^3 z_i + k^4 z_i).$$

$$k^1 x_i = he(y, z),$$

$$\text{donde} \quad k^1 y_i = hf(x, y, d, |\nu_i|),$$

$$k^1 z_i = hg(x, z).$$

$$k^2 x_i = he\left(y + \frac{1}{2}k^1 x_i, z + \frac{1}{2}k^1 z_i\right),$$

$$k^2 y_i = hf\left(x + \frac{1}{2}k^1 x_i, y + \frac{1}{2}k^1 y_i, d + \frac{1}{2}k^1 y_i, |\nu_i|\right),$$

$$k^2 z_i = hg\left(x + \frac{1}{2}k^1 x_i, z + \frac{1}{2}k^1 z_i\right).$$

$$k^3 x_i = he\left(y + \frac{1}{2}k^2 x_i, z + \frac{1}{2}k^2 z_i\right),$$

$$k^3 y_i = hf\left(x + \frac{1}{2}k^2 x_i, y + \frac{1}{2}k^2 y_i, d + \frac{1}{2}k^2 y_i, |\nu_i|\right),$$

$$k^3 z_i = hg\left(x + \frac{1}{2}k^2 x_i, z + \frac{1}{2}k^2 z_i\right).$$

$$k^4 x_i = he(y + k^3 x_i, z + k^3 z_i),$$

$$k^4 y_i = hf(x + k^3 x_i, y + k^3 y_i, d + k^3 y_i, |\nu_i|),$$

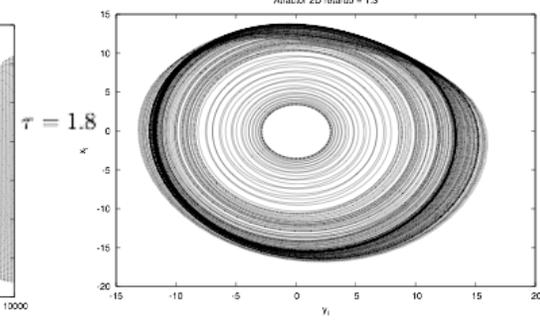
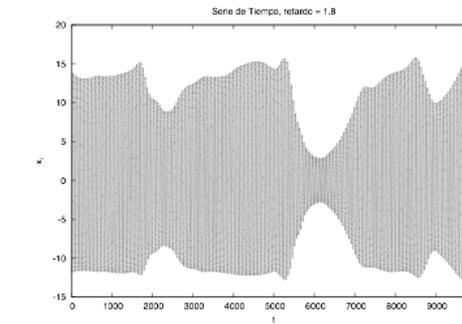
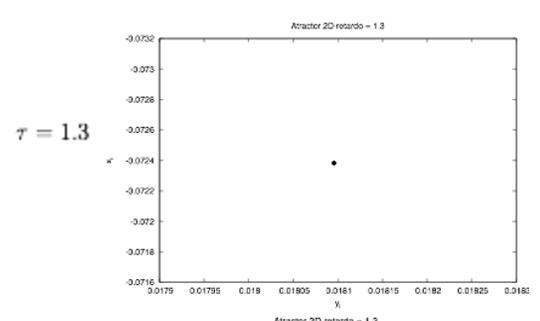
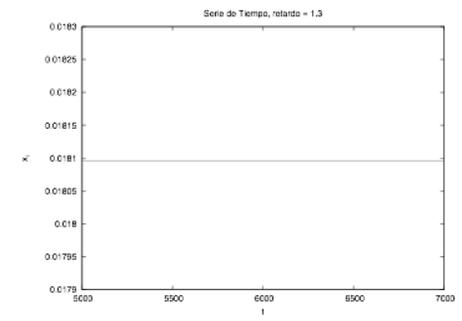
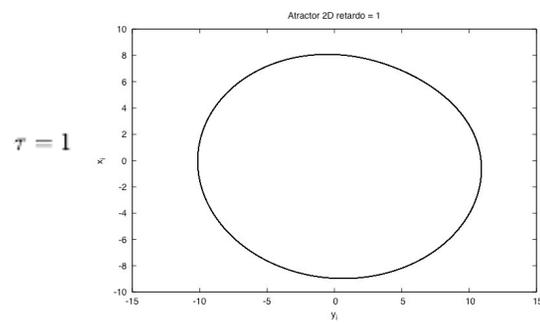
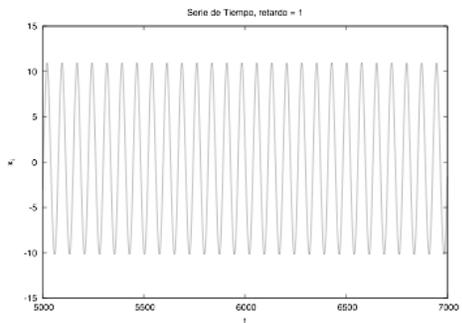
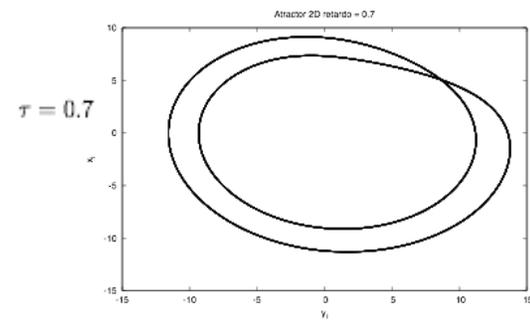
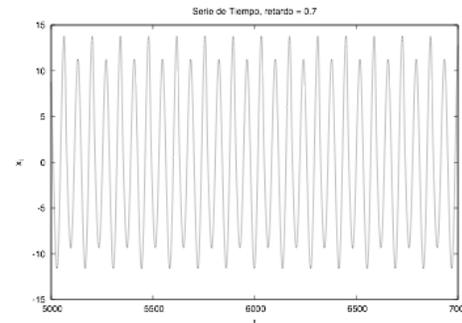
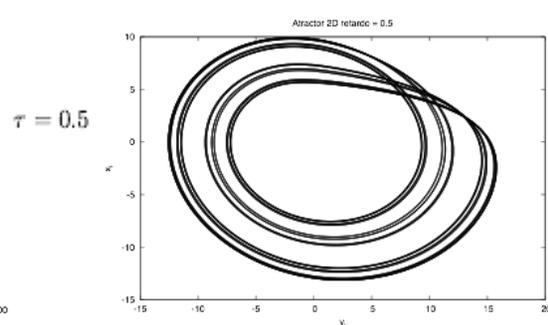
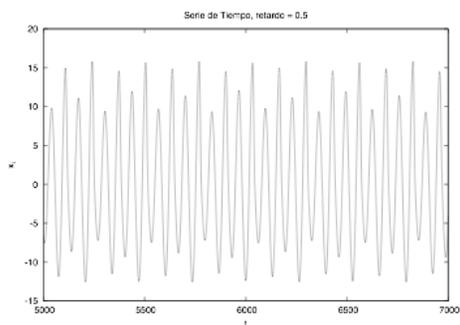
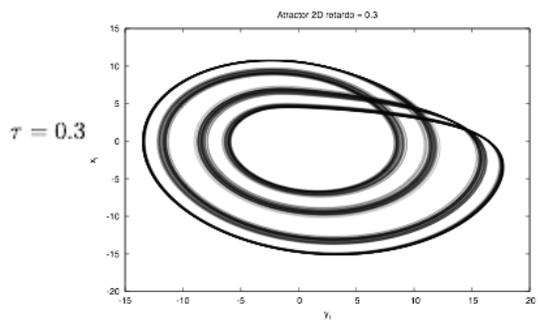
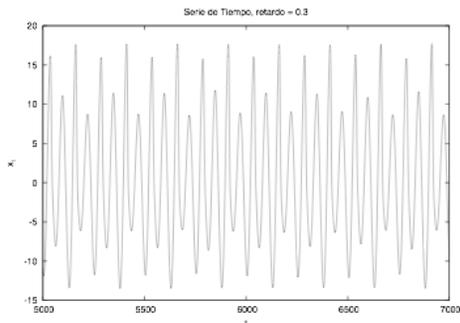
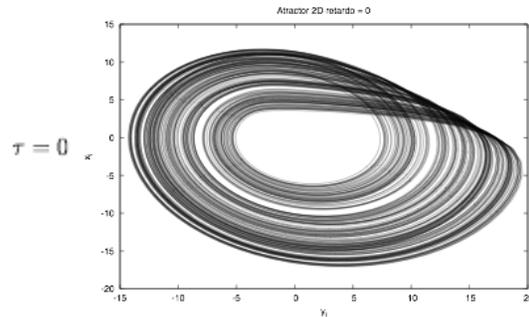
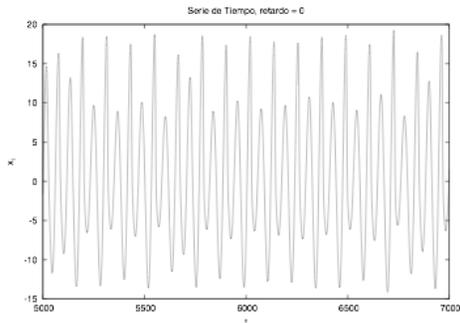
$$k^4 z_i = hg(x + k^3 x_i, z + k^3 z_i).$$

Siguiendo este procedimiento estaremos iterando simultáneamente el sistema de ecuaciones diferenciales planteado.

Del caos a la “muerte” $|\nu_i| = 2 \forall i,$

Series de tiempos y atractores 2D incrementando el retardo para $\epsilon = 0.5$

500 osciladores acoplados localmente en un anillo unidimensional con parámetros de Rossler: $a = 0.25, b = 0.56, c = 7.74$.



¡Cese de las oscilaciones por duplicación inversa de período!

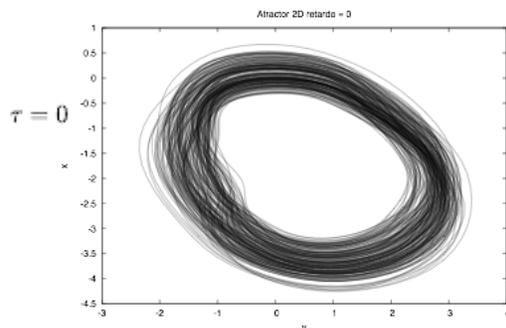
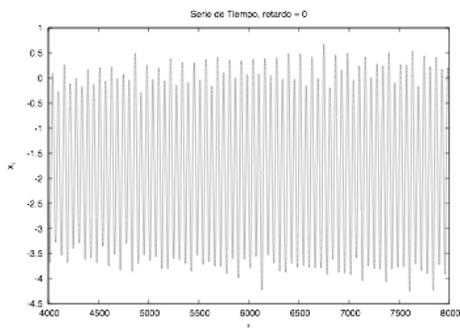
Por encima de un retardo dado, el sistema vuelve a ser caótico

Comportamiento Colectivo $|\nu_i| = 2 \forall i,$

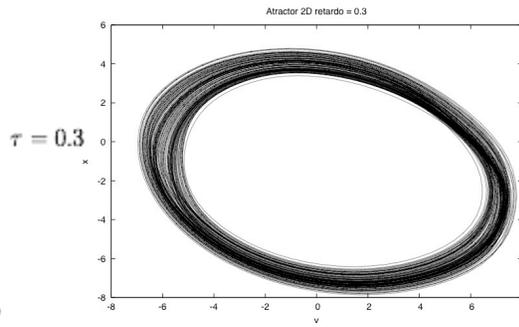
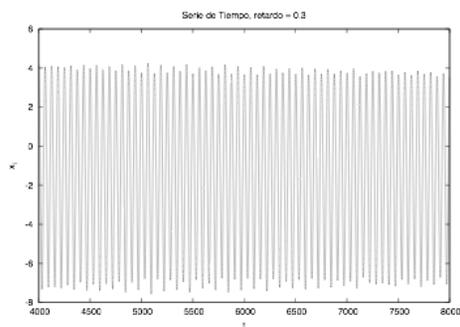
Series de tiempos y atractores 2D incrementando el $\epsilon = 0.5$

delay para

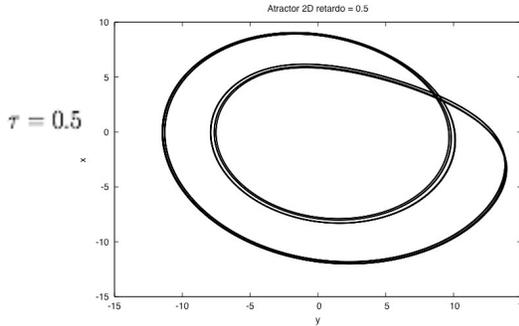
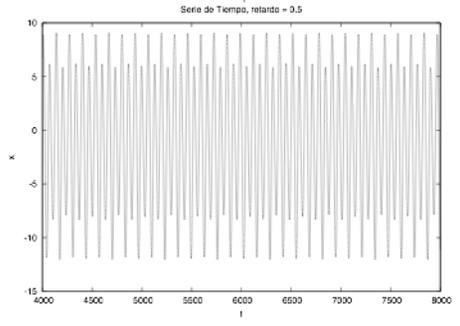
500 osciladores acoplados localmente en un anillo unidimensional con parámetros de Rossler: $a = 0.25, b = 0.56, c = 7.74$.



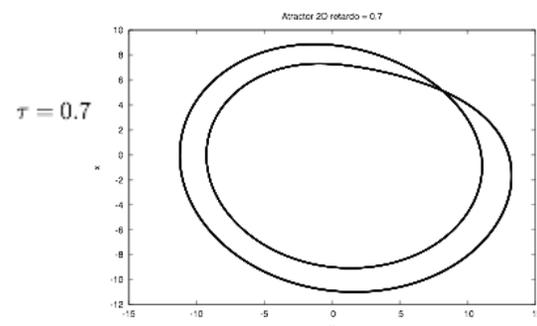
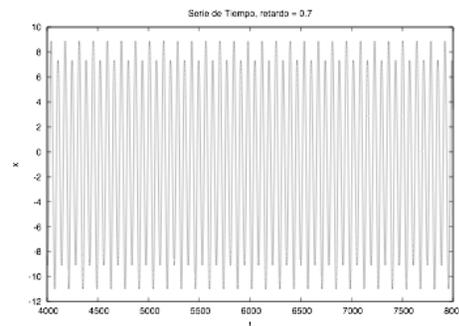
$\tau = 0$



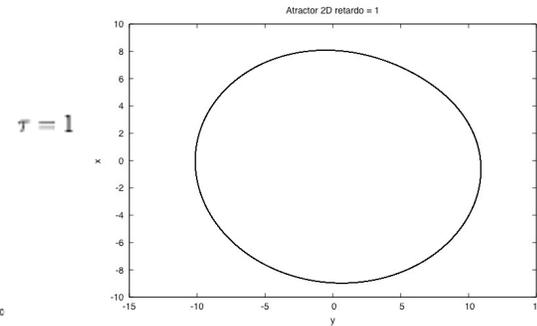
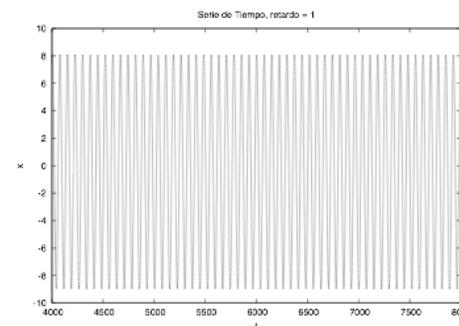
$\tau = 0.3$



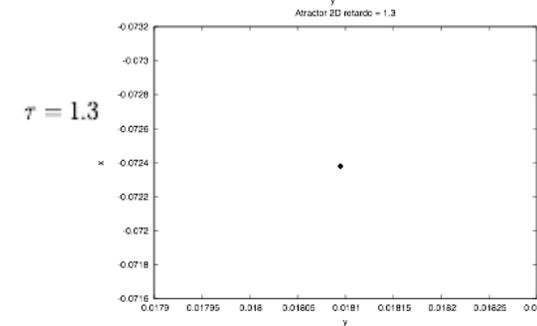
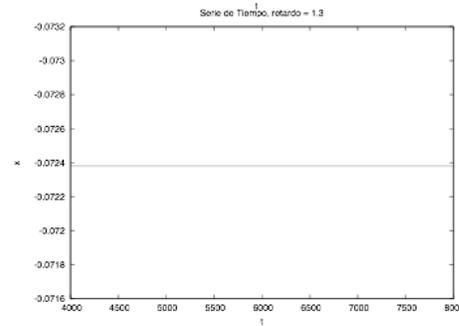
$\tau = 0.5$



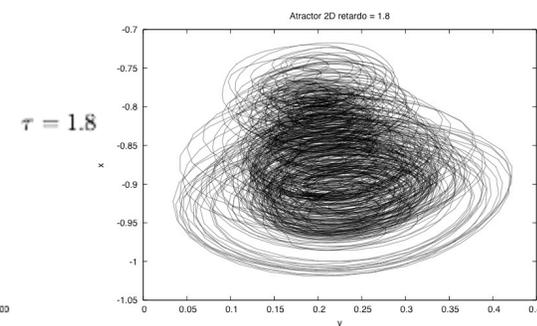
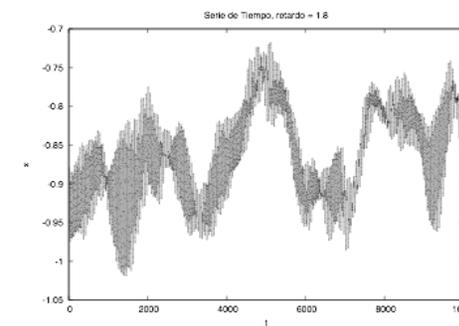
$\tau = 0.7$



$\tau = 1$



$\tau = 1.3$



$\tau = 1.8$

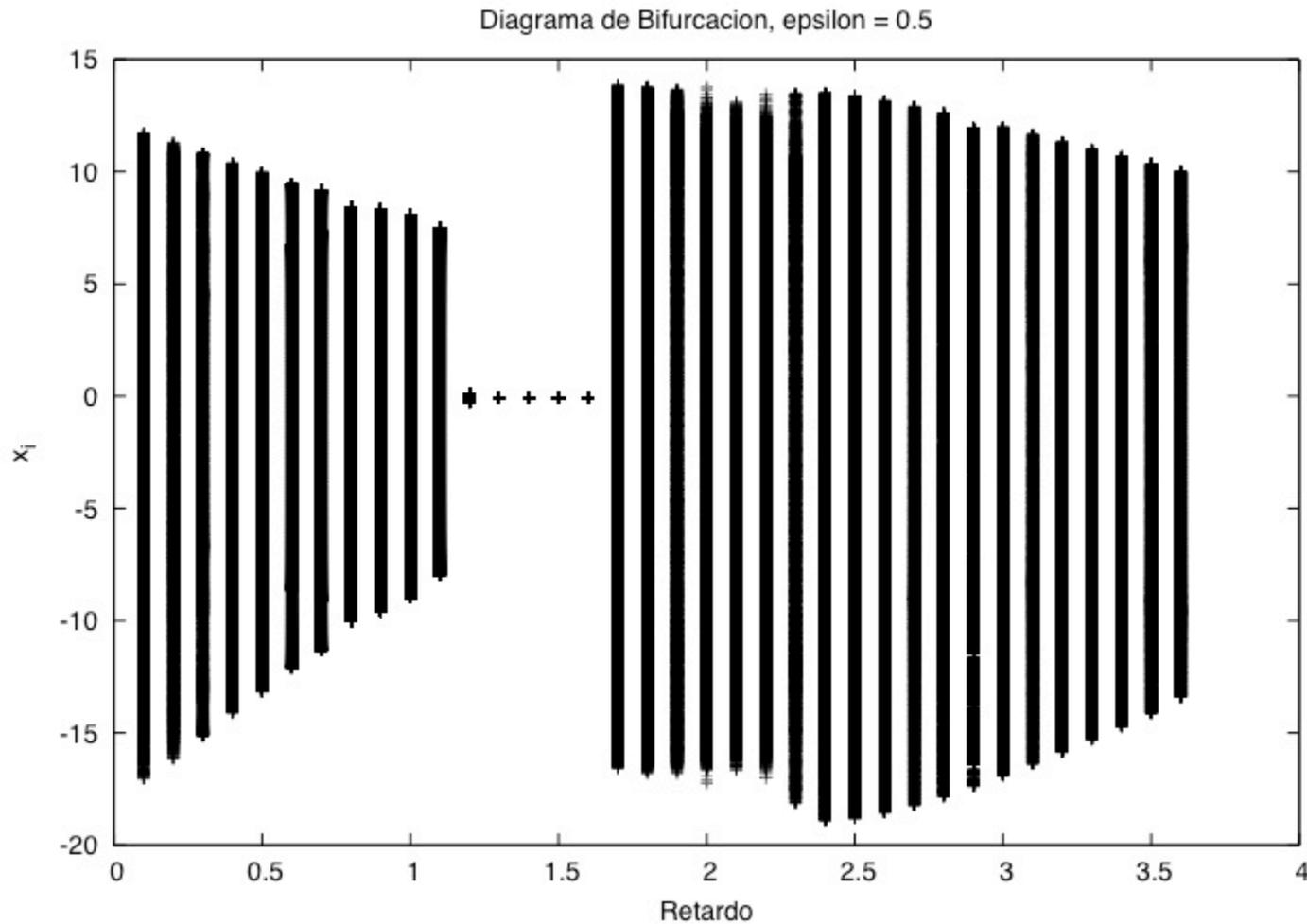
Comportamiento colectivo para pequeños valores del retardo.

¡Cese de las oscilaciones por duplicación inversa de período!

Por encima de un retardo dado, el sistema vuelve a ser caótico

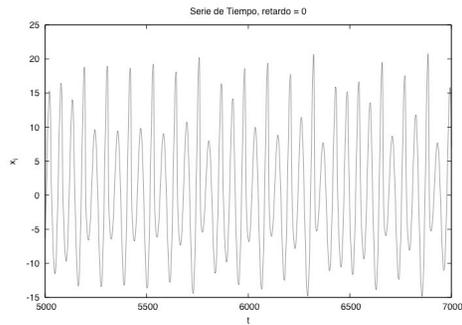
Diagrama de Bifurcación $|\nu_i| = 2 \quad \forall i,$

Cuando el sistema esta acoplado localmente, solo para un pequeño intervalo del retardo del sistema puede estabilizar un punto fijo.

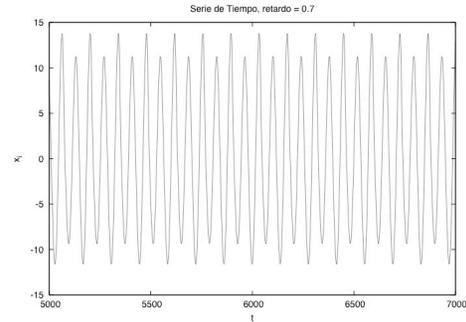
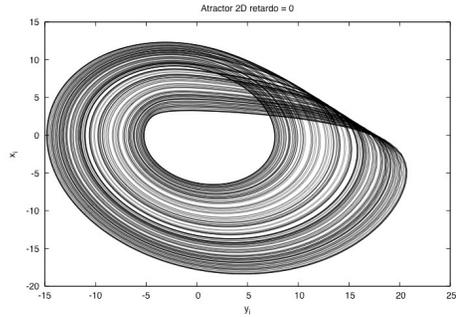


Del caos a la “muerte” $|\nu_i| = N \quad \forall i.$

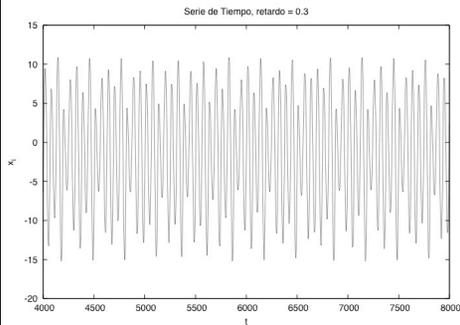
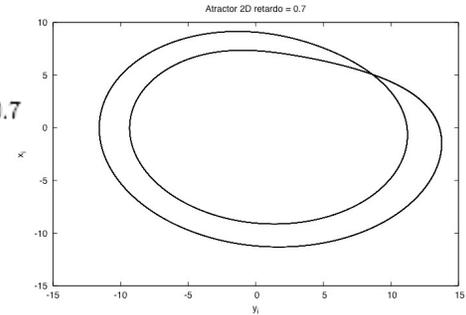
500 osciladores globalmente acoplados con parámetros de Rossler:
 $a = 0.25, b = 0.56, c = 7.74.$



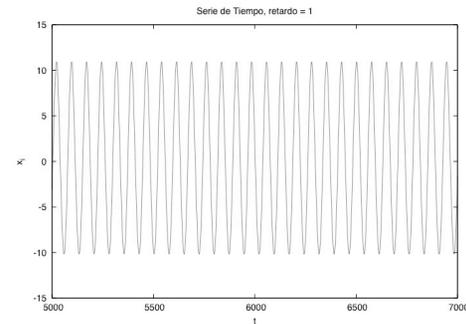
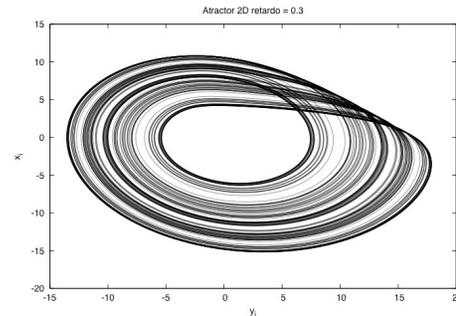
$\tau = 0$



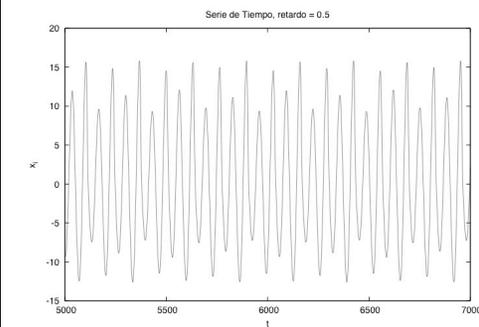
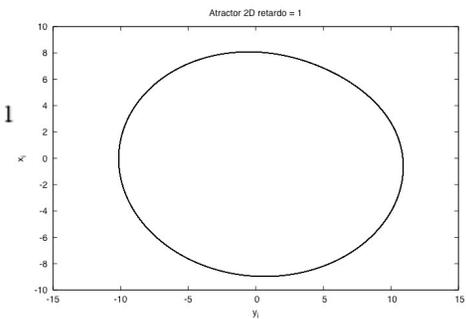
$\tau = 0.7$



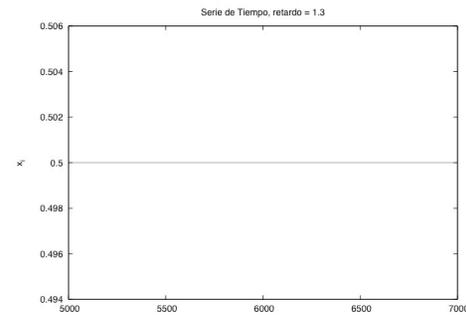
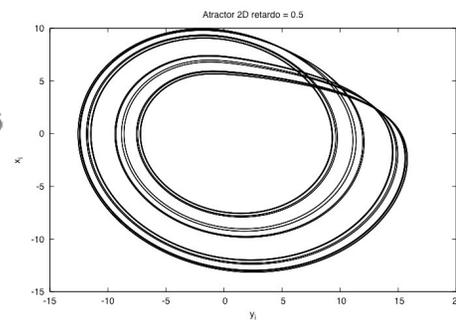
$\tau = 0.3$



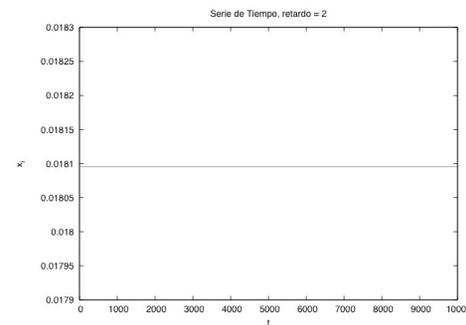
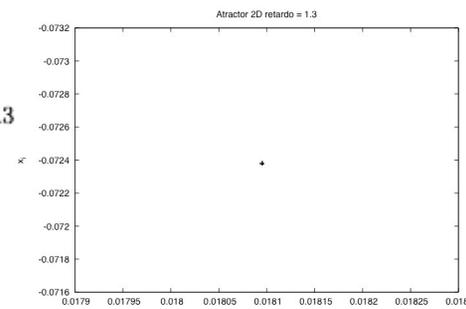
$\tau = 1$



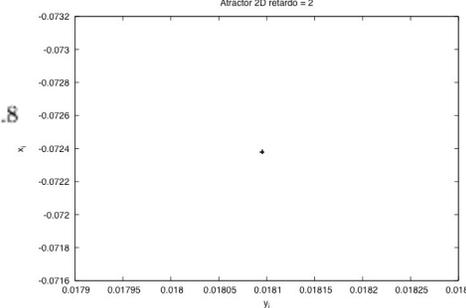
$\tau = 0.5$



$\tau = 1.3$



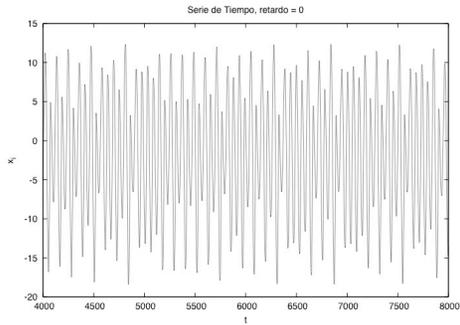
$\tau = 1.8$



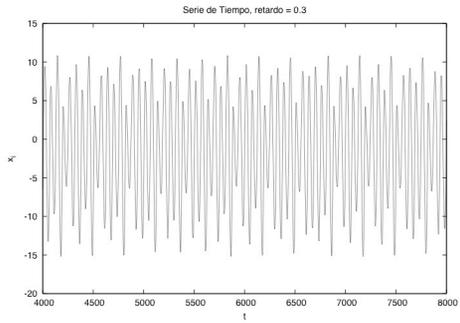
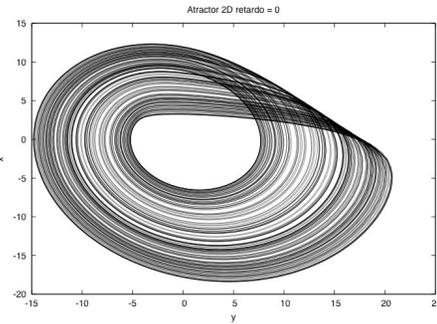
¡Cese de las oscilaciones por duplicación inversa de período!

Comportamiento Colectivo $|\nu_i| = N \forall i.$

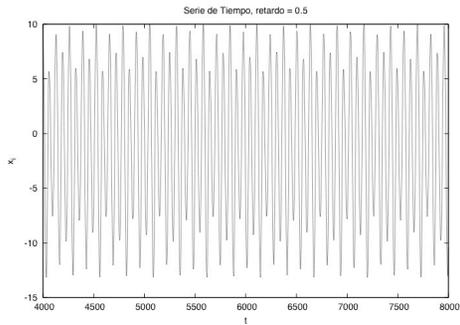
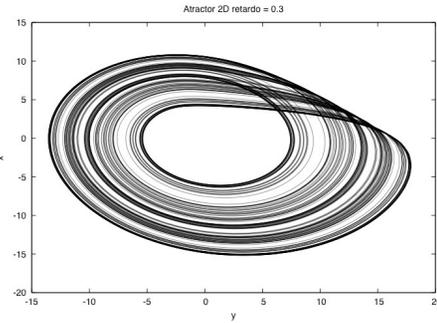
500 osciladores globalmente acoplados con parámetros de Rossler:
 $a = 0.25, b = 0.56, c = 7.74.$ Se muestra el elemento $i=250$



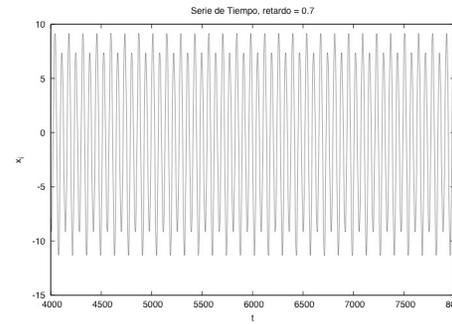
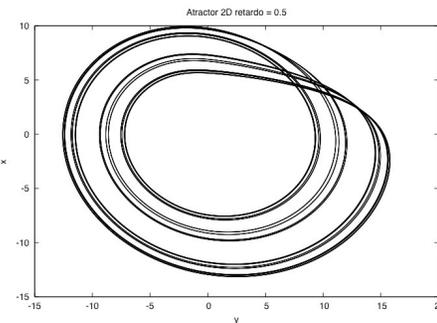
$\tau = 0$



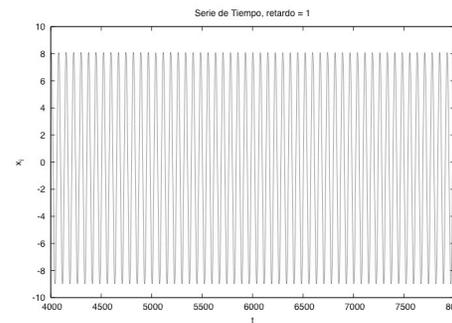
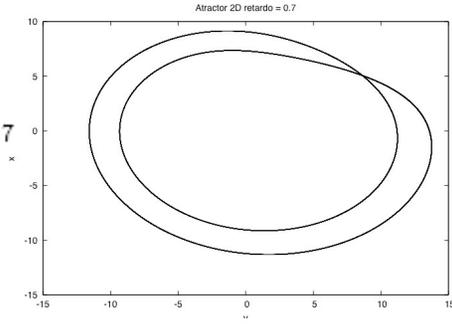
$\tau = 0.3$



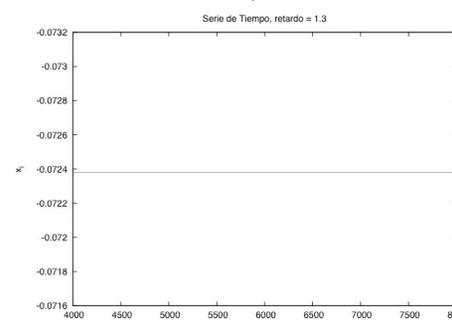
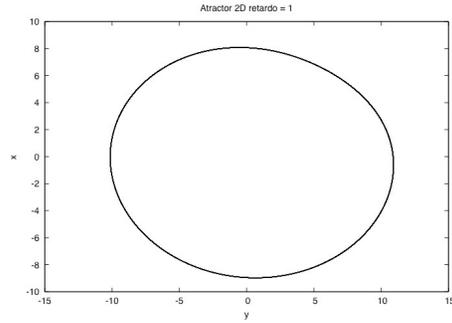
$\tau = 0.5$



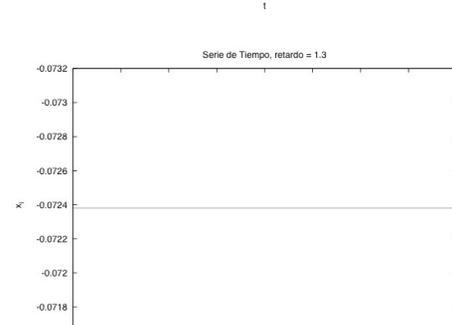
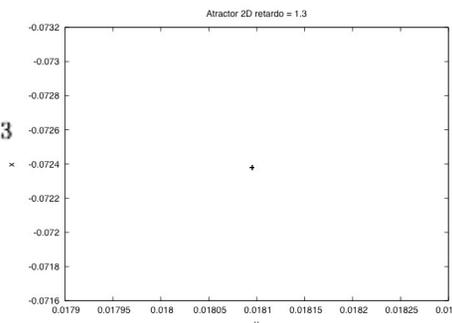
$\tau = 0.7$



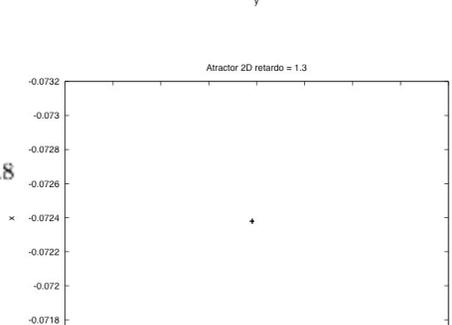
$\tau = 1$



$\tau = 1.3$



$\tau = 1.8$



¡Cese de las oscilaciones por duplicación inversa de período!

Medidas Macroscópicas $|\nu_i| = N \forall i.$

Cuando el sistema esta acoplado globalmente, el acoplamiento define dos regiones.

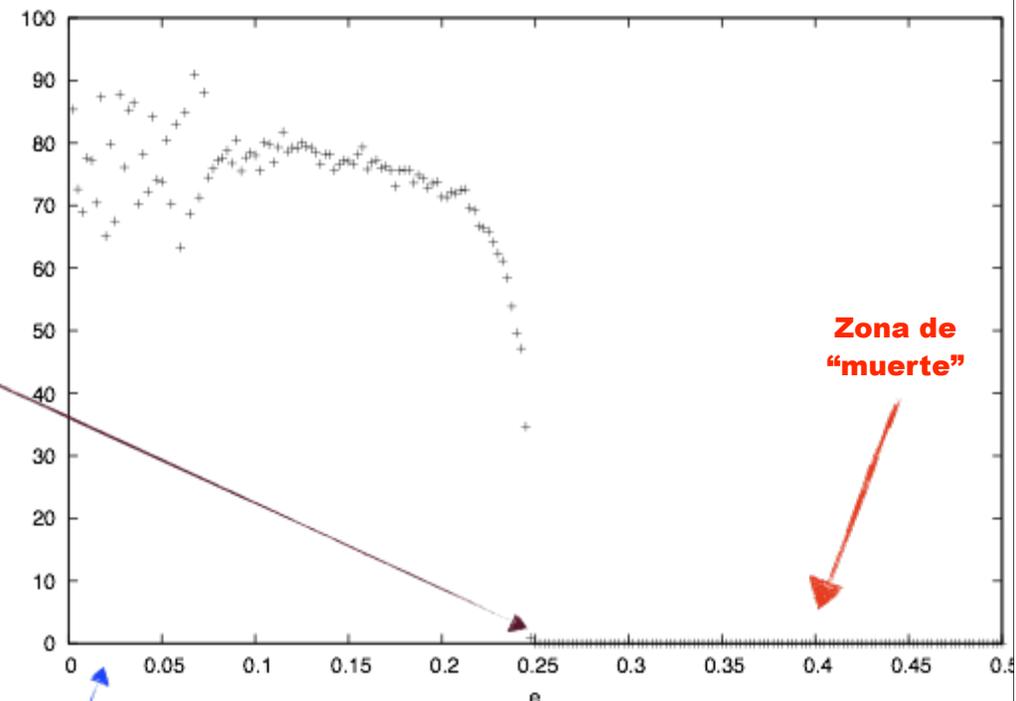
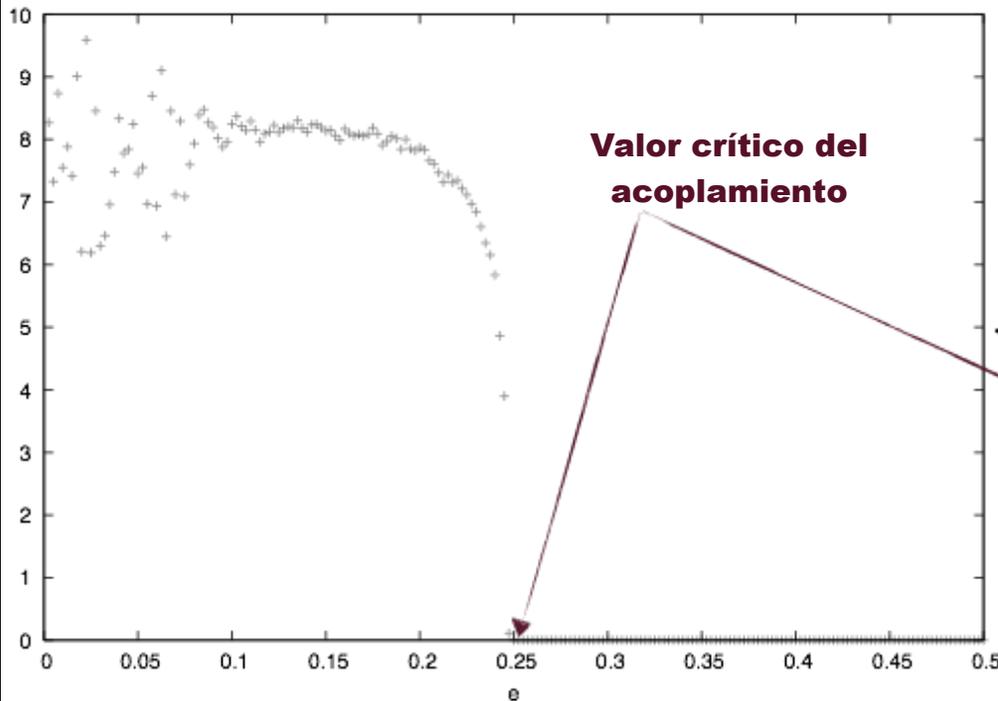
Sincronización vs. epsilon

Retardo \rightarrow 0.25

Actividad vs. epsilon

Sincronizacion retardo = 2.5

Actividad acoplamiento Global, retardo = 2.5



$$\bar{\sigma}_y = \frac{1}{T - tr} \sum_{t=tr}^T \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i(t) - \bar{y})^2}$$

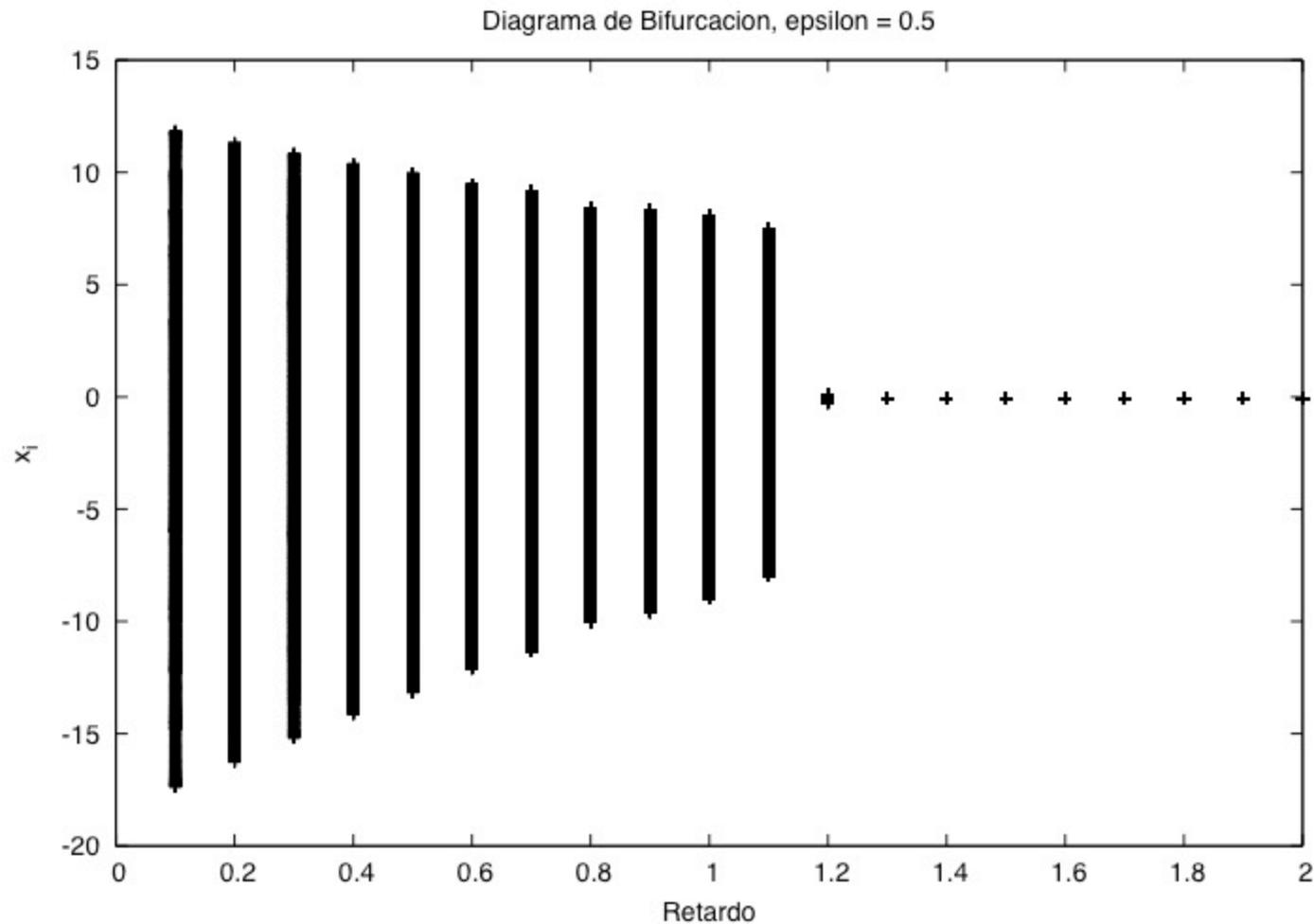
$$A(t) = \frac{1}{T - tr} \sum_{t=tr}^T \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i(t) - y_i(t - h)| \right]$$

En esta región, cada elemento del sistema está oscilando caótica y desincronizadamente

Es de notar que una sincronización del sistema implica un cese de las oscilaciones cuando la interacción entre los elementos se produce a una velocidad finita.

Diagrama de Bifurcación $|\nu_i| = N \ \forall i.$

Cuando el sistema esta acoplado globalmente, el retardo del sistema restringe cada una de las variables de un elemento. Hasta que las estabiliza en un punto fijo.



Conclusiones

- El retardo induce muerte vía duplicación de período en un sistema de osciladores acoplados.
- El acoplamiento global en el sistema facilita la estabilización del punto fijo, en contraste con un acoplamiento local.
- Cuando el retardo es nulo y los elementos están acoplados globalmente, el sistema alcanza un estado de sincronización caótica.
- Las variables que definen los elementos se restringen a medida que el retardo aumenta, hasta que se estabiliza un punto fijo.

Próximamente...

- Construir un diagrama de fase con los parámetros de acoplamiento y retardo, donde se distinga la zona de amplitude death de la región oscilatoria.
- Estudiar el efecto de la topología de la red en el colapso de la amplitud de los osciladores del sistema. Esto,
 - 1) Variando el número de vecinos “k” de cualquier elemento “i”, desde dos vecinos hasta “N” (acoplamiento local → global)
 - 2) Variando la probabilidad de reconexión $0 \leq p \leq 1$, a partir de un anillo unidimensional hasta una red totalmente aleatoria.
- Construir el respectivo diagrama de fase con los parámetros de “k” y “p”, donde se distinga la región de amplitude death de la oscilatoria.