



Universidad de Los Andes
Mérida - Venezuela

Postgrado en Física Fundamental
Area de Caos y Sistemas Complejos

Estados quiméricos en sistemas dinámicos

M.Sc. Gilberto Paredes

Tutor: Dr. Mario Cosenza

La Quimera

La Quimera es un ser fantástico de la mitología griega.

Era hija de Tifón (hijo menor de Gea) y Equidna (la víbora).

Es un animal con la cabeza de un león, busto de cabra y cola de serpiente; también se la ha representado con varias cabezas, una de cabra y otra de león.

«Quimera» procede del [griego](#) Χίμαιρα *Khimaira*, que significa '[macho cabrío](#)'

Se usa [metafóricamente](#) para describir cosas que tienen atributos combinados procedentes de fuentes diferentes.



[Genética](#): organismo o tejido creado a partir de dos o más fuentes genéticas diferentes

[Biología](#): especie de peces cartilaginosos; embriones cuyas células derivan de dos o más cigotos distintos.

[Paleontología](#): un fósil compuesto por partes de individuos de diferentes especies.

[Los Físicos](#): nuevos fenómenos que requieren nuevos nombres. Por ej. en partículas elementales, sabor, encanto, extrañeza. En nuestra área: caos, atractor extraño.

El término **quimera** o **quimérico** se usa como paradigma de lo fantasioso o utópico

Introducción

Sincronización:

¿Qué es?

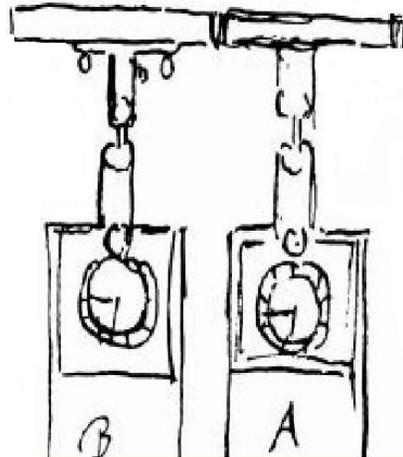
importancia: Física, Biología, Química, Medicina, etc

Christiaan Huygens (1629-1695)

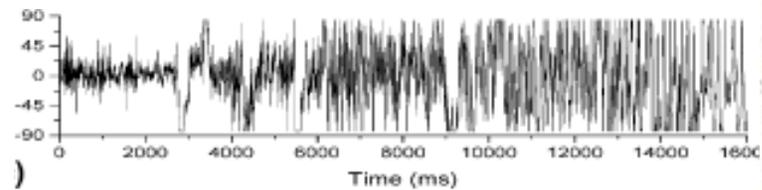
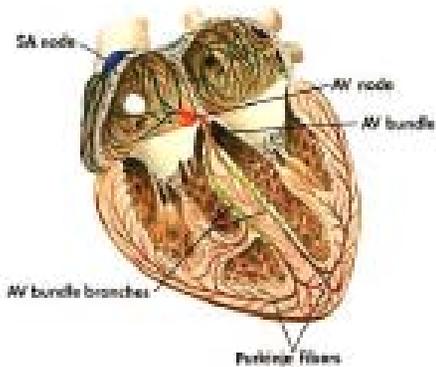
le phénomène de la sympathie, sympathie des horloges

Sincronización

$$x_t(i) = x_t(j)$$



Sincronización: un fenómeno universal



EEG epilepsia
Escalona M,



Luciérnagas

Bandadas de Pájaros



Metrónomos



Cardúmen de peces



Sincronización de osciladores periódicos

Yoshiki Kuramoto, Chemical Oscillations, Waves and Turbulence (1984).

Conjunto de N osciladores, cada uno caracterizado por una frecuencia $\omega_i (i = 1, 2, \dots, N)$

Dinámica del sistema globalmente acoplado:

$$\dot{\phi} = \omega_i + \sum_{j=1}^N U_{ij}(\phi_i - \phi_j) \quad U_{ij}(\phi_i - \phi_j) = -\frac{\varepsilon}{N} \sin(\phi_i - \phi_j)$$

Distribución de frecuencia puede ser caracterizada por una función de distribución continua $g(\omega)$

$Ng(\omega)d\omega$ Es el número de elementos con frecuencias en el intervalo ω a $\omega + d\omega$

Distribución de Lorentz

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}$$

Parámetro de orden complejo para caracterizar la sincronización:

$$\sigma e^{i\Psi} = \int_{-\pi}^{\pi} n(\phi, t) e^{i\phi} d\phi$$

$$\sigma = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{2\gamma}{\varepsilon}}, & \text{para } \varepsilon \geq 2\gamma \\ 0 & , \text{para } \varepsilon < 2\gamma \end{cases}$$



Sincronización Caótica

L. M Pecora y T. R. Carroll, Phys. Rev. Lett. 64, 821 (1990)

Sistema descrito por K variables dinámicas

$$\vec{w}(t) = \{w_1(t), w_2(t), \dots, w_K(t)\}$$

cuya evolución está dada por

$$\dot{w}_1 = F_1(w_1, w_2, \dots, w_k)$$

$$\dot{w}_2 = F_2(w_1, w_2, \dots, w_k)$$

.....

$$\dot{w}_k = F_k(w_1, w_2, \dots, w_k)$$

$$\dot{\vec{w}} = \vec{F}(\vec{w})$$

$$\dot{w}_i = f(w_i) + \varepsilon(\bar{w} - w_i)$$

$$\bar{w}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i(t)$$

$$\lambda_N < \varepsilon$$

El estado sincronizado es estable si la intensidad del acoplamiento excede al máximo exponente positivo de Lyapunov

Sincronización en redes dinámicas autónomas y forzadas

M. Pineda and M.G. Cosenza. Physical Review E 71, 0572001 (2005)

Dinámica

$$f(x) = b - \ln|x|$$

Sistema espaciotemporal forzado

$$x_{t+1}^i = (1 - \varepsilon_2)f(x_t^i) + \frac{\varepsilon_1}{2}[(f(x_t^{i+1}) + f(x_t^{i-1})) - 2f(x_t^i)] + \varepsilon_2 F_t$$

Sistema espaciotemporal autónomo

$$x_{t+1}^i = (1 - \varepsilon_2)f(x_t^i) + \frac{\varepsilon_1}{2}[(f(x_t^{i+1}) + f(x_t^{i-1})) - 2f(x_t^i)] + \frac{\varepsilon_2}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t^j)$$

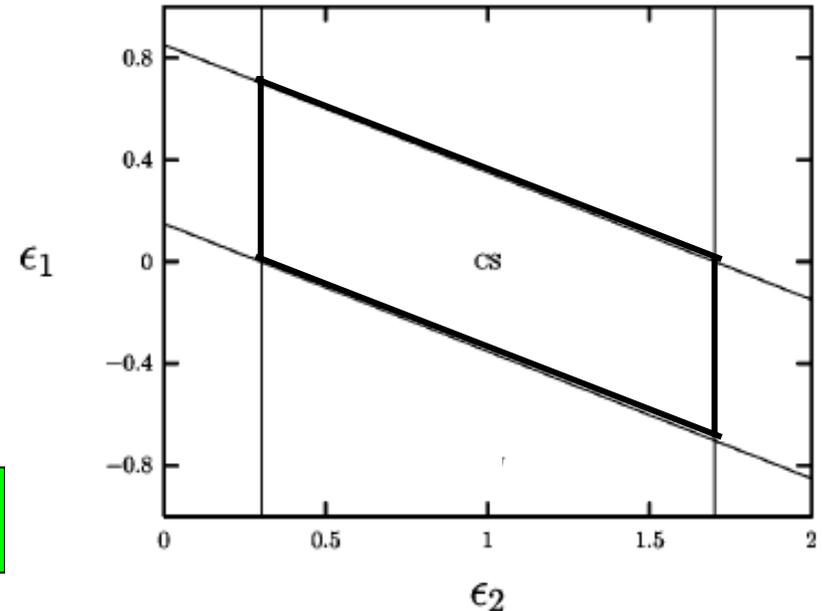
Estado sincronizado caótico:

$$1 - 2\varepsilon_1 \sin^2\left(\frac{\pi j}{N}\right) - e^{-\lambda} < \varepsilon_2 < 1 - 2\varepsilon_1 \sin^2\left(\frac{\pi j}{N}\right) + e^{-\lambda}$$

$$\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T}\right) \sum_{t=0}^{T-1} \ln|f'(x_t)|$$

$N = 10^4$

$b = -0.7$



Fronteras de estabilidad del estado caótico sincronizado del sistema autónomo, y del sistema forzado en plano de parámetros $(\varepsilon_2, \varepsilon_1)$
CS. sincronización caótica

$\varepsilon_2 = 0 \rightarrow$ no hay sincronización caótica; se requieren interacciones no locales.

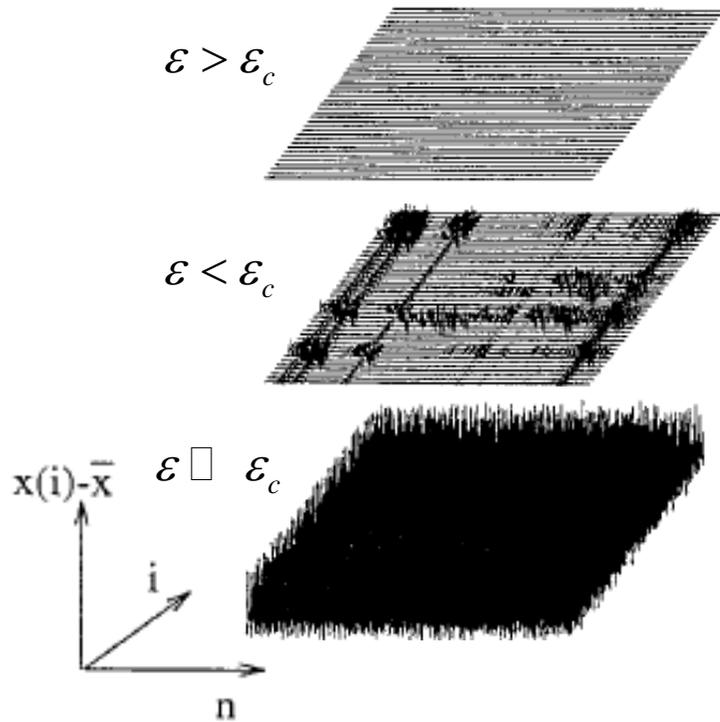
Intermitencia On-Off

N. Platt, E. Spiegel, and C. Tresser, Phys. Rev. Lett. **70**, 279 (1993).

Sincronización intermitente en el tiempo en sistemas espaciotemporales:
intervalos de sincronización interrumpidos por erupciones desincronizadas.

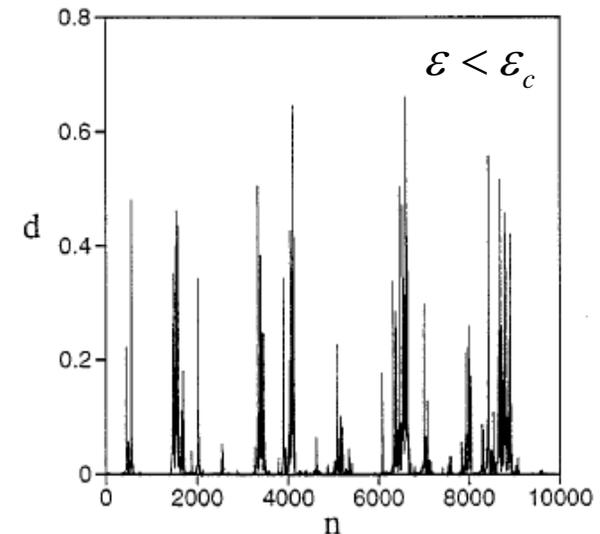
Ejemplo: intermitencia On-Off en redes de mapas acoplados

$$x_{n+1}(i) = (1 - \varepsilon) f(x_n(i)) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_n(j))$$



$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_n(j)$$

$$d = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [x_n(j) - \bar{x}]$$

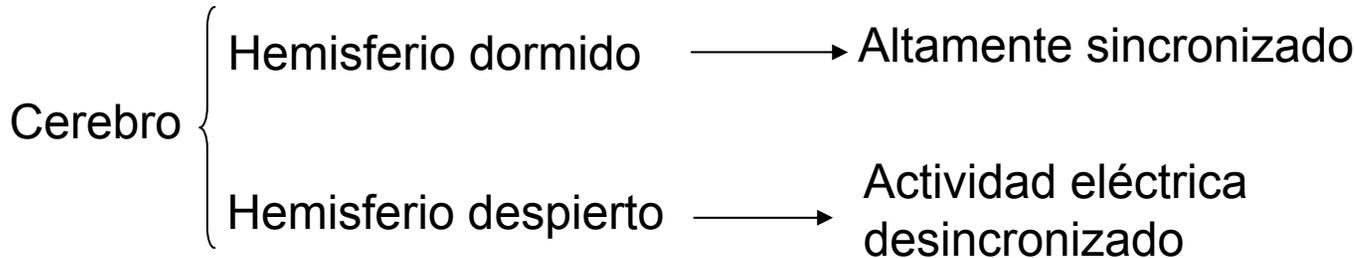


M. Ding and W. Yang, Phys. Rev. E **56**, 4009 (1997).

Estados Quiméricos

Introducción

Muchas criaturas (delfines, pájaros, lagartijas)



¿Existe un sistema de osciladores, tal que una parte del sistema esté sincronizada y otra no?

Ecuación compleja de Ginzburg-Landau

Y. Kuramoto and D. Battogtokh. Nonlinear Phenom Complex Syst 5, 380 (2002). “Coexistencia de coherencia no coherencia”.

D. M. Abrams and S. Strogatz. Physics Rev. Lett. 93 (2004): “Quimeras”.

Estados Quiméricos

Dominios sincronizados y no sincronizados coexisten en el espacio en un sistema de osciladores

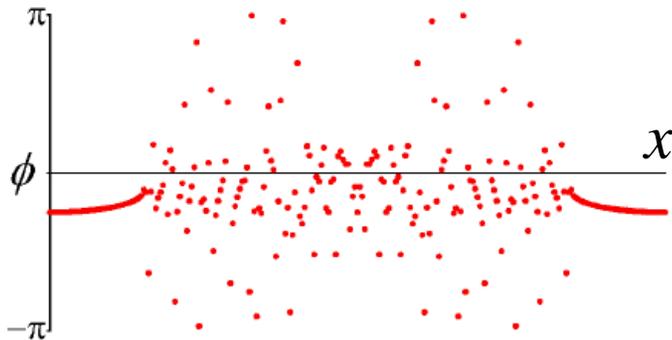
Estados Quiméricos

Coherencia y no Coherencia

Modelo: Ecuación compleja Ginzburg-Landau 1-D

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) = \omega - \int G(x - x') \text{sen}(\phi(x, t) - \phi(x', t) + \alpha) dx'$$

Distribución de osciladores con acoplamiento no local



Quimera estadísticamente estacionarias

Distribución espacial instantánea de las fases obtenidas de CGLE, con un arreglo de 512 osciladores distribuidos sobre el intervalo de longitud 1, con condiciones de contorno periódicas.

Estados Quiméricos

Daniel M. Abrams, Steven H. Strogatz. PRL 101, 084103 (2008)

Acoplamiento no local

Modelo mas simple. Dos poblaciones de osciladores idénticos

Cada oscilador es acoplado igualmente a todos los otros en ese grupo y menos fuerte a aquellos en el otro grupo.

$$\frac{d\theta_i^\sigma}{dt} = \omega + \sum_{\sigma'=1}^2 \frac{K_{\sigma\sigma'}}{N_{\sigma'}} \sum_{j=1}^{N_{\sigma'}} \text{sen}(\theta_j^{\sigma'} - \theta_i^\sigma - \alpha)$$

$$\sigma = 1, 2$$

N_σ Numero de osciladores en la población σ

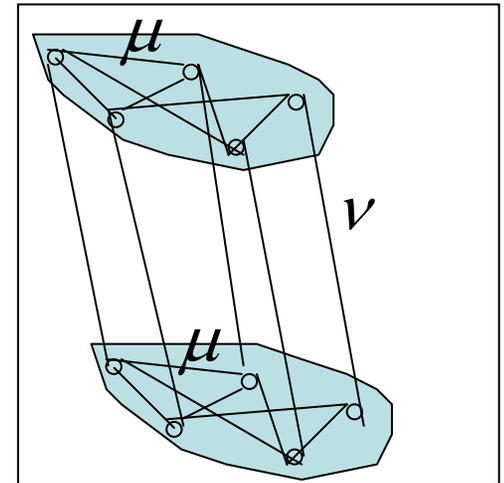
$K_{\sigma\sigma'}$ Intensidad de acoplamiento entre poblaciones

$K_{11} = K_{22} = \mu > 0$ Acoplamiento dentro de un grupo

$K_{12} = K_{21} = \nu > 0$ Acoplamiento entre grupos

$$\mu > \nu$$

El acoplamiento no local decrece con la distancia



$A = \mu - \nu$ (a) $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (b) $\beta = 0.1, A = 0.2$
 $N_1 = N_2 = 1024$

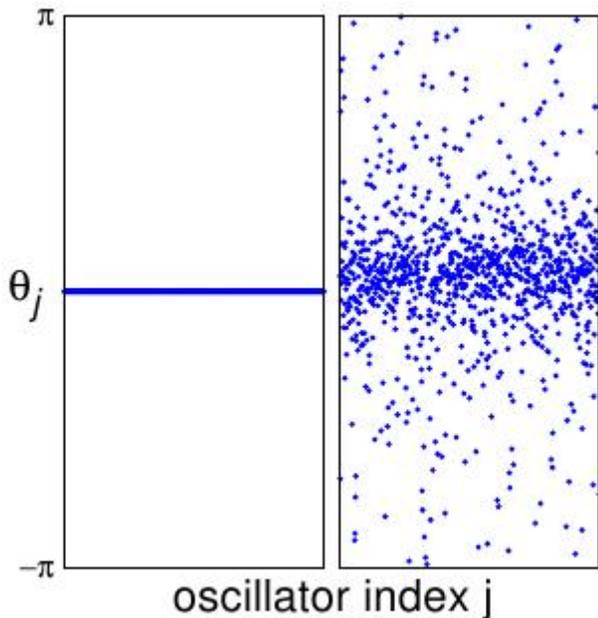


Fig 1. Estados quiméricos, obtenida Por la integración de (2), (a) Población sincronizada. (b) Población desincronizada

$$r(t) = \left| \left\langle e^{i\theta_j(t)} \right\rangle_2 \right|$$

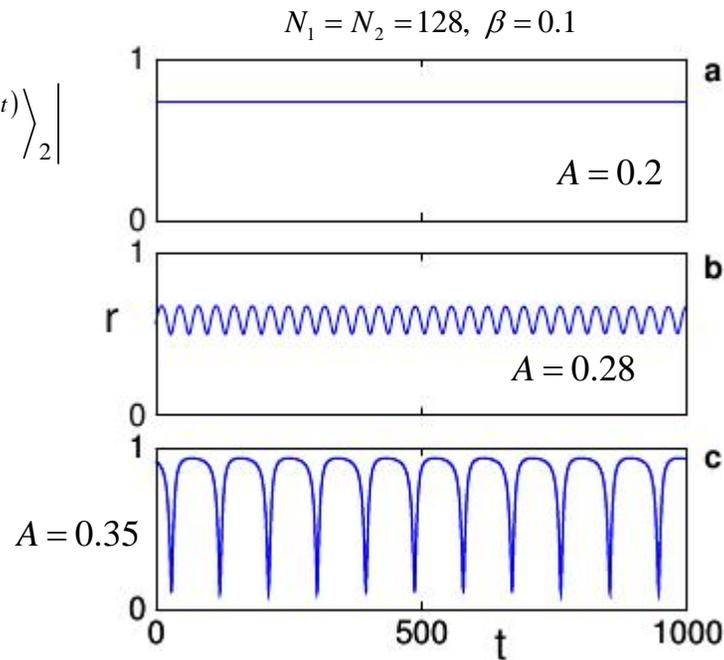


Fig. 2. Parámetro de orden r versus tiempo. (a): Quimera estable; (b) la quimera se mantiene; (c) Quimera se mantiene por mas tiempo

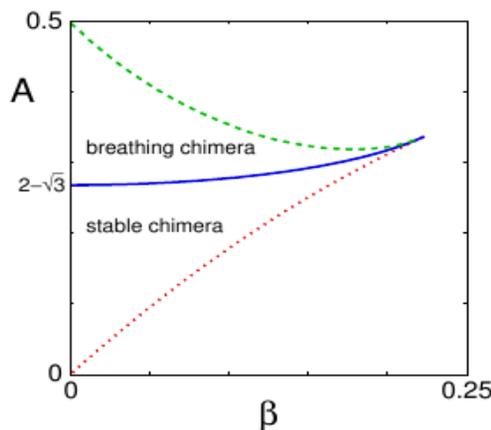
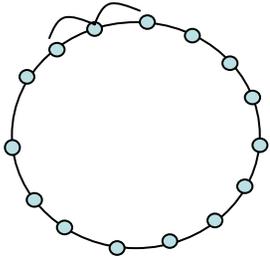


Diagrama de estabilidad para los estados quiméricos:

Formación de Clusters

Gautam C. Sethia and Abhijit Sen arXiv:0803.3491v1 (2008).

Modelo: Anillo uniforme y densamente distribuido de osciladores idénticos que son acoplados con un retardo.



$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) = \omega - \int G(x - x') \sin(\phi(x, t) - \phi(x', t - \tau_{x, x'})) + \alpha dx'$$

$$G(x - x') = \frac{k}{2(1 - e^{-kL})} e^{-kd_{x, x'}}$$

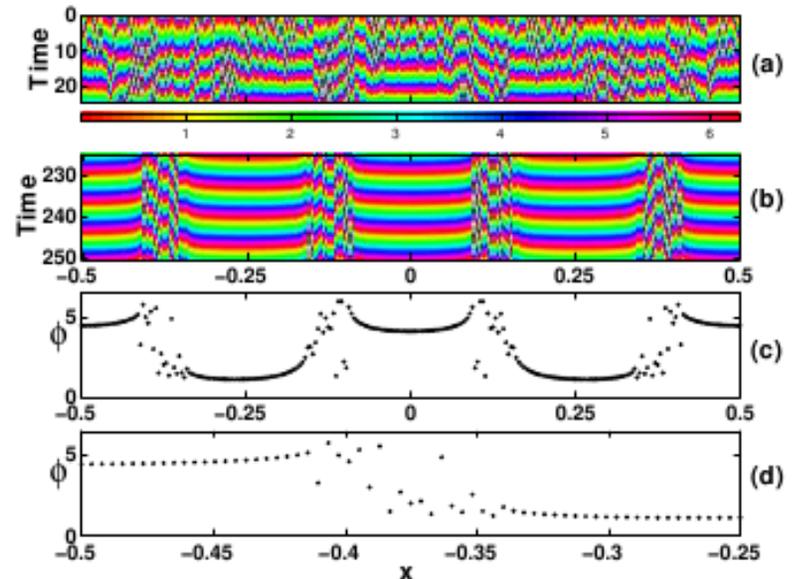


Fig. (a) Grafica espacio-tiempo de la fase de los osciladores
 (b) Evolución de los osciladores en un tiempo después
 (c) Estado estacionario de los osciladores
 (d) zoom de la región $x = -0.5$ a $x = -0.25$

El tiempo de retardo conduce a un nuevos estados de agrupamientos con un numero de regiones espaciales discontinuas de coherencia y no coherencia

Estados quiméricos y el Retardo

Retroalimentación con retardo

Osciladores idénticos, densamente distribuidos (Osciladores de Landau-Stuart)

Modelo → Red de osciladores globalmente acoplados

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \omega - \frac{C}{2} \int_{-1}^1 \text{sen}(\psi(x, t) - \psi(x', t)) dx' - \frac{K}{2} \int_{-1}^1 \rho(x) \text{sen}(\psi(x, t) - \psi(x', t - \tau)) dx'$$

Quimera → Retroalimentación con retardo

Quimera del Tipo I y II

$\psi(x, t)$ Fase de los osciladores en la posición x y tiempo t

$$\omega_{\text{eff}}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \dot{\psi}_x(x, s) ds$$

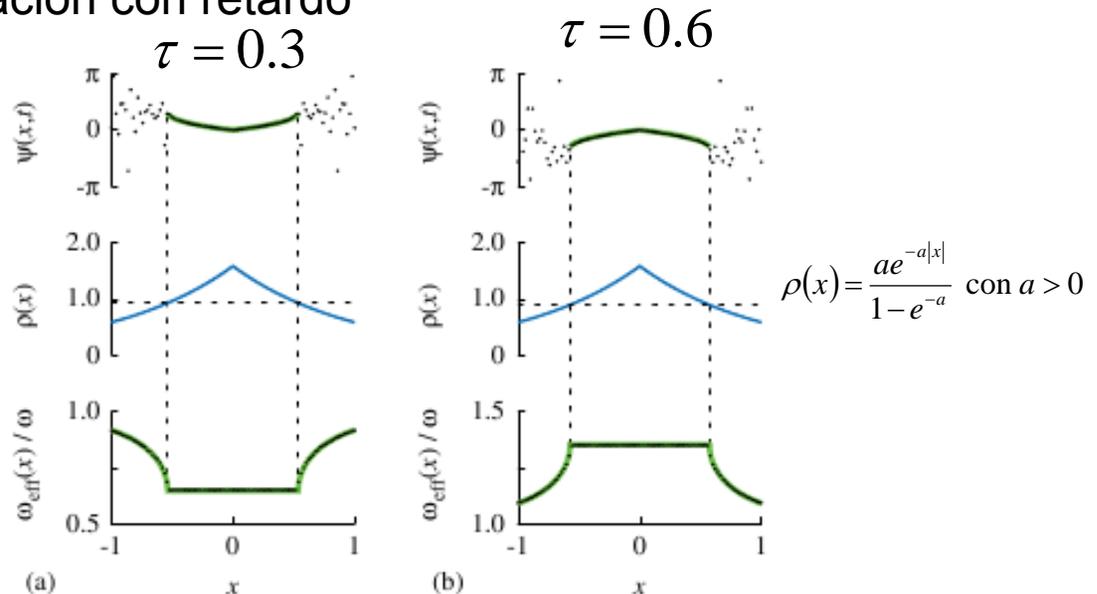


Fig. Estados quiméricos inducidos por una retroalimentación con retardo con el perfil de estimulación exponencial. Arriba: Fase de los osciladores; medio: Perfil de estimulación; Abajo: Frecuencia efectiva de los osciladores

Conclusiones

- La sincronización es un fenómeno típico en sistemas no lineales.
- En sistemas periódicos, la sincronización se alcanza cuando $\varepsilon \geq 2\gamma$
- En sistemas caóticos la sincronización se alcanza si $\lambda_N < \varepsilon$
- A medida que se incrementa la disparidad entre los acoplamientos, la quimera viene a ser menos estable: estados pulsantes.
- El tiempo de retardo conduce a un nuevos estados de agrupamientos con un numero de regiones espaciales discontinuas de coherencia y no coherencia.
- En una red de osciladores globalmente acoplados, la quimera puede ser inducida por estimulación de retroalimentación retardada con una variedad de perfiles de estimulación (lineal y exponencial)
- Condiciones para emergencia de estados quiméricos (hasta ahora): acoplamiento no local, retardo

Nuestra propuesta: encontrar estados quiméricos caóticos en redes de mapas acoplados (búsqueda de condiciones mínimas).