



Universidad de Los Andes
Mérida - Venezuela

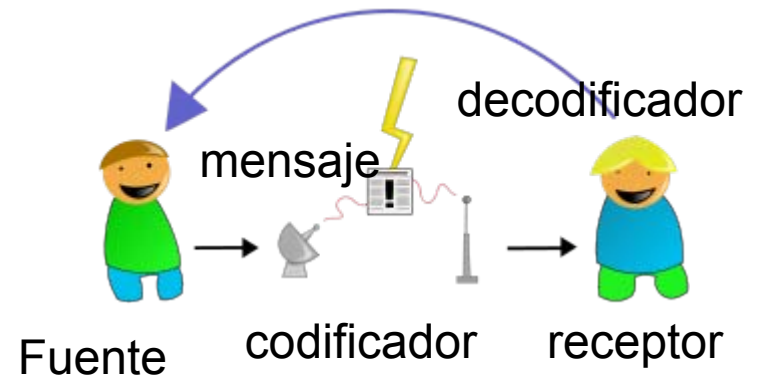
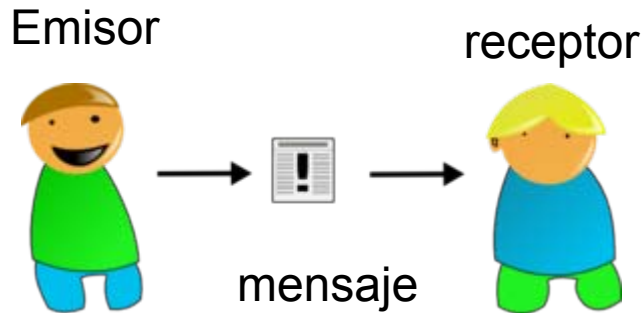
Postgrado en Física Fundamental
Area de Caos y Sistemas Complejos

Transferencia de información en sistemas dinámicos

M.Sc. Gilberto Paredes

Tutor: Dr. Mario Cosenza

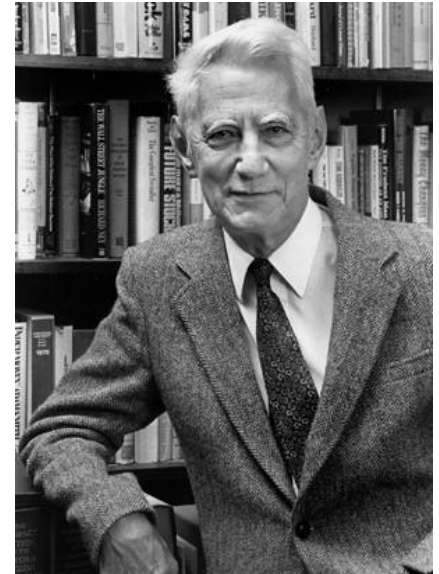
Comunicación e Información



Transferencia de Información

- Importante en la dinámica de muchas disciplinas (computación, sistemas biológicos, etc)
- Transiciones de fase se pueden interpretar como información transferida en los puntos críticos.
 - En sistemas artificiales (redes, internet, etc)
 - Sistemas complejos como procesadores de información.
- Información requerida para emergencia de comportamientos colectivos en sistemas dinámicos.

Claude Elwood Shannon



1916-2001

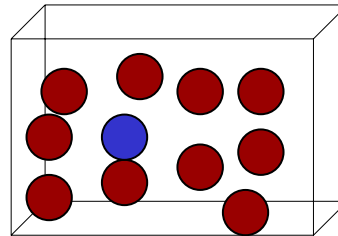
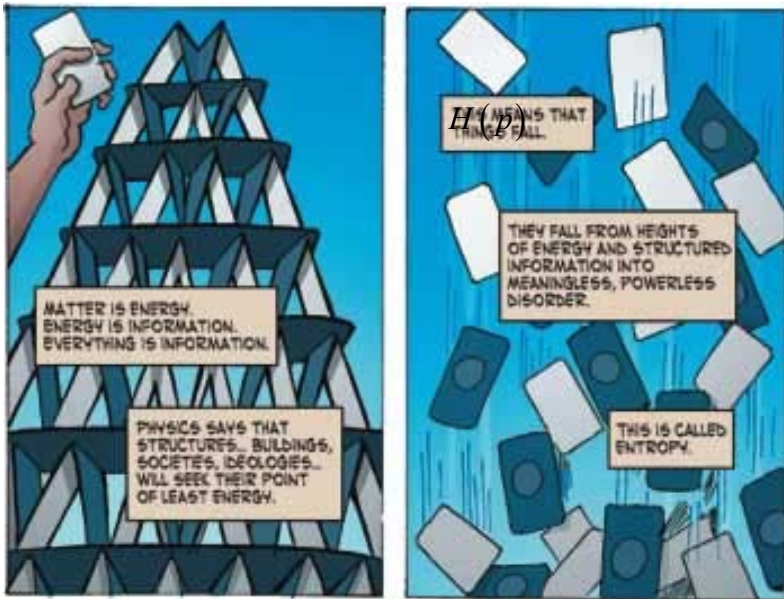
Información

Definición Sea X una variable aleatoria discreta, con valores $x_1, \dots, x_n$ y con distribución de probabilidad $p_i = P(X = x_i)$. Sea $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$. Definimos la información o Entropía de Shannon como:

$$H(p) = -\sum_{i=1}^n p_i \log(p_i)$$

$H(p)$ Mide la cantidad de información que esperamos obtener al conocer el valor de X

No depende del valor de x_i sino únicamente de su probabilidad p_i



• Intuitivamente: Los resultados que aparecen con menos frecuencia pueden producir mas información acerca del sistema



¿Qué buscamos?

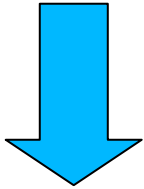
- La información es una disminución de
- la incertidumbre

• Entropía Nula

Información y Entropía

Información

Concepto matemático

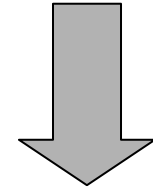


Teoría de la información

$$S(p) = -k \sum_{i=1}^n p_i \log(p_i)$$

Entropía

Concepto físico



Termodinámica

$$S(p) = -k_b \sum_{i=1}^n p_i \log(p_i)$$



Mecánica Estadística

Microestados

Información Mutua

La información de Shannon para dos sistemas

$$H_1 = \sum_x p(x, y) I(x, y) = - \sum_x p(x, y) \log_a(p(x, y))$$

Si los sistemas son independientes

$$H_2 = - \sum_{x, y} p(x, y) \log_a(p(x) p(y))$$

Ambigüedad en base del logaritmo
Si base del logaritmo = 2
→ Información se mide en bits

$H_2 - H_1$ es la entropía conjunta de los dos sistemas si ellos fueran independientes en comparación con su relación real = **Información mutua**

$$\begin{aligned} H_2 - H_1 &= - \sum_{x, y} p(x, y) \log(p(x) p(y)) + \sum_{x, y} p(x, y) \log(p(x, y)) \\ &= \sum_{x, y} p(x, y) [\log(p(x, y)) - \log(p(x) p(y))] \end{aligned}$$

$$H_2 - H_1 = \text{MI} = \sum_{x, y} p(x, y) \log \left(\frac{p(x, y)}{p(x) p(y)} \right)$$

MI mide información compartida por **X** y **Y**: en cuánto se reduce la incertidumbre acerca de **Y** si se conoce **X**.

Deficiencias de la Información Mutua

- **Información Mutua** no es efectiva para predecir los eventos futuros de series de tiempo: Es simétrica, $M(X, Y) = M(Y, X)$
- No indica en cuál sentido fluye la información.
- Naturaleza estática.
- Carece de discriminación acerca de la historia común y las señales de entrada.

Esas deficiencias pueden ser corregidas agregando un retardo en una de la variables:

$$M_{IJ}(\tau) = \sum p(i_n, j_{n-\tau}) \log \frac{p(i_n, j_{n-\tau})}{p(i) p(j)}$$

Información mutua persistente

RC Ball, M. Diakonova, RS MacKay, arXiv:1003.3028v1, 15 Mar (2010).

Definición

$$I(\tau) = \int_{x_{\tau+}} \log \left(\frac{p[x_{-0}, x_{\tau+}]}{p[x_{-0}]p[x_{\tau+}]} \right) p[x_{-0}, x_{\tau+}] dx_{-0} dx_{\tau+}$$

x_{-0} Designa una historia del sistema del pasado hacia el tiempo presente 0

$x_{\tau+}$ Es la historia correspondiente del sistema del tiempo posterior τ en adelante

$p[x_{-0}, x_{\tau+}]$ Es su densidad de probabilidad conjunta dentro del conjunto de sus historias

$p[x_{-0}]p[x_{\tau+}]$ Es el producto de las correspondientes densidades de probabilidades marginales para el pasado y futuro tomados separadamente

Transferencia de Información

- Supongamos dos sistemas interactivos que generan eventos x_n, y_n
- Se define la tasa de información transferida entre los dos sistemas como la cantidad de información adicional requerida para representar el valor de la próxima observación de x_n

$$h_1 = - \sum_{x_{n+1}} p(x_{n+1}, x_n, y_n) \log_a p(x_{n+1} | x_n, y_n)$$

Supongamos que el valor de la observación x_{n+1} no dependió de la actual observación y_n . Se define la transferencia de información de x_n a x_{n+1}

$$h_2 = - \sum_{x_{n+1}} p(x_{n+1}, x_n, y_n) \log_a p(x_{n+1} | x_n)$$

La transferencia de información de y_n a x_n se define como

$$h_2 - h_1 = \sum_{x_{n+1}, x_n, y_n} p(x_{n+1}, x_n, y_n) \log_a \left(\frac{p(x_{n+1} | x_n, y_n)}{p(x_{n+1} | x_n)} \right)$$

Transferencia de Información

- Hay dos direcciones para la transferencia de información, debido a su asimetría intrínseca:

$$T_{y \rightarrow x} = \sum_{x_{n+1}, x_n, y_n} p(x_{n+1}, x_n, y_n) \log \left(\frac{p(x_{n+1} | x_n, y_n)}{p(x_{n+1} | x_n)} \right)$$

$$T_{x \rightarrow y} = \sum_{x_{n+1}, x_n, y_n} p(y_{n+1}, x_n, y_n) \log \left(\frac{p(y_{n+1} | x_n, y_n)}{p(y_{n+1} | y_n)} \right)$$

Se puede expresar

$$T_{y \rightarrow x} = \sum_{x_{n+1}, x_n, y_n} p(x_{n+1}, x_n, y_n) \log \left(\frac{p(x_{n+1}, x_n, y_n) p(x_n)}{p(x_n, y_n) p(x_{n+1}, x_n)} \right)$$
$$T_{x \rightarrow y} = \sum_{y_{n+1}, x_n, y_n} p(y_{n+1}, x_n, y_n) \log \left(\frac{p(y_{n+1}, x_n, y_n) p(y_n)}{p(x_n, y_n) p(y_{n+1}, y_n)} \right)$$

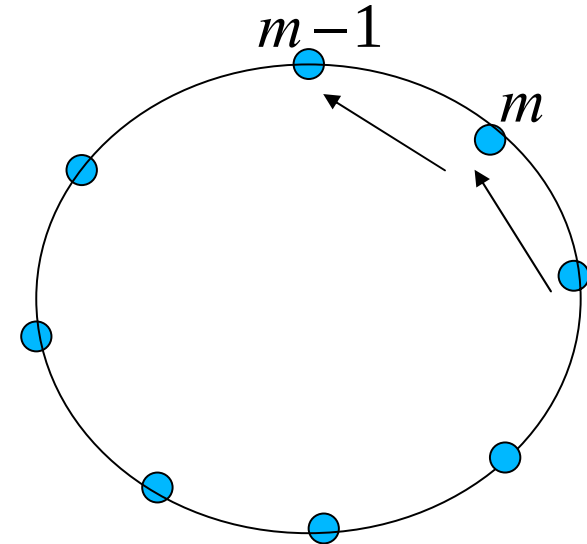
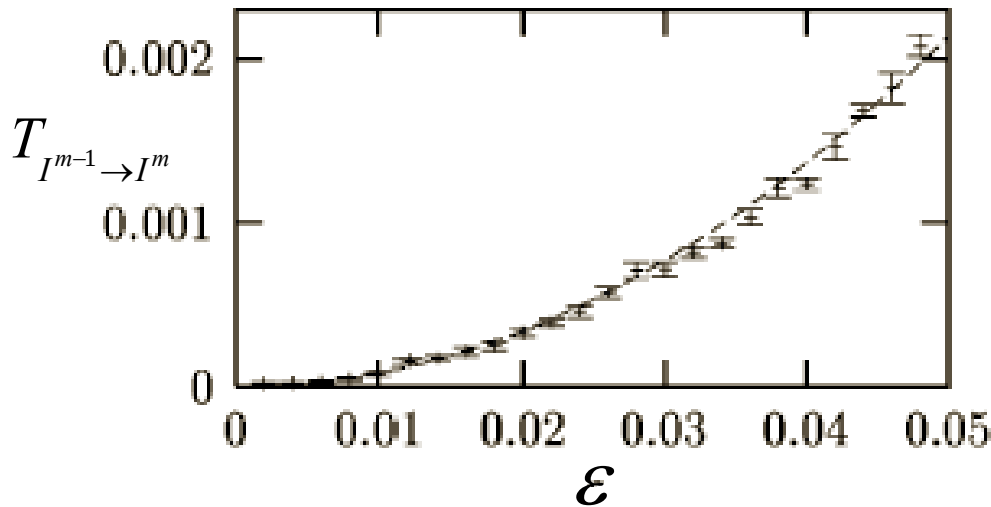
Transferencia de información en sistemas dinámicos

Ejemplo: Anillo de mapas acoplados unidireccionalmente.

$$x_{n+1}^m = f\left(\varepsilon x_n^{m-1} + (1-\varepsilon)x_n^m\right)$$

Dinámica local: mapa tienda

$$f(x < 0.5) = 2x; \quad f(x \geq 0.5) = 2 - 2x$$



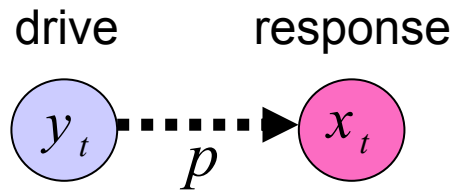
$$\varepsilon = 0$$

$$T_{I^{m-1} \rightarrow I^m} = T_{I^m \rightarrow I^{m-1}} = 0$$

T. Schreiber, PRL **85**.462 2000

10 realizaciones de condiciones iniciales y 100000 iteraciones para cada ε .
Acoplamiento local $\rightarrow$ No hay sincronización.

Modelo simple de sistema forzado



(t discreto)

$$y_{t+1} = g(y_t)$$

$$x_{t+1} = \begin{cases} w(x_t, y_t) = (1 - \varepsilon) f(x_t) + \varepsilon g(y_t) & \text{Con probabilidad } p \\ f(x_t) & \text{Con probabilidad } (1-p) \end{cases}$$

Para $p=1$, [Rulkov *et. al*, PRE (1995)].

Si $g = f$, Sincronización completa es posible: $x_t = y_t$

Si $g \neq f$, en general $x_t \neq y_t$

Sincronización generalizada: relación funcional $x_t \leftrightarrow y_t$

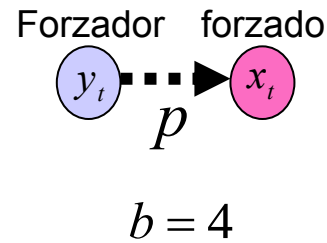
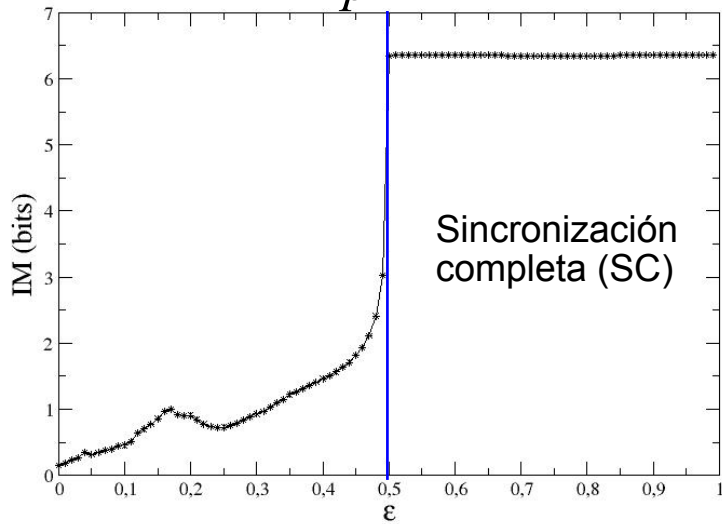
$p < 1$: búsqueda de condiciones mínimas para sincronización.

Sincronización completa y generalizada pueden ocurrir para $p < 1$.

Transferencia de información para sincronización completa

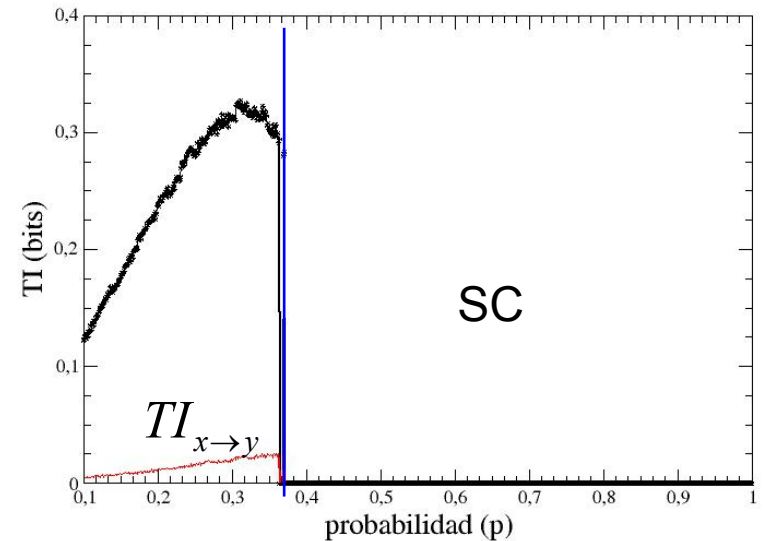
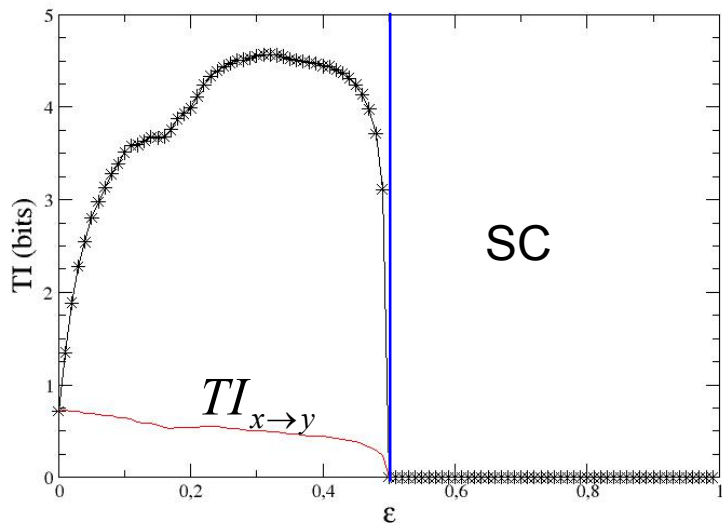
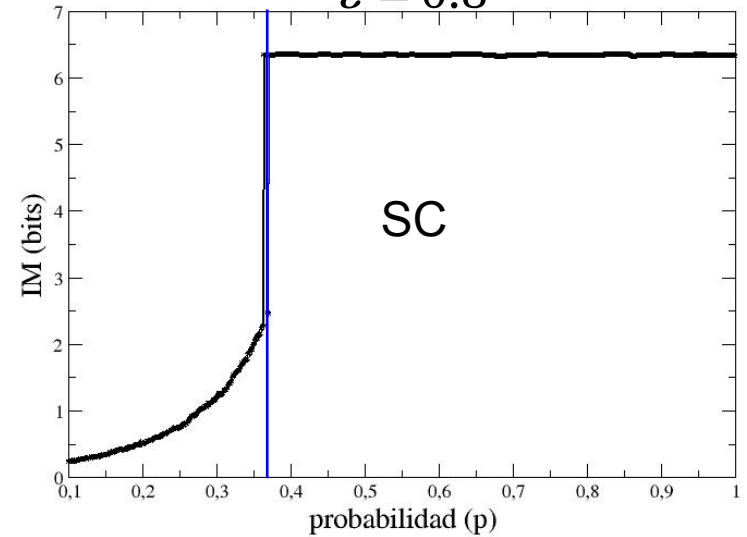
$$g(y) = by(1-y)$$

$$p = 1$$



$$f(x) = bx(1-x)$$

$$\varepsilon = 0.8$$



Transferencia de información para sincronización generalizada

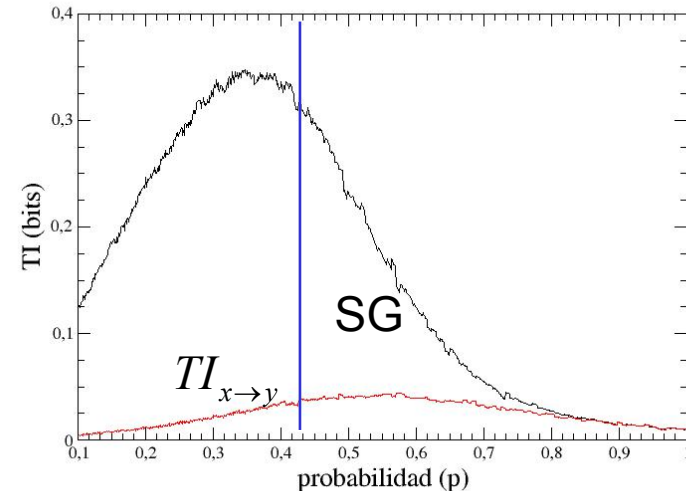
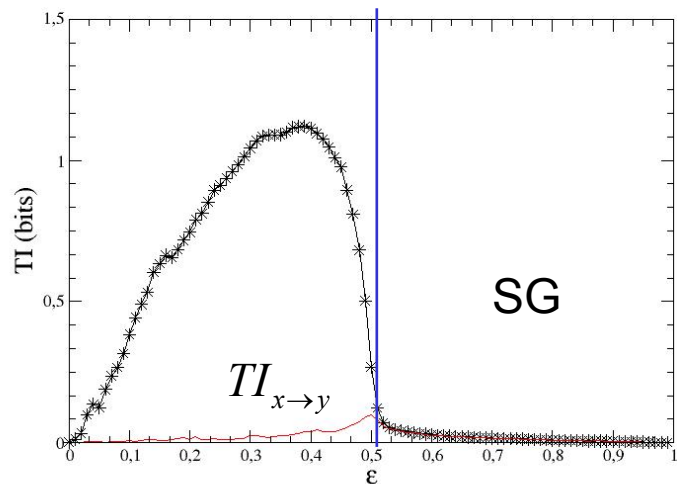
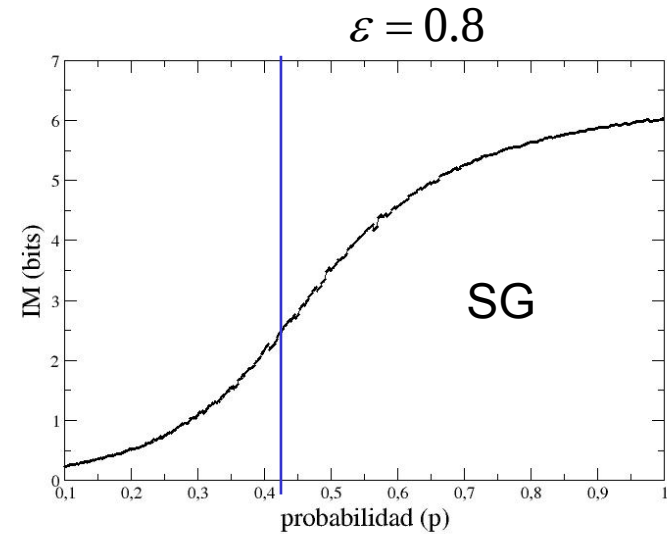
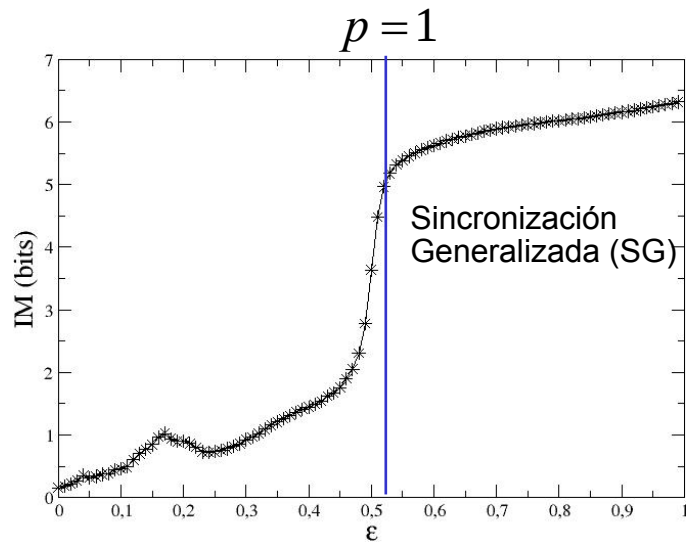
$$f(x, \alpha) = \frac{1}{1 - 2^{1-\alpha}} \left[1 - x^\alpha - (1-x)^\alpha \right] \quad \text{caos robusto } \alpha \in [2, 3].$$

Ali, Andreacut, EuroPhys Lett. (2001).

$$g(y_t) = by_t(1 - y_t)$$

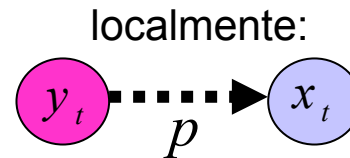
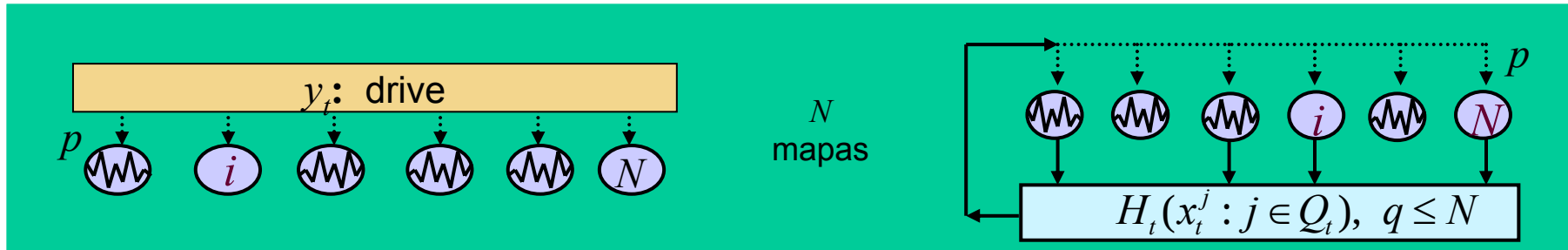
$$b = 4.0$$

$$\alpha = 2.3$$



Sincronización equivalente en sistemas autónomos y sistemas forzados

O. Alvarez-Llamoza, M.G. Cosenza. Phys. Rev. E **78**, 046216 (2008).



Analogía: un campo uniforme actúa sobre cada sistema en instante t :

localmente: $y_t \rightarrow x_t^i$ $H_t(x_t^1, x_t^2, \dots) \rightarrow x_t^i$

Cuando $y_t \leftrightarrow H_t$: comportamientos colectivos pueden ser similares en ambos sistemas.

Sincronización: $x_t^i = x_t^j, \forall i, j$ (CS y GS) son equivalentes en ambos sistemas.

La naturaleza de la influencia común que actúa sobre los elementos es irrelevante.

Nuestra conjetura: La cantidad de información transferida a nivel local para alcanzar sincronización (completa o generalizada) debe ser la misma en ambos sistemas.

Conclusiones

- TI es más adecuada (mas que la MI o MI con time-delayed) para determinar la dirección del flujo de información (dependencia) entre dos variables dinámicas acopladas.
- TI es mínima en la sincronización forzador-forzado en los casos $g = f$ (sincronización completa) y $g \neq f$ (sincronización generalizada).
- MI es máxima en la sincronización $g = f$ y $g \neq f$
- Analogía sistemas forzados $\leftrightarrow$ sistemas autónomos extendidos: **forzamiento común** y **acoplamiento global** pueden inducir comportamientos colectivos similares.
- Sincronización en sistemas forzados y autónomos extendidos puede ser predicha a partir del comportamiento de un sistema simple forzador-forzado.
- Forzamiento no necesita estar activo $\forall t$ para alcanzar ambos tipos de sincronización ($p < 1$).

Conjetura:

Esencial para **sincronización** in sistemas de elementos acoplados (forzados o autónomos) es compartir un mínimo de información por los elementos del sistema.
Fuente de la información (externa o endógena) es irrelevante.

La emergencia de otros comportamientos colectivos en sistemas complejos depende de una cantidad mínima de información transferida de un nivel macroscópico a nivel local.