



Universidad de Los Andes  
Facultad de Ciencias  
Centro de Física Fundamental  
Area de Caos y Sistemas Complejos



# Estructuras Jerárquicas inducidas por estímulo externo en redes dinámicas adaptativas

**Victor J. Márquez R.**

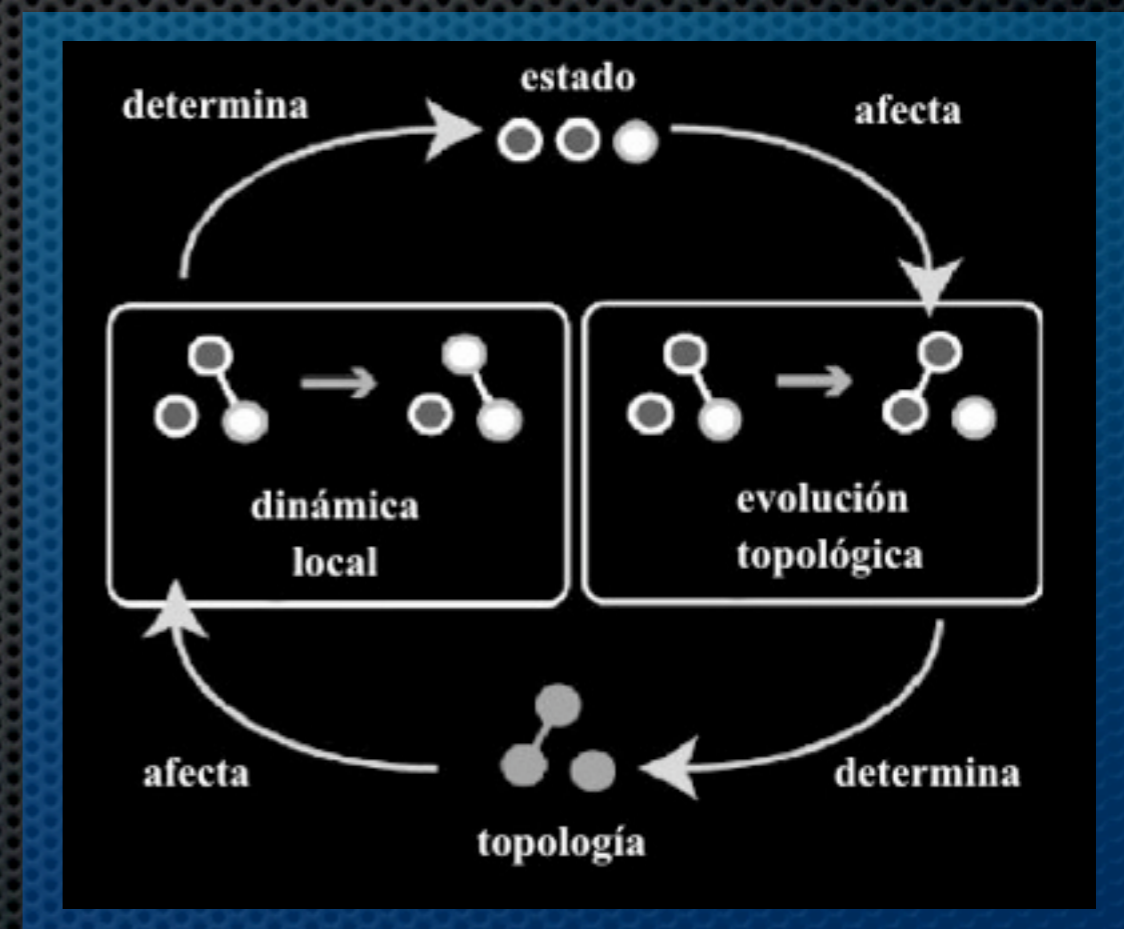
Tutor: Dr. Mario Cosenza



# Sistemas complejos adaptativos (coevolutivos)

Estados de los elementos  $\longleftrightarrow$  conectividad de la red. Cambian en el tiempo.

**Ejemplos:** redes sociales, ecología, colonias de insectos, **cerebro**.



**Nuestro problema:** Sistemas adaptativos sujetos a una fuerza o estímulo externo.

**Nuestro modelo:** red coevolutiva de mapas acoplados forzados como modelo simple de sistemas de neuronas sujetos a un estímulo externo.



# Caos

Es aperiódico a largo plazo. Las trayectorias en el espacio de fase del sistema no se ajustan a un punto fijo, órbitas periódicas u órbitas quasi-periódicas para  $t \rightarrow \infty$ .

Es determinista. Las ecuaciones dinámicas del sistema no contienen parámetros o términos aleatorios o con ruido. El comportamiento irregular surge de la no linealidad del sistema.

Es extremadamente sensible a las condiciones iniciales. Trayectorias cercanas se separan exponencialmente rápido

## Rutas al Caos

Bifurcaciones de duplicación de período.  
La ruta de Feigenbaum.

Bifurcaciones tangentes inversas.  
Intermitencia o ruta de Pomeau-Manneville

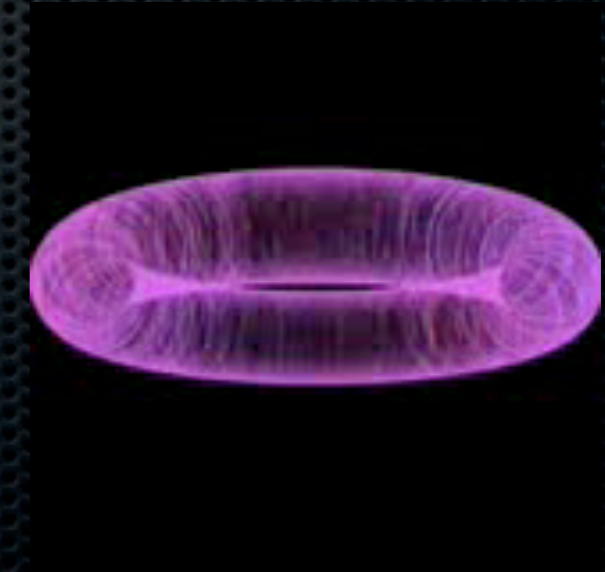
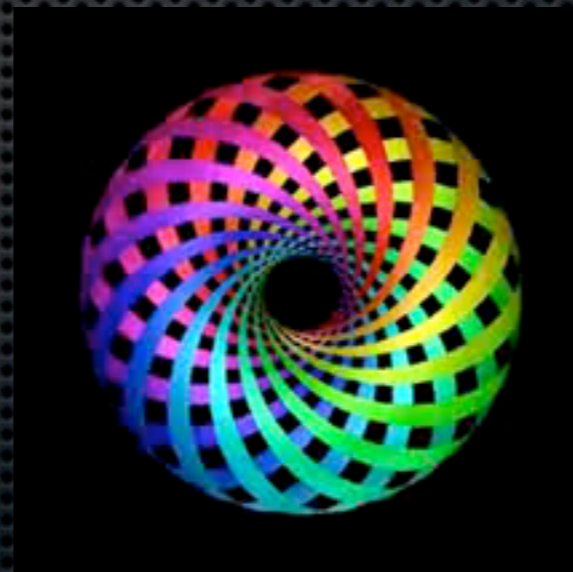
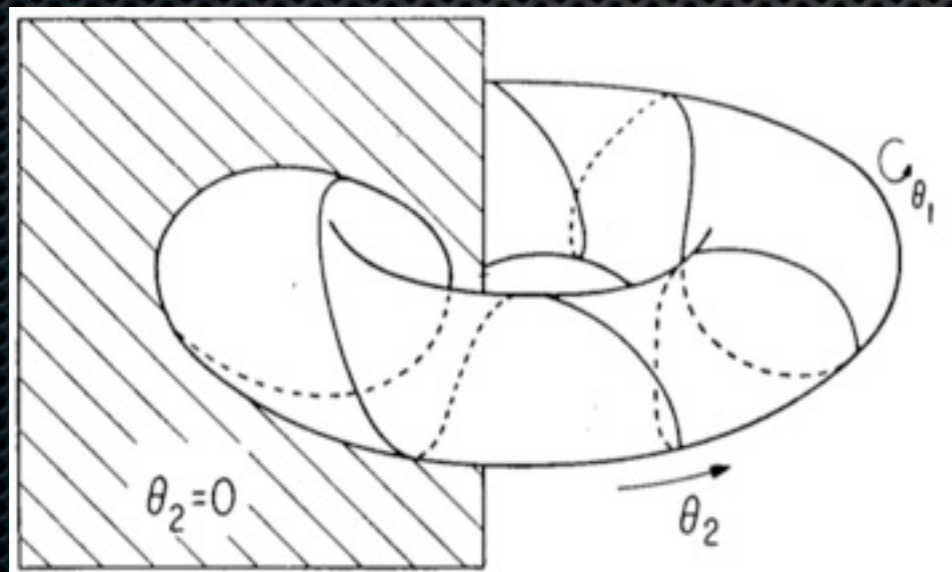
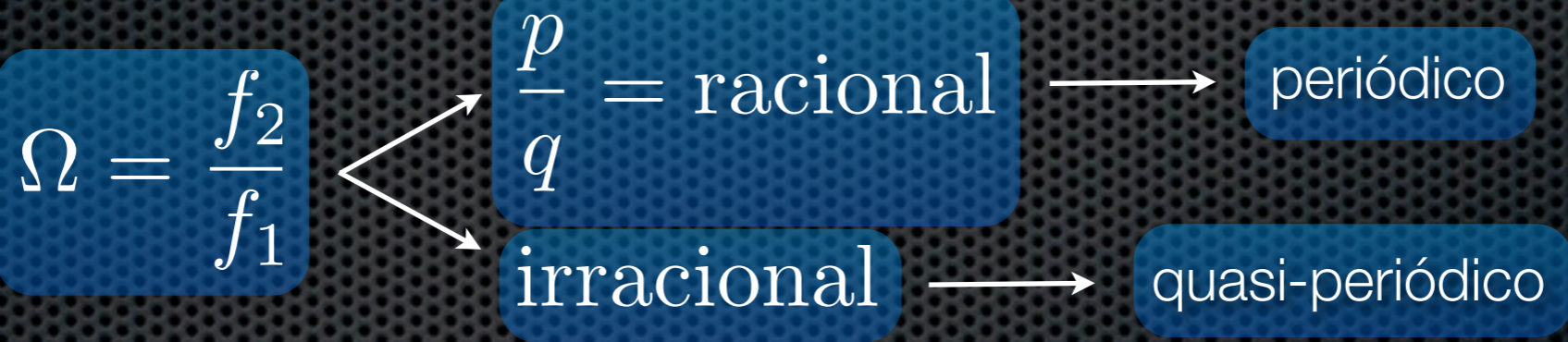
Repetidas bifurcaciones de Hopf.  
Quasi-periodicidad o ruta de Ruelle-Takens.



# Quasi-Periodicidad

Sistemas que presentan comportamiento multifrecuencia:

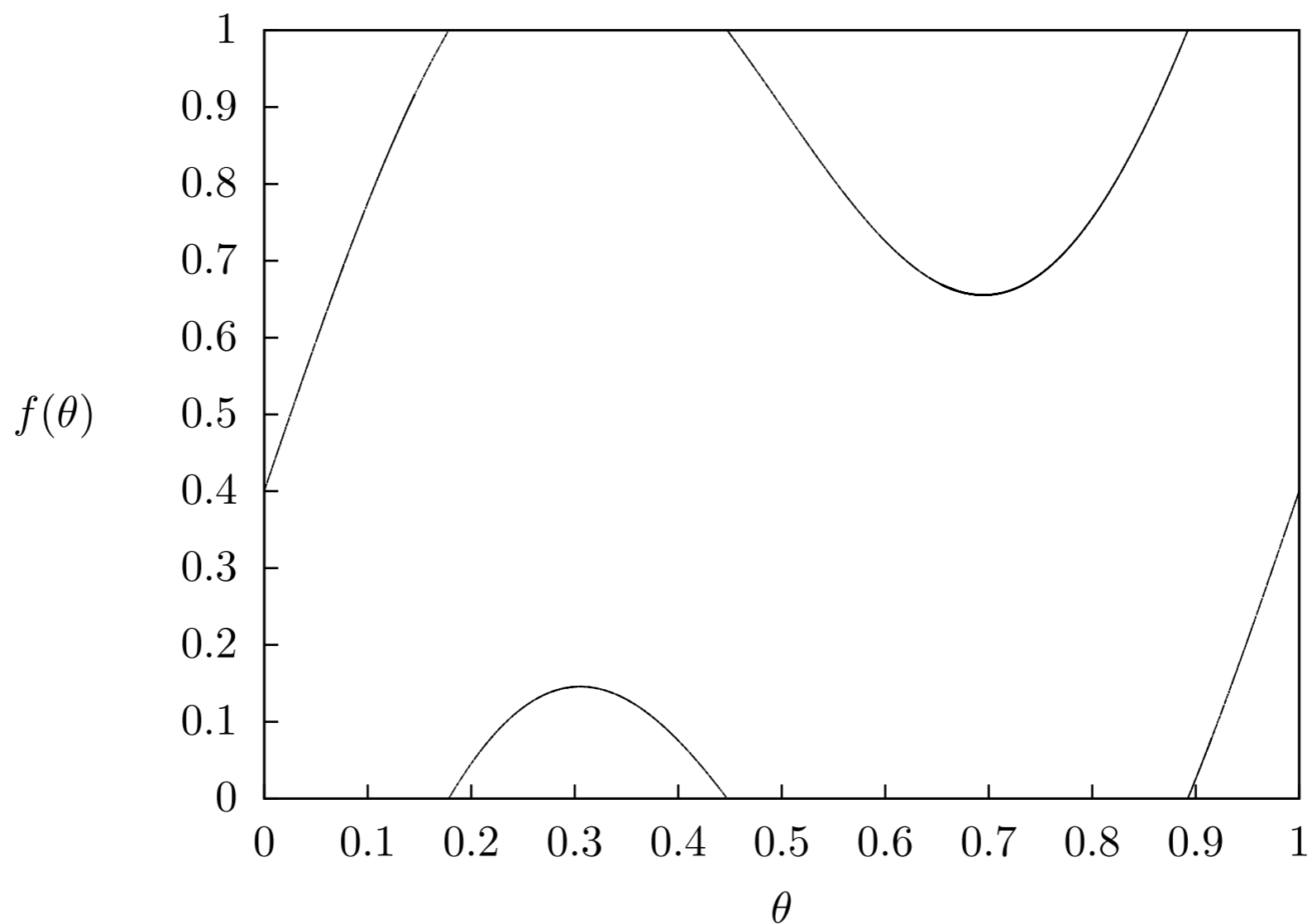
- ✦ Un sistema no lineal con una frecuencia de oscilación natural y una fuerza periódica externa.
- ✦ Sistemas no lineales acoplados que presentan espontáneamente oscilaciones en dos o más frecuencias.





# Mapa del Círculo

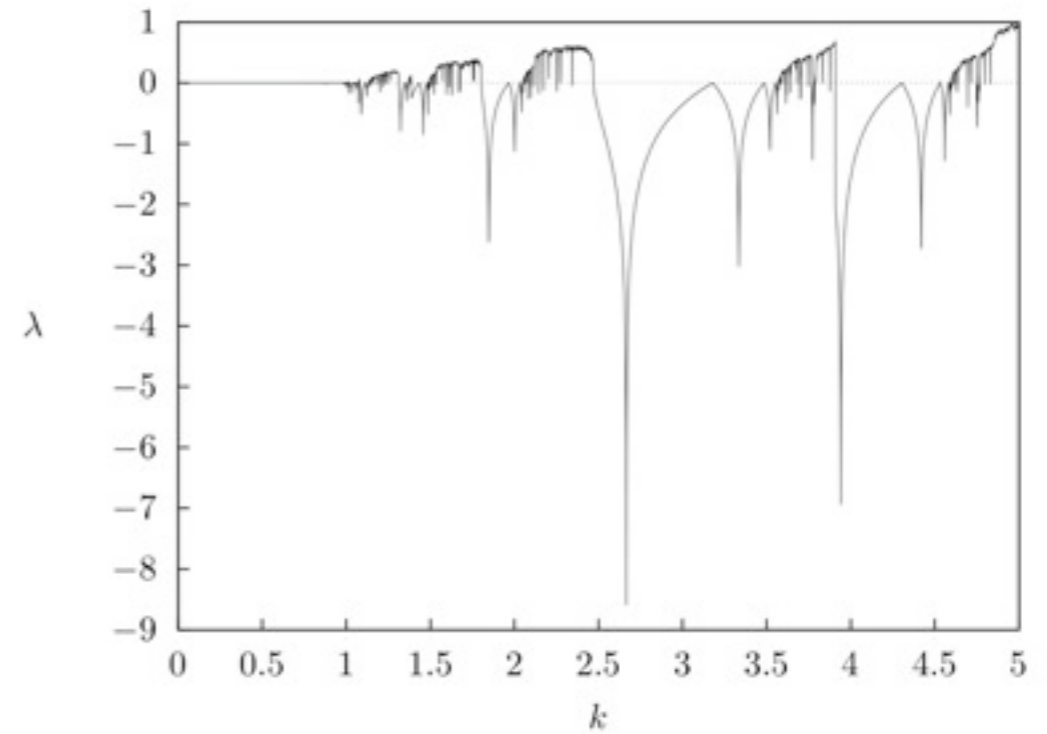
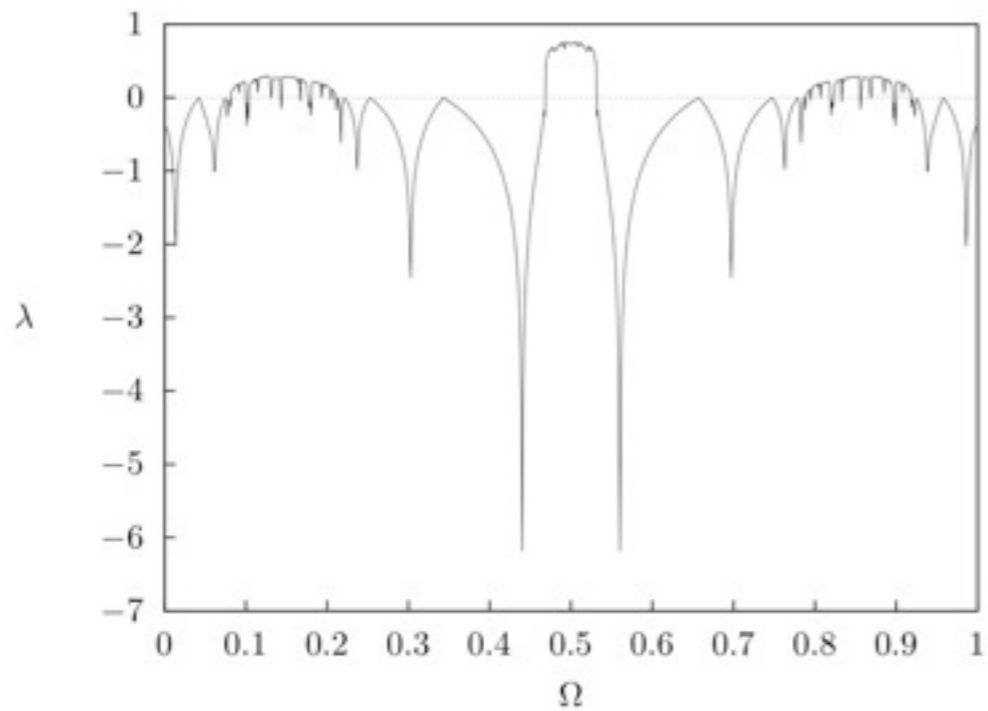
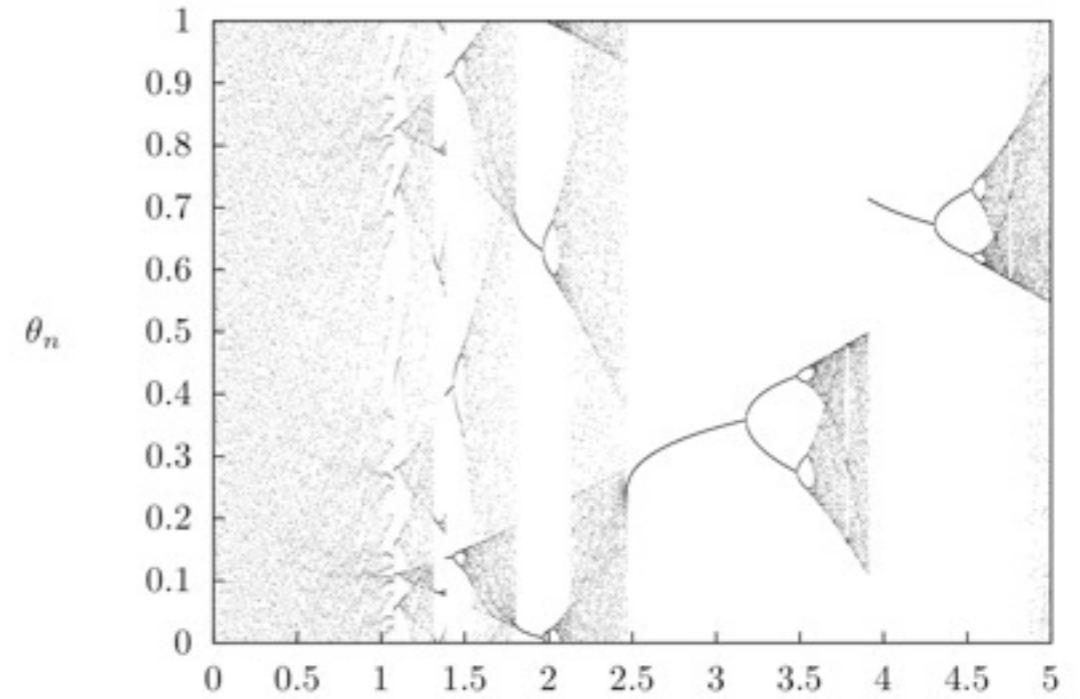
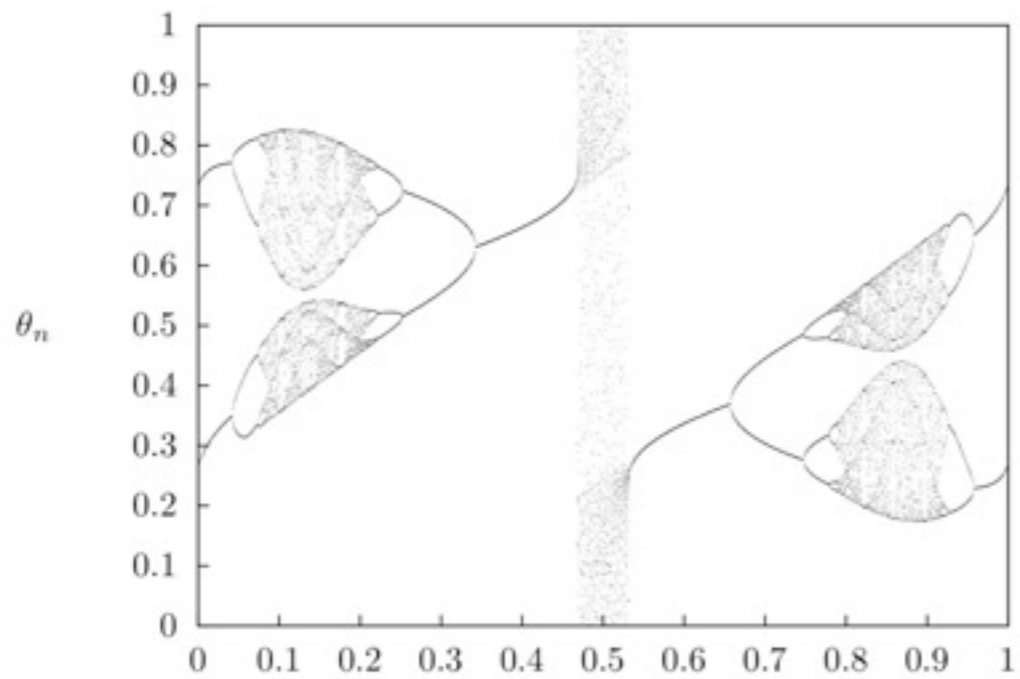
$$\theta_{n+1} = f(\theta_n) = \theta_n + \Omega + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi\theta_n), \quad \text{mod } 1,$$



$$k = 2.9392, \Omega = 0.4$$



# Diagrama de bifurcación y exponente de Lyapunov

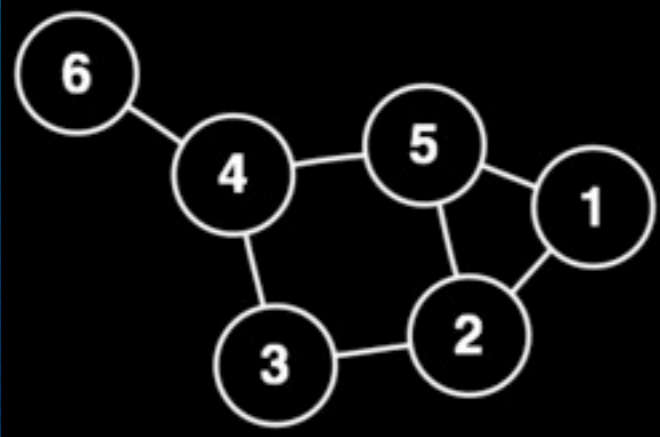


$$k = 2.9392$$

$$\Omega = 0.606661$$



# Redes



Grafos

$$G = (V, E)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E = \{ \{1,2\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{4,6\} \}$$

La estructura de la red se caracteriza por su matriz de adyacencia  $a_{ij}$

## Caracterización de redes

Distribución de grados

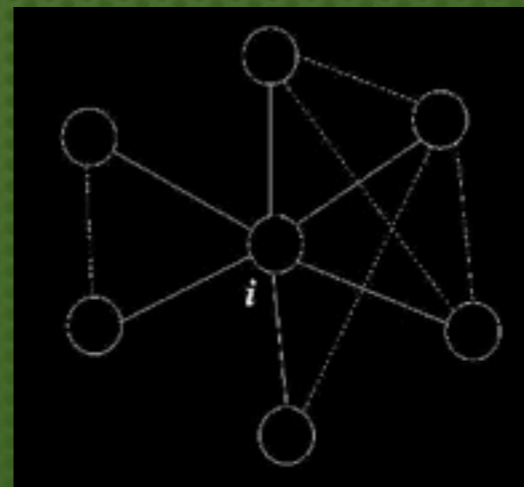
$$k_i = \sum_j a_{ij} = \sum_j a_{ji}$$

$$k_i = k_i^{in} + k_i^{out} = \sum_j a_{ji} + \sum_j a_{ij}$$

$p(k)$

Coeficiente de clustering

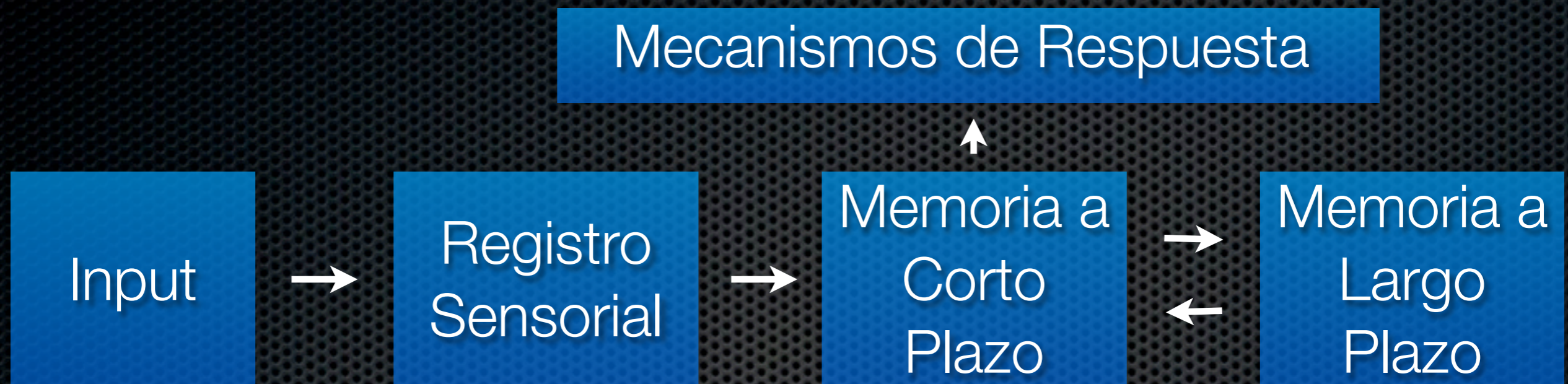
$$C = \langle C_i \rangle_i = \left\langle \frac{n_i}{\frac{1}{2}k_i(k_i - 1)} \right\rangle_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{n_i}{\frac{1}{2}k_i(k_i - 1)}$$



$k_i$  = grado del nodo  $i$   
 $n_i$  = total de conexiones entre vecinos más cercanos de  $i$   
 $N$  = número total de nodos



# El Modelo de la Memoria de Atkinson y Shiffrin

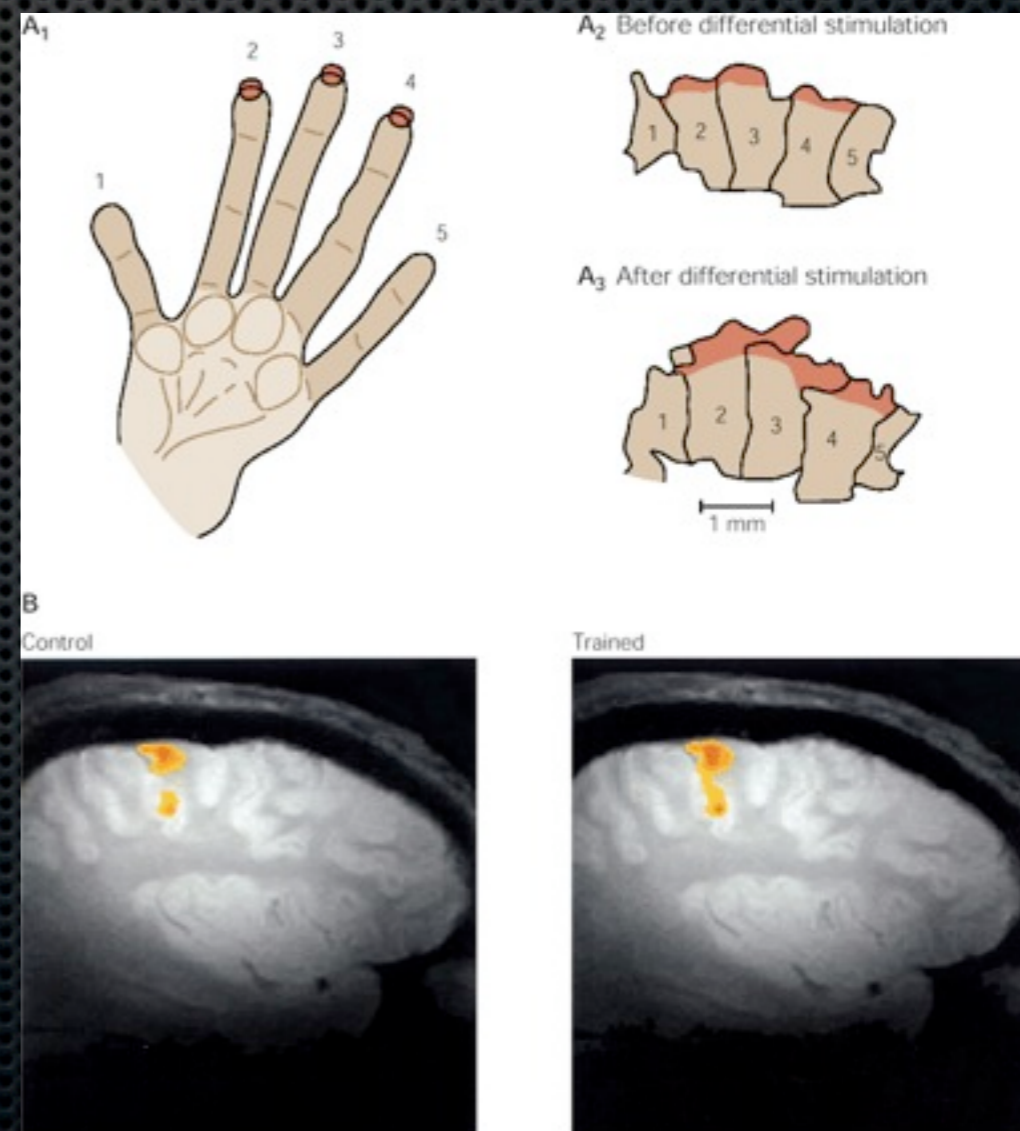
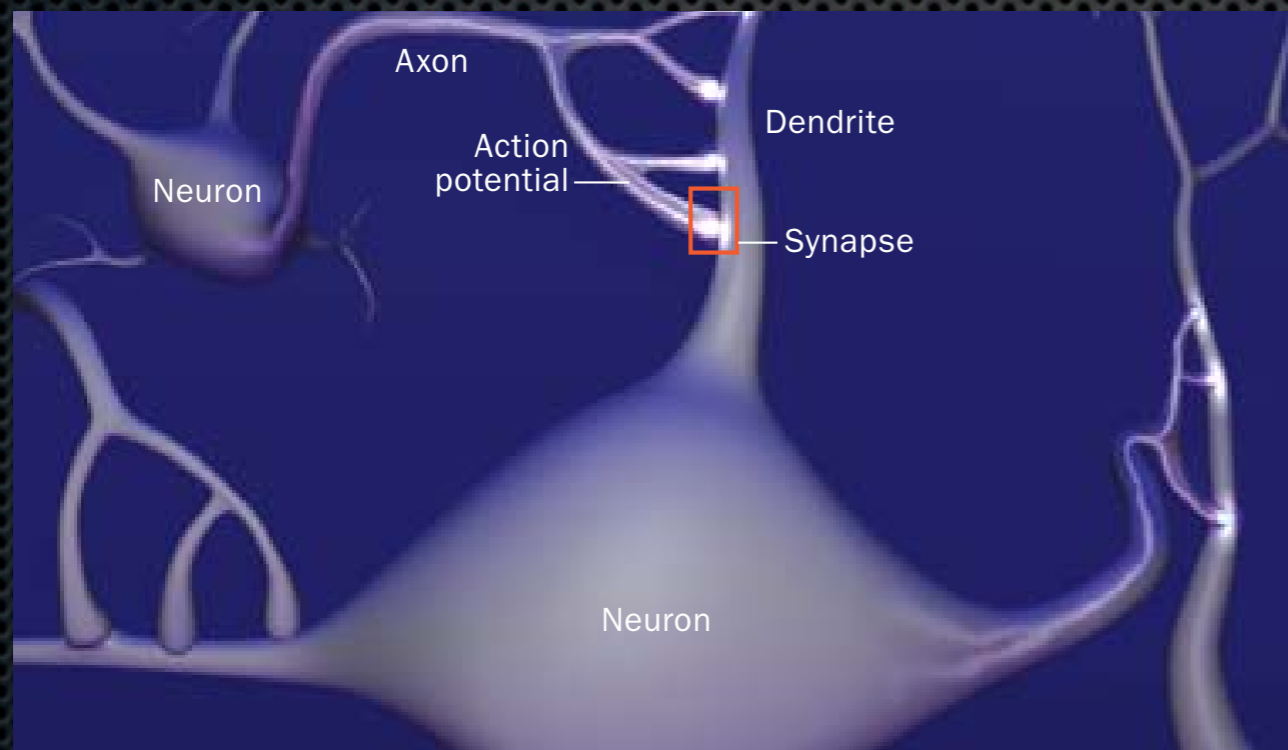
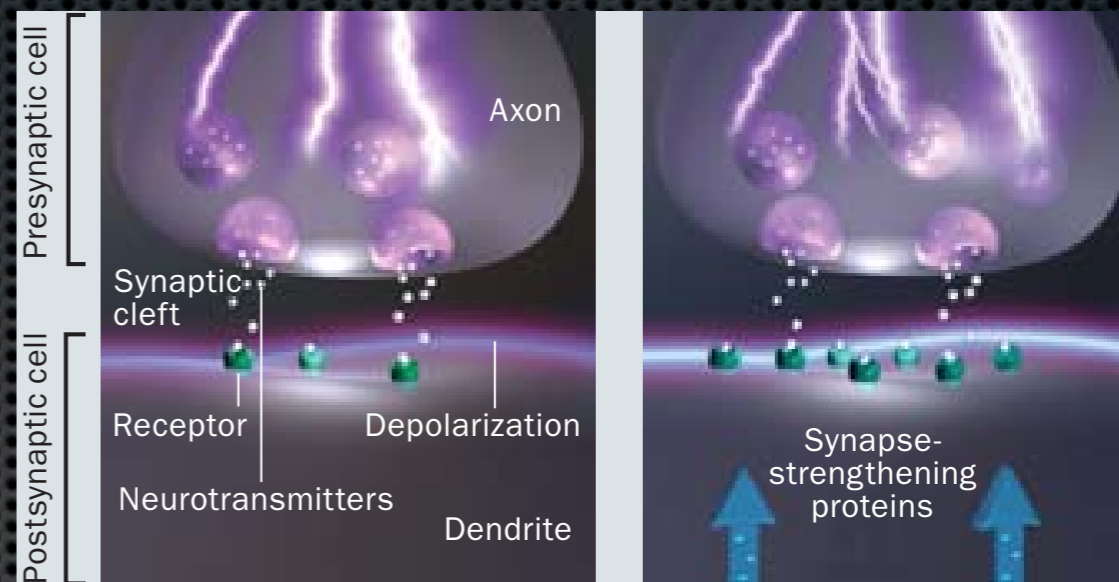


## El Proceso de la Memoria en el Cerebro





# Plasticidad en el Cerebro





# Modelo de Ito y Kaneko

J. Ito, K. Kaneko, Neural Networks **13**, 275 (2000).

$$x_{n+1}^i = x_n^i + \Omega + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x_n^i) + \frac{c}{2\pi} \sum_{j=1}^N \epsilon_n^{ij} \sin(2\pi x_n^i) + I^i$$
$$\epsilon_{n+1}^{ij} = \frac{[1 + \delta \cos 2\pi(x_n^i - x_n^j)] \epsilon_n^{ij}}{\sum_{j=1}^N [1 + \delta \cos 2\pi(x_n^i - x_n^j)] \epsilon_n^{ij}}$$

$x_n^i$  = estado de la unidad  $i$

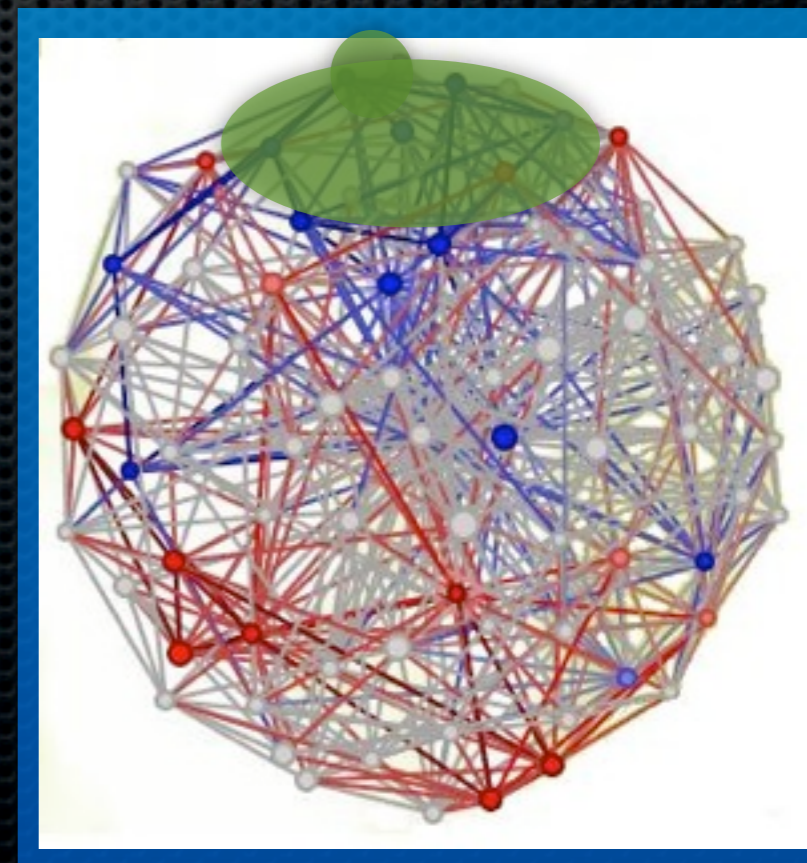
$N$  = número de unidades

$\epsilon_n^{ij}$  = intensidad de acoplamiento de  $j \rightarrow i$

$\delta$  ( $0 \leq \delta \leq 1$ ) = grado de plasticidad

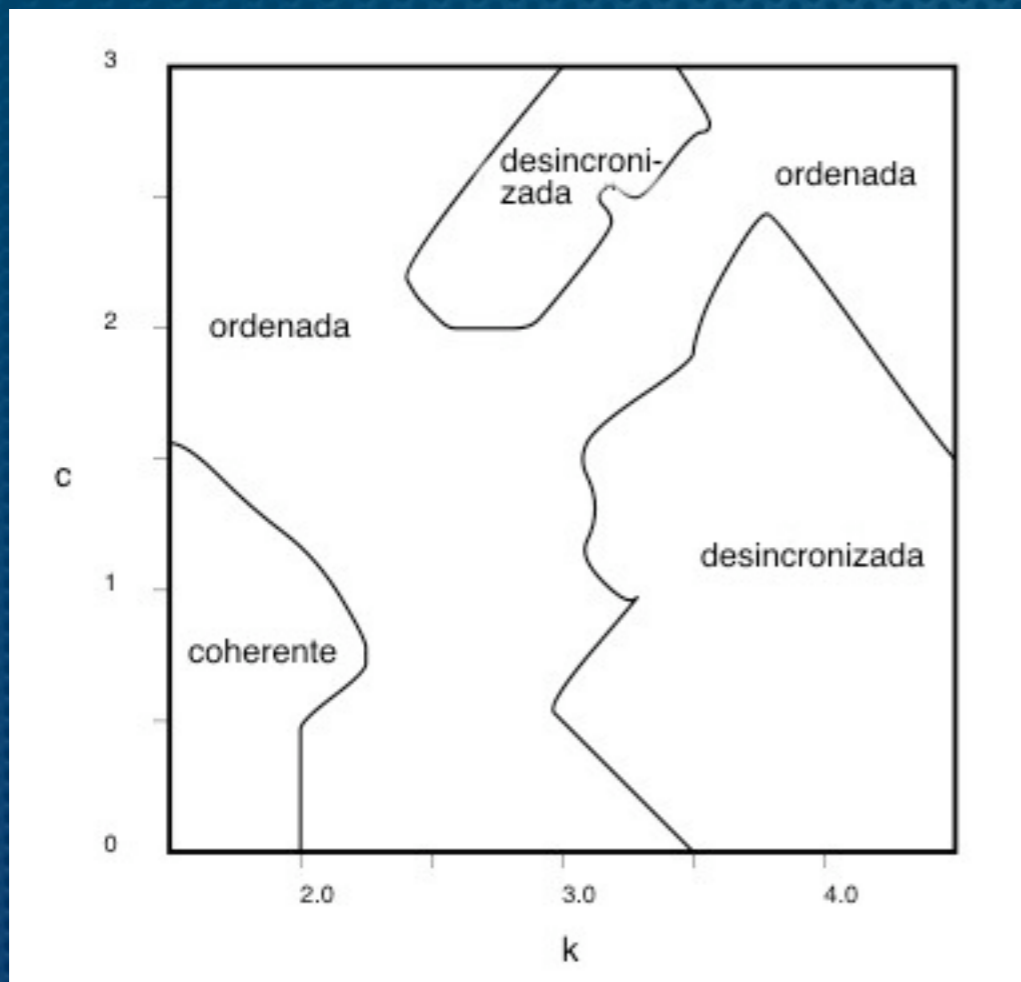
$c$  = acoplamiento global

Input



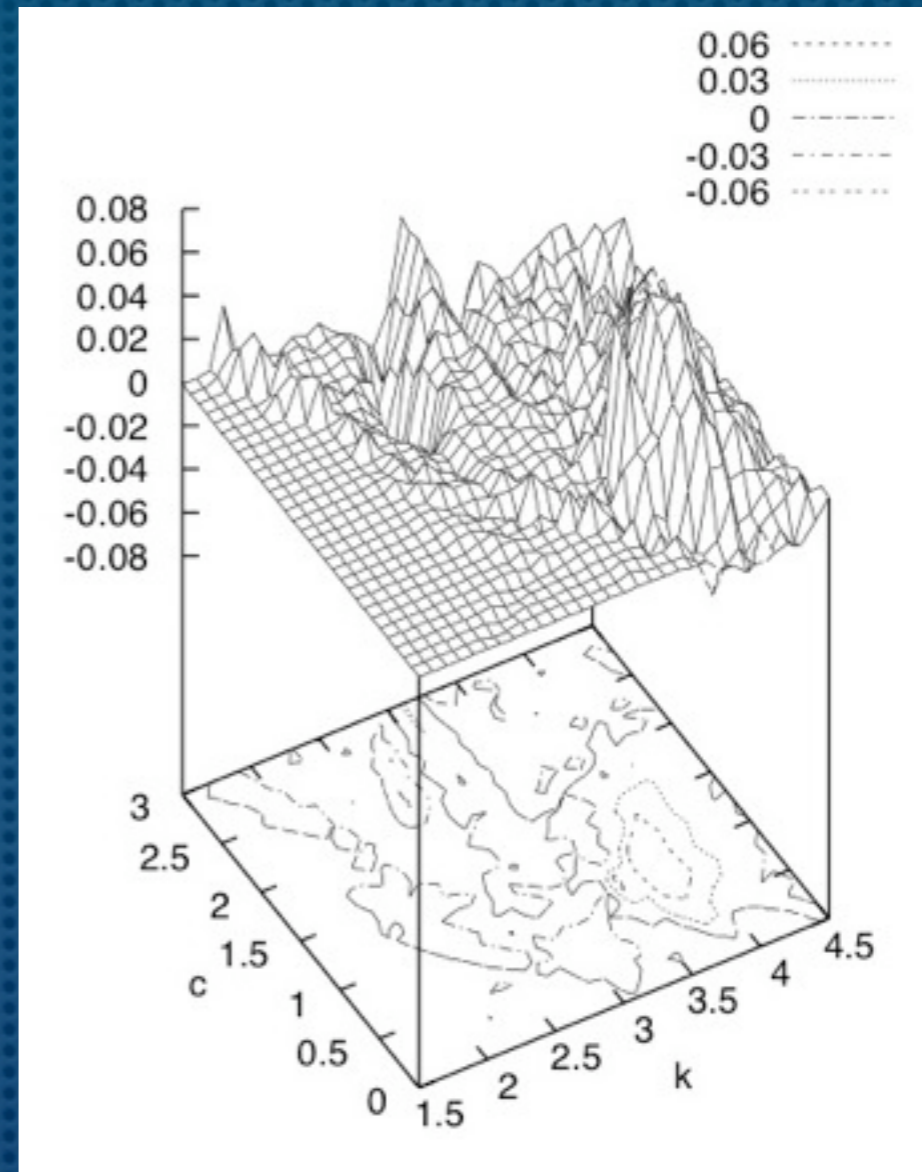


# Comportamiento del Modelo



$$N = 10 \quad \Omega = 0$$

$$\delta = 0.1 \quad I = 0$$



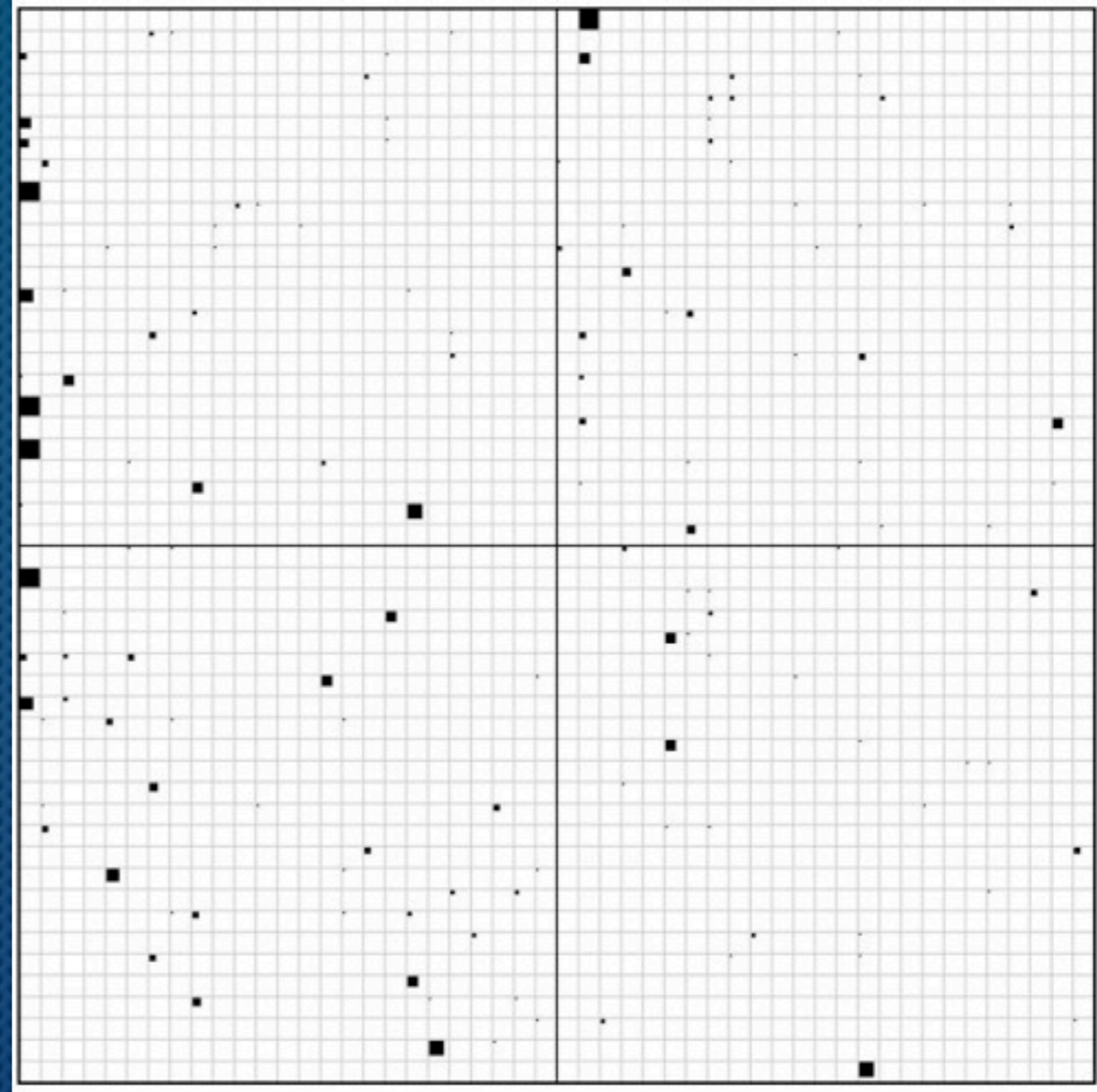
$$A = \frac{1}{(N-1)^2} \frac{1}{\tau_m} \sum_{i \neq j} \sum_{n=\tau_t}^{\tau_t + \tau_m} |\epsilon_n^{ij} - \epsilon_{n-1}^{ij}|$$

$$A(\text{con } I = 0) - A(\text{con } I = 0.2)$$

Respuesta más fuerte al estímulo en  
 $3.5 < k < 4.2$  y  $0.2 < c < 2$



# Evolución de la matriz de conectividad



El tamaño de los cuadros es proporcional al valor de  $\epsilon_{ij}$

$$N = 50 \times 50$$

$$k = 4.1$$

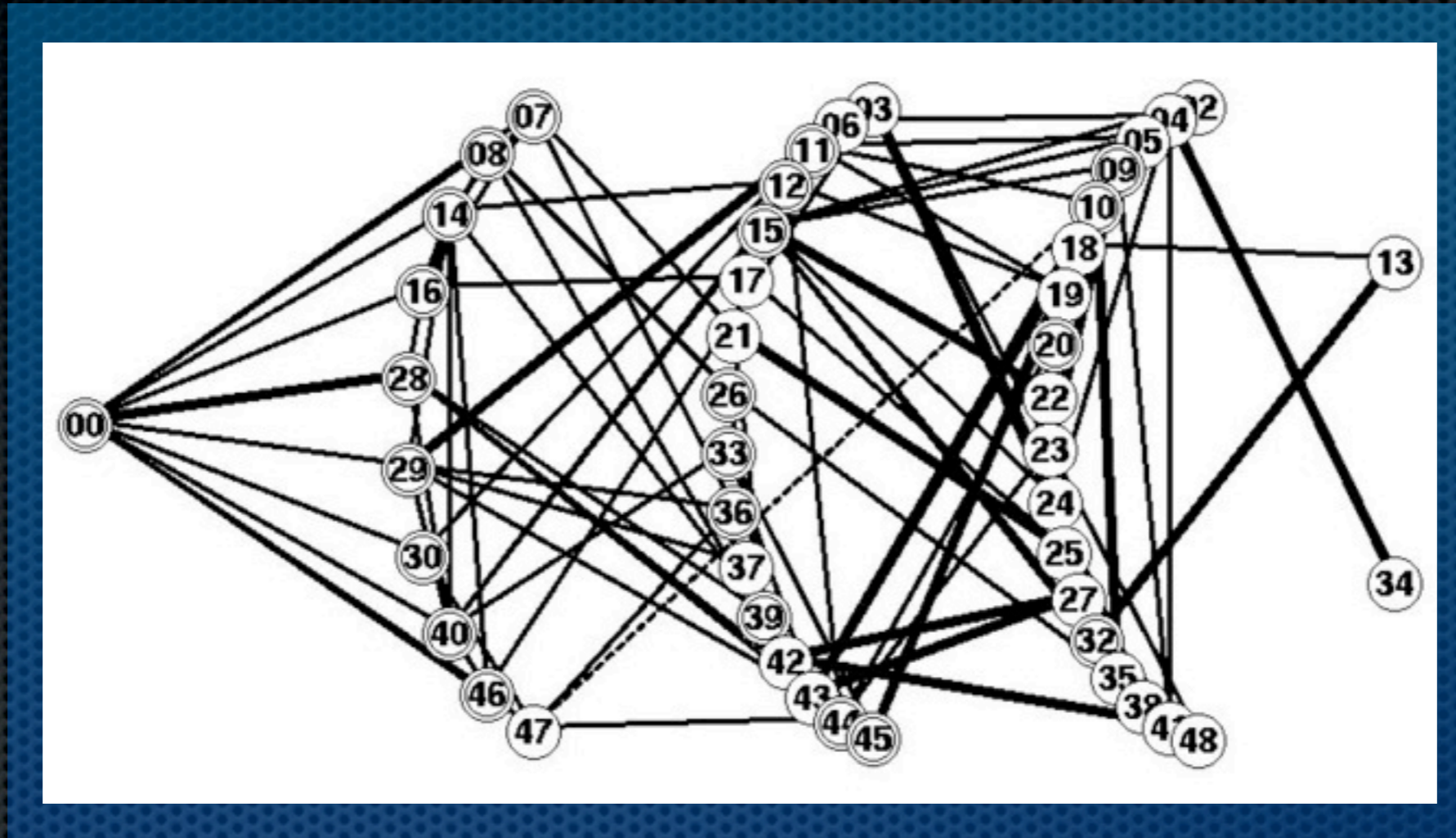
$$c = 1.0$$

$$\delta = 0.1$$

$$I = 0.2$$



# Estructura jerárquica emergente en la red



Lineas delgadas indican dirección →

Lineas gruesas indican dirección ←

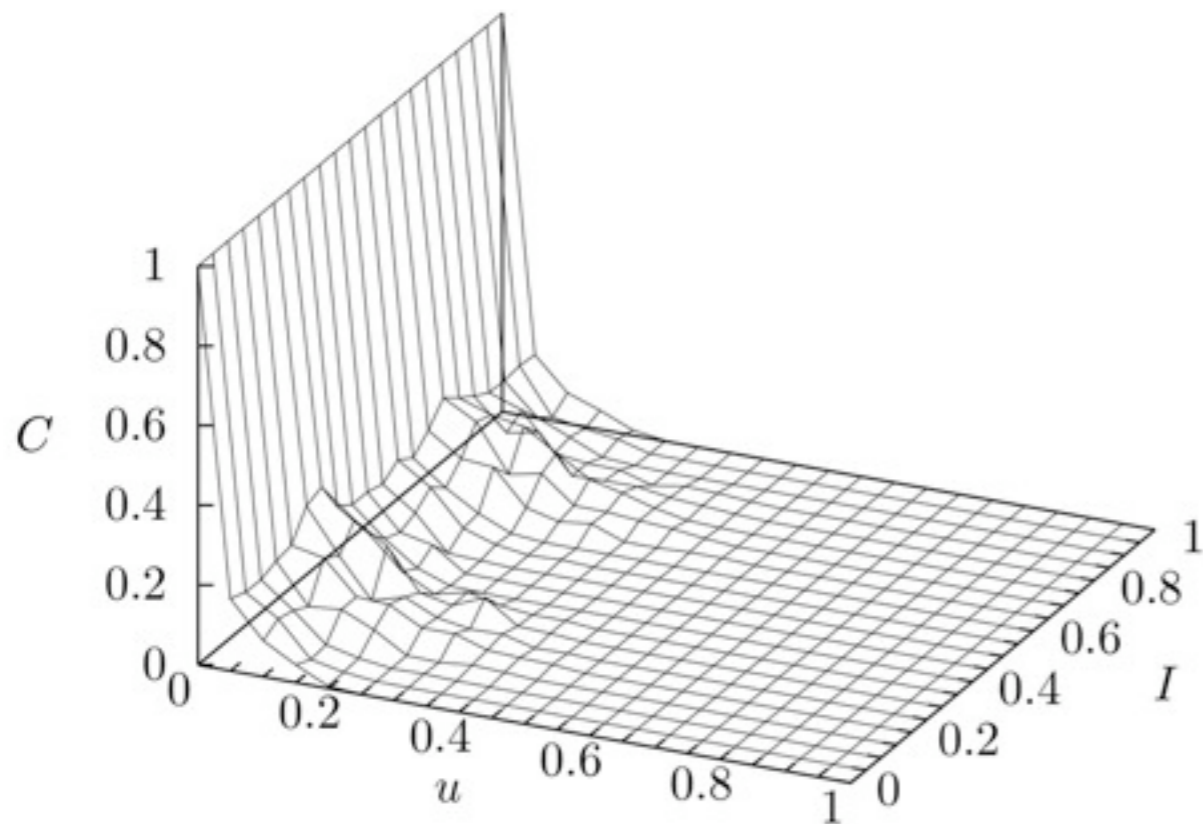
$$u = 0.1$$

Las unidades de la capa  $M$  se conectan con las unidades en la capa  $(M - 1)$ ,  $M$ , y  $(M + 1)$



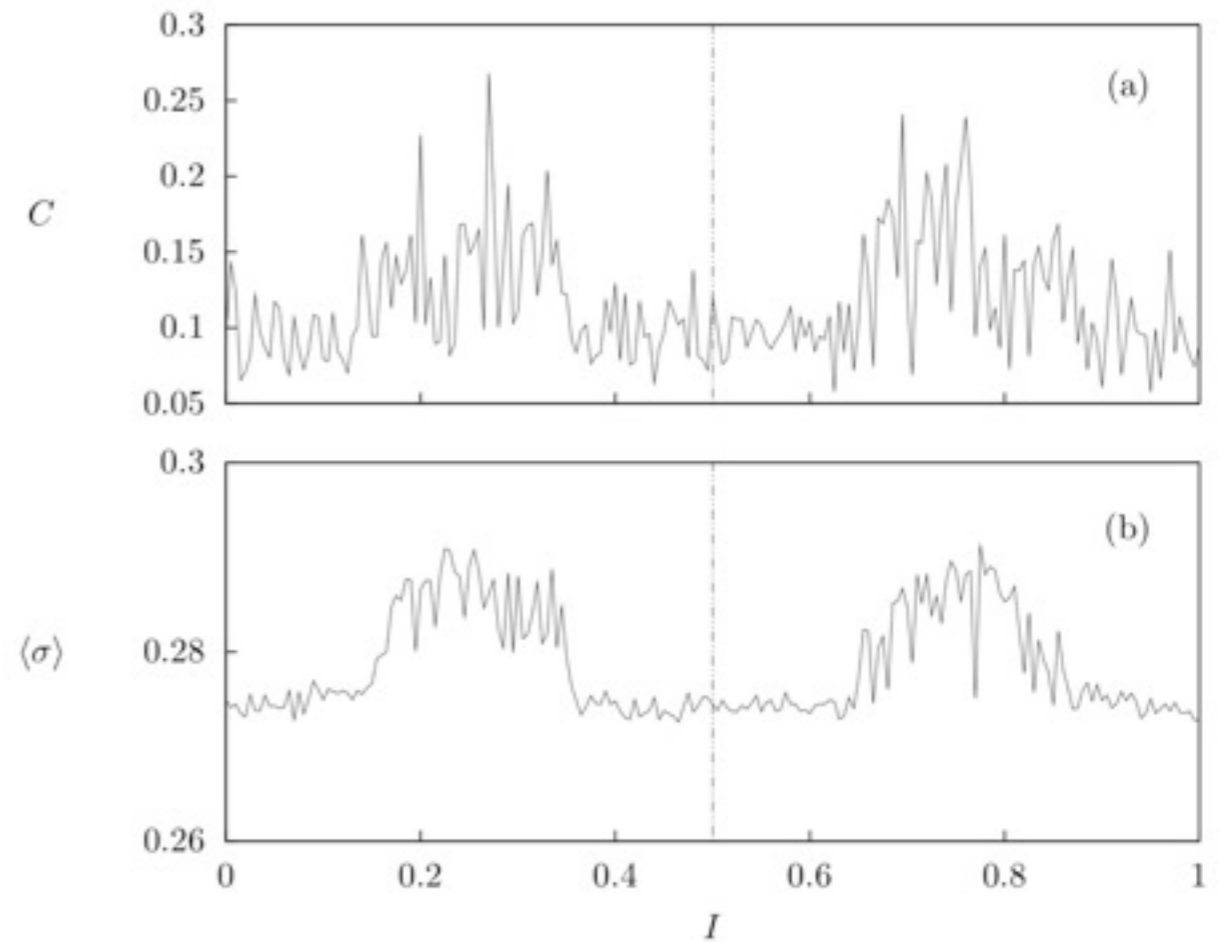
# Formación de estructuras con estímulo variable

## Nuestros resultados



Coefficiente de Clustering en función de los parámetros de umbral  $u$  y de intensidad de estímulo externo  $I$ .

$$\delta = 0.1, \Omega = 0, N = 50$$



(a) Promedio del coeficiente de clustering  $C$ .

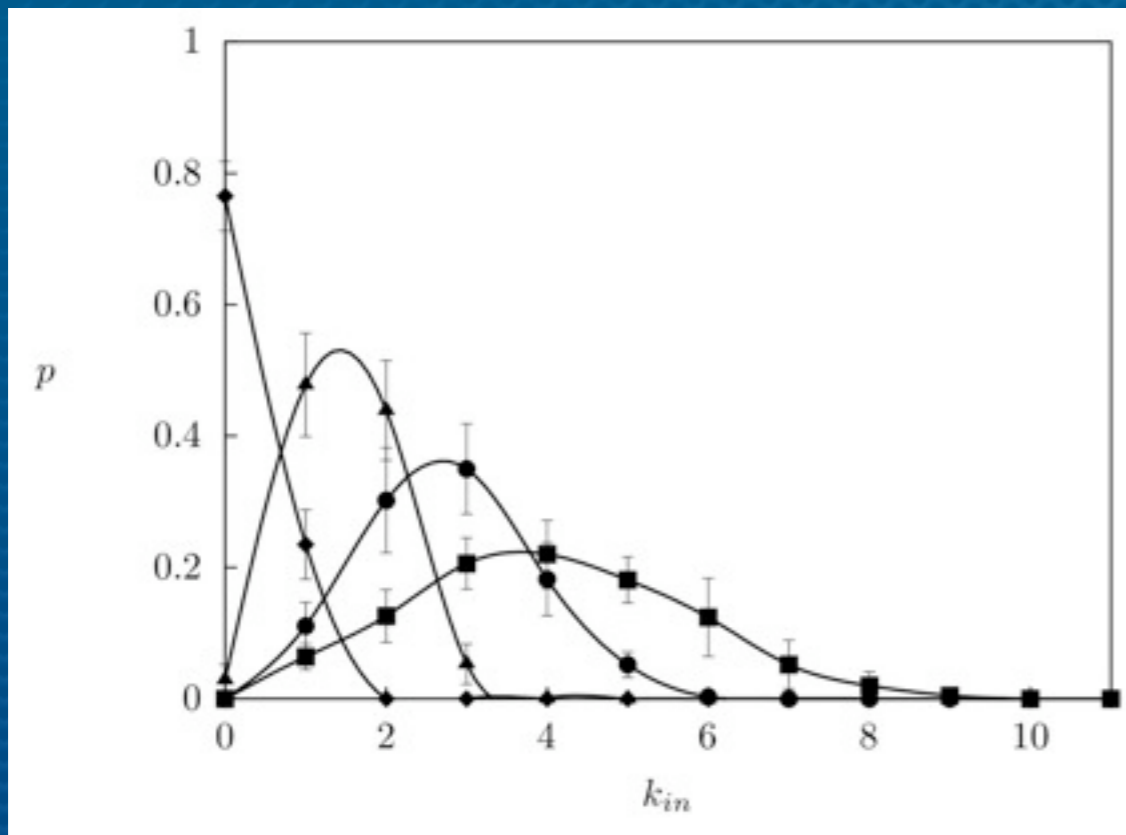
(b) Promedio asintótico  $\langle \sigma \rangle$  de la desviación estándar, como función del estímulo externo  $I$ .

$$\delta = 0.1, \Omega = 0, N = 50$$

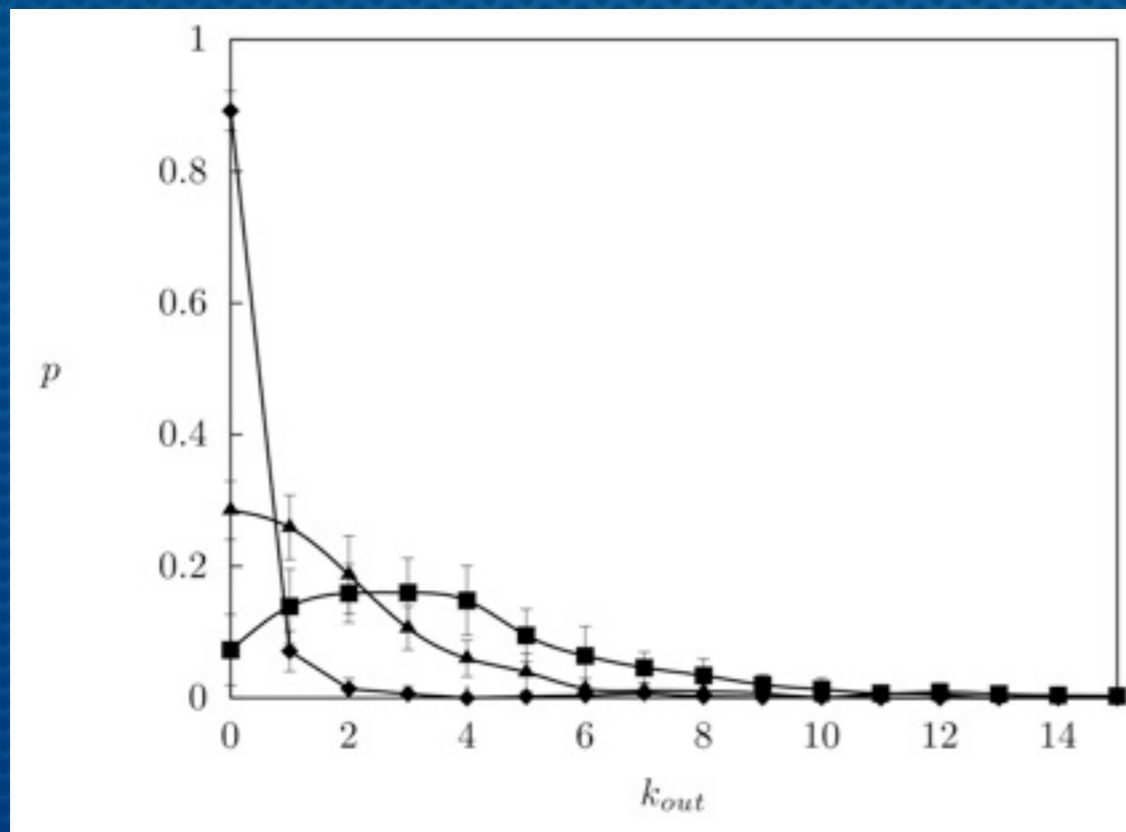
$$\sigma_n = \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_n^i - \langle x_n \rangle)^2 \right]^{1/2}$$



# Distribución de probabilidad de conexiones para distintos valores de umbral



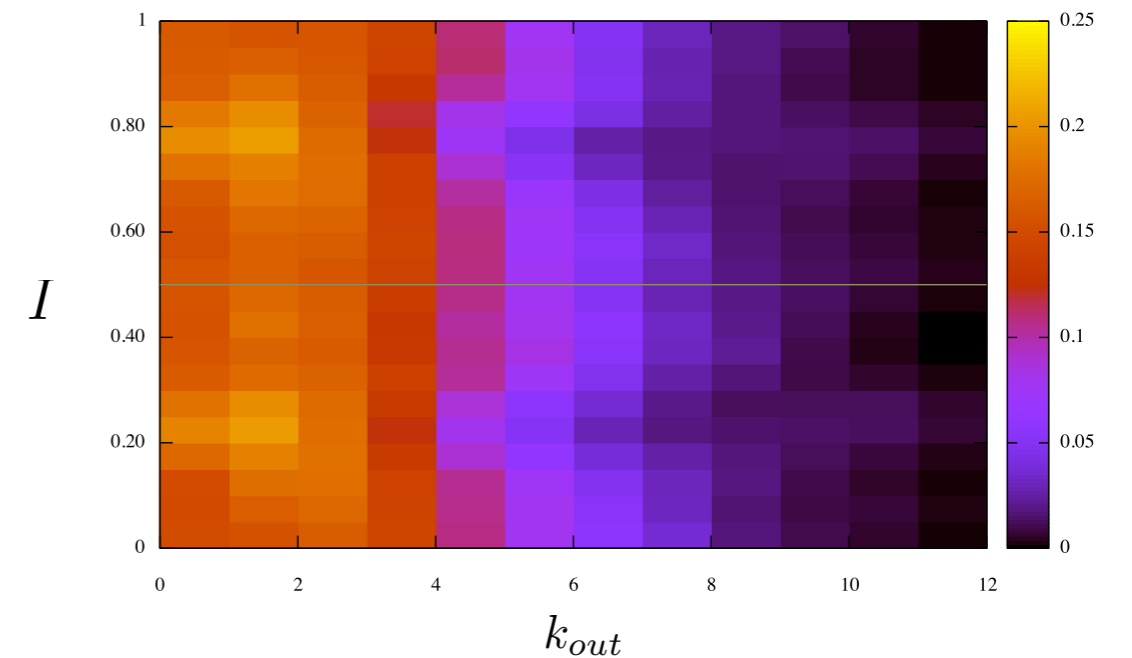
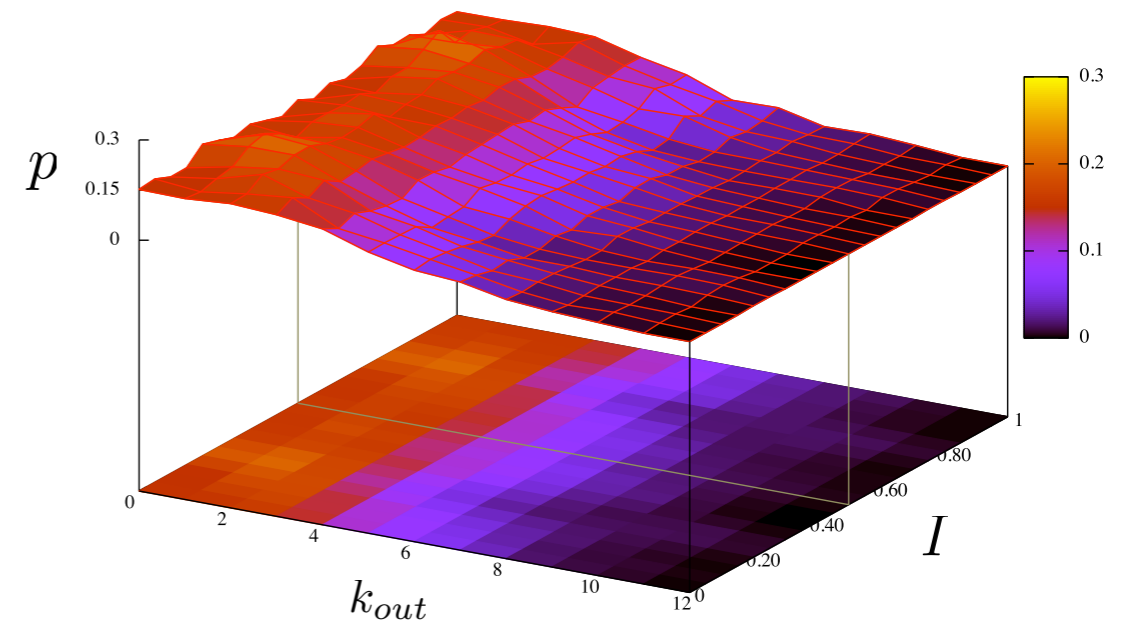
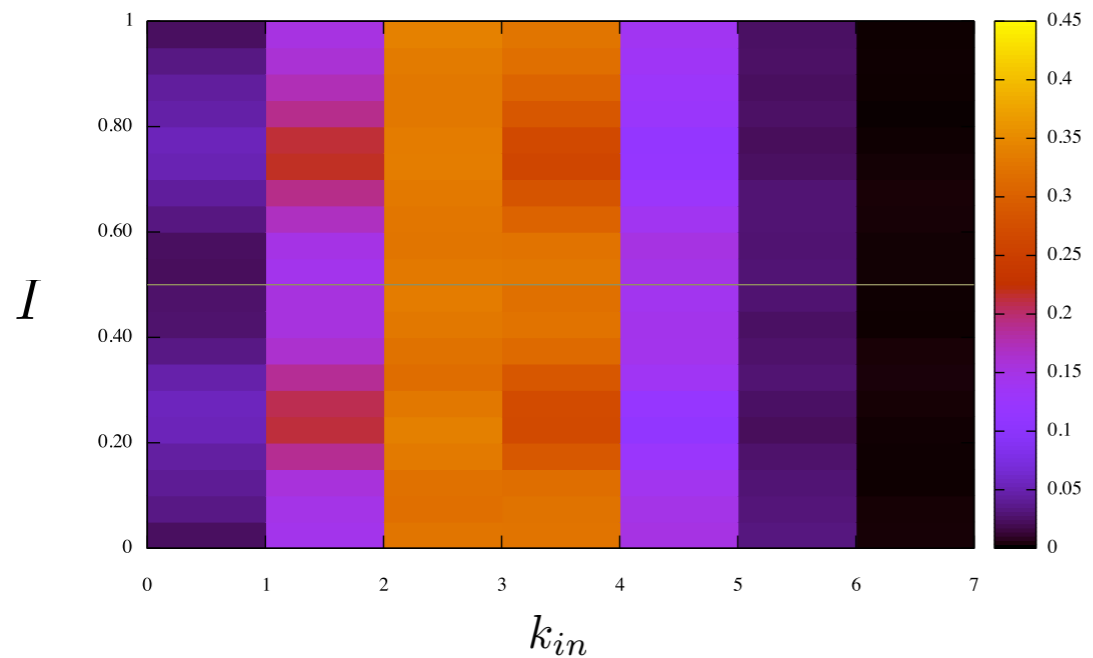
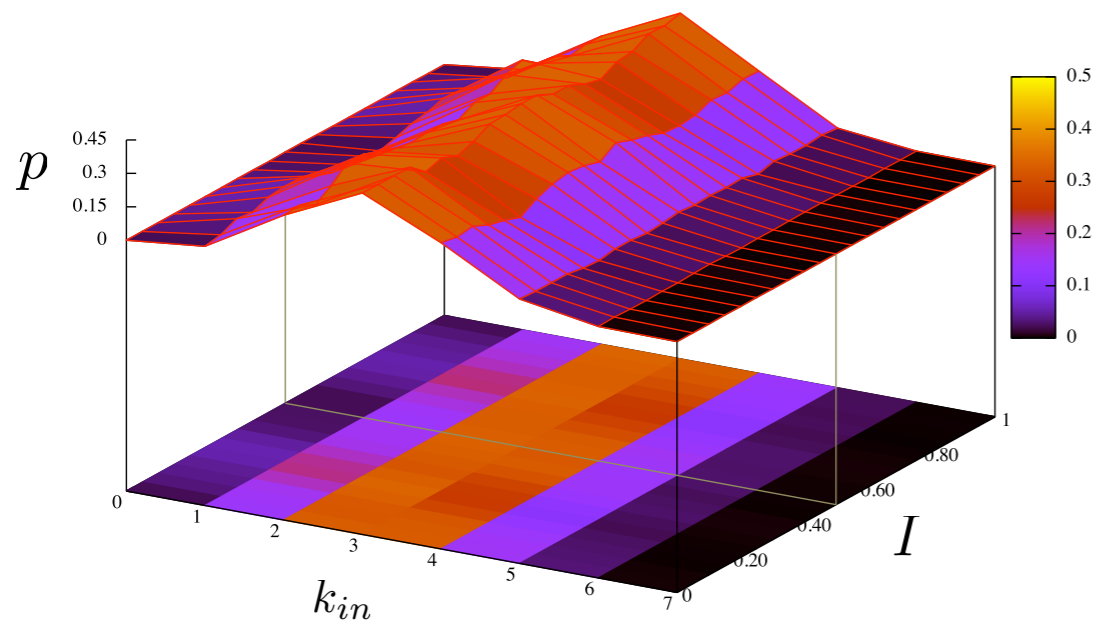
Conexiones entrantes  $k_{in}$   
 $\delta = 0.1, \Omega = 0, I = 0.2, N = 50$



Conexiones salientes  $k_{out}$   
 $\delta = 0.1, \Omega = 0, I = 0.2, N = 50$



# Distribución de probabilidad de conexiones para distintos valores de estímulo externo



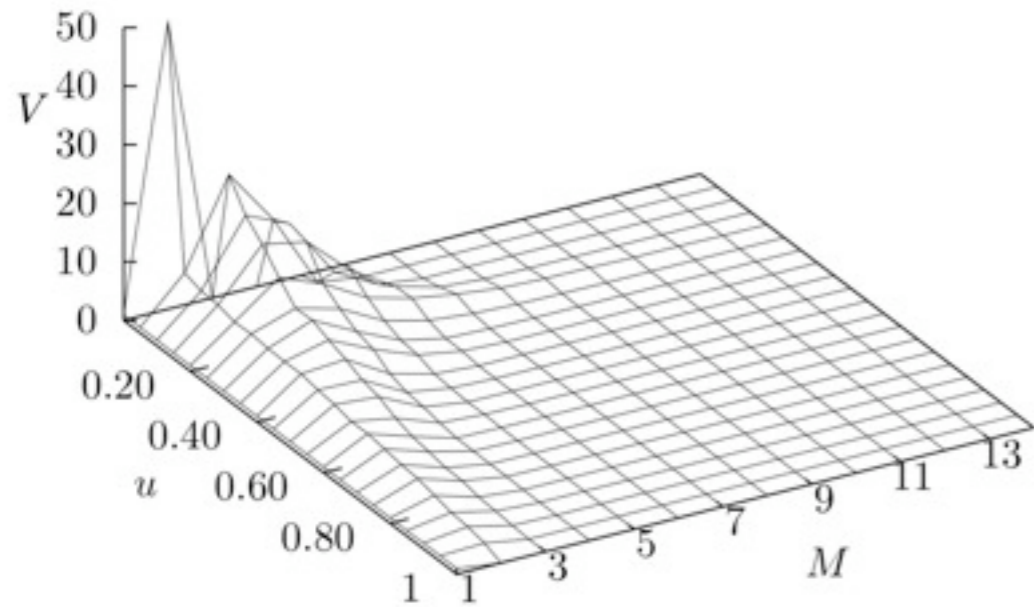
Conexiones entrantes  $k_{in}$

$u = 0.1$

Conexiones salientes  $k_{out}$

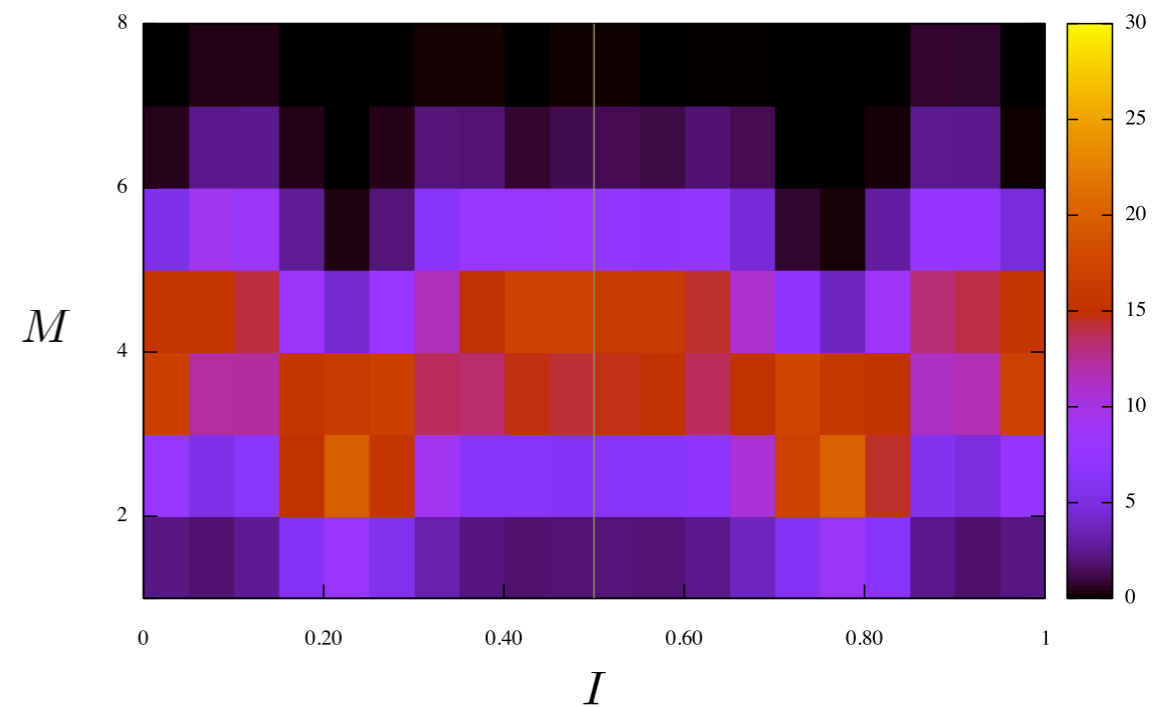
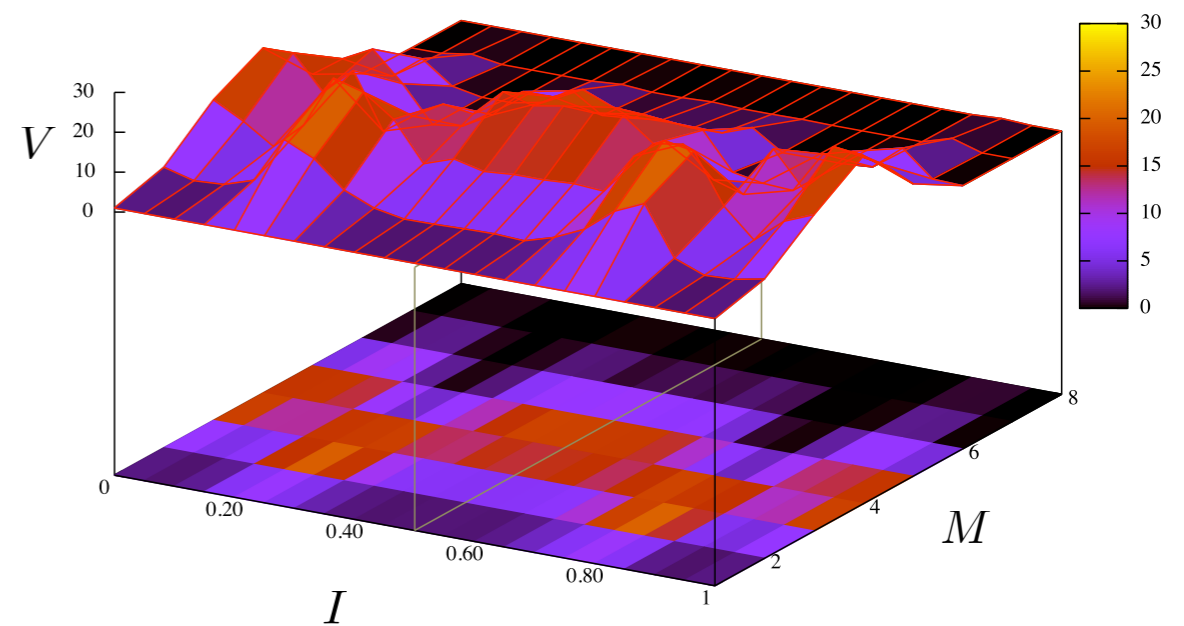


# Número de nodos presentes en distintas capas



$$\delta = 0.1, \Omega = 0, I = 0.2, N = 50$$

$$\delta = 0.1, \Omega = 0, u = 0.1, N = 50$$





# Conclusiones

- Existen rangos de valores de parámetros del sistema, especialmente de la intensidad del estímulo, para los cuales surgen estructuras jerárquicas.
- El estímulo externo induce mayor estructura en la red adaptativa cuando los estados de los mapas están menos sincronizados.

T. Zhuang, H. Zhao, Z. Tang, Computer and Information Science **2**, 109 (2009)

- La mayor estructura emergente de la red, inducida por mayores valores del coeficiente de clustering  $C$ , ocurre para valores pequeños de umbral  $u$ .
- Para valores de umbral pequeños, la conectividad de la red es más uniforme y existe una mayor concentración de nodos en pocas capas.
- La presencia del estímulo externo en la red es fundamental para la formación de una estructura jerárquica de capas en la red.
- La aplicación de los modelos de mapas acoplados en el estudio de sistemas complejos coevolutivos.