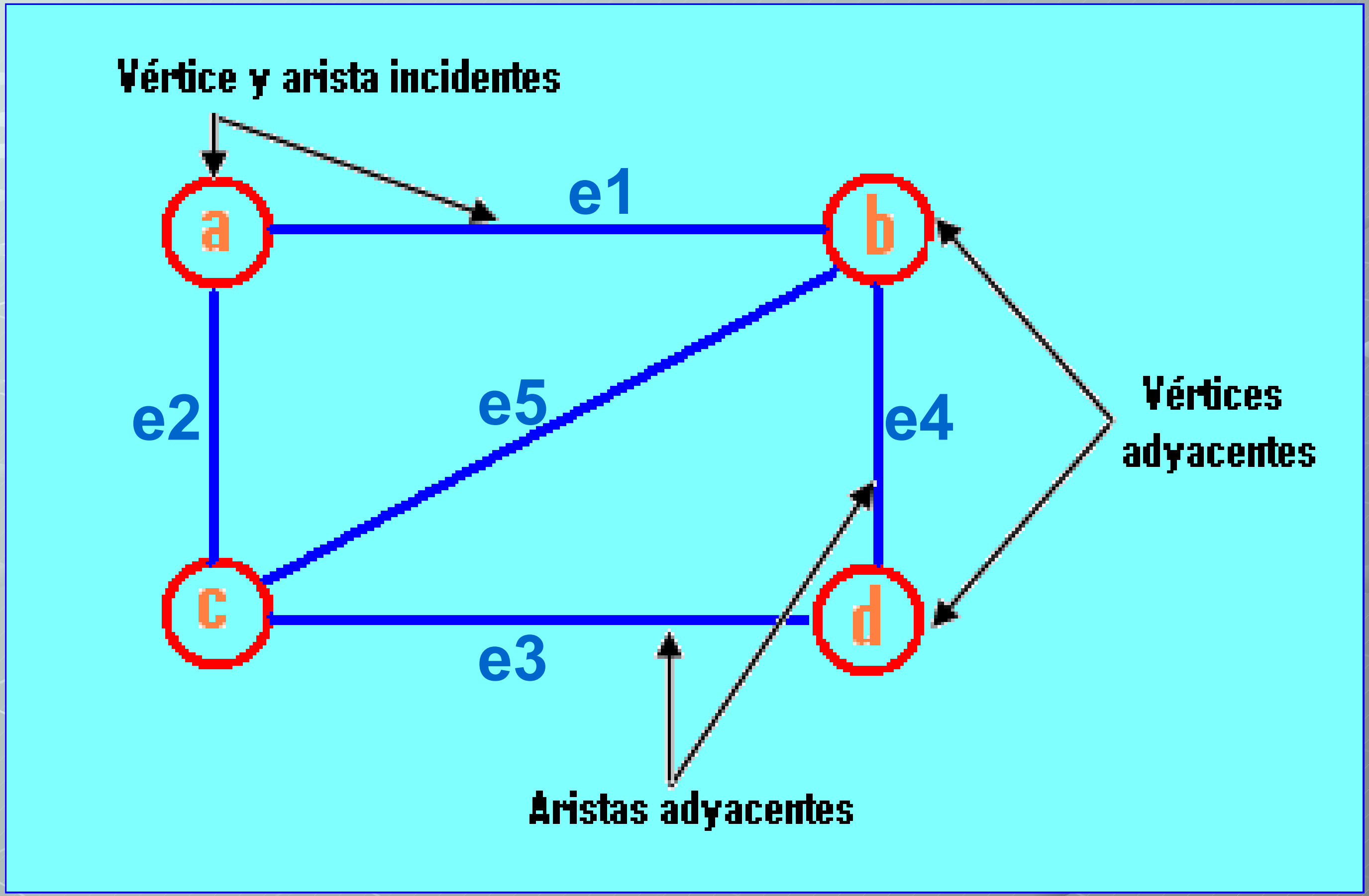
GRAFOS

Ricardo Estévez Basanta
C.I. 12.999.495

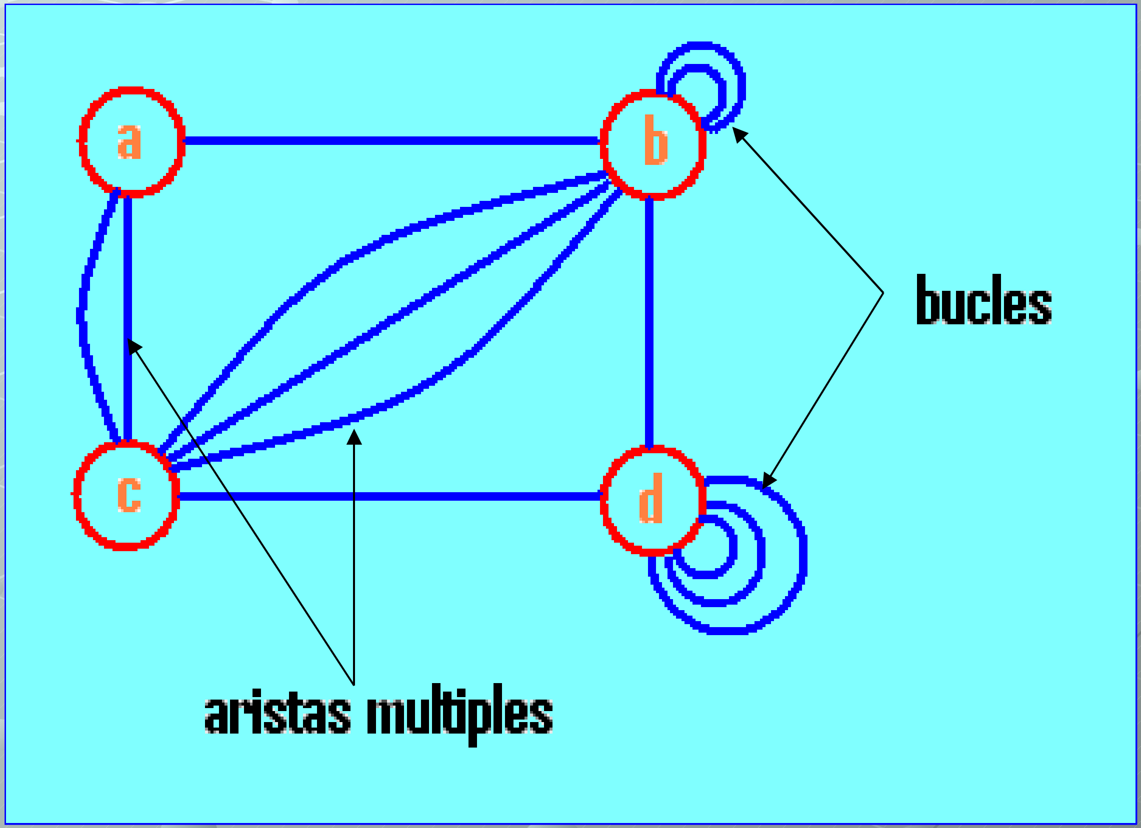
GRAFO o grafo simple.   G=(v,A)



V={a,b,c,d}   A={e1, e2, e3, e4, e5}

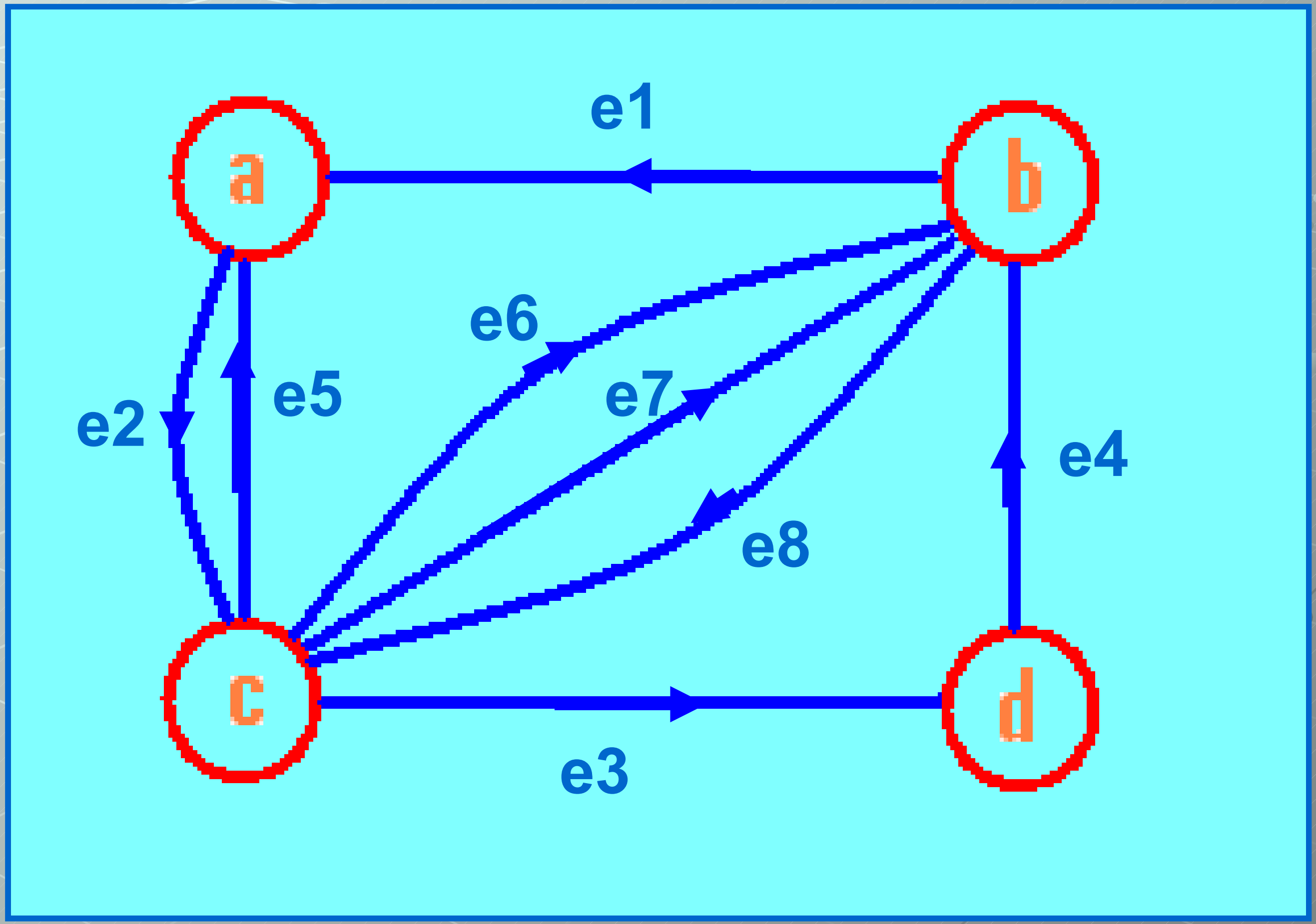
Grado de un vértice: d(a)=2

Un grafo con bucles se llama **seudógrafo.**



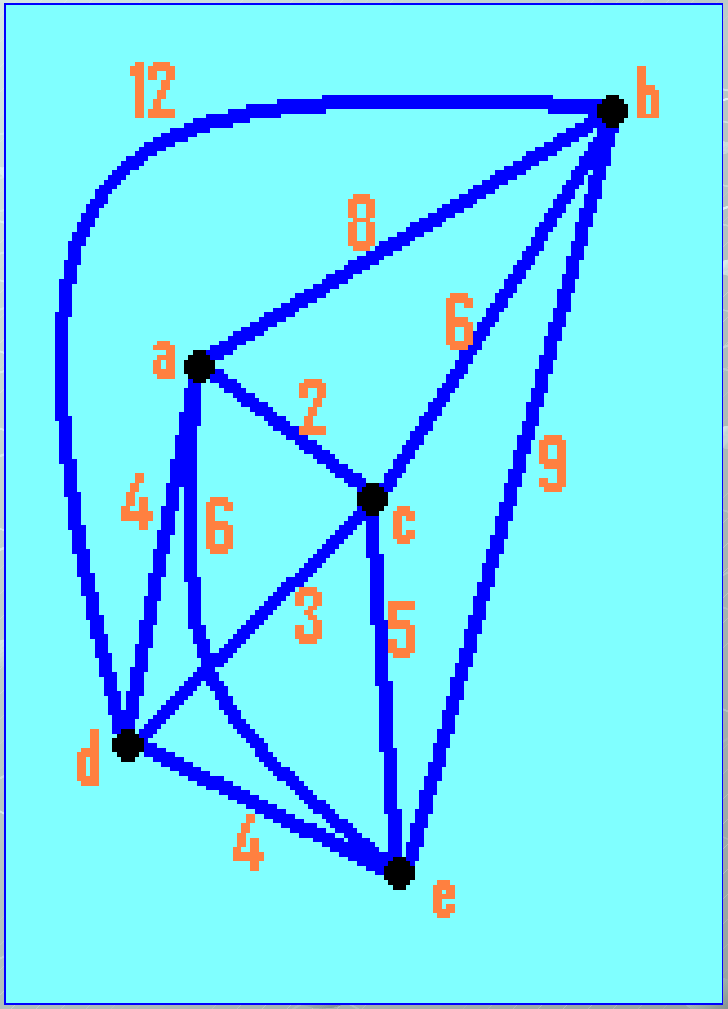
Un grafo con múltiples aristas se llama **multígrafo**

Grafo dirigido, **digrafo.**



e1= (b,a), … , e8= (b,c)

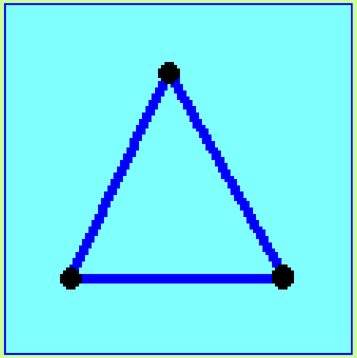
Gráfica con pesos



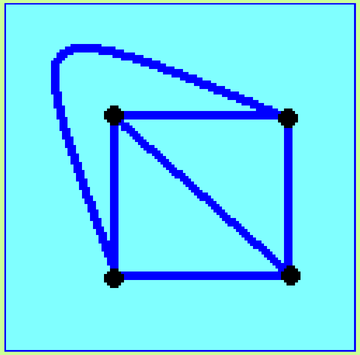
Caminos de *a* a *e* que pasan por cada vértice exactamente una vez y sus longitudes.

Camino	Longitud
a, b, c, d, e	21
a, b, d, c, e	28
a, c, b, d, e	24
a, c, d, b, e	26
a, d, b, c, e	27
a, d, c, b, e	22

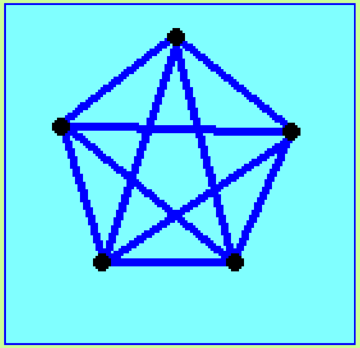
Gráfica completa de *n* vértices: ***K_n.***



K_3

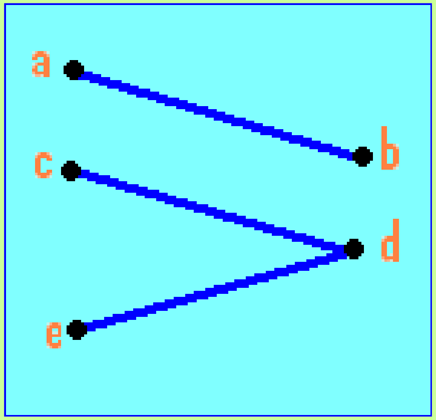


K_4

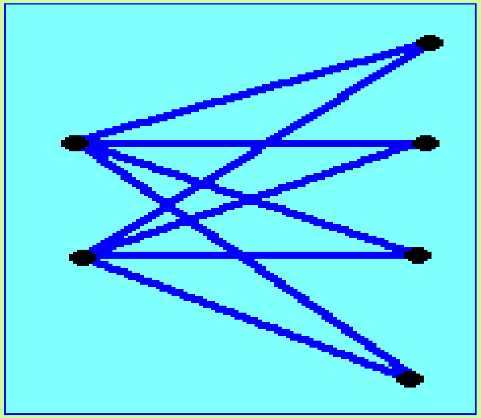


K_5

Gráficas Bipartitas



$V_1=\{a,c,e\}$, $V_2=\{b,d\}$

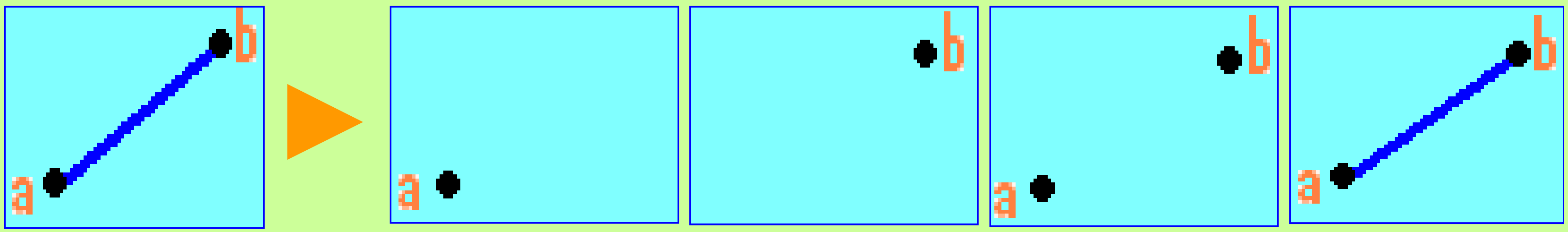


Gráfica bipartita completa $K_{2,4}$

Caminos y ciclos

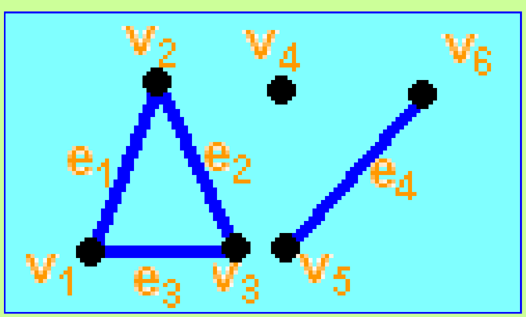
Un grafo G es conexo si entre cada par de vértices de G existe un camino.

Subgráfica



Diferentes subgráficas

Componentes



$G_1=(V_1,E_1) \rightarrow V_1=\{v_1,v_2,v_3\}$ $E_1=\{e_1,e_2,e_3\}$

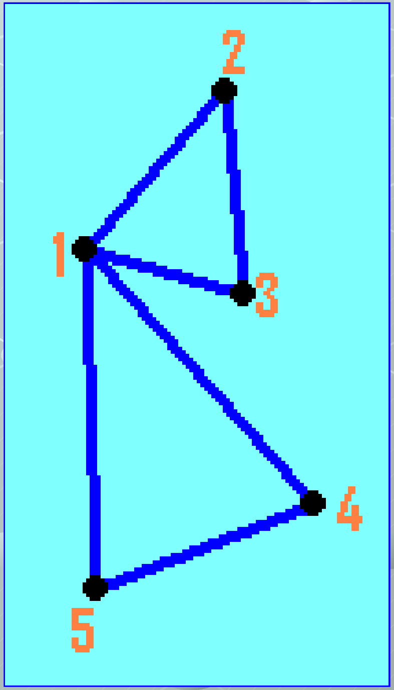
$G_2=(V_2,E_2) \rightarrow V_2=\{v_4\}$ $E_2=\{\emptyset\}$

$G_3=(V_3,E_3) \rightarrow V_3=\{v_5,v_6\}$ $E_3=\{e_4\}$

•Un **camino simple** de *v* a *w* es un camino de *v* a *w* sin vértices repetidos.

•Un **ciclo** es un camino de longitud distinta de cero de *v* a *v*, sin aristas repetidas.

•Un **ciclo simple** es un ciclo de *v* a *v* en el cual no existen vértices repetidos, excepto por el vértice inicial y final.



Camino simple → (4,5,1,3)

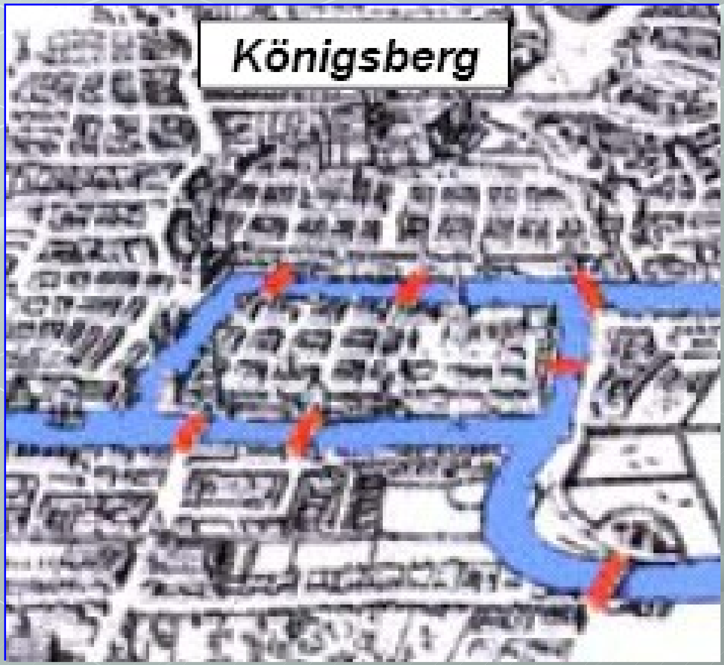
Ciclo → (1,4,5,1,3,2,1)

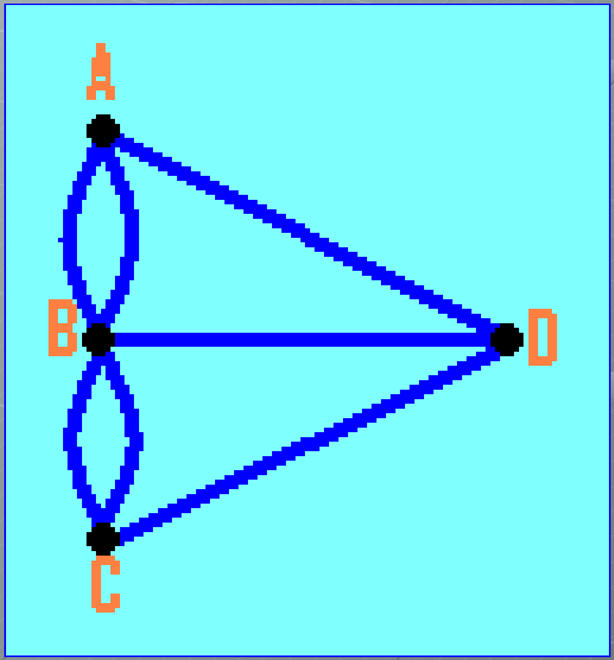
Ciclo simple → (5,4,1,5)

Ciclos de Euler

Un **ciclo de Euler** de una gráfica G incluye todas las aristas exactamente una vez y todos los vértices.

Si una gráfica G tiene un ciclo de Euler, entonces G es conexa y cada vértice tiene grado par.





Algoritmo de Fleury

Paso 1.- Se comienza en un vértice cualquiera v_0 .

Paso 2.- Si se ha construido el camino v_0 e_1 v_1 e_2...v_{k-1} e_k v_k con aristas distintas, se elige la arista siguiente e_{k+1} con las condiciones:

(1) e_{k+1} incidente con $v_{k.}$

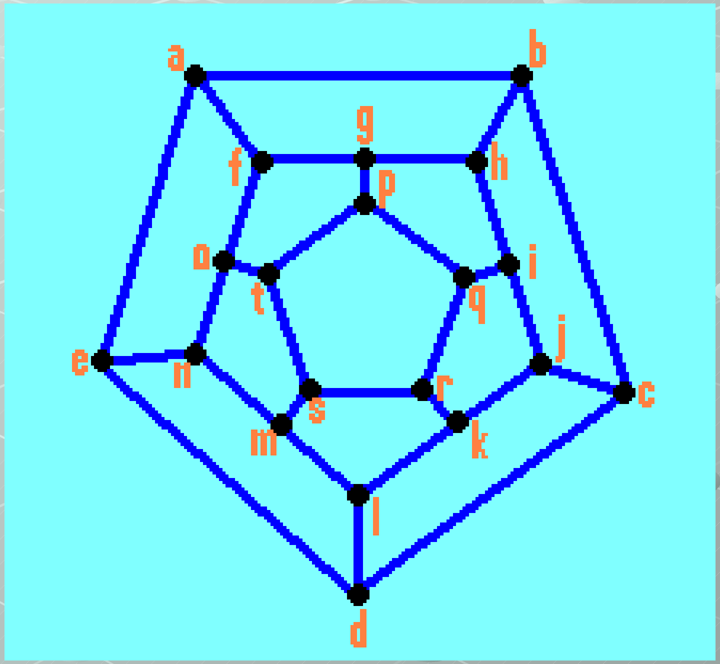
(2) no ser puente en el grafo $G = \{e_1,e_2,\ldots,e_k\}$ (salvo

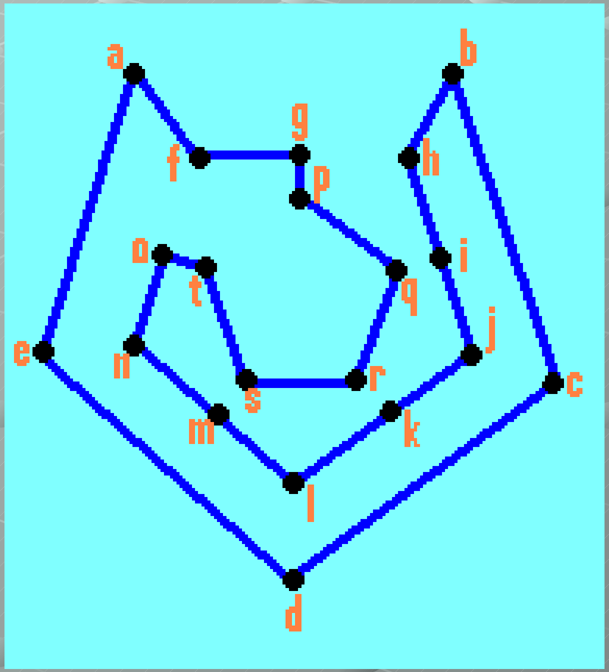
que no haya alternativa).

Paso 3.- Se sigue hasta que el camino contenga todas las aristas.

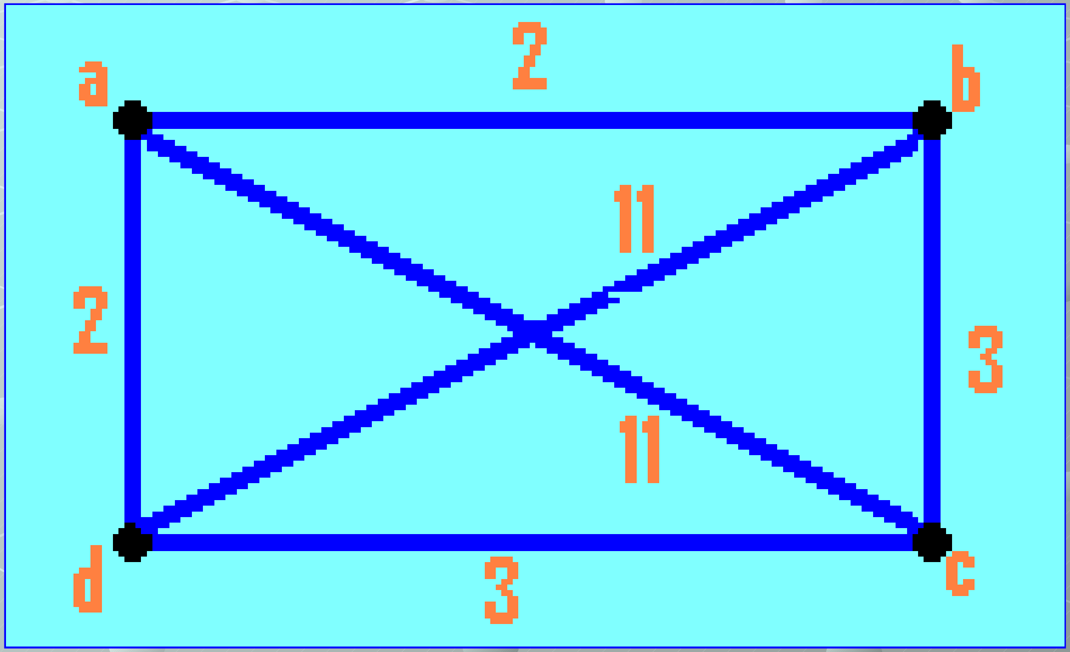
Ciclos hamiltonianos y el problema del agente viajero

Un ciclo hamiltoniano en una gráfica es un ciclo que contiene cada vértice del grafo exactamente una vez.





El problema del agente viajero: dada una gráfica con pesos G, determinar un ciclo hamiltoniano de longitud mínima en G.



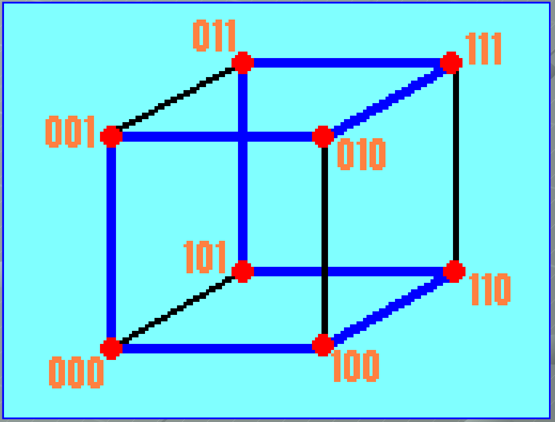
Solución:
C=(a,b,c,d,a)

Código de Gray

Alfabeto I={0,1} 2^n palabras de longitud n.

Un **código de Gray** de orden n es una ordenación de esas 2^n palabras tal que palabras consecutivas difieren en un sólo dígito.

G_1:	**0**	**1**						
G_1^{r}:	1	0						
G_1':	00	01						
G_1'':	11	10						
G_2:	00	01	11	10				
G_2^{R}:	10	11	01	00				
G_2':	000	001	011	010				
G_2'':	110	111	101	100				
G_3:	000	001	011	010	110	111	101	100

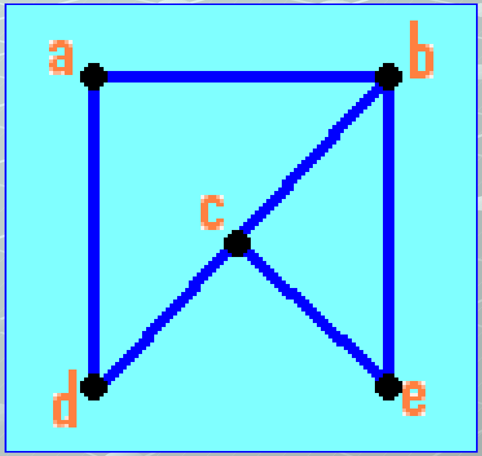


Algoritmo para la ruta más corta

```
procedure dijkstra(w,a,z,L)
L(a):=0
for todos los vértices x≠a do
        L(x):=∞
T:=conjunto de todos los vértices
while z є T do
begin
    elegir v є T con L(v) mínimo
    for cada x є T adyacente a v do
        L(x):=min{L(x),L(v)+w(v,x)}
    end
end dijkstra
```

Representaciones gráficas

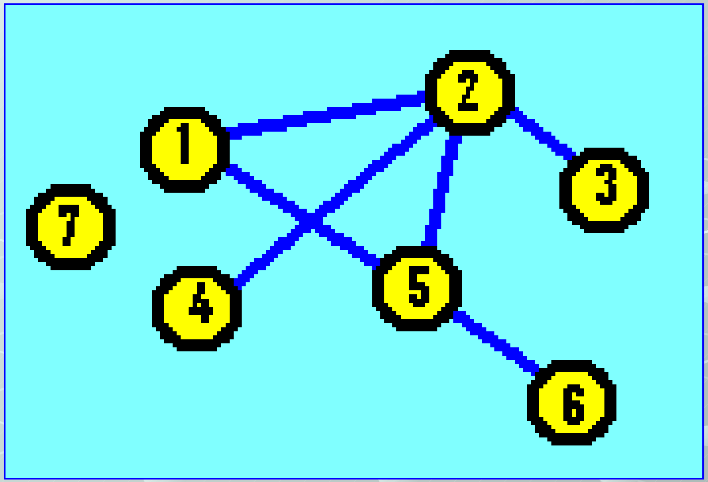
Matriz adyacencia

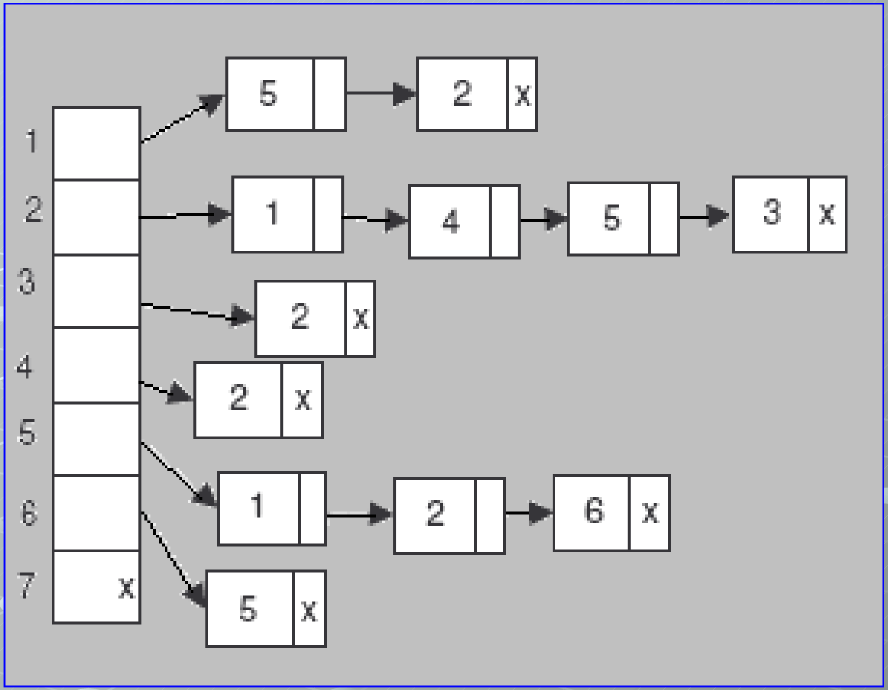


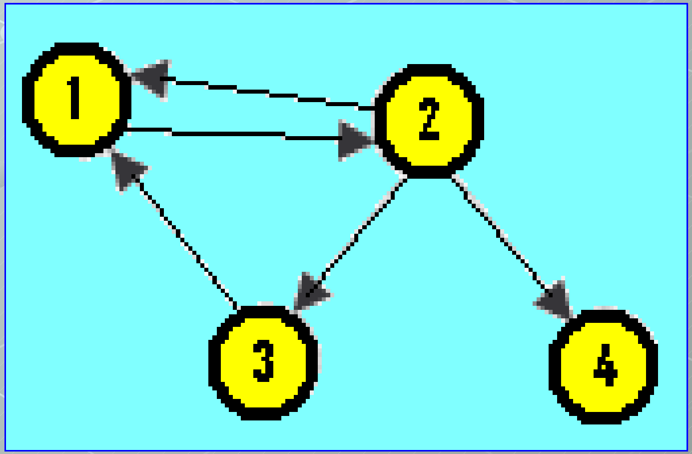
$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

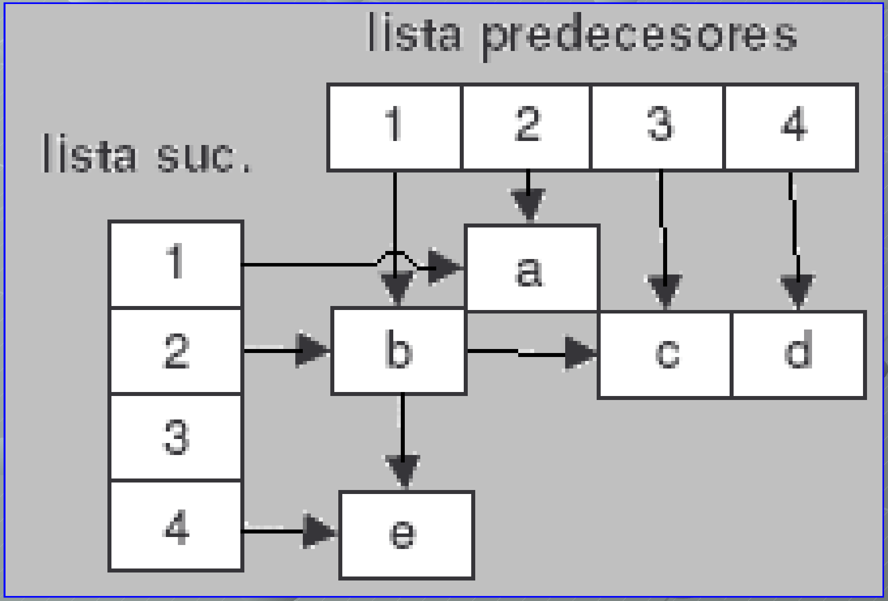
$$A^2 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Listas de adyacencia

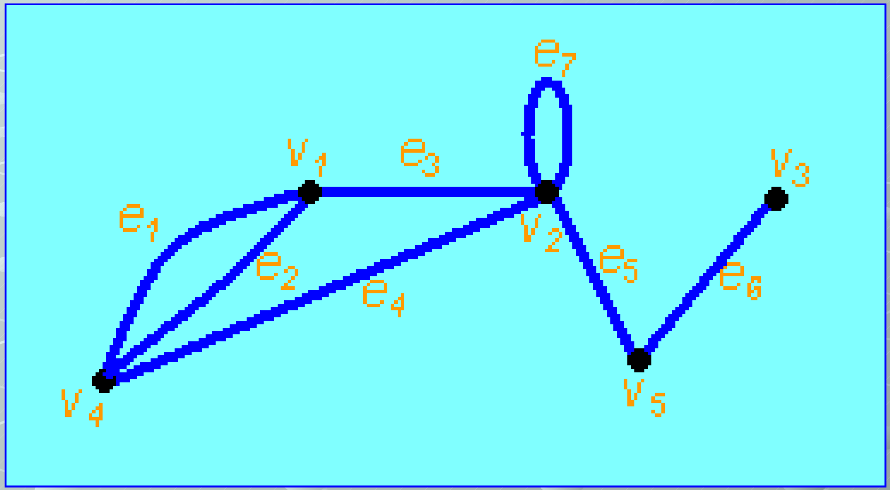






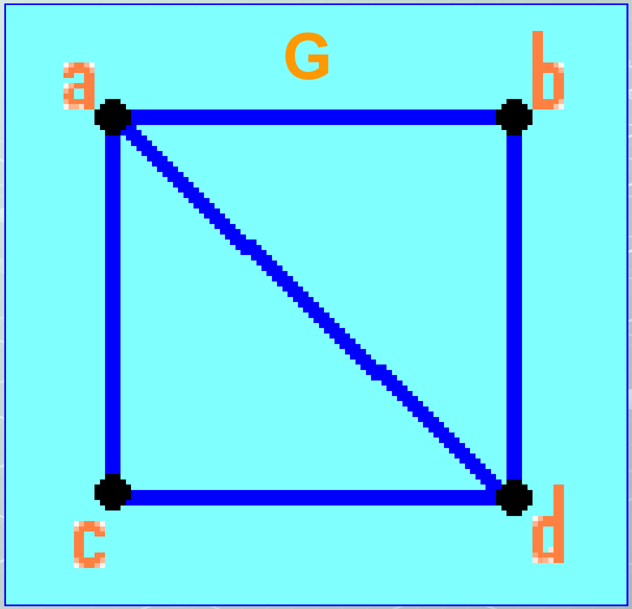


Matriz incidencia

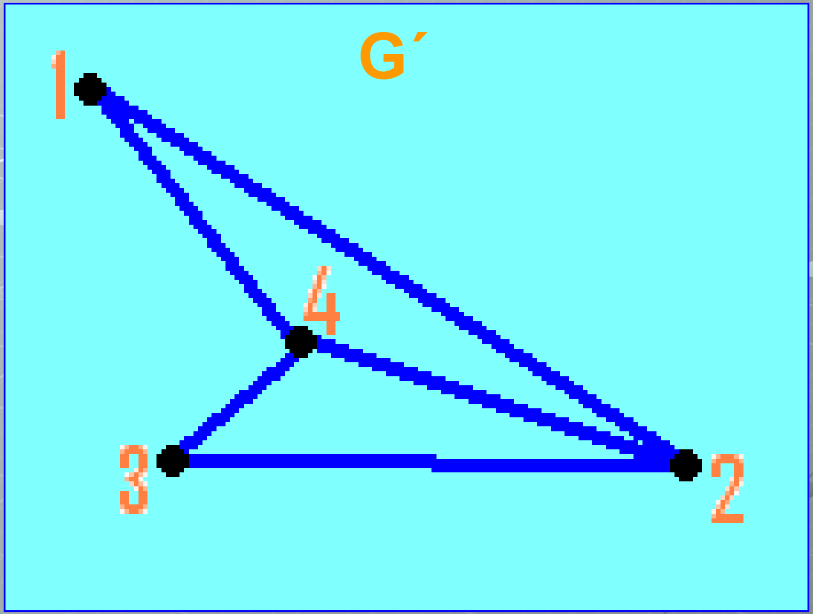


$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Isomorfismo de gráficas



a → 4
b → 1
c → 3
d → 2



G y G’ son isomorfos si existe f: V → V’ que conserva la adyacencia.

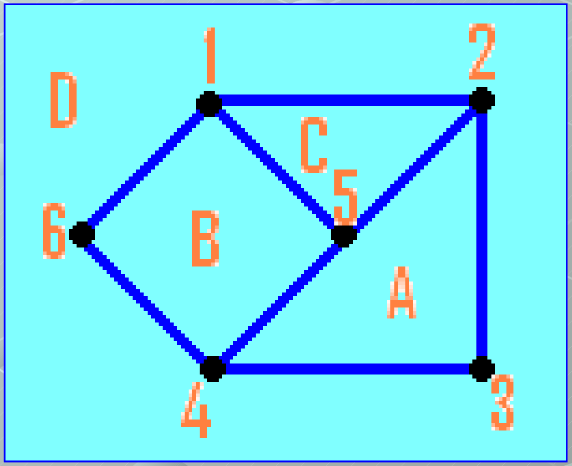
u,v son adyacentes ↔ f(u), f(v) son adyacentes.

Gráficas planas

Una gráfica es plana si se puede trazar en un plano sin que se crucen sus aristas.

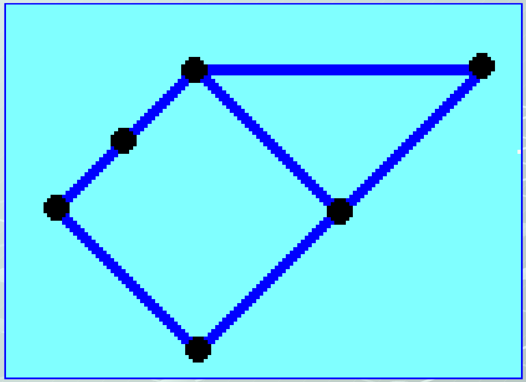
Si la grafica es plana y conexa se forman caras (f) entre sus aristas.

Una cara queda caracterizada por el ciclo que forma su frontera.

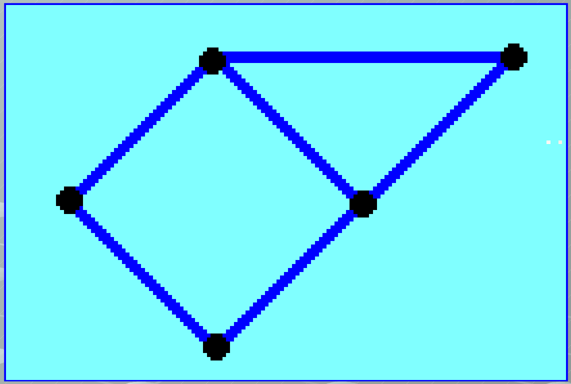


$$f = e - v + 2$$

Gráficas homeomorfas

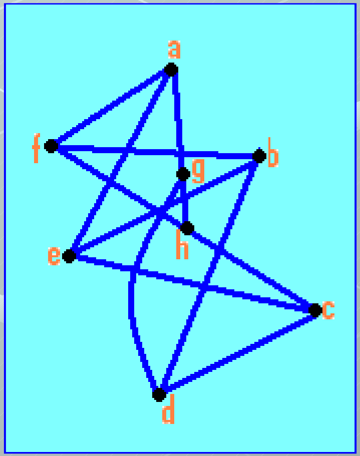


Reducción
en serie

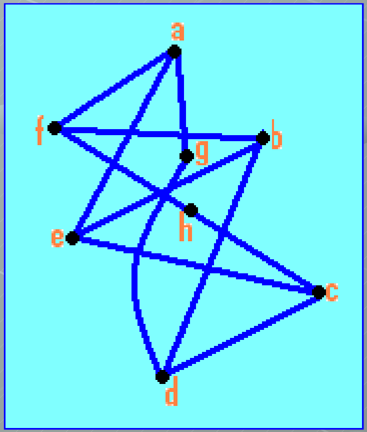


Teorema de Kuratowski

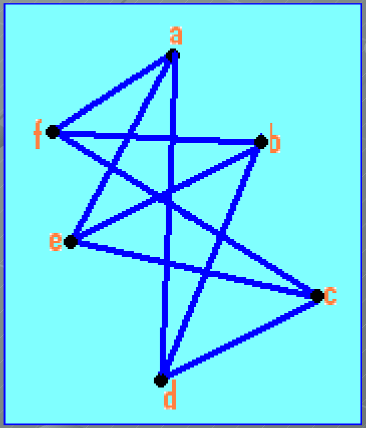
Una gráfica G es plana si y sólo si G no contiene una subgráfica homeomorfa a K_5 o K_3.



Eliminación
de la arista
(g,h)

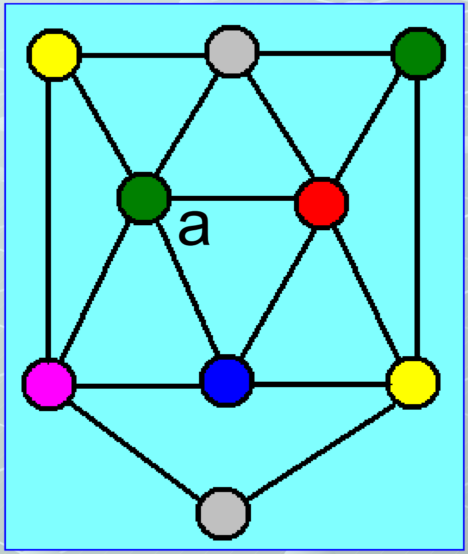


Reducción
de serie



Coloración de gafos

Coloración de vértices



Vértices adyacentes reciben el mismo color.
Los vértices del mismo color forman una clase de color.

$$V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 \cup V_5 \cup V_6$$

$$V_1 = \{amarillos\}, V_2 = \{verdes\}\ldots$$

Número cromático $\{\chi(G)\}$ → **X(G)=4**

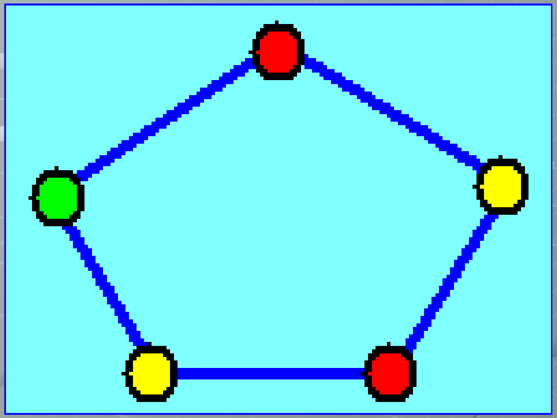
Número de independencia $\{\beta(G)\}$ → **β(G)=4**

Número de clique $\{\omega(G)\}$ → **ω(G)=3**

Grado de saturación {gs(G)} → **gs(a)=5**

Propiedades del número cromático

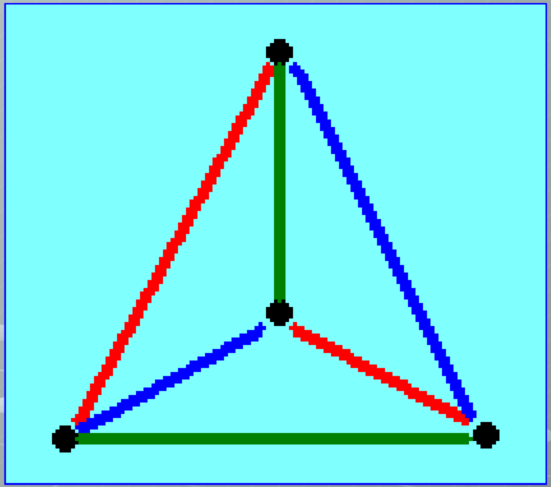
- **$\chi(G) \leq n$, con *n* el número de vértices.**
- **$\chi(K_n) = n$**
- **$\chi(G) = 2 \leftrightarrow$ es un grafo bipartito.**
- **$\chi(G) \geq 3 \leftrightarrow$ tiene ciclo impar.**



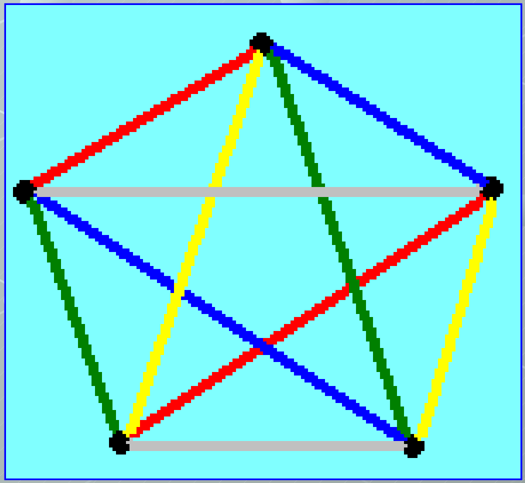
- **Si G contiene a K_n como subgrafo $\chi(G) \geq n$.**
- **$\chi(G) \geq \omega(G)$.**
- **$\chi(G) \leq \Delta(G)+1$, donde $\Delta(G)$ es el grado máximo de G.**

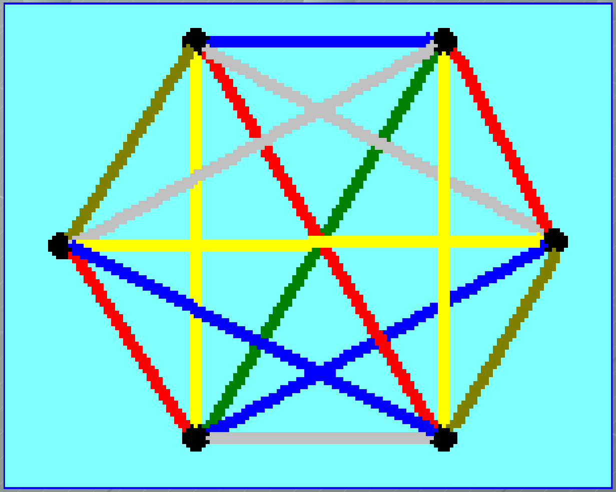
Coloración de aristas.

Índice cromático $\{\chi_I(G)\} \longrightarrow \chi_I(G)=3$



- $\chi(G) \geq \Delta(G)$.
- Si K_n es impar, $\chi(K_n)=n=\Delta+1$.
- Si K_n es par, $\chi(Kn)=n-1=\Delta$.

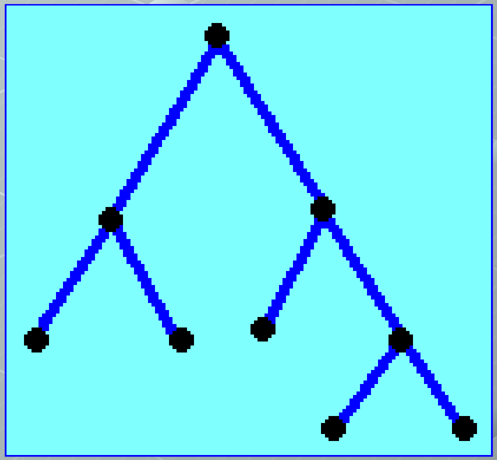


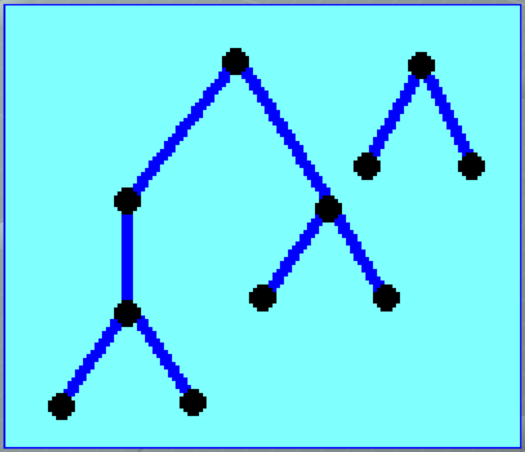


Árboles

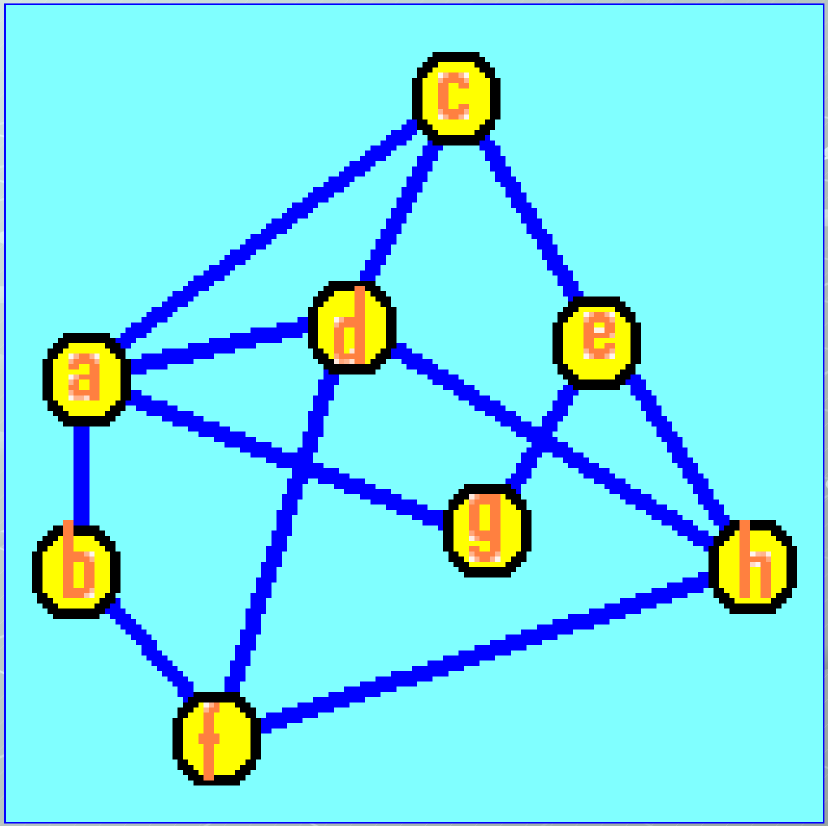
Un bosque es un grafo acíclico. Un árbol es un grafo conexo y acíclico.

- Entre cada par de vértices existe un camino único.
- Toda arista es puente.
- Un árbol de n vértices tiene n-1 aristas
- Todo árbol no trivial tiene al menos dos hojas



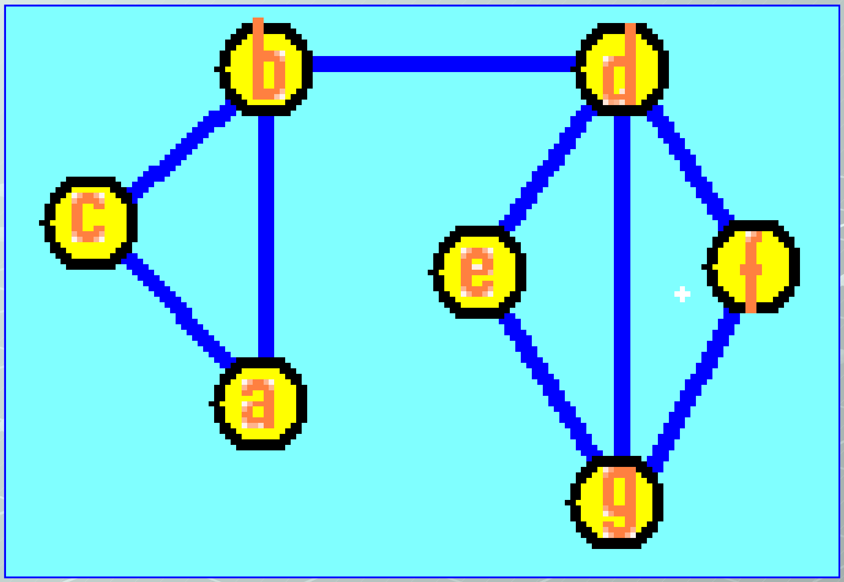


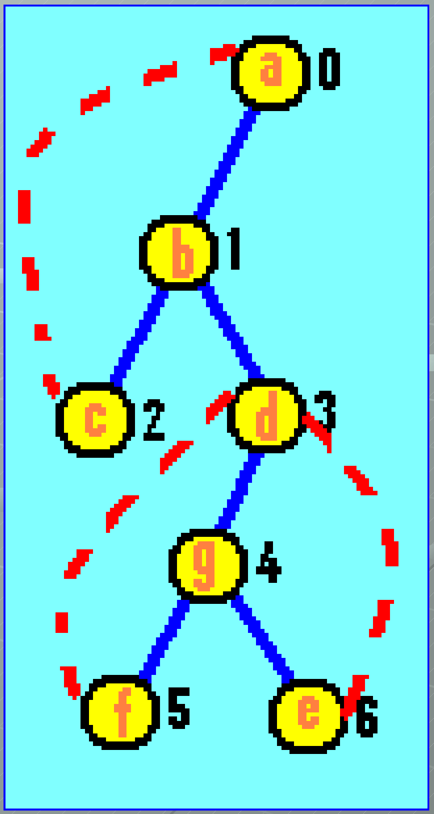
Recorrido en profundidad



Camino: a
Camino: a,b
Camino: a,b,f
Camino: a,b,f,h
Camino: a,b,f,h,e
Camino: a,b,f,h,e,c
Camino: a,b,f,h,e,c,d
Camino: a,b,f,h,e,c
Camino: a,b,f,h,e
Camino: a,b,f,h,e,g

Recorrido en profundidad





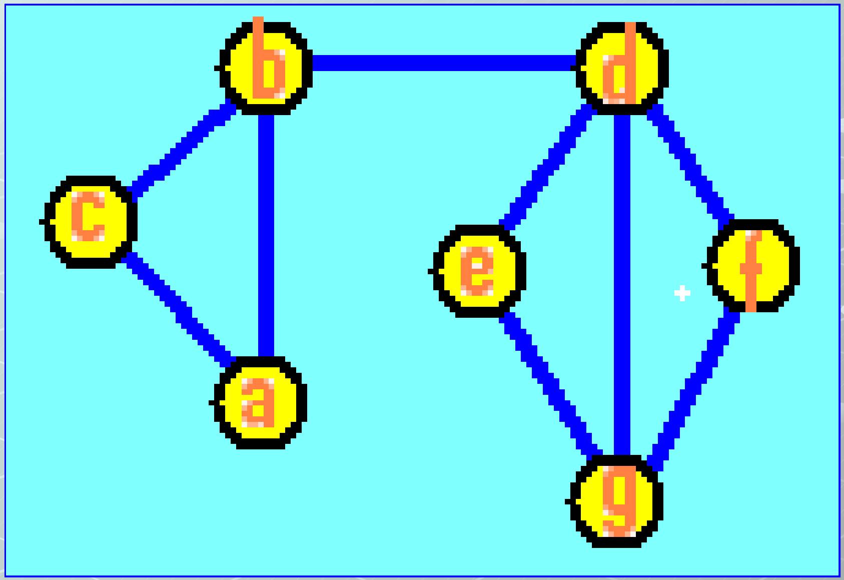
Índice de búsqueda df(v).

Aristas en T.

Aristas que no están en T, de retroceso.

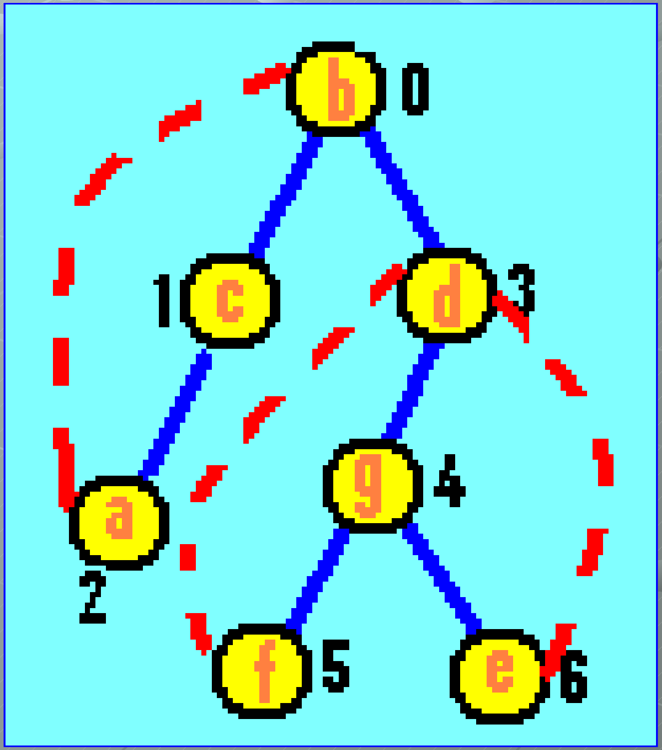
Si e=ab no es arista de T y df(a)< df(b), entonces a es ascendiente de b en el árbol T

Vértices corte en un grafo conexo



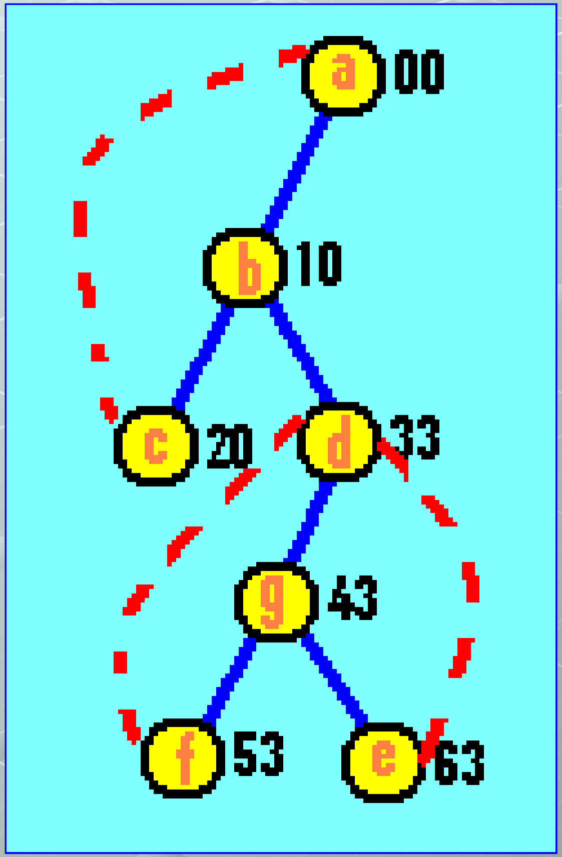
- **b** es vértice-corte si existen dos vértices **c**, **d** tales que **b** está en todos los caminos de **c** a **d.**

- Sea T árbol de un recorrido en profundidad de G conexo y **r** la raíz del árbol. Si **r** es vértice-corte entonces **r** tiene más de un hijo en T.



Sea T árbol de recorrido en profundidad de G conexo, **v** vértice no raíz del árbol.

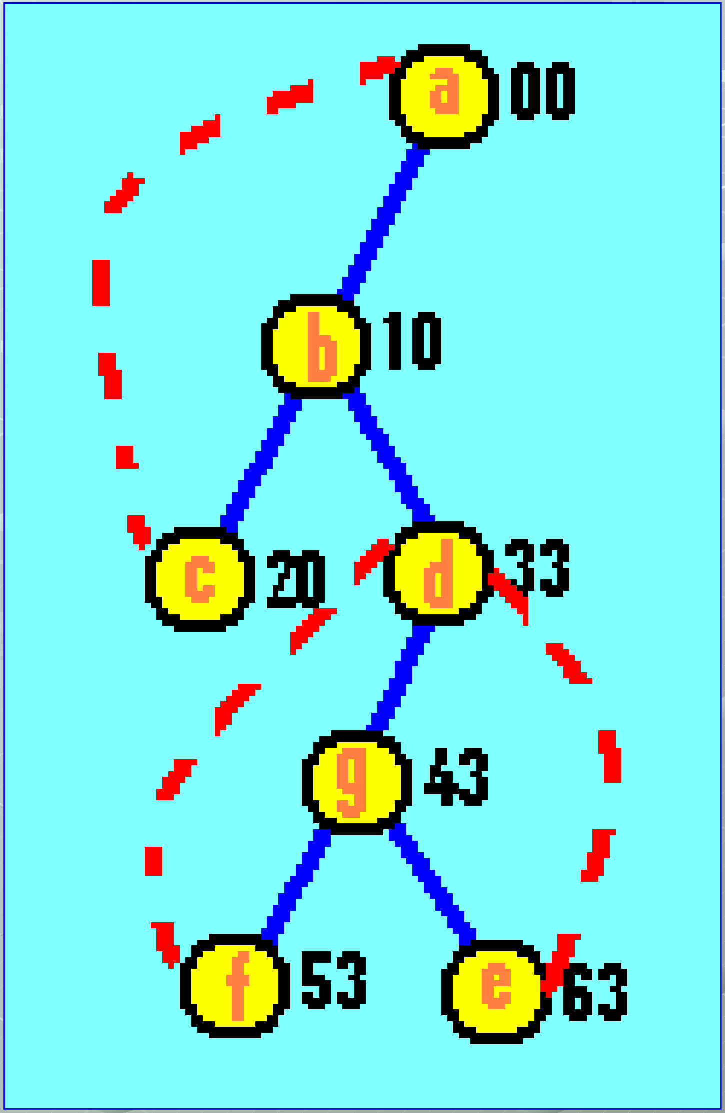
Si **v** es vértice-corte entonces **v** tiene un hijo **z** tal que ningún descendiente de **z** se une a un antecesor de **v** por una arista que no está en **T**.



Añadiendo otra etiqueta l(z), tenemos que:

l(z)=min{df(t) para todo vértice t de T que se alcanza desde z con un camino z--t que termina con una arista no de T}

Aristas puente en un grafo conexo

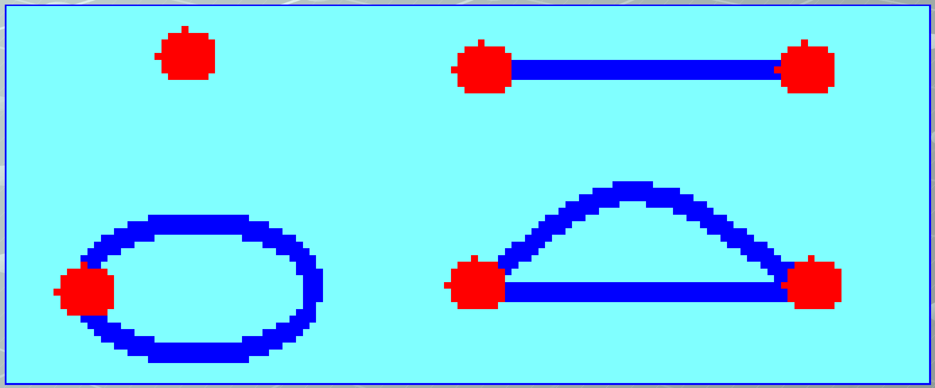


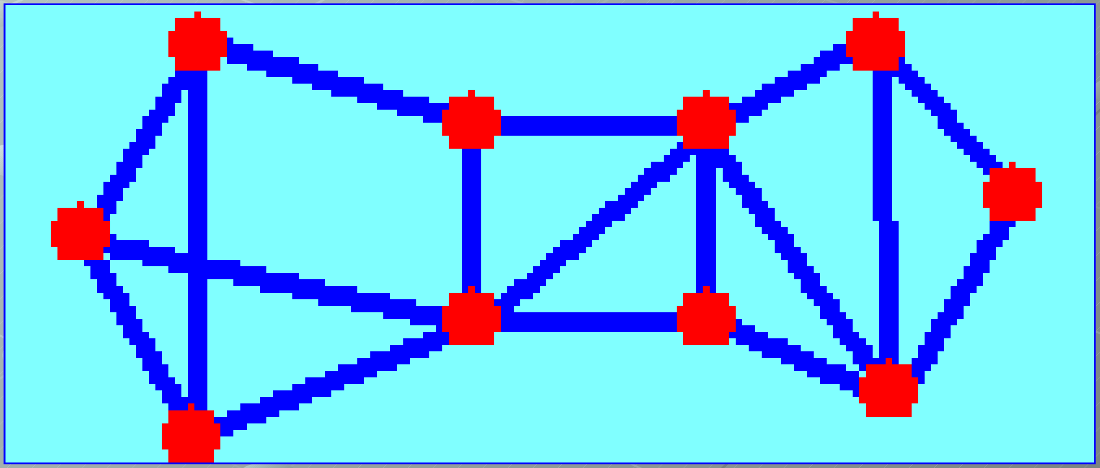
Sea T árbol de un recorrido en profundidad de G conexo, **uv** arista de G con df(u)<df(v).

Si **uv** es puente entonces **uv** є T y *l*(v)>df(u).

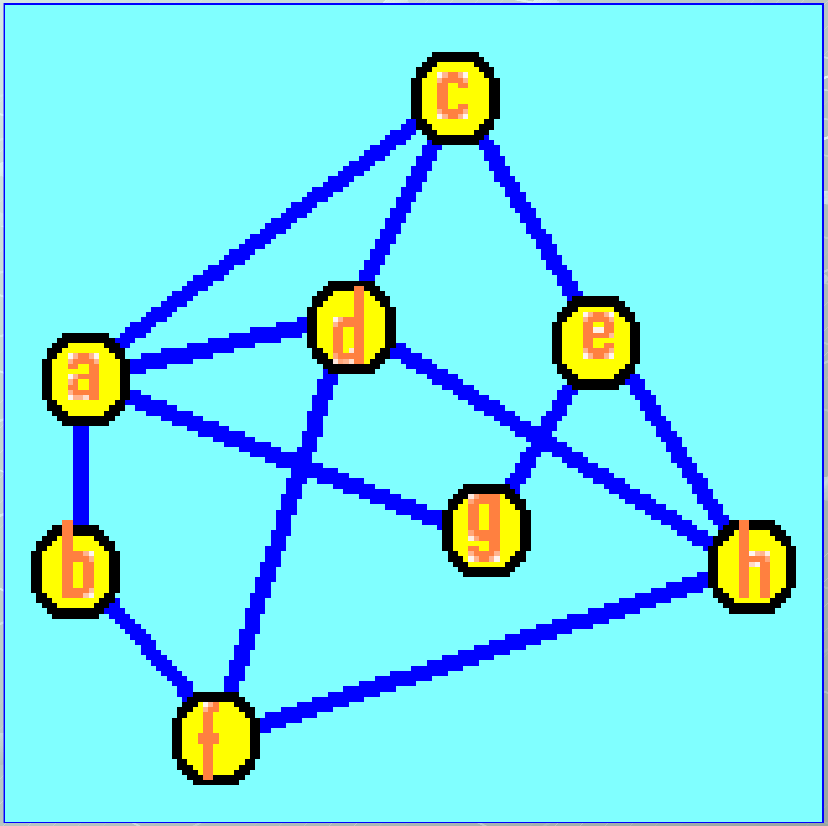
Bloques

Sea G un grafo. Un bloque de G es un subgrafo conexo maximal tal que ninguno de sus vértices es vértice-corte.





Recorrido en anchura



Frente: a
Frente: b,g,d,c
Frente: g,d,c,f
Frente: d,c,f,e
Frente: c,f,e,h
Frente: f,e,h
Frente: e,h
Frente: h