



**Universidad de Los Andes**  
**Facultad de Ciencias**

Mérida - Venezuela

*Postgrado en Física Fundamental*

Area de Caos y Sistemas Complejos

**Colapso de amplitud en redes  
de flujos caóticos con retardo temporal**

Trabajo de grado presentado ante la ilustre  
**Universidad de Los Andes**  
como requisito parcial para optar al Título de:  
**Magister Scientae en Física Fundamental**

Presentado por:  
**Lic. Victor M. Rodríguez M.**

Tutor:  
**Dr. Mario Cosenza**

Mérida, Octubre del 2011

*Para mi hijo*

*De todos los instrumentos del hombre, el más asombroso es, sin duda, el libro. Los demás son extensiones de su cuerpo. El microscopio, el telescopio, son extensiones de su vista; el teléfono es extensión de la voz; luego tenemos el arado y la espada, extensiones del brazo. Pero el libro es otra cosa: el libro es una extensión de la memoria y la imaginación.*

Jorge Luis Borges.

## Agradecimientos

Estoy inmensamente agradecido a mi familia, sin la cual jamás hubiese podido transitar el sendero que me ha traído hasta aquí. A mi Madre quien siempre ha sido un apoyo incondicional en mi vida; y a mi Padre, por sus sabios consejos que me han mantenido a salvo. A mi hijo Victor, una persona que desde su llegada me cambio para siempre, y a mi hermana Gaby, quien oportunamente me ha rescatado varias veces. A mis hermanos el Negro y Rafa, que han estado conmigo en los momentos mas importantes. Y mi querida Estefanía, razón de mis más profundas emociones.

Igualmente agradecido me encuentro con mis hermanos caóticos, en especial con mi Profesor Mario Cosenza, cuyas enseñanzas me han llevado a una mejor comprensión de la realidad, y a Kay Tucci que ha sabido mostrarme los intrincados caminos del pensamiento del programador. Por haber contado con su apoyo desde siempre, a mi amigo José Luis Herrera, y a Miguel Angel, Gilberto, Daniel, Edwin y Iharob, por sus amenas e instructivas conversaciones. A todos los que conmigo estuvieron, gracias.

Este trabajo fue en parte subvencionado por la UNELLEZ.

## Resumen

El fenómeno de colapso de amplitud ocurre cuando dos o más elementos en un sistema, que aislados serían oscilatorios, cesan sus oscilaciones al estar acoplados y alcanzan un estado estacionario común con amplitud cero; es decir, un punto fijo del sistema. En esta Tesis investigamos el fenómeno de colapso de amplitud en sistemas de osciladores caóticos globalmente acoplados con retardo temporal. Nuestro propósito es encontrar los ingredientes mínimos que conducen a la aparición del colapso de amplitud en estos sistemas, así como dilucidar las rutas que conducen a este fenómeno. Como un resultado central de esta Tesis, se logra la identificación de dos escenarios distintos para alcanzar el colapso de amplitud en sistemas dinámicos. Se propone una interpretación geométrica de los mecanismos subyacentes en cada uno de estos escenarios. Se estudia la influencia de la topología de la red de conectividad en la ocurrencia del colapso de amplitud. Como parte de esta investigación, hemos desarrollado un método propio y eficiente para integrar numéricamente un sistema de ecuaciones diferenciales caóticas acopladas con retardo temporal, definidas sobre diversas topologías de red.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Colapso de amplitud en sistemas de osciladores acoplados.</b>	<b>12</b>
<b>3. Ecuaciones diferenciales con retardo temporal.</b>	<b>18</b>
3.1. Método Numérico. . . . .	18
3.2. Implementación numérica en ISyS. . . . .	21
<b>4. Colapso de amplitud en osciladores caóticos globalmente acoplados con retardo temporal.</b>	<b>24</b>
4.1. Efecto del retardo temporal . . . . .	26
4.2. Islas de la muerte. . . . .	35
4.3. Interpretación geométrica de los dos escenarios para el colapso de amplitud. . . . .	40
<b>5. Efecto de la topología de la red en sistemas de osciladores acoplados.</b>	<b>43</b>
<b>6. Conclusiones.</b>	<b>50</b>

*Creo sinceramente haber interceptado muchos  
pensamientos que los cielos destinaban a otro hombre.*

Laurence Sterne.

# Capítulo 1

## Introducción

El estudio de la auto-organización colectiva, o de las propiedades macroscópicas emergentes, tanto espaciales como temporales, en sistemas de elementos dinámicos no lineales acoplados es objeto de mucha atención en la literatura científica contemporánea. Las observaciones de comportamientos colectivos ordenados que surgen en una gran variedad de estos sistemas indican que estos comportamientos presentan características universales, independientemente del contexto, además estos comportamientos no pueden derivarse a partir del conocimiento de las propiedades de los elementos constituyentes, ni mediante simples consideraciones estadísticas. Fenómenos como la sincronización caótica, formación de estructuras, organización, patrones espaciales, oscilaciones y movimientos colectivos, ondas espirales, diferenciación dinámica (clusters), formación y crecimiento de dominios y de interfases, etc., son ejemplos de procesos de auto-organización que ocurren en muchos sistemas físicos, químicos, biológicos, sociales, económicos, etc. Estos efectos colectivos son el resultado de la interacción entre los elementos del sistema. El concepto general de *sistemas complejos* se ha aplicado a estos conjuntos de elementos interactuantes capaces de generar estructuras o funciones globales ausentes a nivel local. En otras palabras, estructuras diferentes aparecen en diferentes niveles de descripción del sistema.

Los sistemas complejos [1, 2, 3, 4] son sistemas de elementos interactivos cuyos comportamientos colectivos no son susceptibles de ser derivados trivialmente a partir del análisis reduccionista de las propiedades de sus elementos constituyentes. El concepto de sistema complejo ha evolucionado a partir de la conjunción de la teoría del Caos, de la Física Estadística y del avance en las técnicas de simulación, y se ha convertido en un nuevo paradigma para la búsqueda de una interpretación unificada de los procesos de surgimiento de estructuras y funcionalidad en una variedad de fenómenos naturales y artificiales. Estos sistemas poseen características universales, independientemente de su contexto: no linealidad, interdependencia, adaptación y emergencia. El estudio de sistemas complejos ha irrumpido como un problema de enorme interés común entre científicos y profesionales de diversas especialidades, incluyendo las ciencias humanas, dando lugar a un intenso proceso de interdisciplinariedad y colaboración poco usual en épocas pasadas, y que extiende e intersecta las fronteras de las ciencias tradicionales.

Uno de los comportamientos colectivos más interesantes observados en sistemas complejos es el fenómeno de sincronización caótica [5]. La sincronización consiste en la coincidencia en el tiempo de variables dinámicas de dos o más elementos caóticos interactivos. La sincronización del caos en una población de unidades dinámicas acopladas, donde cada unidad por separado posee un atractor caótico, es un tema de investigación de enorme interés en la actualidad. En el contexto de elementos caóticos acoplados, diferentes estados de sincronización han sido descubiertos en los últimos años [6], tales como sincronización completa [5], sincronización de fase [7, 8], de retardo [9], sincronización de clusters o dominios [10], etc. Se dice que la sincronización es completa si los estados de todos los elementos de un sistema convergen a una misma trayectoria en el espacio de fases del sistema. Resulta sorprendente que elementos dinámicos caóticos, los cuales poseen sensibilidad extrema a las condiciones iniciales, puedan alcanzar una trayectoria común en el espacio de fase. Sin embargo, la sincronización es un proceso ampliamente observado en la Naturaleza. Sincronización ocurre en sistemas físicos, químicos, biológicos, mecánicos, sociales y económicos. Sistemas tan diversos como relojes, grillos e insectos al cantar, marcapasos cardíacos, neuronas,

aplausos en una audiencia, láseres, circuitos electrónicos, reacciones químicas, redes metabólicas, telecomunicaciones, entre muchos otros, exhiben la tendencia de operar en sincronía bajo ciertas circunstancias. Por ejemplo, actualmente se sabe que ciertas patologías neurológicas, como la epilepsia, se caracterizan por la presencia de un alto grado de sincronización entre las neuronas del cerebro, un aspecto a cuyo estudio ha contribuido nuestro grupo de investigación [11]. En el contexto de dinámica social, el consenso de opiniones se puede considerar como un fenómeno de sincronización de las opciones de los individuos [12]. La sincronización es un fenómeno universal en sistemas no lineales [13].

Recientemente, un tipo particular de sincronización ha sido objeto de considerable atención por parte de investigadores en diversas disciplinas, debido a su ubicuidad e importancia en muchos sistemas físicos, químicos, biológicos, fisiológicos entre otros. Se trata del fenómeno denominado *colapso de amplitud* (“amplitude death”) en sistemas de osciladores acoplados [14, 15]. Este fenómeno ocurre cuando los elementos en un sistema, que aislados estarían oscilando, cesan sus oscilaciones cuando están acoplados y alcanzan un estado estacionario común con amplitud cero. Por eso se habla de “colapso” o “muerte de amplitud”. Desde el punto de vista dinámico, el colapso de amplitud consiste en un estado sincronizado en un punto fijo común, en el espacio de fase del sistema. Cabe enfatizar que el cese colectivo de las oscilaciones al cual se refiere el colapso de amplitud ocurre en *sistemas autónomos* de elementos acoplados, sin forzamiento, sin influencia externa, ni fricción debida a un medio. Se trata de un comportamiento colectivo no trivial que emerge enteramente de las interacciones mutuas entre los elementos del sistema.

El fenómeno de “muerte de amplitud” de osciladores acoplados, donde las amplitudes se hacen cero, fue encontrado originalmente en modelos neuronales por Hodgkin y Huxley en 1952 [16], quienes reconocieron su relevancia fisiológica. Sin embargo, ha sido en años recientes que se ha suscitado bastante interés en el estudio de este fenómeno; especialmente en el contexto de sistemas caóticos acoplados [17]. Igualmente, se ha destacado su importancia para explicar ciertas patologías cardíacas y cerebrales [18]. Se han investigado diversas condiciones



para la aparición del colapso de amplitud en sistemas de osciladores acoplados: distribución de frecuencias en osciladores periódicos (que poseen ciclos límites en su dinámica) [19], acoplamiento vía variables conjugadas [20] y retardo temporal en sistemas de dos osciladores periódicos [21].

En particular la inclusión del retardo temporal en las interacciones de los elementos proporciona una representación más realista para muchos procesos dinámicos en la naturaleza. La presencia de retardo en la transmisión de información entre partes de un sistema puede tener consecuencias notables en el comportamiento colectivo del sistema, puesto que su efecto es, en general, no lineal [22, 23]. Por otro lado, el estudio de procesos dinámicos en redes es un tema de gran interés actual [24]. Por todo esto, consideramos que el estudio del fenómeno de colapso de amplitud en redes de elementos caóticos acoplados es un tema novedoso y de importantes implicaciones.

*En la presente Tesis, investigamos el fenómeno de colapso de amplitud en sistemas de osciladores caóticos globalmente acoplados con retardo temporal. Nuestro propósito es encontrar los ingredientes mínimos que conducen a la aparición del colapso de amplitud en estos sistemas, así como dilucidar las rutas que conducen a éste fenómeno. En tal sentido, un resultado central de esta tesis es la identificación de dos escenarios distintos para alcanzar el colapso de amplitud en sistemas dinámicos. Como valor agregado de esta investigación, desarrollamos un método propio y eficiente para integrar numéricamente un sistema de ecuaciones diferenciales caóticas acopladas con retardo, y definidas sobre diversas redes topológicas.*

Nos disponemos a investigar el surgimiento del fenómeno de colapso de amplitud en sistemas de elementos dinámicos con tiempo continuo, o *flujos*, cuya evolución individual es caótica, acoplados globalmente, y con retardo temporal en sus interacciones.

Consideramos un sistema de  $N$  flujos caóticos acoplados. El estado de un elemento en un tiempo dado está representado por  $x_i(t) = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^m)$ ,  $m \geq 3$ , de modo que puede aparecer caos local. Introducimos una interacción global tipo

campo medio que presenta retardo temporal con respecto a las dinámicas de los elementos, de la siguiente forma:

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sum_{j \in \nu_i} \epsilon_{ij} \mathbf{g}(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t - \tau)), \quad (1.1)$$

donde  $i = 1, 2, \dots, N$ , la función  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$  describe la dinámica no lineal local, asumida común para todos los elementos;  $\nu_i$  es el conjunto de elementos que interactúan con  $i$ ;  $\epsilon_{ij}$  representa la intensidad del acoplamiento entre el elemento  $i$  y un vecino  $j \in \nu_i$ ; la función  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t - \tau))$  caracteriza la forma funcional del acoplamiento entre los elementos. El conjunto de coeficientes  $\epsilon_{ij}$  contiene la información de la topología de la red de conectividad del sistema. El parámetro  $\tau$  expresa el retardo temporal de las interacciones, el cual asumimos homogéneo; esto es, el retardo es el mismo para cada par de osciladores acoplados. En esta Tesis nos enfocaremos en el estudio de sistemas con interacciones globales y sistemas cuya topología corresponde a redes de pequeño mundo.

El estado de sincronización completa en el sistema corresponde a la condición

$$\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}_j(t), \quad \forall i, j. \quad (1.2)$$

Existen diversas formas [13, 25, 26] de medir sincronización en un sistema; todas ellas deben dar cuenta de la diferencia entre los estados de los elementos constituyentes. En este trabajo utilizaremos la desviación estándar en el estado asintótico del sistema como medida de sincronización.

Para sistemas homogéneos, el colapso de amplitud corresponde a la condición:

$$\mathbf{x}_i(t) = \text{constante}, \quad \forall i, \quad (1.3)$$

es decir, se trata de un estado sincronizado en un punto fijo común a todos los elementos. Para caracterizar este estado, en este trabajo hemos introducido un concepto novedoso en este contexto, denominado *actividad* del sistema.

Por otro lado, cuando la dinámica local del sistema es heterogénea, es decir de la forma  $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i)$ , el cese de las oscilaciones puede conllevar a un estado estacionario no homogéneo donde los osciladores alcanzan distintos puntos fijos. Esto se

denomina en la literatura especializada como (“oscillation death”) [27], e implica que asintóticamente los osciladores satisfacen la condición

$$\mathbf{x}_i(t) = c_i, \quad (1.4)$$

donde  $c_i$  son constantes.

Matemáticamente, el sistema en consideración constituye un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo (EDR) [28]. A diferencia de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, donde la condición inicial es un punto (valor inicial o de frontera) en  $t = 0$ , en las EDR hay que especificar como condición inicial toda una función  $\phi(t)$  para un intervalo  $-\tau < t < 0$ . La integración de EDRs es un tema de bastante dificultad en la literatura de métodos numéricos.

Como parte fundamental de la presente Tesis, hemos elaborado un código numérico propio para integrar sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo y con la suficiente generalidad para ser aplicado a una diversidad de situaciones. Específicamente, hemos diseñado un código de integración EDR compatible y completamente integrado a la plataforma computacional ISyS del grupo de *Caos y Sistemas Complejos* del CFF, la cual es capaz de explorar procesos dinámicos en una gran variedad de redes complejas. La herramienta ISyS fue desarrollada inicialmente por K. Tucci en su tesis doctoral [29] y ha sido expandida subsecuentemente en varias tesis de pregrado [30] y postgrado [31], y en trabajos de investigación realizados en nuestro grupo. Por lo tanto, como producto agregado, el trabajo computacional desarrollado para la presente Tesis permitirá a futuros investigadores, entre otras cosas, utilizar la plataforma ISyS para estudiar sistemas EDR en diversas redes complejas (redes, fractales, jerárquicas, pequeño mundo, libres de escala, apolonias, heterogéneas, globales, etc).

Esta Tesis está estructurada de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se presenta una revisión de los fenómenos de sincronización y colapso de amplitud en sistemas de osciladores acoplados. A continuación, el Capítulo 3 contiene una introducción al problema de las ecuaciones diferenciales con retardo temporal. En este Capítulo presentamos el método numérico general que hemos construido

para integrar las ecuaciones de nuestros modelos, el cual es compatible con la herramienta computacional ISyS. El Capítulo 4 está dedicado a la investigación de diversos sistemas de osciladores caóticos globalmente acoplados con retardo temporal; allí se definen las cantidades macroscópicas utilizadas para caracterizar la emergencia de sincronización y de colapso de amplitud. Igualmente, se muestran los resultados principales de la presente Tesis. Se identifican dos escenarios para la aparición del colapso de amplitud: un escenario donde la sincronización precede al colapso, y otro donde la sincronización coincide con el colapso. Adicionalmente, proponemos una interpretación geométrica de los mecanismos subyacentes en cada uno de estos escenarios. La influencia de la topología de la red subyacente en el surgimiento de los comportamientos colectivos del sistema se estudia en el Capítulo 5. Finalmente, los resultados e implicaciones de nuestro trabajo se discuten en las Conclusiones.

*En primer lugar acabemos con Sócrates, porque ya estoy harto de este invento de que no saber nada es un signo de sabiduría.*

Isaac Asimov.

## Capítulo 2

# Colapso de amplitud en sistemas de osciladores acoplados.

Ciertos sistemas exhiben estados de organización espontánea que no pueden ser explicados en términos de sus partes constituyentes. La sincronización es uno de ellos. Ya en el siglo XVII, el científico holandés Christiaan Huygens logró sincronizar un par de relojes de péndulo colocados en una misma base [32], [33]. En las tres últimas décadas, con el advenimiento del computador y el consiguiente incremento del poder de cálculo, los científicos se han encontrado con este fenómeno en muchos contextos [34].

Además de la sincronización, otro fenómeno de interés que se ha descubierto en los años recientes, es la supresión de la dinámica en sistemas de osciladores interactuantes; esto es; cada elemento del sistema se encuentra oscilando una vez acoplados, y para ciertos valores de los parámetros, todos dejan de oscilar. El colapso de amplitud consiste en el cese de las oscilaciones en un sistema de osciladores no lineales acoplados, cuando puntos fijos se pueden estabilizar como consecuencia de la interacción. Este fenómeno ha sido observado en varios modelos, y desde el trabajo seminal de Bar-Eli [14] se ha encontrado en muchos

sistemas en la naturaleza. El fenómeno se ha atribuido a diversas causas, siendo las más importantes, la distribución heterogénea de las frecuencias locales de los osciladores [35], el acoplamiento vía variables conjugadas [20] y el retardo temporal en la transmisión de la información [28].

Las primeras investigaciones en sistemas donde espontáneamente se suprime la dinámica, consideran que la interacción entre los elementos se produce de forma instantánea. Hasta 1998, el efecto del retardo temporal había sido poco investigado, a pesar de que el retardo en las interacciones es un condición inevitable en los sistemas, puesto que la velocidad de propagación de información en la naturaleza es finita. Desde una perspectiva matemática, las ecuaciones diferenciales no lineales acopladas que representan sistemas dinámicos, son en general difíciles de integrar. Si se incluye el retardo temporal, las dificultades para resolver estas ecuaciones pueden llegar a ser agobiantes.

Los primeros trabajos sobre colapso de amplitud en sistemas con retardo temporal consideraban dos osciladores periódicos acoplados, los cuales poseen ciclos límites iguales. Una manera simple de visualizar geoméricamente el efecto del retardo temporal en la supresión de la amplitud de las oscilaciones en estos sistemas se muestra en la Fig. (2.1). Los puntos  $P(t)$  y  $Q(t)$  representan los estados,

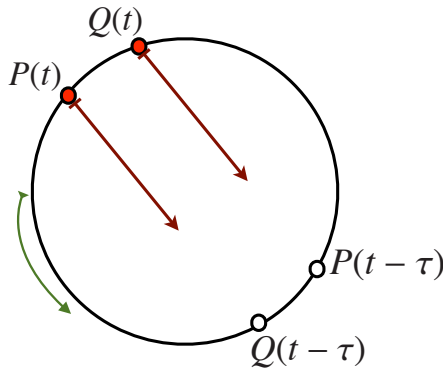


Figura 2.1: Representación geométrica de dos osciladores ciclo límite  $P$  y  $Q$  acoplados con retardo temporal.

asumidos cercanos, de dos osciladores sobre su ciclo límite común. Cuando hay acoplamiento sin retardo temporal,  $P(t)$  interactúa directamente con  $Q(t)$ , como

consecuencia estos puntos se atraen sobre su atractor, lo que puede conducir a la sincronización,  $P(t) = Q(t)$ , que en este caso sería periódica. La interacción con retardo temporal entre los osciladores implica que el punto  $P(t)$  experimentará una atracción hacia el punto  $Q(t - \tau)$ , el cual se encuentra más alejado de  $P(t)$  sobre el ciclo límite que  $Q(t)$ . De igual forma,  $Q(t)$  interactúa con el punto  $P(t - \tau)$  que también se encuentra alejado en el ciclo límite. Como resultado, los osciladores tienden a reducir la amplitud de la órbita, hasta que alcancen un punto fijo común.

El fenómeno de colapso de amplitud en dos osciladores acoplados con retardo temporal ha sido observado experimentalmente en [36], [37]

Reddy *et. al* [21] han mostrado explícitamente que el colapso de amplitud sucede dentro de ciertas regiones o (“islas”) en el espacio de parámetros descrito por la intensidad del acoplamiento y la magnitud del retardo temporal. Por otro lado, Prasad [28] ha encontrado que, tanto en osciladores homogéneos como heterogéneos, la interacción con retardo temporal causa la estabilización de puntos fijos en el sistema. Específicamente, Prasad consideró dos sistemas, uno tipo Rossler (2.1),

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= -y_i(t) - z_i(t), \\ \dot{y}_i(t) &= x_i(t) + ay_i(t) + \epsilon[y_j(t - \tau) - y_i(t)], \\ \dot{z}_i(t) &= b + z_i(t)[x_i(t) - c],\end{aligned}\tag{2.1}$$

los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  son escogidos en el rango donde los osciladores tienen un comportamiento caótico; mientras que el otro sistema es de tipo Lorenz (2.2),

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= -\sigma[x_i(t) - y_i(t)], \\ \dot{y}_i(t) &= [r - z_i(t)]x_i(t) - y_i(t) + \epsilon[y_j(t - \tau) - y_i(t)], \\ \dot{z}_i(t) &= x_i(t)y_i(t) - dz_i(t),\end{aligned}\tag{2.2}$$

donde  $\sigma$ ,  $d$  y  $r$  están en el régimen caótico y en ambos sistemas,  $i, j = 1, 2$  y  $i \neq j$ . En la Figura (2.2) se muestra el comportamiento colectivo para estos sistemas en el espacio de parámetros  $(\epsilon, \tau)$ , allí se observan diversos estados dinámicos del sistema, incluyendo el colapso de amplitud en un punto fijo (FP).

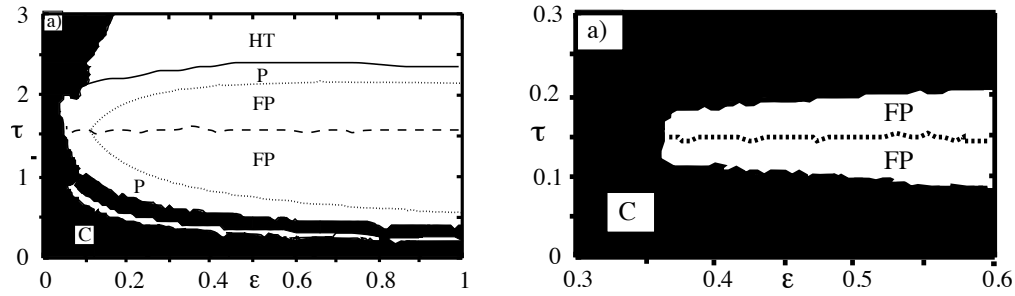


Figura 2.2: Comportamiento dinámico del sistema (2.1, 2.2) en el espacio de parámetros  $(\epsilon, \tau)$ . La región negra el comportamiento es caótico (C), mientras que en la región blanca hay diversos estados regulares, puntos fijos (FP), ciclos periódicos (P), e hipertoros (HT). Izquierda: osciladores de Rössler. Derecha: osciladores de Lorenz. [28]

Recientemente el interés en sistemas biológicos que son modelados usando una red de osciladores no lineales acoplados ha ido en aumento, en [38] Prasad *et. al.* consiguen crear nuevos puntos fijos y estabilizarlos en una red de neuronas acopladas tipo Hindmarsh-Rose (HD) [39], variando los parámetros tanto de la intensidad del acoplamiento como del retardo temporal, factores claves en el control de los osciladores.

Atay [22] ha explorado una red de osciladores acoplados globalmente en la cual el retardo temporal viene pesado por cierta función de probabilidad, lo cual permite incorporar efectos de "memoria". Este modelo puede considerarse más realista, puesto que el retardo temporal entre los elementos constituyentes, no es, en general, el mismo para cada par de elementos. Las simulaciones con este tipo de sistemas muestran que la zona donde se obtiene una solución en un punto fijo estable es mayor cuando la distribución de retardos temporales es heterogénea.

La importancia del colapso de amplitud ha sido notado por diversos autores en varios fenómenos físicos y biológicos, por ejemplo, el cese de actividad rítmica en sistemas biológicos puede ser relacionado a ciertas patologías. El hecho de que el colapso de amplitud se manifieste cuando la información del sistema alcanza a sus constituyentes con un retardo temporal, cuando éste no sea el mismo para



cada par de osciladores, y que las frecuencias locales de cada elemento siga alguna distribución heterogénea, implica que la supresión de la dinámica es un comportamiento dinámico robusto y común para procesos oscilatorios interactuantes.

Atay [40] ha probado un teorema que garantiza la existencia de puntos fijos estables en sistemas de  $N$  osciladores acoplados de la forma

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + \epsilon f_i x_i(t) + \epsilon \sum_{j=0}^N K_{ij} [x_j(t - \tau_{ij}) - x_i(t)], \quad (2.3)$$

donde  $x_i \in \mathfrak{R}^2$ ,  $i, j = 1 \dots N$ , la matriz de coeficientes  $A_i \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$  tiene un par de autovalores imaginarios puros  $\pm i\omega_i \neq 0$  y representa el conjunto de frecuencias naturales del sistema; los términos no lineales están en la función  $f_i : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2$ . Los coeficientes de acoplamiento son  $K_{ij} \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$  y el retardo en la transmisión de información entre los elementos  $i, j$  es  $\tau_{ij}$ . El sistema anterior es bastante general; el acoplamiento y el retardo entre dos elementos  $i$  y  $j$  puede depender de los estados de los mismos y de la separación espacial entre ellos.

Haciendo el cambio de variable  $\Phi_i(t) = e^{tA_i}$ , tenemos  $x_i = e^{tA_i} u_i$ , y la ecuación (2.3) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(t) &= \epsilon \Phi_i^{-1}(t) f_i \Phi_i(t) u_i(t) - \epsilon \sum_{j=1}^N \Phi_i^{-1}(t) K_{ij} \Phi_i(t) u_i(t) \\ &+ \epsilon \sum_{j=1}^N \Phi_i^{-1}(t) K_{ij} \Phi_j(t - \tau_{ij}) u_j(t - \tau_{ij}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ahora bien, se puede demostrar que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_i^{-1}(t) K \Phi_j(t - \tau) dt = \begin{cases} \bar{K} \Phi(-\tau) & \text{si } \omega_i = \omega_j \\ 0 & \text{si } \omega_i \neq \omega_j \end{cases} \quad (2.5)$$

donde,  $\bar{K}_{ij} = \frac{1}{2}(\text{tr} K_{ij}) \mathbf{I} - \frac{1}{2} \text{tr}(J K_{ij}) \mathbf{J}$ , siendo  $\mathbf{I}$  una matriz unitaria y  $\mathbf{J}$  una matriz que simetriza a  $\mathbf{K}$  y cuya representación bidimensional es

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Supongamos que existen  $M$  frecuencias distintas  $\omega_1, \dots, \omega_M$ , en el sistema y sea  $I_n$  el conjunto de todos los osciladores con frecuencias  $\omega_n$ , para  $n = 1, \dots, M$ . Es decir,  $i \in I_n$  si y sólo si los autovalores de  $A_i$  son  $\pm i\omega_n$ . Entonces

$$\dot{u}_i = \epsilon \left( \bar{f}_i(u_i) - \sum_{j=1}^N \bar{K}_{ij} u_j + \sum_{j \in I_n} \bar{K}_{ij} \Phi_j(-\tau_{ij}) u_j \right), \quad i \in I_n. \quad (2.6)$$

Una vez escrito el sistema en estos términos, se tiene el siguiente teorema [40]:

**Teorema** Sea los números  $q_i$  con  $i \in I_n$  definidos como

$$q_i = \sup \left( \frac{u^T \bar{f}_i}{\|u\|^2} : \|u\| \leq R, u \neq 0 \right) \quad R \geq 0, \quad (2.7)$$

y sea  $v_n$  el vector formado por la concatenación de  $u_i$  para  $i \in I_n$ . Entonces si,

$$\sum_{j=1}^N \text{tr} K_{ij} - \sum_{j \in I_n} |(\text{tr} K_{ij})(\cos \omega_n) \tau_{ij} - \text{tr}(JK_{ij})(\sin \omega_n) \tau_{ij}| > 2q_i, \quad (2.8)$$

para todo  $i \in I_n$ . Todas las soluciones satisfacen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_n(t) = 0.$$

El teorema anterior garantiza la existencia de soluciones que son puntos fijos estables del sistema. Cuando eso sucede, en el sistema se habrá suprimido la dinámica. Otra consecuencia de este teorema es la formación de patrones espaciales en la red; esto es, elementos oscilando coexistiendo con elementos estáticos en el sistema.

*La vida no es la que uno vivió, sino la que uno recuerda  
y cómo la recuerda para contarla.*

Gabriel García Marquez.

## Capítulo 3

# Ecuaciones diferenciales con retardo temporal.

Muchos son los modelos matemáticos de sistemas reales que son escritos en términos de ecuaciones diferenciales con retardo temporal (EDRs) [41]; por ejemplo, modelos de dinámica poblacional (que toman en cuenta el tiempo de gestación) o modelos de propagación de enfermedades infecciosas (tiempo de incubación), inclusive sistemas para controlar aeronaves (que se desplazan a alta velocidad), etc. Esto hace imperante el desarrollo de métodos numérico para resolver estos problemas.

Este capítulo consta de dos partes. En la primera presentamos una revisión de un método numérico para resolver una ecuación diferencial con retardo constante. En la segunda parte, implementamos ese método en la plataforma computacional ISyS que nos permita integrar EDRs en diversas topologías.

### 3.1. Método Numérico.

Considérese la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(t, y(t), y(t - \tau)), \quad t_0 \leq t \leq t_f, \\ y(t) &= \phi(t), \quad t_0 - \tau \leq t < t_0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde  $f : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , y  $\tau$  es el retardo en el sistema.

A diferencia de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), en las ecuaciones diferenciales con retardo EDR, las condiciones iniciales vienen especificada por una función  $\phi$  definida en un intervalo de  $t$  en lugar de un valor de la función en un punto  $t_0$ . En el caso más general, el retardo puede depender del tiempo y de la variable  $y$ , a saber,  $\tau = \tau(t, y(t))$ .

Cuando el retardo temporal es constante, es válido hacer una extensión continua de un método numérico para resolver EDO's [42]. Sin embargo, la exactitud y estabilidad del método cuando es aplicado a las EDR's, va a depender del método en sí mismo y de la forma como se haga la extensión.

El método de Runge-Kutta (RK) de cuarto orden se usa habitualmente para resolver la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= g(t, y(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_f, \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

La solución general puede plantearse en término de una relación de recurrencia como sigue:

$$y_{n+1} = y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^{\pi} b_i k_{n+1}^i, \quad (3.3)$$

donde  $b_i$  colecciona los pesos de la fórmula de cuadratura y

$$k_{n+1}^i = g(t_{n+1}^i, y_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^{\pi} a_{ij} k_{n+1}^j), \quad i = 1, \dots, \pi, \quad (3.4)$$

donde  $t_{n+1}^i = t_n + c_i h_{n+1}$ , siendo  $c_i = \sum_{j=1}^{\pi} a_{ij}$ . La suma se extiende sobre todas las etapas del método RK aplicado. Los coeficientes  $c_i$  son llamados *abscissae* y en la mayoría de los métodos están en el intervalo  $[0, 1]$ .

La generalidad de los fenómenos estudiados en este trabajo tienen la propiedad de ocurrir aún cuando el paso de integración sea constante,  $h_{n+1} = h$ . Este hecho implica que la distancia entre puntos nodales adyacentes en el eje  $n$ , sea la misma durante toda la integración. Así, cuando  $h = \tau/m$  para cualquier número  $m \in \mathbf{N}$ , el retardo puede escribirse como  $\tau = t_{n+1}^i - t_{n+1-m}^i$ .

La solución general al problema (3.1) viene expresada por

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \sum_{i=1}^{\pi} b_i f(t_{n+1}^i, k_{n+1}^i, k_{n+1-m}^i), \\ k_{n+1}^i &= k_n + h \sum_{i=1}^{\pi} a_{ij} (t_{n+1}^i, k_{n+1}^i, k_{n+1-m}^i); \end{aligned} \quad (3.5)$$

y constituye lo que se conoce como el *método RK natural para EDRs*.

El método RK de cuarto orden que utilizamos en el presente trabajo, tiene como coeficientes:

$$\begin{aligned} k^1 x_i &= h e(y, z), \\ k^1 y_i &= h f(x, y, d, |v_i|), \\ k^1 z_i &= h g(x, z). \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} k^2 x_i &= h e\left(y + \frac{1}{2} k^1 x_i, z + \frac{1}{2} k^1 z_i\right), \\ k^2 y_i &= h f\left(x + \frac{1}{2} k^1 x_i, y + \frac{1}{2} k^1 y_i, d + \frac{1}{2} k^1 y_i, |v_i|\right), \\ k^2 z_i &= h g\left(x + \frac{1}{2} k^1 x_i, z + \frac{1}{2} k^1 z_i\right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}
k^3 x_i &= he(y + \frac{1}{2}k^2 x_i, z + \frac{1}{2}k^2 z_i), \\
k^3 y_i &= hf(x + \frac{1}{2}k^2 x_i, y + \frac{1}{2}k^2 y_i, d + \frac{1}{2}k^2 y_i, |v_i|), \\
k^3 z_i &= hg(x + \frac{1}{2}k^2 x_i, z + \frac{1}{2}k^2 z_i).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
k^4 x_i &= he(y + k^3 x_i, z + k^3 z_i), \\
k^4 y_i &= hf(x + k^3 x_i, y + k^3 y_i, d + k^3 y_i, |v_i|), \\
k^4 z_i &= hg(x + k^3 x_i, z + k^3 z_i).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
x_i(t+h) &= x_i(t) + \frac{1}{6}(k^1 x_i + 2k^2 x_i + 2k^3 x_i + k^4 x_i), \\
y_i(t+h) &= y_i(t) + \frac{1}{6}(k^1 y_i + 2k^2 y_i + 2k^3 y_i + k^4 y_i), \\
z_i(t+h) &= z_i(t) + \frac{1}{6}(k^1 z_i + 2k^2 z_i + 2k^3 z_i + k^4 z_i).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

### 3.2. Implementación numérica en ISyS.

Una topología en el sentido de un conjunto de nodos conectados está definida por: el número  $N$  de elementos o nodos del sistema y el conjunto  $v_i$ , que contiene todos los elementos conectados con  $i$ . Como ejemplo, pensemos en una red tipo anillo regular de primeros vecinos; en ese caso, cada elemento  $i$  del sistema está conectado con sus dos primeros vecinos, así  $v_i = i - 1, i + 1$  y  $|v_i| = 2$  y los vecinos son el elemento  $i + 1$  y el elemento  $i - 1$ .

En este trabajo abordaremos dos tipos de topologías. La primera corresponde a un acoplamiento global, donde  $|v_i| = N$  y cada elemento está acoplado con todos los demás. La segunda topología corresponde a redes de pequeño mundo. Es de

notar que el método que hemos implementamos se puede aplicar a cualquier red definida en la plataforma computacional ISyS.

A continuación describimos el algoritmo del método RK de cuarto orden que implementamos para sistemas donde la dinámica de cada elemento está descrita por tres EDR. Tomemos las siguientes ecuaciones como ejemplo,

$$\begin{aligned}\frac{dx_i(t)}{dt} &= e(y, z), \\ \frac{dy_i(t)}{dt} &= f(x, y, z, |v_i|), \\ \frac{dz_i(t)}{dt} &= g(x, z).\end{aligned}\tag{3.11}$$

1. Reservar memoria para las tres variables de los  $N$  elementos del sistema ( $x_i^n, y_i^n, z_i^n$ ); esto es una matriz de tamaño  $3(mh + 1) \times M$ , donde  $h = \tau/m$ .
2. Reservar memoria para los  $12N$  coeficientes del método de integración a usar.
3. Definir las ecuaciones a integrar. Asociamos las funciones  $e, f, y g$  a estas ecuaciones, escritas de forma tal, que quede expresada de forma explícita cualquier topología; por ejemplo (Rössler)

$$\begin{aligned}e(y, z) &= -y(t) - z(t), \\ f(x, y, d, |v_i|) &= x(t) + (a - \epsilon)y(t) + \frac{\epsilon}{|v_i|}d, \\ g(x, z) &= b + z(t)[x(t) - c].\end{aligned}\tag{3.12}$$

4. Establecer aleatoriamente las  $3mN$  condiciones iniciales del problema.
5. Calcular

$$d(t) = \sum_{j \in v_i} \psi_j(t - \tau),\tag{3.13}$$

donde  $\psi$  es la variable mediante la cual el elemento está acoplado con el resto del sistema; en el caso particular de las ecuaciones (3.11),  $\psi_j = y_j$ .

6. Calcular los coeficientes  $k_x^1, k_y^1$  y  $k_z^1$  de todos los elementos del sistema. Repetir con el resto de los coeficientes  $k^2, k^3$ , etc.

7. Evolucionar todas las variables, de todos los elementos del sistema una unidad de tiempo. Esto es, calcular  $x_i(t + h)$ ,  $y_i(t + h)$  y  $z_i(t + h)$ , donde  $h$  es el paso de integración.
8. Repetir los pasos anteriores durante las unidades de tiempo deseadas.



*De qué otra forma se puede amenazar que no sea de muerte? Lo interesante, lo original, sería que alguien lo amenace a uno con la inmortalidad.*

Jorge Luis Borges.

## Capítulo 4

# Colapso de amplitud en osciladores caóticos globalmente acoplados con retardo temporal.

Las ecuaciones de Rössler [43] constituyen un ejemplo paradigmático de flujos dinámicos sencillos que tienen un comportamiento complejo, exhibiendo caos en cierto rango de parámetros. En este capítulo investigamos un sistema de  $N$  osciladores de Rössler acoplados globalmente, con retardo temporal en la interacción global. En tal sentido, consideramos el siguiente sistema,

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= -y_i(t) - z_i(t), \\ \dot{y}_i(t) &= x_i(t) + (a - \epsilon)y_i(t) + \epsilon\langle y(t - \tau) \rangle, \\ \dot{z}_i(t) &= b + z_i(t)[x_i(t) - c],\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $x_i(t), y_i(t), z_i(t)$  son las variables de estado del elemento  $i$ ; el parámetro  $\epsilon$  representa la intensidad del acoplamiento entre los elementos;  $\tau$  es el tiempo de retardo; y

$$\langle y(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j(t - \tau),\tag{4.2}$$

es el valor medio instantáneo de las variables  $y_i$ . Igualmente, podemos definir los correspondientes valores medios instantáneos  $\langle x \rangle$  y  $\langle z \rangle$ . Las unidades dinámicas están acopladas globalmente de forma difusiva. El sistema se retroalimenta a través del campo medio  $\langle y \rangle$ . En este caso, la información global contenida en  $\langle y \rangle$  tarda un tiempo  $\tau$  en alcanzar a cada elemento del sistema. Fijamos los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  tales que la dinámica local de cada elemento se encuentre en el régimen caótico. En este Capítulo hemos escogido los valores  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$  y  $c = 5.7$ . Para estos valores de los parámetros locales, el punto fijo de un oscilador de Rössler ( $\epsilon = 0$ ), dado por  $\dot{x}_i = \dot{y}_i = \dot{z}_i$  corresponde a  $x^* = 0.00702620$ ,  $y^* = -0.03513102$  y  $z^* = 0.03513102$ .

Los cálculos que se muestran a continuación fueron realizados con un tamaño del sistema  $N = 100$ . El paso de integración empleado es  $h = 0.05$ . Las  $\tau/h$  condiciones iniciales de los estados  $(x_i, y_i$  y  $z_i)$ ,  $\forall i$ , se distribuyen aleatoriamente con probabilidad uniforme en el intervalo  $[0, 1]$ . Para cada realización de condiciones iniciales, tomamos un tiempo transiente de  $t_r = 200000$  iteraciones antes de calcular cantidades estadísticas.

Cuando no hay acoplamiento,  $\epsilon = 0$ , cada elemento en el sistema está regido por la dinámica de Rössler y corresponde a un flujo caótico. La Figura (4.1) muestra el atractor de un elemento del sistema.

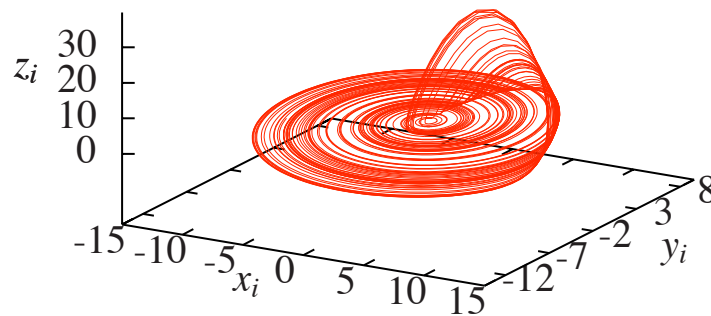


Figura 4.1: Espacio de fase para un elemento del sistema (4.1), con  $\epsilon = 0$ .

Para caracterizar el estado sincronizado del sistema utilizamos la desviación estándar promedio de las variables de los elementos del sistema, después de

despreciar los transientes, definida como,

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{(T - t_r)} \sum_{t=t_r}^T \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ (x_i(t) - \langle x \rangle)^2 + (y_i(t) - \langle y \rangle)^2 + (z_i(t) - \langle z \rangle)^2 \right] \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.3)$$

Cuando  $\langle \sigma \rangle = 0$ , el sistema está sincronizado. Numéricamente, consideramos que el sistema ha alcanzado un estado sincronizado cuando  $\langle \sigma \rangle = 10^{-6}$ .

La Figura (4.2) muestra la cantidad  $\langle \sigma \rangle$  como función de la intensidad del acoplamiento, para  $\tau = 0$ . Existe un valor crítico de la intensidad del acoplamiento,  $\epsilon_c \simeq 0.235$ , tal que para cualquier  $\epsilon > \epsilon_c$  todos los elementos del sistema están sincronizados. Luego, en ausencia de retardo  $\tau = 0$ , el acoplamiento global induce sincronización en el sistema. En este caso, hemos verificado que las órbitas de los elementos se sincronizan.

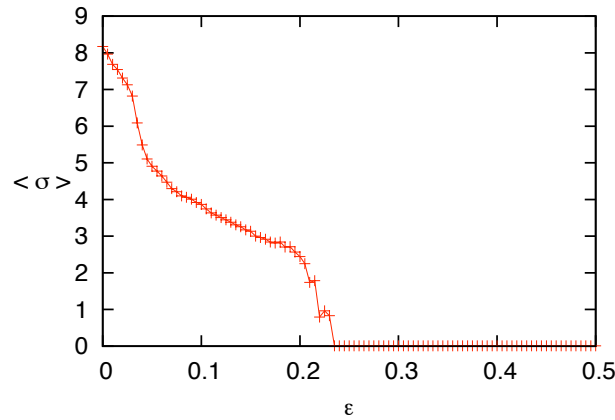


Figura 4.2: Desviación estándar promedio  $\langle \sigma \rangle$  del sistema (4.1) versus la intensidad del acoplamiento  $\epsilon$ , con  $\tau = 0$ ,  $N = 100$ .

## 4.1. Efecto del retardo temporal

La Figura (4.3) muestra la cantidad  $\langle \sigma \rangle$  como función de  $\epsilon$ , para distintos valores de  $\tau$ . Nótese que la inclusión del retardo temporal modifica el valor crítico  $\epsilon_c$  para el cual aparece sincronización. La variación del valor  $\epsilon_c$  ocurre de forma no trivial al incrementar  $\tau$ ; esto sugiere que la frontera de sincronización en el espacio de parámetros  $(\epsilon, \tau)$  debe poseer una estructura compleja.

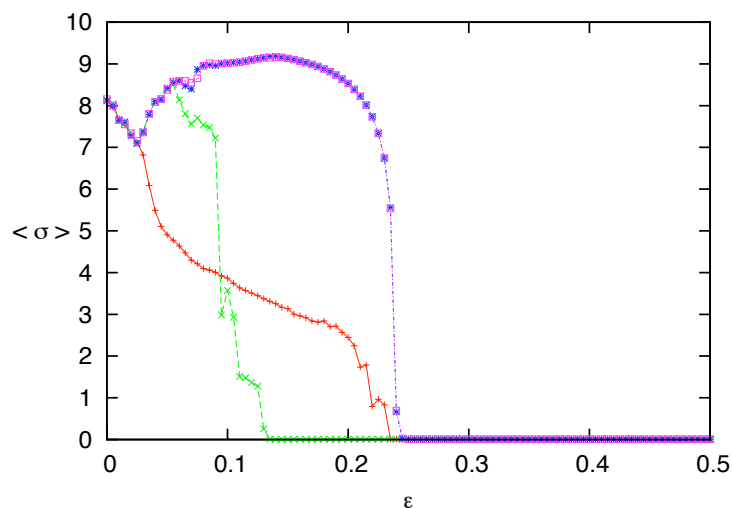


Figura 4.3: Desviación estándar  $\langle \sigma \rangle$  del sistema (4.1) versus  $\epsilon$  para varios  $\tau$ . Los valores de del retardo son:  $\tau = 0$  (cruces rojas),  $\tau = 1.5$  (equis verdes),  $\tau = 3.5$  (estrellas azules) y  $\tau = 9$  (cuadros púrpuras). Tamaño del sistema  $N = 100$

El tiempo característico de recurrencia de un oscilador tipo Rössler puede ser estimado construyendo la sección de Poincaré en el plano  $x = 0$ , cuando la órbita atraviesa este plano en la dirección de  $x > 0$  a  $x < 0$ . Haciendo un promedio sobre muchas de estas intersecciones, hemos obtenido un tiempo de recurrencia de la órbita alrededor de  $m = 130$  iteraciones; lo cual equivale a un tiempo  $t^* = mh = 6.5$ . Este tiempo de recurrencia proporciona una escala aproximada para caracterizar las magnitudes de los retardos temporales en el sistema de osciladores acoplados.

La Figura (4.4) (izq.) muestra las proyecciones en el plano  $(x, y)$  del atractor de un elemento y del campo medio del sistema para  $\tau = 1.5$ . No se observa sincronización, puesto que las dos órbitas no coinciden. Sin embargo, la trayectoria del elemento está en período 4, como se puede apreciar en la Figura (4.4) (centro, derecha). Esta figura muestra que la inclusión del retardo temporal puede inducir periodicidad en el sistema.

La Figura (4.4) (centro) muestra la sección de Poincaré de la trayectoria de un elemento en el plano  $x = 0$ , cuando la órbita atraviesa este plano en la dirección

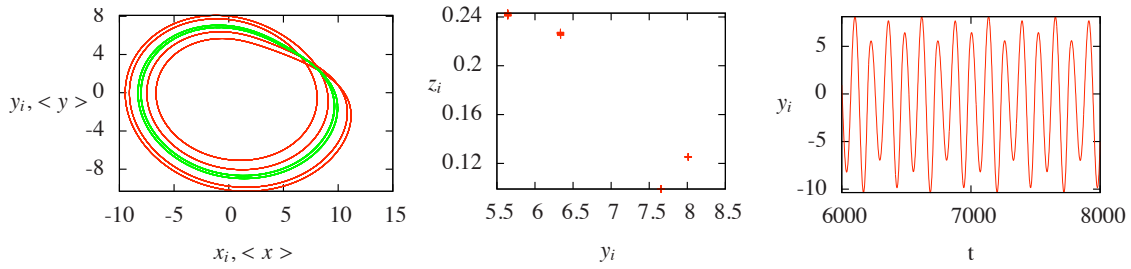


Figura 4.4: Izquierda: proyección del atractor de un elemento (línea roja) y del campo medio (línea verde) del sistema (4.1) en el plano  $(x, y)$ . Centro: sección de Poincaré de un elemento en el plano  $x = 0$ . Derecha: serie de tiempo de la variable  $y$  de un elemento. Los parámetros son  $N = 100$ ,  $\tau = 1.5$  y  $\epsilon = 0.115$ .

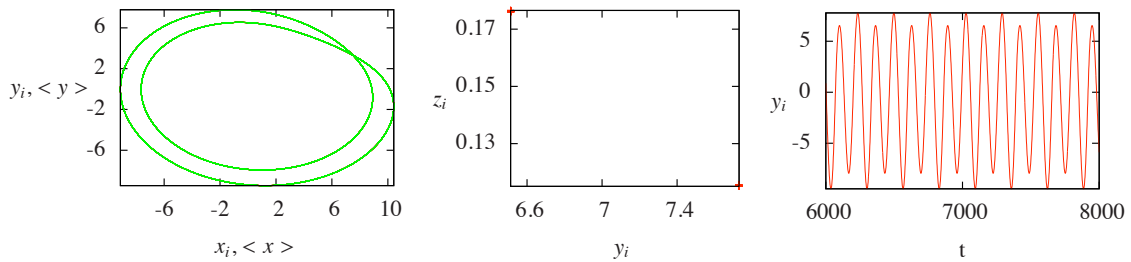


Figura 4.5: Izquierda: proyección del atractor de un elemento (línea roja) y del campo medio (línea verde) del sistema (4.1) en el plano  $(x, y)$ . Centro: sección de Poincaré de un elemento en el plano  $x = 0$ . Derecha: serie de tiempo de la variable  $y$  de un elemento. Los parámetros son  $N = 100$ ,  $\tau = 1.5$  y  $\epsilon = 0.15$ .

de  $x > 0$  a  $x < 0$ .

Las Figuras (4.5 y 4.6) muestran que los elementos del sistema con un retardo de  $\tau = 1.5$  se sincronizan en órbitas periódicas, a medida que se incrementa la intensidad del acoplamiento. Para  $\epsilon > \epsilon_c \approx 0.135$ , el comportamiento del sistema pasa de un estado no sincronizado a un estado sincronizado en período dos y posteriormente a un estado sincronizado de período uno.

Para un valor de  $\epsilon > \epsilon_c \approx 0.325$ , manteniendo  $\tau = 1.5$ , se observa el fenómeno de colapso de amplitud de los elementos del sistema, como muestra la Figura (4.7).

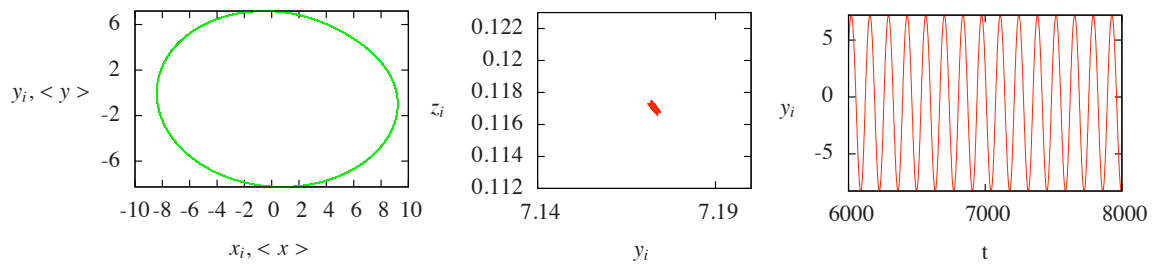


Figura 4.6: Izquierda: proyección del atractor de un elemento (línea roja) y del campo medio (línea verde) del sistema (4.1) en el plano  $(x, y)$ . Centro: sección de Poincaré de un elemento en el plano  $x = 0$ . Derecha: serie de tiempo de la variable  $y$  de un elemento. Los parámetros son  $N = 100$ ,  $\tau = 1.5$  y  $\epsilon = 0.2$ .

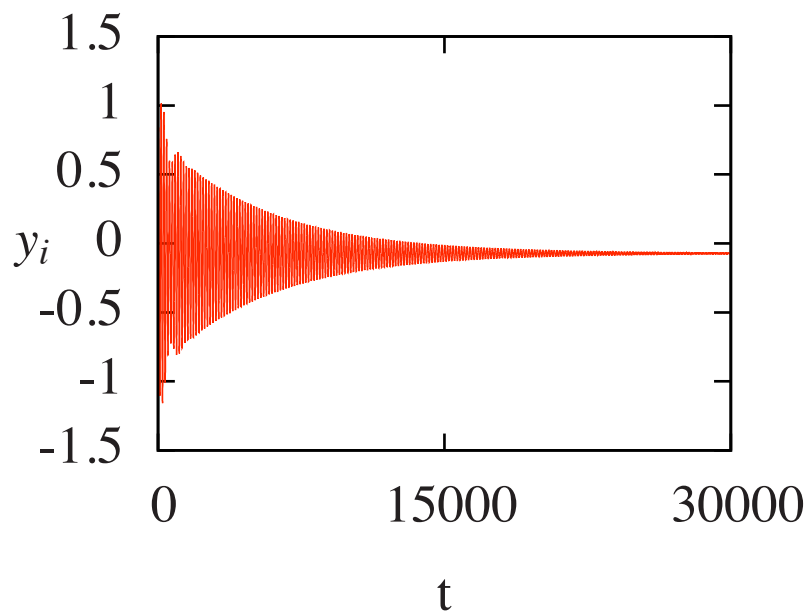


Figura 4.7: Serie de tiempo de la variable  $y$  de un elemento del sistema (4.1). Los parámetros son  $N = 100$ ,  $\epsilon = 0.335$  y  $\tau = 1.5$

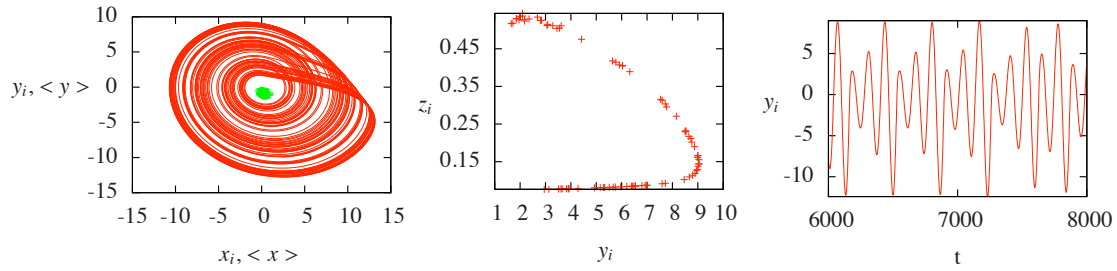


Figura 4.8: Izquierda: proyección del atractor de un elemento (línea roja) y del campo medio (línea verde) del sistema (4.1) en el plano  $(x, y)$ . Centro: sección de Poincaré de un elemento en el plano  $x = 0$ . Derecha: serie de tiempo de la variable  $y$  de un elemento. Los parámetros son  $N = 100$ ,  $\tau = 3.5$  y  $\epsilon = 0.05$ .

Note que para  $\tau = 1.5$  tenemos un escenario de transición del caos al colapso de amplitud en el cual primero ocurre la sincronización de los elementos y luego mediante duplicación inversa de período colectivo se alcanza un punto fijo común. Es decir, la sincronización precede a la muerte de amplitud cuando se incrementa el parámetro de acoplamiento del sistema en este escenario.

Para valores mayores del retardo temporal, es posible encontrar una vía diferente a la anterior para alcanzar el colapso de amplitud. Las Figuras (4.8, 4.9, 4.10, 4.11), muestran las proyecciones en el plano  $(x, y)$  del atractor de un elemento y del campo medio del sistema para varios valores de  $\epsilon$  con  $\tau = 3.5$  fijo. Para este valor del retardo temporal, no se observa sincronización. No obstante, al incrementar  $\epsilon$ , los elementos del sistema están en las mismas órbitas periódicas, cuyo período disminuye vía duplicación inversa hasta alcanzar el punto fijo común para  $\epsilon > \epsilon_c \simeq 0.245$ .

Note que en este caso, tenemos una situación donde el colapso de amplitud se produce simultáneamente con la sincronización de los elementos en un punto fijo común. Es decir, la sincronización y la muerte de amplitud coinciden.

La Figura (4.12) muestra la evolución temporal de la variable  $y$  de un elemento y del campo medio  $\langle y \rangle$  del sistema para el valor  $\epsilon = 0.245$  y con un retardo  $\tau = 3.5$ .

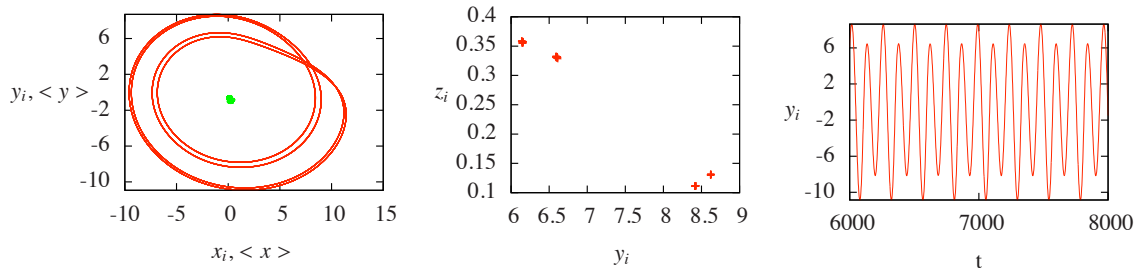


Figura 4.9: Izquierda: proyección del atractor de un elemento (línea roja) y del campo medio (línea verde) del sistema (4.1) en el plano  $(x, y)$ . Centro: sección de Poincaré de un elemento en el plano  $x = 0$ . Derecha: serie de tiempo de la variable  $y$  de un elemento. Los parámetros son  $N = 100$ ,  $\tau = 3.5$  y  $\epsilon = 0.11$ .

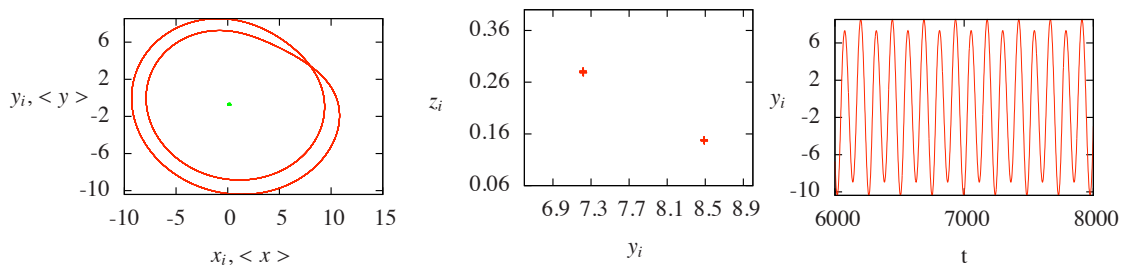


Figura 4.10: Izquierda: proyección del atractor de un elemento (línea roja) y del campo medio (línea verde) del sistema (4.1) en el plano  $(x, y)$ . Centro: sección de Poincaré de un elemento en el plano  $x = 0$ . Derecha: serie de tiempo de la variable  $y$  de un elemento. Los parámetros son  $N = 100$ ,  $\tau = 3.5$  y  $\epsilon = 0.13$ .

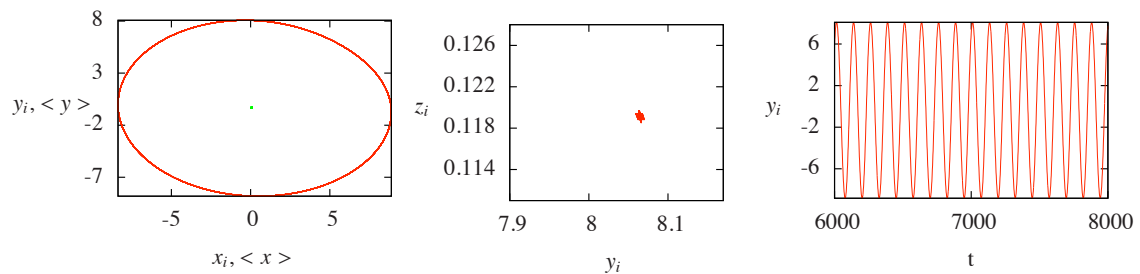


Figura 4.11: Izquierda: proyección del atractor de un elemento (línea roja) y del campo medio (línea verde) del sistema (4.1) en el plano  $(x, y)$ . Centro: sección de Poincaré de un elemento en el plano  $x = 0$ . Derecha: serie de tiempo de la variable  $y$  de un elemento. Los parámetros son  $N = 100$ ,  $\tau = 3.5$  y  $\epsilon = 0.2$ .



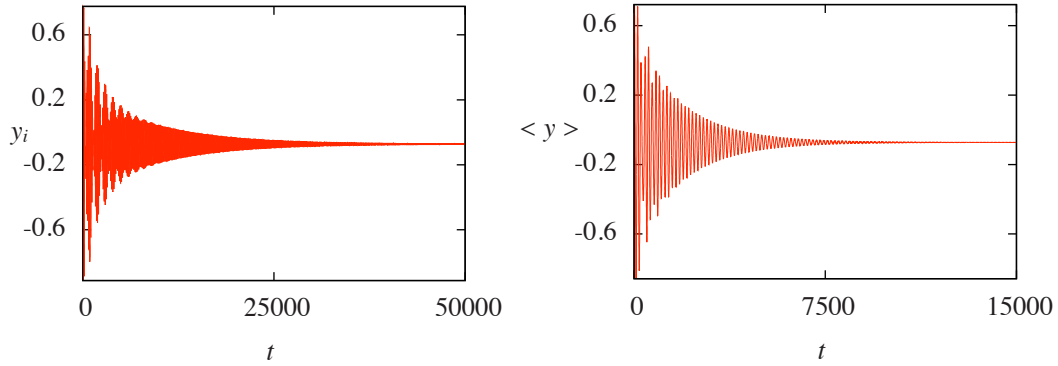


Figura 4.12: Izquierda: serie de tiempo de la variable  $y$  de un elemento del sistema (4.1). Derecha: campo medio del sistema. Los parámetros son  $N = 100$ ,  $\epsilon = 0.245$  y  $\tau = 3.5$ .

Observamos que la amplitud del campo medio colapsa al punto fijo  $(x^*, y^*, z^*)$  de la dinámica local mucho antes que cualquier elemento del sistema. Luego, podemos interpretar que el campo medio, el cual actúa simultáneamente sobre todos los elementos del sistema, se anticipa al punto fijo y conduce a los elementos al colapso. A nivel local, el punto fijo  $(x^*, y^*, z^*)$  es inestable. Sin embargo, cada oscilador experimenta la influencia del campo medio como si éste fuera un forzador externo en el valor del punto fijo. Como consecuencia, cada oscilador sigue al forzamiento hasta sincronizarse completamente con éste. Este comportamiento concuerda con trabajos recientes en sistemas de mapas caóticos acoplados sujetos a un forzamiento externo, donde se ha demostrado que un punto fijo inestable de la dinámica local puede estabilizarse si el forzamiento tiene justamente el valor de ese punto fijo [44].

Recapitulando nuestros resultados, hemos encontrado dos escenarios diferentes para la ocurrencia del colapso de amplitud en sistemas de osciladores caóticos acoplados. En el primer escenario, que denotamos por  $S < C$  ( $S$  precede a  $C$ ), la sincronización  $S$  tiene lugar para un valor del acoplamiento menor que el valor requerido para el colapso  $C$ . En el segundo escenario, que denotamos por  $S \equiv C$  ( $S$  equivalente a  $C$ ), la sincronización y el colapso de amplitud ocurren justo en el mismo valor del parámetro de acoplamiento. Estos escenarios para la "muerte" no habían sido identificados previamente, hasta donde tenemos conocimiento.

Un análisis detallado de los resultados sobre colapso de amplitud obtenidos por otros autores nos permite ahora clasificar dentro de estos escenarios el tipo de colapso que ellos observaron.

Para caracterizar la aparición del colapso de amplitud en el sistema y poder distinguir los dos escenarios mencionados, introducimos como parámetro de orden la *actividad del sistema*, una cantidad basada en un concepto usado previamente en otros contextos[45],

$$A = \frac{1}{(T - t_r)} \sum_{t=t_r}^T \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ |x_i(t) - x_i(t-h)| + |y_i(t) - y_i(t-h)| + |z_i(t) - z_i(t-h)| \right] \right]. \quad (4.4)$$

Cuando las variables de estado no cambian en el tiempo, tenemos  $A = 0$ , indicando que el sistema ha alcanzado el colapso de amplitud.

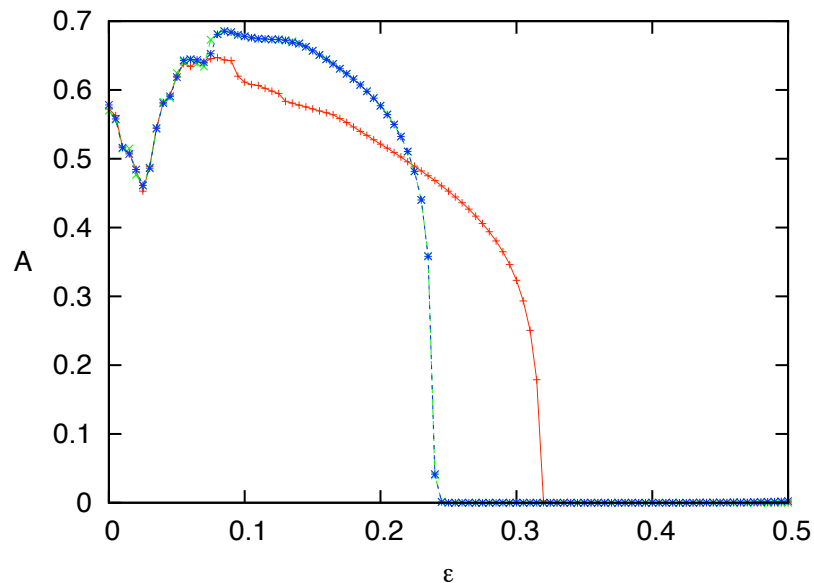


Figura 4.13: Actividad  $A$  (4.4) del sistema (4.1) versus  $\epsilon$ , para diferentes valores del retardo;  $\tau = 1.5$  (cruces rojas),  $\tau = 3.5$  (equis verdes) y  $\tau = 9$  (estrellas azules). Tamaño del sistema  $N = 100$

La Figura (4.13) muestra la actividad  $A$  del sistema 4.1 en función del acoplamiento  $\epsilon$ , para varios valores de  $\tau$ . Se observa que para  $\tau = 1.5$ , correspondiente

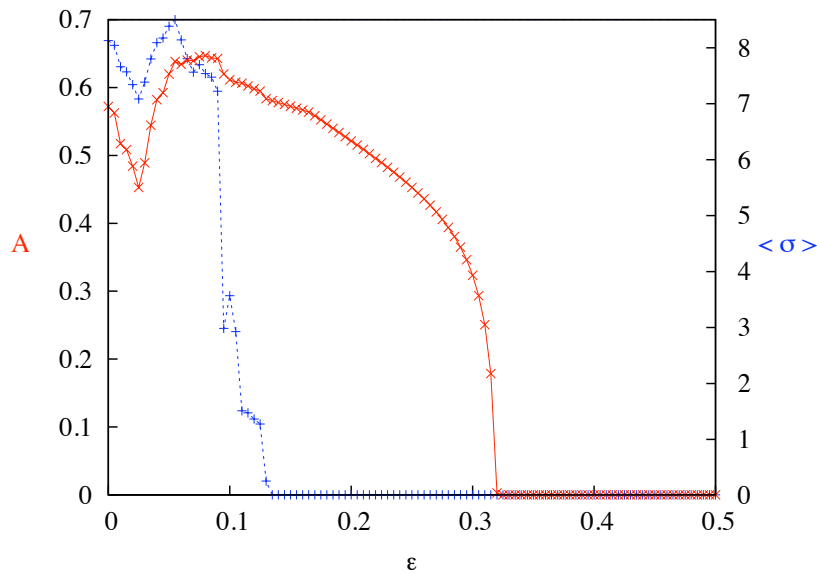


Figura 4.14: Escenario  $S < C$ : actividad del sistema 4.1 (línea roja) y la desviación estándar del sistema (línea azul) versus  $\epsilon$ . Los parámetros son  $N = 100$  y  $\tau = 1.5$ .

al escenario  $S < C$ , el valor crítico de  $\epsilon$  para el colapso de amplitud es menor que el valor crítico del acoplamiento requerido para el colapso cuando  $\tau = 3.5$ , el cual está asociado al escenario  $S \equiv C$ . Note que para un retardo de  $\tau = 9$ , el cual es mayor que el tiempo de recurrencia típico de un atractor de Rössler ( $t = 6.5$ ), la actividad se comporta de la misma manera que para  $\tau = 3.5$ . Esto sugiere que debe existir cierta relación de periodicidad para la ocurrencia del colapso de amplitud en el espacio de parámetros  $(\epsilon, \tau)$ . Esta posibilidad será investigada en la próxima sección.

La Figura (4.14) muestra la actividad  $A$  y la desviación estándar  $\langle \sigma \rangle$  del sistema como funciones de  $\epsilon$ , para un retardo  $\tau = 1.5$ , correspondiente al escenario  $S < C$ . Se observa que la sincronización ocurre antes que el colapso de amplitud a medida que se incrementa  $\epsilon$ .

La Figura (4.15) muestra la actividad  $A$  y la desviación estándar  $\langle \sigma \rangle$  del sistema como funciones de  $\epsilon$ , para un retardo  $\tau = 3.5$ , correspondiente al escenario  $S \equiv C$ . Se observa que la sincronización y el colapso de amplitud ocurren justo en el mismo valor crítico de  $\epsilon$ .

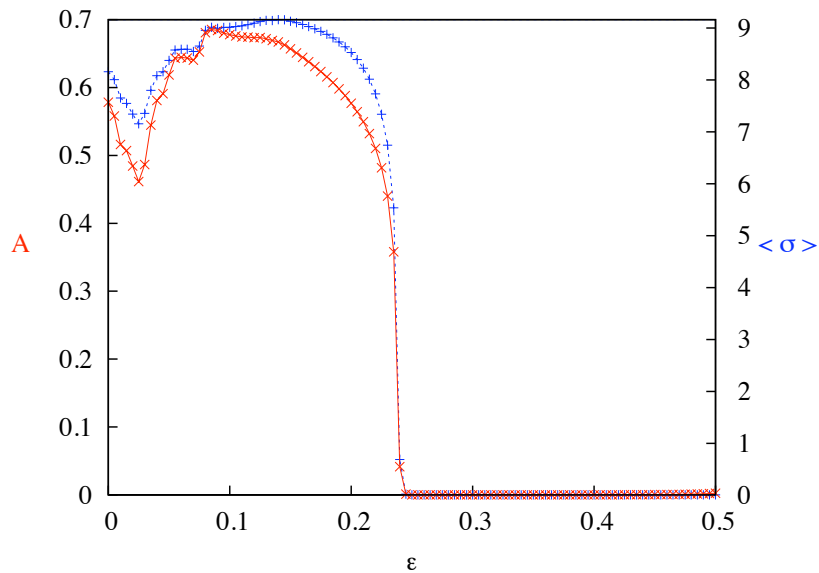


Figura 4.15: Escenario  $S \equiv C$ : actividad del sistema 4.1 (línea roja) y la desviación estándar del sistema (línea azul) versus  $\epsilon$ . Los parámetros son  $N = 100$  y  $\tau = 3.5$ .

Las Figuras (4.16 y 4.17) muestran la desviación estándar  $\langle \sigma \rangle$  y la actividad  $A$  respectivamente, como funciones de  $\tau$ , para diversos valores del acoplamiento  $\epsilon$ . Tanto la gráfica de  $\langle \sigma \rangle$  como de la actividad  $A$  revelan la existencia de intervalos no contiguos de sincronización y de colapso de amplitud en la variable  $\tau$ . Sin embargo, los intervalos de sincronización no son idénticos a los de colapso. Esto indica que ambos fenómenos, la sincronización y el colapso de amplitud, poseen una estructura compleja en el espacio de parámetros  $(\epsilon, \tau)$

## 4.2. Islas de la muerte.

La Figura (4.18) muestra la desviación estándar en el espacio de parámetros  $(\epsilon, \tau)$  para el sistema de osciladores de Rössler globalmente acoplados con retardo temporal. El estado sincronizado del sistema  $\langle \sigma \rangle = 0$  corresponde al color negro en este plano, de acuerdo a la escala de colores que se indica en la figura. Note la estructura compleja de la frontera de sincronización en el plano  $(\epsilon, \tau)$ . Se observan mínimos relativos de sincronización para varios valores de  $\tau$ ; estas estructuras nos

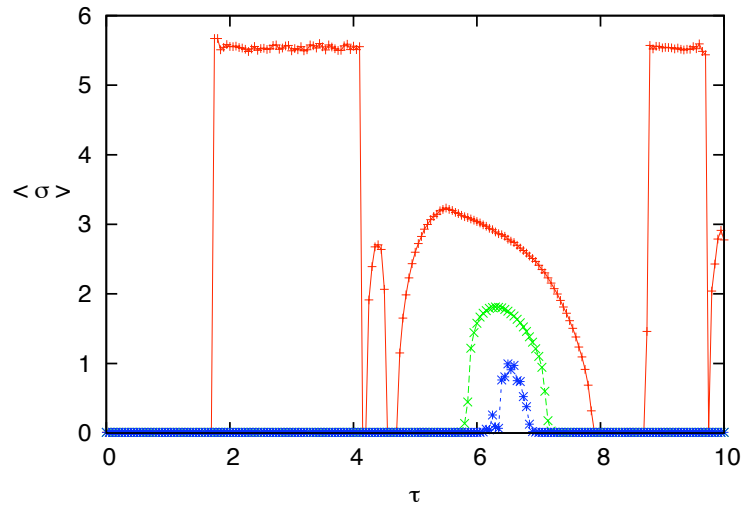


Figura 4.16: La cantidad  $\langle \sigma \rangle$  (4.3) del sistema (4.1) como función de  $\tau$ , para diferentes valores de  $\epsilon$ . Valores de acoplamiento:  $\epsilon = 0.235$  (cruces rojas),  $\epsilon = 0.35$  (línea verde) y  $\epsilon = 0.365$  (línea azul). Tamaño del sistema  $N = 100$ .

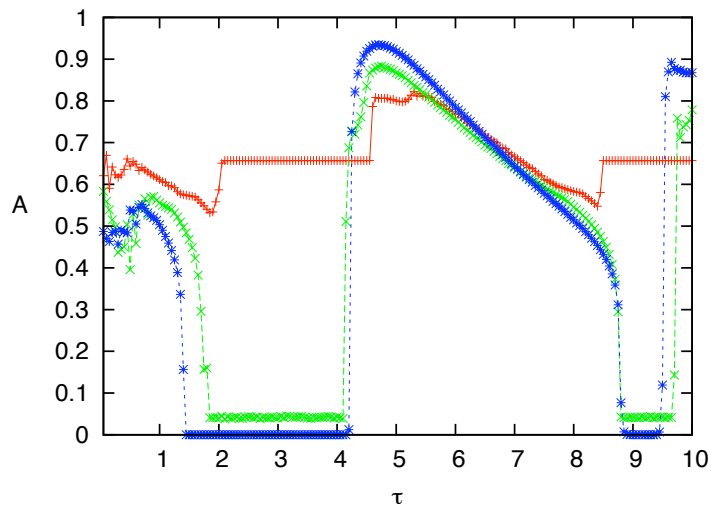


Figura 4.17: La actividad  $A$  (4.3) del sistema (4.1) como función de  $\tau$ , para diferentes valores de  $\epsilon$ . Valores de acoplamiento:  $\epsilon = 0.15$  (línea roja),  $\epsilon = 0.24$  (línea verde) y  $\epsilon = 0.365$  (línea azul). Tamaño del sistema  $N = 100$ .

sugieren el nombre de “lenguas de sincronización” y revelan el efecto no trivial de el retardo temporal en sistemas dinámicos.

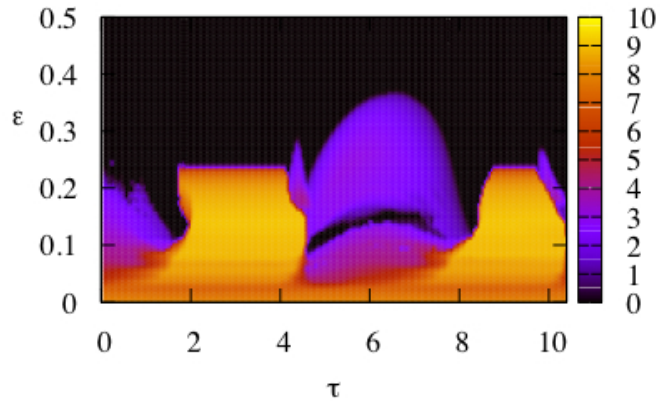


Figura 4.18: Desviación estándar  $\langle \sigma \rangle$  para el sistema (4.1) en el espacio de parámetros  $(\epsilon, \tau)$ . Los valores de  $\langle \sigma \rangle$  se indican en la escala de colores en el lado derecho de la figura.

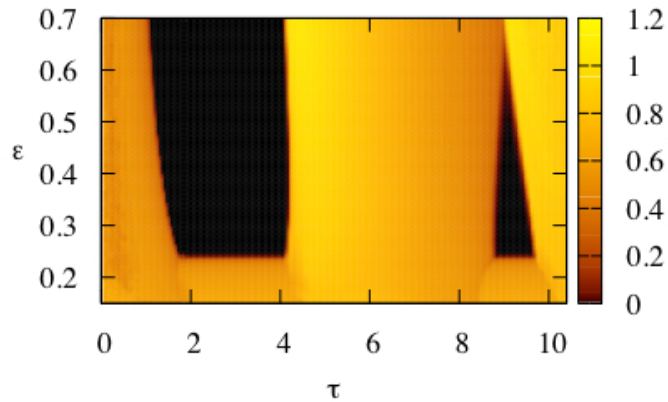


Figura 4.19: Actividad  $A$  para el sistema (4.1) en el espacio de parámetros  $(\epsilon, \tau)$ . Los valores de  $A$  se indican en la escala de colores en el lado derecho de la figura.

La Figura (4.19) muestra la actividad  $A$  del sistema 4.1 en el espacio de parámetros  $(\epsilon, \tau)$ . El estado de colapso de amplitud  $A = 0$  se caracteriza por el color negro en este plano, de acuerdo a la escala de colores que se indica en la figura. En esta Figura se hace evidente la existencia de regiones separadas en el plano  $(\epsilon, \tau)$  donde ocurre el colapso de amplitud. Estas estructuras se denominan *death island*, o islas de la muerte. En nuestro caso, las islas de la muerte se repiten con una periodicidad similar al tiempo de recurrencia característico del oscilador de Rössler. La observación de estas islas justifica los valores altos de  $\tau$  que hemos explorados para este sistema. Note que las regiones de sincronización y de colapso de amplitud no son idénticas en el plano  $(\epsilon, \tau)$ .

Con el fin de investigar la generalidad de nuestros resultados, también hemos estudiado el fenómeno de colapso de amplitud en sistemas caóticos globalmente acoplados con retardo temporal para otras dinámicas locales. En tal sentido, consideramos el siguiente sistema de osciladores de Lorenz [46],

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= -\sigma[x_i(t) - y_i(t)], \\ \dot{y}_i(t) &= [r - z_i(t)]x_i(t) - (1 + \epsilon)y_i(t) + \epsilon\bar{y}(t - \tau), \\ \dot{z}_i(t) &= x_i(t)y_i(t) - dz_i(t),\end{aligned}\tag{4.5}$$

donde escogemos los parámetros  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  y  $d = 8/3$  en el régimen caótico local.

Los resultados para este sistema de Lorenz se resumen en las Figuras (4.20 y 4.21), que muestran las cantidades  $\langle\sigma\rangle$  y  $A$ , respectivamente, en el plano  $(\epsilon, \tau)$ . Note la emergencia de islas de sincronización (4.20) y de islas de la muerte (4.21) en el plano  $(\epsilon, \tau)$ . La periodicidad de estas islas en la variable  $\tau$  corresponde aproximadamente al tiempo de recurrencia típico del atractor de Lorenz. Note que las regiones de sincronización y las regiones de muerte coinciden en el espacio de parámetros  $(\epsilon, \tau)$ . Esto indica que la sincronización ocurre simultáneamente con el colapso de amplitud en este sistema; es decir, solamente ocurre el escenario  $S \equiv C$ .

Nuestros resultados sugieren que la emergencia de islas de sincronización y

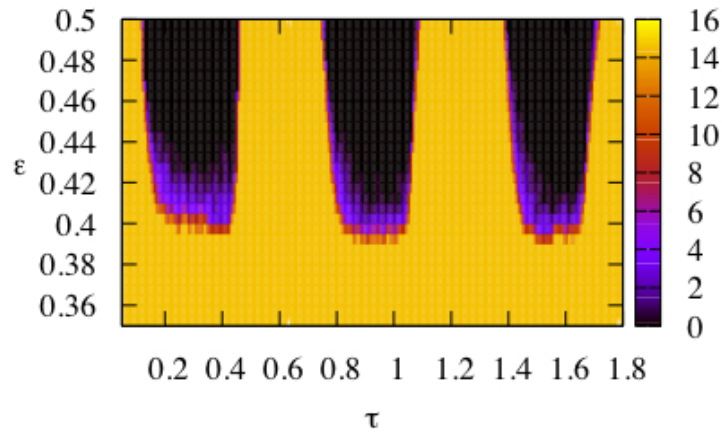


Figura 4.20: La escala de color señala la intensidad de la desviación estándar (4.3) en el sistema (4.5). Los ejes vertical y horizontal representan, respectivamente, la intensidad del acoplamiento  $\epsilon$  y la intensidad del retardo temporal  $\tau$ .

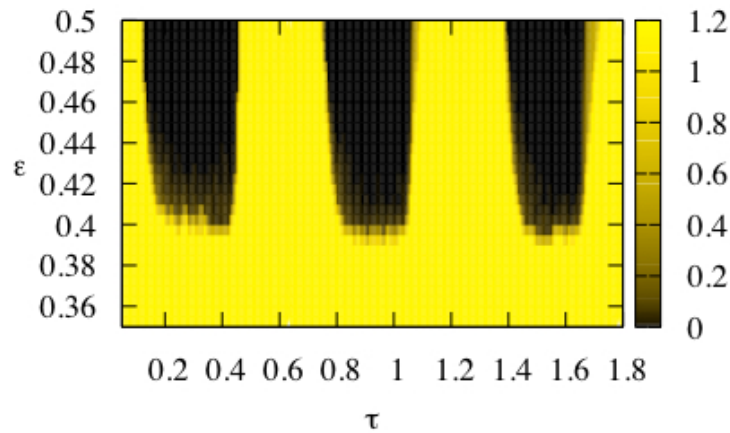


Figura 4.21: La escala de color señala la intensidad de la actividad (4.4) en el sistema (4.5). Los ejes vertical y horizontal representan, respectivamente, la intensidad del acoplamiento  $\epsilon$  y la intensidad del retardo temporal  $\tau$ .

de colapso en el espacio de parámetros  $(\epsilon, \tau)$  es un fenómeno general en sistemas caóticos globalmente acoplados con retardo temporal. La estructura específica es





La Figura (4.23) ilustra esquemáticamente el escenario  $S < C$  para el colapso de amplitud. Se muestra un ciclo equivalente a un tiempo de recurrencia para los osciladores  $P$  y  $Q$  cuando el retardo temporal es pequeño ( $\tau \sim 1.5$ ), para diferentes valores del acoplamiento  $\epsilon$ . Se muestran las posiciones  $P(t)$ ,  $Q(t)$ ,  $P(t - \tau)$  y  $Q(t - \tau)$  sobre este ciclo. El punto  $P(t)$  interactúa con  $Q(t - \tau)$ . Puesto que  $\tau$  es pequeño, la distancia entre  $P(t)$  y  $Q(t - \tau)$  sobre el ciclo es pequeña, como se ilustra en la Figura (4.23) (izquierda). Al incrementar  $\epsilon$ , la interacción entre  $P(t)$  y  $Q(t - \tau)$  tiende a acercarlos tangencialmente sobre el ciclo, causando el acercamiento entre  $P(t)$  y  $Q(t)$ , y entre  $P(t - \tau)$  y  $Q(t - \tau)$ , hasta que ambos pares de puntos coinciden, y  $\langle \sigma \rangle \rightarrow 0$ . Esto implica sincronización entre  $P$  y  $Q$  para todo tiempo, como se muestra en la Figura (4.23) (centro). Como consecuencia, todo el sistema se sincroniza, puesto que lo que le ocurre a un elemento le sucede a todos los demás. Sin embargo, la interacción entre  $P(t)$  y  $Q(t - \tau)$  persiste. Para un valor de  $\epsilon$  mayor al valor crítico para el colapso, esa interacción causa la reducción del tamaño del ciclo hasta que eventualmente éste se convierte en un punto, donde  $A \rightarrow 0$ .

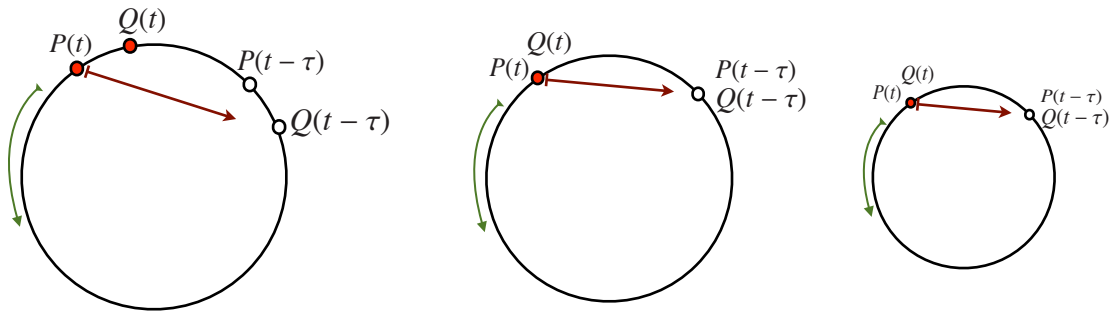


Figura 4.23: Escenario  $S < C$  para un  $\tau$  fijo pequeño ( $\tau \sim 1.5$ ), variando el acoplamiento  $\epsilon$ . Izquierda: puntos  $P(t)$ ,  $Q(t)$ ,  $P(t - \tau)$  y  $Q(t - \tau)$  sobre un ciclo, mostrando la interacción ( $\epsilon$  subcrítico para la sincronización). Centro: sincronización entre  $P(t)$  y  $Q(t)$  ( $\epsilon$  mayor que el valor crítico para la sincronización). Derecha: reducción del tamaño del ciclo sincronizado en su camino al colapso ( $\epsilon$  mayor que el valor crítico para el colapso).

La Figura (4.24) muestra esquemáticamente el escenario  $S \equiv C$  para dos valores del acoplamiento  $\epsilon$ . El retardo temporal es del orden de la mitad del tiempo de

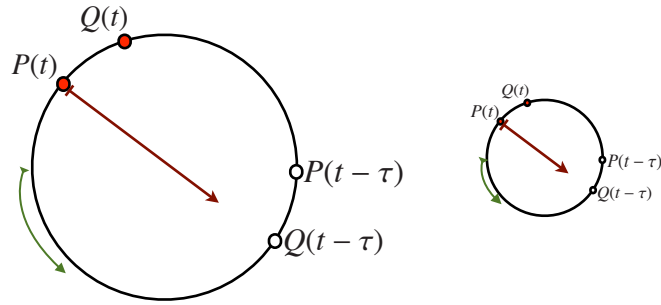


Figura 4.24: Escenario  $S \equiv C$  para un  $\tau$  fijo pequeño ( $\tau \sim 3$ ), variando el acoplamiento  $\epsilon$ . Izquierda: puntos  $P(t)$ ,  $Q(t)$ ,  $P(t - \tau)$  y  $Q(t - \tau)$  sobre un ciclo, mostrando la interacción ( $\epsilon$  subcrítico para la sincronización). Derecha: reducción del tamaño del ciclo desincronizado en su camino al colapso ( $\epsilon$  mayor que el valor crítico para el colapso).

recurrencia, ( $\tau \sim 3$ ). El punto  $P(t)$  interactúa con el punto  $Q(t - \tau)$  que se encuentra al otro lado del ciclo de recurrencia. En este escenario no hay interacciones tangenciales sobre el ciclo que provoquen sincronización cuando  $\epsilon$  se incrementa, Figura (4.24) (derecha). Como consecuencia, el diámetro del ciclo de recurrencia empieza a reducirse hasta alcanzar el colapso. En el escenario  $S \equiv C$  el sistema se sincroniza directamente en el punto fijo.

En el caso del sistema de Rössler (4.1) acoplado globalmente con retardo temporal, estamos reportando la existencia de ambos escenarios,  $S < C$  y  $S \equiv C$ . Mientras que, en el sistema de Lorenz (4.5) acoplado globalmente con retardo, sólo se encuentra el escenario  $S \equiv C$ .

Los resultados de diversos trabajos publicados sobre colapso de amplitud son susceptibles de ser clasificados dentro de este esquema de dos escenarios que hemos encontrado.

*The Laws of Physics are simple,  
but Nature is complex.*

Per Back.

## Capítulo 5

# Efecto de la topología de la red en sistemas de osciladores acoplados.

Con el fin de estudiar cómo influye la topología de la red en el fenómeno de colapso de amplitud, en este capítulo nos proponemos investigar un sistema de osciladores de Rössler acoplados con retardo temporal en una red de pequeño mundo. Utilizamos el algoritmo de Watts y Strogatz [47] para construir una red de pequeño mundo. Este tipo de red está presente en una enorme y diversa cantidad de sistemas auto-organizados, redes de control genético, redes sociales, modelos de propagación de enfermedades entre otros [48]. Las redes de pequeño mundo son redes complejas, cuyo principal rasgo es que combinan un valor alto del coeficiente de clustering  $C(p)$  propio de las redes regulares y una pequeña distancia típica  $L(p)$  de separación entre dos vértices cualesquiera de la red, propio de las redes aleatorias.

La figura 5.1 ilustra el algoritmo de construcción de una red de pequeño mundo de Watts y Strogatz. El número de vertices es  $N$  y el número de vecinos de cada elemento es  $k$ ; mientras que  $p$  es la probabilidad de recableado, la cual varía entre un valor 0 (red regular) y 1 (red completamente aleatoria). La Figura 5.2 muestra el coeficiente de clustering normalizado y la longitud característica en función de

$p$ . Una red de pequeño mundo emerge en el intervalo  $0.01 < p < 0.1$ .

La dinámica del sistema de osciladores de Rössler acoplados con retardo temporal en una red de pequeño mundo está definida por las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned}\frac{dx_i(t)}{dt} &= -y_i(t) - z_i(t), \\ \frac{dy_i(t)}{dt} &= x_i(t) + (a - \epsilon)y_i(t) + \frac{\epsilon}{|v_i|} \sum_{j \in v_i} y_j(t - \tau), \\ \frac{dz_i(t)}{dt} &= b + z_i(t)[x_i(t) - c],\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde  $|v_i|$  es el número de vecinos del elemento  $i$ . A diferencia del caso cuando la red estaba globalmente acoplada, el promedio de la variable  $y$  se realiza sólo sobre los vecinos del elemento  $i$  y no sobre todo el sistema.

Consideramos un valor de acoplamiento supercrítico  $\epsilon > \epsilon_c$  y calculamos la desviación estandar del sistema  $\langle \sigma \rangle$  (4.3) y la actividad del sistema  $A$  (4.4). La Figura (5.3) muestra  $\langle \sigma \rangle$  versus  $\tau$  con  $\epsilon = 0.35$  fijo, para varios valores de  $p$  dentro del rango de red pequeño mundo. Se observa un intervalo del retardo temporal  $0.75 < \tau < 1.9$  en el cual el sistema se sincroniza. Es de notar que, para un sistema globalmente acoplado, el valor de la intensidad del acoplamiento considerado ( $\epsilon = 0.35$ ) es suficiente para causar sincronización en todo el intervalo del retardo temporal mostrado,  $0 < \tau < 3$ , (vease la figura 4.16).

La Figura (5.4) muestra la actividad del sistema como función del retardo temporal, para varios valores de la probabilidad  $p$ , con  $\epsilon = 0.35$  fijo. Se observa un intervalo,  $1.3 < \tau < 1.9$ , en el cual sucede el colapso de amplitud. En contraste con el caso cuando la interconexión en el sistema es global, el tamaño del intervalo para la ocurrencia del colapso se ha reducido.

La Figura (5.5) muestra los atractores y serie de tiempo correspondiente a un elemento y al campo medio del sistema (5.1) para diversos valores del retardo  $\tau$ , para una red de pequeño mundo. A medida que aumenta  $\tau$ , la sincronización precede al colapso de amplitud, y luego el sistema recupera la actividad en forma desincronizada. Este comportamiento contrasta con el observado en el sistema de

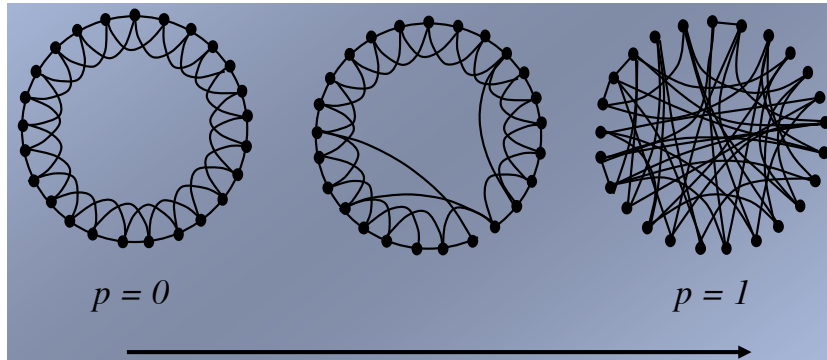


Figura 5.1: Ilustración del algoritmo de Watts y Strogatz para la construcción de una red de pequeño mundo. Se indica la sentido del aumento de la probabilidad de reconexión. La red de pequeño mundo emerge para valores de  $p$  en  $0.01 < p < 0.1$ .

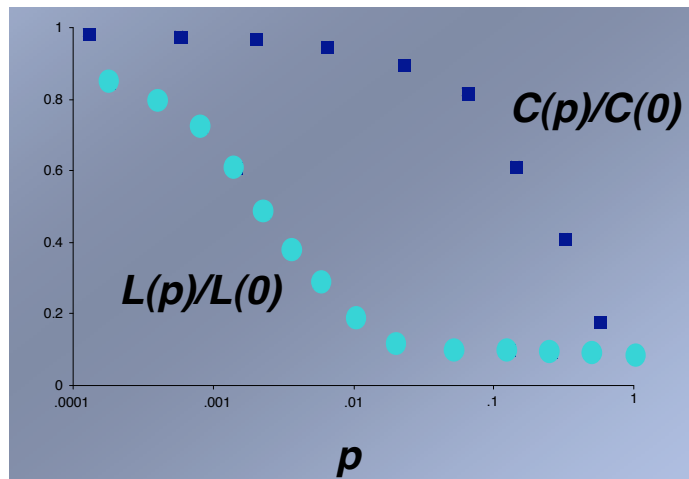


Figura 5.2: Longitud característica de la red,  $L(p)$ , definida como el mínimo número de conexiones entre dos vértices cualesquiera, promediado sobre toda la red. Coeficiente de clustering  $C(p)$ , definido como el número de conexiones existentes entre dos nodos, dividido por  $k(k - 1)/2$ .

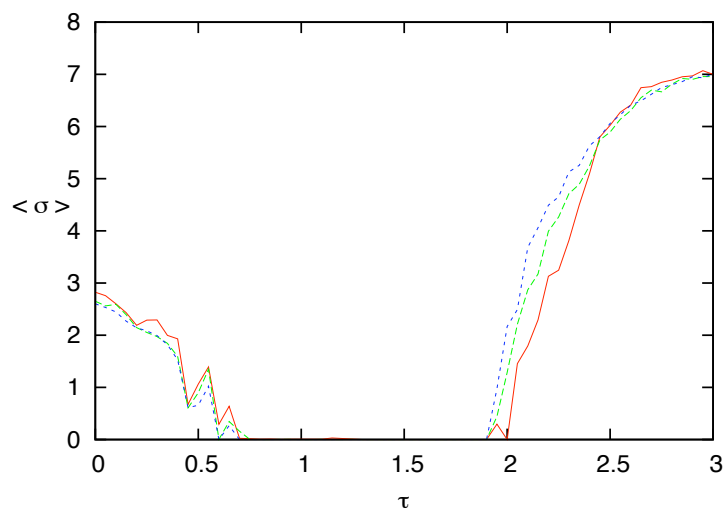


Figura 5.3: Desviación estándar  $\langle \sigma \rangle$  del sistema (5.1) versus  $\tau$  para  $p = 0.015$  (rojo),  $p = 0.030$  (verde),  $p = 0.045$  (azul). Los parámetros son  $\epsilon = 0.35$ ,  $N = 1000$  y  $k = 4$ .

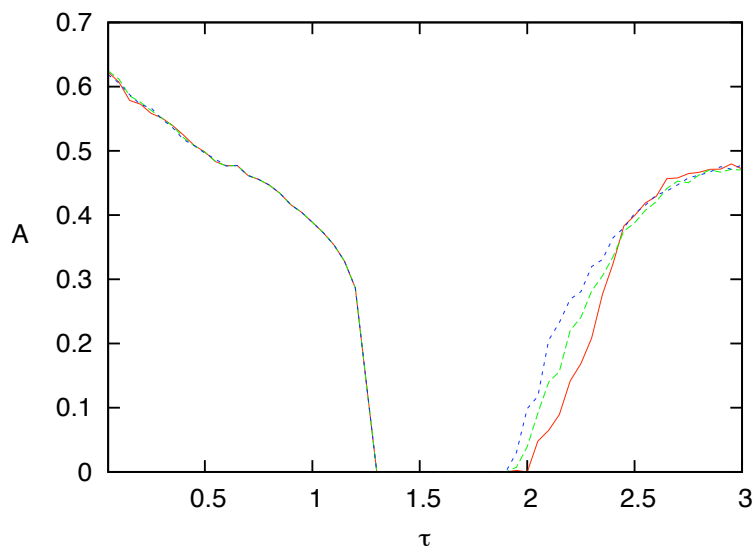


Figura 5.4: Actividad  $A$  del sistema (5.1) versus  $\tau$  para  $p = 0.015$  (rojo),  $p = 0.030$  (verde),  $p = 0.045$  (azul). Los parámetros son  $\epsilon = 0.35$ ,  $N = 1000$  y  $k = 4$ .

Rössler acoplado con retardo (4.1), donde la reactivación del sistema ocurre en forma sincronizada para valores del acoplamiento  $\epsilon > \epsilon_c$ .

La Figura (5.6) muestra los atractores y la serie temporal de un elemento y

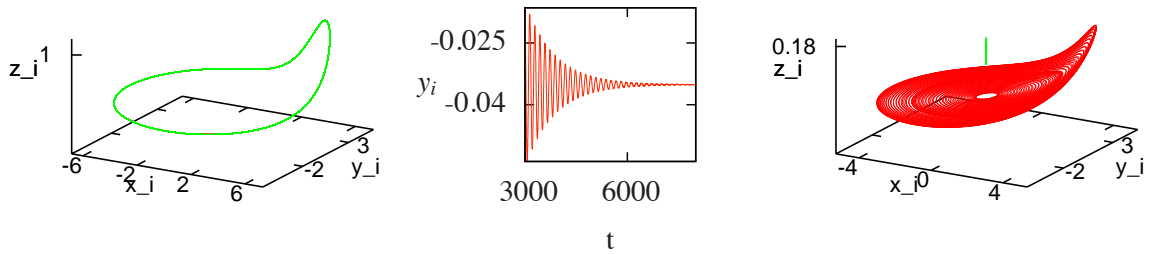


Figura 5.5: Izquierda: atractor de un elemento (línea roja) y del campo medio (línea verde) del sistema (5.1),  $\tau = 1$ . Centro: serie de tiempo de la variable  $y$  de un elemento del sistema,  $\tau = 1.5$ . Derecha: atractor de un elemento (línea roja) y del campo medio (línea verde) del sistema,  $\tau = 2.5$ . Los parámetros son  $\epsilon = 0.35$ ,  $p = 0.015$ ,  $N = 1000$  y  $k = 4$ .

del campo medio del sistema para distintos valores de  $\tau$  y un valor de  $p$  mayor que en la Figura (5.5). Note que la serie temporal de un elemento puede tener un comportamiento muy complejo.

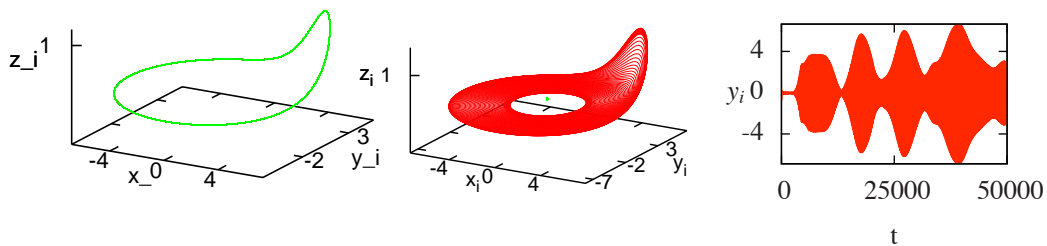


Figura 5.6: Izquierda: atractor de un elemento (línea roja) y del campo medio (línea verde) del sistema (5.1),  $\tau = 1$ . Centro: atractor de un elemento (línea roja) y del campo medio (línea verde) del sistema,  $\tau = 2.5$ . Derecha: serie de tiempo de la variable  $y$  de un elemento del sistema,  $\tau = 2.5$ . Los parámetros son  $\epsilon = 0.35$ ,  $p = 0.045$ ,  $N = 1000$  y  $k = 4$ .

El comportamiento colectivo del sistema se ilustra en las Figuras (5.7, 5.8) las cuales muestran la desviación estándar  $\langle \sigma \rangle$  y la actividad  $A$  del sistema en el espacio de parámetros  $(p, \tau)$ , respectivamente. Se observa que las regiones de



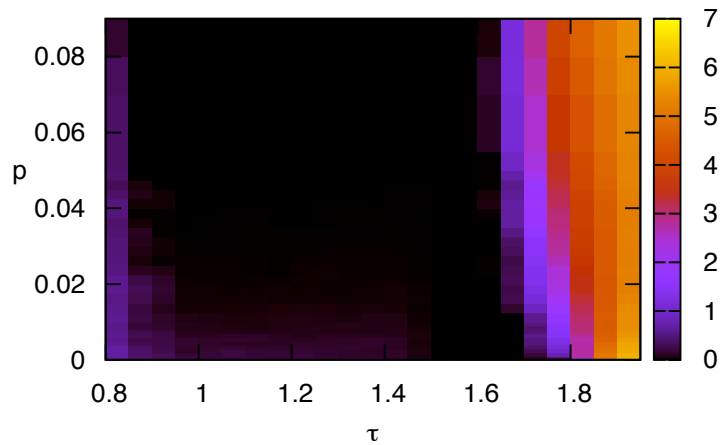


Figura 5.7: Desviación estándar  $\langle \sigma \rangle$  (4.3) para el sistema (5.1) en el espacio de parámetros  $(p, \tau)$ . Los valores de  $\langle \sigma \rangle$  se indican en la escala de colores en el lado derecho de la figura. Los parámetros son  $\epsilon = 0.35$ ,  $N = 1000$  y  $k = 4$ .

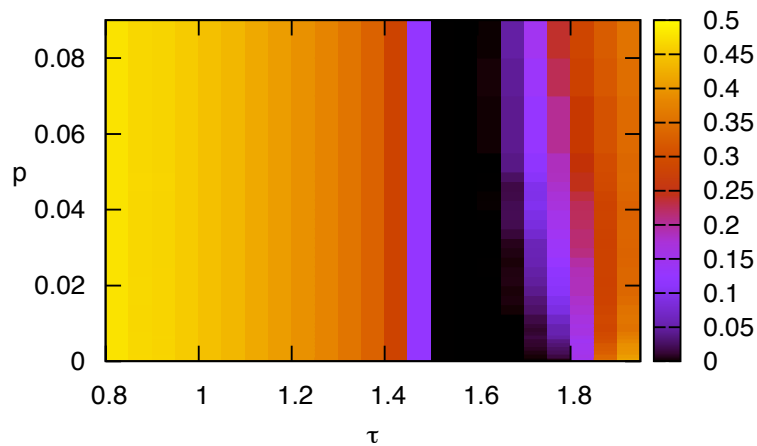


Figura 5.8: Actividad  $A$  (4.4) para el sistema (5.1) en el espacio de parámetros  $(p, \tau)$ . Los valores de  $A$  se indican en la escala de colores en el lado derecho de la figura. Los parámetros son  $\epsilon = 0.35$ ,  $N = 1000$  y  $k = 4$ .

sincronización y de colapso de amplitud no coinciden completamente. Luego,

vemos que si se incrementa  $\tau$  con  $p$  fijo, la sincronización precede al colapso, señalando la presencia del escenario  $S < C$ . Para un pequeño rango de valores de  $\tau$ , la sincronización y el colapso coinciden, indicando la existencia del escenario  $S \equiv C$  en ese rango de  $\tau$ . Para valores de  $\tau$  mayores, la activación del sistema y la desincronización coinciden, a diferencia del sistema de Rössler (4.1).

*Before the beginning of great brilliance,  
there must be Chaos.*

I Ching, Imagen # 3.

## Capítulo 6

### Conclusiones.

En esta tesis hemos estudiado los fenómenos de sincronización y de colapso de amplitud en un sistema de  $N$  osciladores caóticos globalmente acoplados con retardo temporal. La interacción global tiene lugar a través del campo medio del sistema, el cual actúa con un retardo  $\tau$  sobre cada elemento. Como dinámica local hemos empleado las ecuaciones de Rössler, que constituyen un modelo simple y paradigmático de flujos caóticos.

Para integrar el sistema resultante de  $N$  ecuaciones diferenciales con retardo temporal, hemos implementado un método numérico propio en la plataforma computacional ISyS, el cual puede aplicarse a múltiples redes de conectividad y a cualquier dinámica local. Este módulo de integración queda disponible en ISyS para futuras investigaciones.

Hemos caracterizado la ocurrencia de sincronización y de colapso de amplitud en el espacio de parámetros  $(\epsilon, \tau)$  del sistema, que corresponde a la intensidad del acoplamiento  $\epsilon$  y a la magnitud del retardo temporal  $\tau$ . La sincronización se mide con la desviación estándar promedio  $\langle \sigma \rangle$ , una cantidad que ha sido comunmente utilizada para este fin. Para caracterizar la aparición del colapso de amplitud, hemos introducido una cantidad novedosa en este contexto, denominada la ac-

tividad del sistema  $A$ . Estas dos cantidades constituyen los parámetros de orden que describen el comportamiento colectivo del sistema.

Hemos encontrado la existencia de "islas de la muerte" y de "islas de sincronización" en el espacio de parámetros  $(\epsilon, \tau)$ . La separación entre las islas de la muerte está relacionada con el tiempo de recurrencia característico del atractor asociado a la dinámica local.

El estudio detallado del sistema de osciladores de Rössler globalmente acoplados con retardo temporal nos ha permitido establecer dos escenarios para la transición al colapso de amplitud. Hemos denominado a estos escenarios  $S < C$  y  $S \equiv C$ . En el escenario  $S < C$ , la sincronización precede a la supresión de la dinámica cuando se varía el acoplamiento. El escenario  $S \equiv C$  se caracteriza porque la sincronización ocurre directamente en un punto fijo del sistema. Hemos propuesto una interpretación geométrica de los mecanismos subyacentes que conducen a la aparición de cada escenario. El escenario  $S < C$  está vinculado a valores pequeños del retardo  $\tau$  en comparación con el tiempo de recurrencia de la dinámica local; mientras que el escenario  $S \equiv C$  corresponde a valores de  $\tau$  del orden de la mitad del tiempo de recurrencia. El rol de los parámetros de orden  $\langle \sigma \rangle$  y  $A$  también se hace evidente en esta interpretación geométrica.

Con el fin de estudiar la generalidad de nuestros resultados, hemos empleado también sistemas de Lorenz como dinámica local. En este sistema, se encuentra la misma fenomenología que hemos descrito.

Por último, hemos investigado la influencia de la topología en la ocurrencia del colapso de amplitud. En particular, integramos el sistema de  $N$  osciladores de Rössler con retardo temporal sobre redes de pequeño mundo. Hemos encontrado que la presencia de conexiones locales implícita en estas redes conduce a la reducción del intervalo de  $\tau$  para el cual se produce el colapso de amplitud. Esto sugiere que el fenómeno de colapso de amplitud está asociada a la existencia de interacciones globales en un sistema.

# Bibliografía

- [1] K. Kaneko and I. Tsuda, *Complex Systems: Chaos and Beyond*, Springer (2000).
- [2] N. Boccarda, *Modeling Complex Systems*, Cambridge University Press (2004).
- [3] H. Schuster, *Complex Adaptive Systems*, Scator-Verlag (2002).
- [4] R. Solé and S. Manrubia, *Orden y Caos en Sistemas Complejos*. Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España (2001).
- [5] L. M. Pecora and T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 821 (1990).
- [6] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D.L. Valladares, y C.S. Zhou, *Physics Reports*, **336** (2002).
- [7] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1804 (1996).
- [8] E. R. Rosa, E. Ott, M. H. Hess, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1642 (1998).
- [9] M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4193 (1997).
- [10] K. Kaneko, *Physica D* **8**, 158 (1995).
- [11] M. Escalona-Morán, M. G. Cosenza, P. Guillén and P. Coutin, *Chaos, Solitons & Fractals* **31**, 820 (2007).
- [12] C. Castellano, S. Fortunato, and V. Loreto, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 591 (2009).
- [13] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths. *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge University Press (2002).
- [14] K. Bar-Eli, *Physica (Amsterdam)* **14D**, 242 (1985).

- [15] S. H. Strogatz, *Nature* **394**, 316 (1998)
- [16] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley, *J. Physiol. (London)* **117**, 500 (1952).
- [17] Milos Dolnik and Irving R. Epstein, *Phys. Rev. E* **54**, 3361 (1996).
- [18] B. Caughey, P. T. Landsbury, *Ann. Rev. Neurosci.* **26**, 267 (2003).
- [19] P. C. Matthews, R. E. Mirollo, and S. H. Strogatz, *Physica D* **52**, 293 (1991).
- [20] R. Karnatak, R. Rarnaswamy and A. Prasad, *Phys. Rev. E* **76**, 035201(R) (2007).
- [21] D. V. Ramana Reddy, A. Sen, and G. L. Johnston, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5109 (1998).
- [22] F. Atay, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 094101 (2003).
- [23] A. C. Martí, M. Ponce, C. Masoller, *Phys. Rev. E* **72**, 066217 (2005).
- [24] M. Newman, A. L. Barabasi, D. J. Watts, Eds., *The Structure and Dynamics of Networks*, Princeton University Press (2006).
- [25] J. C. Avella, M G Cosenza, V M Eguíluz y M San Miguel, *New Journal of Physics* (2010).
- [26] Heinz Georg Schuster y Wolfram Just, *Deterministic Chaos* (2005).
- [27] W. Zou, Xin-G. Wang, Q. Zhao, and M. Zhan, *Front. Phys. China*, **4**, 97 (2009).
- [28] A. Prasad, *Phys. Rev. E* **72**, 056204 (2005).
- [29] K. Tucci, *Spatiotemporal dynamical processes on nonuniform networks*, ULA (2002).
- [30] H. Avendaño, *Implementación en ISyS de medidas para la caracterización de redes complejas*, ULA (2010)
- [31] J. L. Herrera, *A model of stratified economic exchange with local interactions*, ULA (2007).
- [32] C. Huygens, *The Hague*. (1988-1950).

- [33] M. Bennett, M. F. Schatz, H. Rockwood y K. Wisenfeld, Proc. R. Soc. Lond. A **458**, 563-579 (2002).
- [34] Jie Sun, E. M. Bollt, M. A. Porter y M. S. Dawkins. A mathematical model for the dynamics and synchronization of cows, Physica D **240**, 1497 (2011).
- [35] Paul C. Matthews and Steven H. Strogatz, Phys. Rev. Lett. **65**, 14 (1990).
- [36] R. Herrero, M. Figueras, J. Rius, F. Pi, and G. Orriols, Phys. Rev. Lett. **84**, 16 (2000).
- [37] D. V. Ramana Reddy, A. Sen, and G. L. Johnston, Phys. Rev. Lett. **85**, 16 (2000).
- [38] A. Prasad, Mukeshwar Dhamala, Bhim Mani Adhikari, and Ramakrishna Ramaswamy. Phys. Rev. E **81**, 027201 (2010).
- [39] J. L. Hindmarsh and R. M. Rose, Proc R. Soc. London, Ser. B **221**, 87 (1984).
- [40] Fatihcan M. Atay. Physica D, v.183, 1-18 (2003).
- [41] C.T.H. Baker, C.A.H. Paul y D.R. Willé, Numerical Analysis Report **248** (1994).
- [42] Alfredo Bellen and Marino Zennaro. *Numerical Methods For Delay Differential Equations*, Oxford University Press (2005).
- [43] O. E. Rossler, Phys. Rev. Lett. **57**, 5 (1976).
- [44] O. Alvarez-Llamoza, M. G. Cosenza, Phys. Rev. E **78**, 046216 (2008).
- [45] J. Ito, K. Kaneko, Phys. Rev. E **67**, 046226 (2003).
- [46] E. N. Lorenz, J. Atmos. Sci. **20**, 130 (1963).
- [47] Duncan J. Watts y Steven Strogatz. Nature **393**, 440-442 (4 Junio 1998)
- [48] M. Newman, A. Barabási, D. J. Watts, (Ed.) *The Structure and Dynamics of Networks*, Princeton University Press, (2006)