



UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
MÉRIDA - VENEZUELA

**CARACTERIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD SÍSMICA
DE LA REGIÓN ANDINA DE LA FALLA DE
BOCONÓ UTILIZANDO TÉCNICAS NO LINEALES.**

BR. FELVIR RIVAS.
TUTOR: DR. KAY TUCCI.

MAYO 2007.

Índice general

Resumen	5
Introducción	7
1. Preliminares	10
1.1. Objetivos.	10
1.1.1. Objetivo General.	10
1.1.2. Objetivos Específicos.	10
1.1.3. Metodología.	10
1.2. Marco Teórico	11
1.3. La Falla de Boconó.	15
1.4. Base de Datos.	18
2. Criticalidad autoorganizada	22
3. Series de tiempo	28
3.2. Reconstrucción del espacio de fases.	32
3.2.1. Coordenadas retrasadas.	33
3.3. Elección del tiempo de retraso τ	34
3.3.1. Función de autocorrelación.	35

3.3.2.	Función media de información mutua.	36
3.4.	Elección de la mínima dimensión embedding.	37
3.4.1.	Dimensión de correlación.	38
3.4.2.	Método de Cao.	40
3.5.	Teorema de Takens.	43
3.6.	Componentes principales.	44
3.6.1.	Cálculo de los componentes principales.	45
3.7.	Dimensión dinámica o local.	50
3.7.1.	Exponentes de Lyapunov	51
4.	Resultados	55
4.1.	Exponente de la ley de potencia de los observables.	55
4.1.1.	Magnitud.	57
4.1.2.	Profundidad.	58
4.1.3.	Tiempo entre sismos.	59
4.2.	Elección de la mínima dimensión de embedding m	61
4.3.	Elección del tiempo de retraso τ	63
4.4.	Componentes principales.	65
	Conclusión y Recomendaciones	67
	Bibliografía	69

Agradecimientos

Al profesor Kay Ticci por haberme brindado su apoyo y constancia incondicional para el desarrollo de este trabajo de investigación. A la profesora María Elisa Elberg ya que por medio de ella se realizó dicha investigación.

Este proyecto fue financiado parcialmente por el CDCHT bajo el código C-1444-07-02-F.

Resumen

Este trabajo presenta una caracterización de la actividad sísmica de la falla de Boconó utilizando técnicas no lineales como la teoría de la criticalidad autoorganizada y el análisis de series de tiempo. El área de estudio corresponde a la Región de los Andes, específicamente los estados Táchira, Mérida y Trujillo. Los datos utilizados se tomaron del catálogo sismológico que contiene 2120 eventos independientes entre 1983-2005. En este trabajo se asume que el sistema de la falla de Boconó se comporta como un sistema dinámico. En primer lugar se utiliza la teoría de la criticalidad autoorganizada para caracterizar la falla de Boconó, para ello se ajustaron los histogramas de frecuencia de dos observables: magnitud y tiempo entre sismos, a una ley de potencia, obteniendo el exponente característico tanto para la magnitud como para el tiempo entre sismos. Luego se utilizó el Teorema de Takens para reconstruir la dinámica del sistema de la falla de Boconó a través de m -úplras formadas por retardos τ de la serie temporal observada. Los resultados obtenidos son presentados en gráficas donde se muestra que el sistema de la falla de Boconó tiene una dimensión de embedding de 25 dimensiones. Mediante el método de componentes principales se encontró que todos los autovalores del sistema son similares lo que indica que cualquier proyección del espacio de fases implicaría una pérdida importante de información del sistema. Los resultados obtenidos de la caracterización de la actividad sísmica de la región de los Andes de la falla de Boconó nos indican que se requieren más datos para poder hacer una mejor reconstrucción de la dinámica. La misma caracterización nos sugiere tres vías para contar con más datos, la primera consiste en registrar en el catálogo sismológico

también eventos de magnitudes pequeñas, la segunda utilizar catálogos sismológicos de otras regiones que posean características similares a las obtenidas en este trabajo, y la tercera alternativa es la construcción de un modelo de la dinámica de sistema que se ajuste a los resultados aquí obtenidos.

Introducción

En la actualidad, aproximadamente un 80 % de la población venezolana vive en zonas de alta amenaza sísmica, variable que aumenta el nivel de riesgo, haciéndolo cada vez mayor a medida que se eleva el índice demográfico y las inversiones en infraestructura. Se ha olvidado la situación geográfica y se han desarrollado construcciones sin tomar en cuenta la vulnerabilidad ante un sismo de gran intensidad, lo que ocasionaría como resultado el colapso de dichas instalaciones y por consiguiente numerosas muertes. Los sismos más severos ocurridos en Venezuela son causados por tres fallas, Boconó, San Sebastián y El Pilar (ver fig. 1); las cuales forman el límite principal entre la Placa del Caribe y la Placa de Sur América. Además de las fallas antes mencionadas, existen otras fallas menores tales como: Oca-Ancón, La Victoria, Urica, entre otras, capaces de producir sismos importantes en nuestro país.

Con este trabajo se busca realizar una caracterización de la actividad sísmica de la falla de Boconó en la Región de los Andes utilizando técnicas no lineales como la teoría de la criticalidad autoorganizada y el análisis de series de tiempo para así aumentar el conocimiento que tenemos de este sistema sobre el que vivimos.

Hoy en día sabemos que la superficie de la Tierra está en constante movimiento. Esto se debe a que está constituida por placas, las cuales han sido las principales causantes de

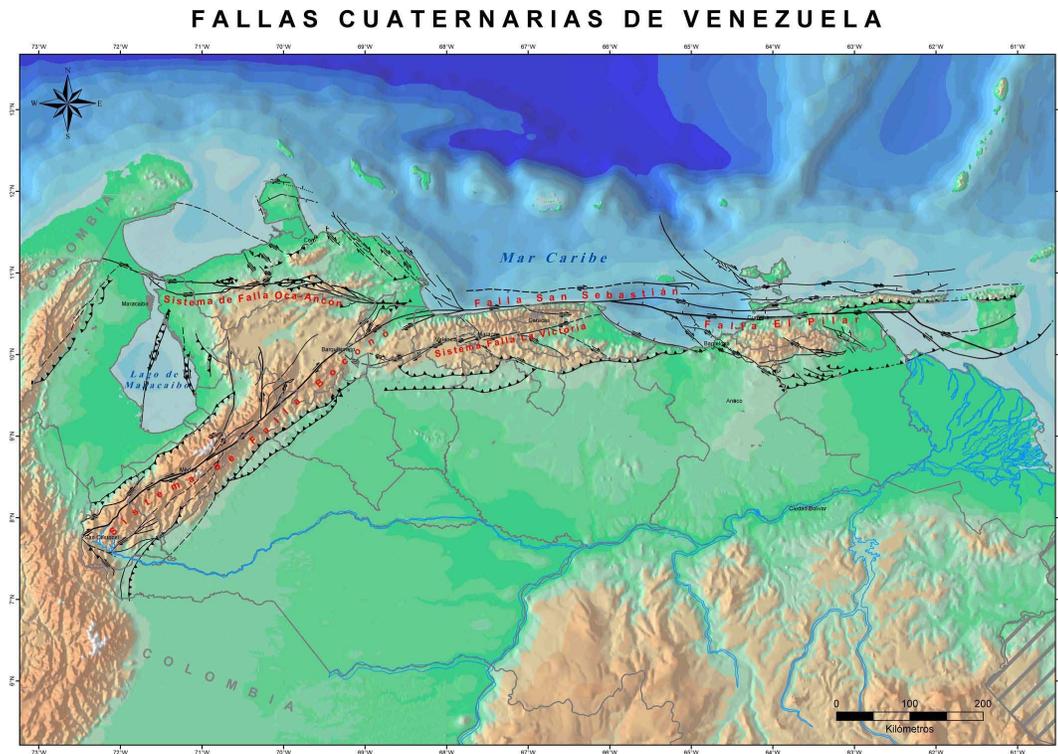


Figura 1. Fallas Cuaternarias de Venezuela.

Fuente: Fundación Venezolana de Investigaciones Sismológicas.

los cambios en el relieve terrestre, y su acción la sentimos entre otras formas a través de los llamados terremotos o sismos.

Los registros históricos de la actividad sísmica pueden ser vistos como una serie temporal de datos. Existen diferentes métodos estadísticos [20, 58, 64] y dinámicos [7] para caracterizar estas series de datos. Nosotros vamos a utilizar métodos dinámicos, es decir, que vamos a suponer que la serie de datos proviene de una dinámica no lineal. Nuestro problema es estudiar el comportamiento temporal de los datos. Para ello, por una parte, vamos a considerar que el sistema dinámico de la falla de Boconó se comporta como un sistema crítico autoorganizado y por otra parte, vamos a reconstruir la dinámica mediante

el análisis de series de tiempo de dinámicas no lineales.

El Capítulo 1 de este trabajo está dedicado a los preliminares. En él enunciamos algunas definiciones que serán de utilidad para la comprensión del trabajo. En el Capítulo 2 explicaremos el fenómeno de criticalidad autoorganizada y en el Capítulo 3 el análisis de las series de tiempo. Los resultados obtenidos de la caracterización de la actividad sísmica de la falla de Boconó son presentados en el Capítulo 4.

1.1. Objetivos.

1.1.1. Objetivo General.

- Caracterizar la actividad sísmica de la Región Andina de la Falla de Boconó utilizando técnicas no lineales.

1.1.2. Objetivos Específicos.

- Caracterizar la actividad sísmica de la Región Andina de la Falla de Boconó utilizando la Teoría de la Criticalidad Autoorganizada.
- Caracterizar la actividad sísmica de la Región Andina de la Falla de Boconó mediante técnicas del análisis de series de tiempo de dinámicas no lineales en tiempo discreto.

1.1.3. Metodología.

Para caracterizar la actividad sísmica de la Región Andina de la Falla Boconó mediante la Teoría de la Criticalidad Autoorganizada [6] se procede de la siguiente forma:

- Seleccionar los datos de la actividad sísmica de la Región Andina de la Falla de Boconó.
- Seleccionar los observables que se van a considerar para la caracterización.
- Realizar los histogramas de frecuencia de cada uno de los observables; magnitud, profundidad y tiempo entre sismos.
- Calcular el exponente de la ley de potencia que gobierna a algunos de los observables.

Y para la reconstrucción del atractor del sistema mediante el análisis de tiempo de dinámicas no lineales se tiene que:

- Calcular la dimensión de embedding mínima.
- Calcular el tiempo de retraso.
- Calcular los componentes principales.

1.2. Marco Teórico

En esta sección enunciaremos algunas definiciones y resultados básicos que usaremos a lo largo del trabajo.

Definición 1.2.1. *Una falla es una fractura o dislocación de la corteza terrestre, que produce un desplazamiento de dos compartimientos, bloques o placas continuas.*

La *Teoría Tectónica de Placas* [27] es un modelo que, en función del tipo de borde que se forma entre dos placas adyacentes, explica el movimiento de las placas litosféricas, la interacción entre éstas y los eventos geológicos que provocan. El sitio donde se dan estos bordes son denominados *fallas*.

La superficie de ruptura a lo largo de la cual se produce el desplazamiento de los bloques se denomina *plano o superficie de falla*, éste puede ser horizontal, vertical o inclinado y su ángulo de inclinación recibe el nombre de *buzamiento*. El bloque que se desliza hacia abajo se llama *bloque de techo* y el bloque que se levanta *bloque de piso* (ver fig. 2). Una *traza de falla* es la intersección del plano de falla con la topografía.

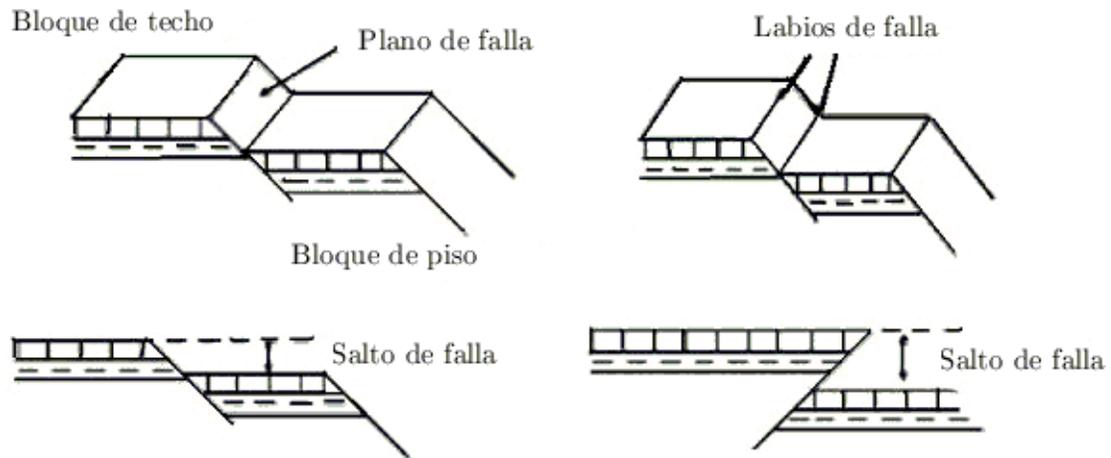


Figura 2. Partes de una falla.

Fuente: <http://geografia.laguia2000.com/relieve/las-fallas>

Las fallas pueden tener cualquier orientación o dirección: vertical, horizontal, oblicua o una combinación de éstas. De acuerdo al desplazamiento relativo que se observa a través de las fallas estas pueden clasificarse en forma general en:

- Fallas normales: Se generan por fuerzas extensionales. El bloque de techo desciende en relación con el bloque piso.

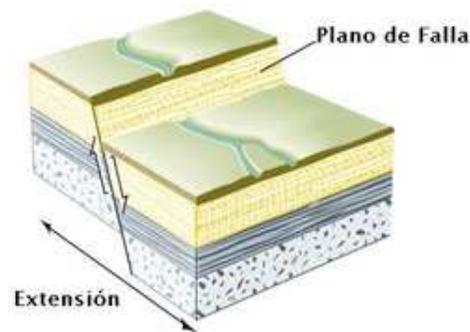


Figura 3. *Falla normal.*

Fuente: www.proteccioncivil.org/vademecum/vdm0259.htm

- Fallas inversas o de corrimientos: Se generan por fuerzas de compresión. El bloque de techo se mueve hacia arriba en relación con el bloque de piso.

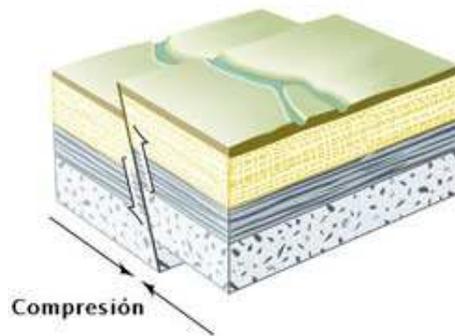


Figura 4. *Falla inversa.*

Fuente: www.proteccioncivil.org/vademecum/vdm0259.htm

- Fallas transcurrentes: Son aquellas en las cuales el plano de fallas es esencialmente vertical y el desplazamiento es paralelo a la traza de la falla en el suelo, o sea, es horizontal. Son llamadas también fallas rumbo-deslizantes

Como es de esperarse, bajo las condiciones naturales, la gran mayoría de las fallas muestran indicios de todos estos tipos de desplazamiento, aunque generalmente uno de



Figura 5. *Falla transcurrente.*

Fuente: www.proteccioncivil.org/vademecum/vdm0259.htm

ellos es predominante. Ejemplos de falla cuyos desplazamiento muestran componentes verticales, horizontales y de corrimiento, son las fallas oblicuas ¹, las fallas en tijera ² y las fallas escalonadas ³. En algunos casos, por la acción de las fallas se manifiestan en el terreno estructuras alargadas denominadas *lomos de falla*. La actividad en una falla puede ser repentina y abrupta, produciéndose un fuerte terremoto e incluso una ruptura de la superficie tomando una forma topográfica llamada *escarpe de falla*.

Definición 1.2.2. *Los terremotos son temblores producidos en la corteza terrestre como consecuencia de la liberación repentina de energía en una falla.*

Se producen cuando la corteza de la Tierra se desplaza repentinamente a lo largo de una falla. El lugar en el que las capas de roca se desplazan y disponen unas en relación a otras se llama foco o hipocentro, centro efectivo del terremoto. Justo encima del foco, un segundo lugar llamado epicentro señala el punto superficial donde la sacudida es más intensa.

¹Las fallas oblicuas son combinaciones de movimientos entre fallas transcurrentes con movimientos normales o inversos.

²Las fallas en tijera se forman por el efecto del basculado de los bloques sobre el plano de falla.

³Las fallas escalonadas son un conjunto de fallas dispuestas paralelamente que descienden siguiendo la misma dirección y escalonándose hacia abajo.

Los terremotos pueden ser de origen tectónico, producidos por desplazamientos de bloques de la litosfera, o volcánicos, producidos por el desplazamiento del magma en la litosfera o su extrucción hacia la superficie.

En Venezuela, los terremotos son de origen tectónico, ya que en la actualidad no existe ninguna faja volcánica en ninguna parte de nuestro territorio.

1.3. La Falla de Boconó.

Venezuela está situada en el borde entre dos placas de litosfera [53]; la Placa del Caribe y la Placa de América del Sur. Las zonas de fallas que produce la mayor parte de la sismicidad en el país son: las zonas de fallas de Boconó, Oca, Morón y el Pilar; y numerosas fallas individuales tales como la falla de Valera, de San Simón-Icotea de Caparo, de Tácagua del Ávila, de Urica, de San Francisco y muchas otras.

La figura 6 muestra el mapa con las fallas tectónicas más importantes en el Occidente de Venezuela, donde destaca la falla de Boconó, como el principal accidente tectónico de la región.

La falla de Boconó es una falla transcurrente. A lo largo de toda su extensión, se observan varias trazas activas, las cuales se manifiestan como escarpes de falla, canales fluviales desplazados, lomos de falla y otros rasgos geomorfológicos típicos de fallas transcurrentes.

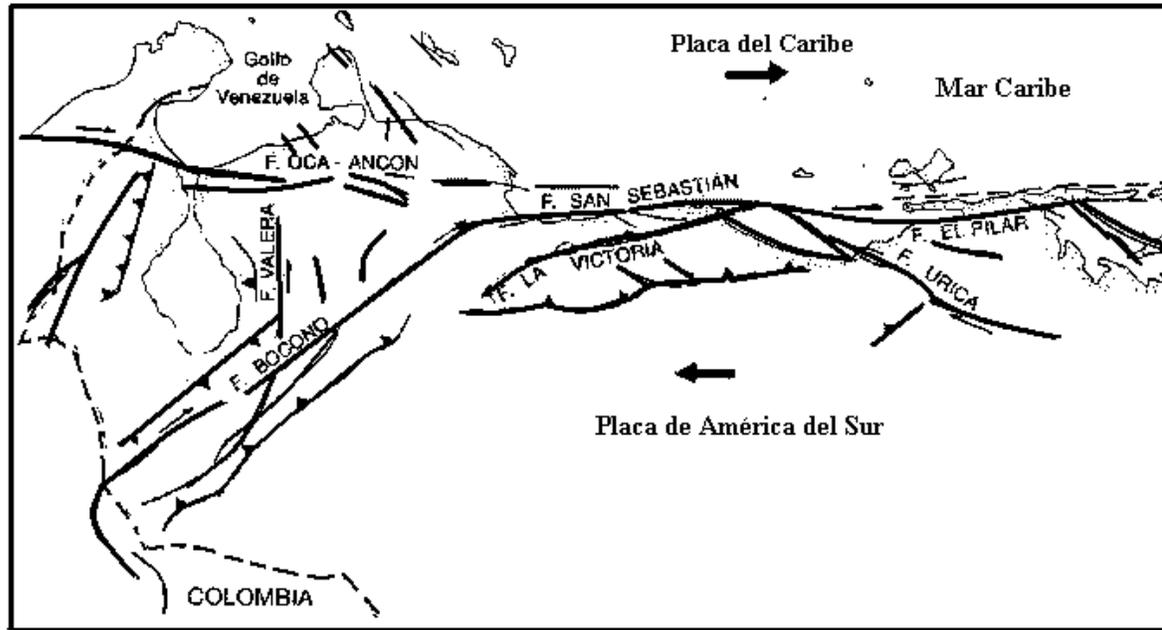


Figura 6. Principales fallas de Venezuela.

Fuente: <http://cidbimena.desastes.hn/docum/ops/publicaciones/h0206s/h0206s.4.htm>

La falla de Boconó es uno de los rasgos geotectónicos más importantes de la parte noroccidental de América del sur, se caracteriza morfológicamente por una alineación de valles y depresiones, orientados aproximadamente en dirección $N45^{\circ}E$. Se extiende por más de 500 km entre la depresión del Táchira, al sur de Cordero, y el Mar Caribe, en el área de Morón Edo. Carabobo, cruzando en forma oblicua a los Andes merideños y cortando el extremo occidental de las Montañas del Caribe.

La falla de Boconó genera un desplazamiento importante de aproximadamente 2 a 6 mm/año y registra diariamente movimientos de baja intensidad, la mayoría de ellos imperceptibles para el ser humano.

Emile Rod en 1956 fué el primero en describir y nombrar a la falla de Boconó, la cual consideró como una falla transcurrente hacia la derecha. En el año 1958 Rod, Jefferson *et al.* [63] postularon tres tipos de desplazamiento (o sea, tres tipos de falla): transcurrente, normal y una combinación de ambos. Cluff y Hansen [16], en un extenso informe sobre la falla de Boconó, demostraron que esta falla tiene todas las características de una falla transcurrente.

Shagam [67, 68] consideró que la falla de Boconó era una extensa fosa tectónica post-paleozoica, a lo largo de la cual ocurrieron desplazamientos verticales importantes, asociados al levantamiento e inclinación de los Andes merideños durante el Terciario Tardío y el Cuaternario. En el año 1976 hallaron indicios de ambos tipos de desplazamiento, transcurrente hacia la derecha y vertical o normal, durante el Cenozoico Tardío. Weingarten en 1977 describió un paleosuelo a elevaciones de 1200 a 2200 m sobre el nivel del río Chama, en la cuenca de La González (al sur de Mérida), al cual interpretó como levantado muy por encima de la elevación a la cual se formó. Finalmente, Schubert postuló la existencia de cuencas de tracción, tales como la cuenca de La González, a lo largo de la zona de falla de Boconó, rellenas con sedimentos cuaternarios, las cuales se caracterizan por desplazamientos normales grandes; estas cuencas están separadas por zonas de falla angostas y con desplazamiento principalmente transcurrente hacia la derecha.

El efecto del desplazamiento a lo largo de la falla de Boconó sobre los rasgos pleistocenos fué estudiado por Schubert y Sifontes [70, 71], Giegengack y Grauch [23, 24], Giegengack *et al.* [25, 26] y Schubert [73, 74, 75]. Estos autores describen rasgos geomorfológicos desplazados en las cuencas altas de los ríos Chama, Santo Domingo y Aracay. Entre estos rasgos se encuentran morrenas laterales desplazadas, las cuales pertenecen al último estadio de la Glaciación Mérida del Pleistoceno Tardío. El desplazamiento transcurrente hacia

la derecha observado varía entre 60 y 100 m desde que los glaciares se retiraron de su posición terminal, y 250 m desde que el glaciar del valle de la quebrada La Mucuchache llegó a su posición terminal por primera vez. Basado en estos datos, la velocidad del desplazamiento transcurrente puede calcularse entre un máximo de 0.8 cm/año y un mínimo de 0.3 cm/año, suponiendo que el desplazamiento es constante y no esporádico.

La sismicidad de la falla de Boconó fue estudiada en detalle por Dewey en 1972 quien, con base en el análisis de “movimientos iniciales”, demostró que el desplazamiento a lo largo de ella es consistente con un desplazamiento hacia el este de la placa del Caribe, con respecto a América del Sur, así como también de que el contacto entre ambas placas está localizado parcialmente a lo largo de la falla de Boconó [48, 70, 72]. De acuerdo con Dewey, este contacto incluye a la falla de Boconó desde el Plioceno (aproximadamente hace 5 millones de años). La orientación transversal de la falla de Boconó con respecto a la cordillera, así como el hecho de que corta provincias geológicas y tectónicas distintas, es indicio de que esta falla es una estructura externa a los Andes y de que ella se incorporó al límite entre las placas en el Terciario Tardío.

1.4. Base de Datos.

Los datos a analizar para caracterizar la falla de Boconó están comprendidos en la región de los Andes, son provenientes del catálogo sismológico del Laboratorio de Geofísica de la Universidad de Los Andes (LGULA) [42], el cual está adscrito al Departamento de Física de la Facultad de Ciencias de la ULA. El LGULA opera la Red Sismológica de Los Andes Venezolanos (REDSAV) para el seguimiento de la actividad sísmica de la región occidental de Venezuela.

El catálogo contiene información sobre las actividades de investigación que se desarro-

llan en el laboratorio, datos sismológicos, notas de interés sobre la sismicidad de la región y actividades de extensión que también se realizan en el LGULA. De los datos reportados por el catálogo sismológico utilizaremos 2.120 correspondientes de la región de los Andes que están comprendidos desde el 22 de enero del 1983 hasta el 02 de agosto del 2006, los cuales contienen la magnitud, profundidad, fecha, hora y coordenadas geográficas de cada uno de los sismos reportados.

Los observables que vamos a considerar en este trabajo son: la magnitud, (M), la profundidad, ($Prof$) y el tiempo entre sismos, (Δt), en minutos. A pesar de que los datos recopilados de la falla de Boconó son 2.120, se tienen 2.004 datos con magnitud, 1027 datos con profundidad y 2.116 datos con el tiempo entre sismos.

Si tomamos el tiempo como el tiempo real entre un sismo y otro, ya sea en segundos, minutos, horas o días, podríamos obtener una alta dimensión de embedding al tratar de reconstruir el atractor de la dinámica, pues se tienen días en los que no se reportó ningún evento lo que implica largos intervalos de tiempo como se puede observar en la figura 7. Es por ello que vamos a considerar como unidad de tiempo el número de eventos reportados para cada observable (ver fig. 8, fig. 9 y fig. 10).

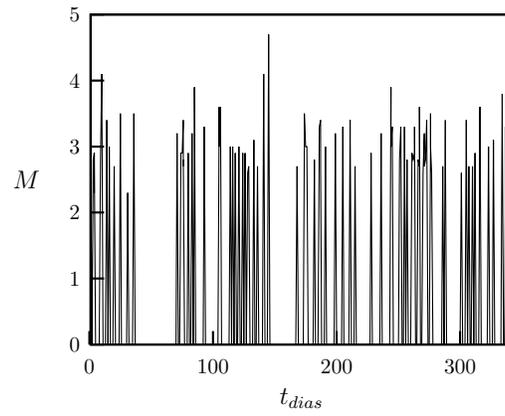


Figura 7. Serie de tiempo del número de días vs la magnitud, correspondiente al año 1983. Note que hay períodos de varios días sin ninguna actividad reportada.

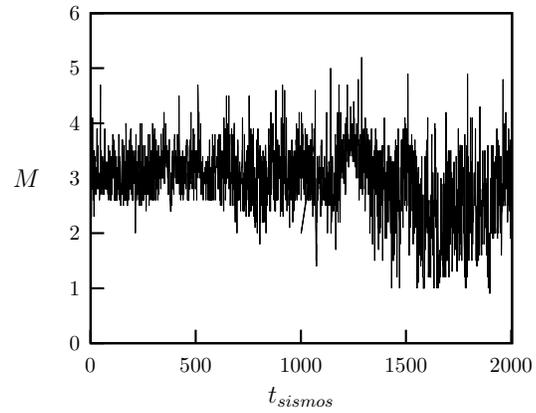


Figura 8. Serie de tiempo del número de sismos vs magnitud.

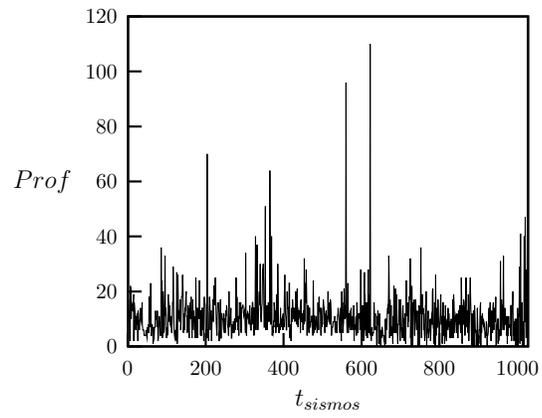


Figura 9. Serie de tiempo del número de sismos vs profundidad.

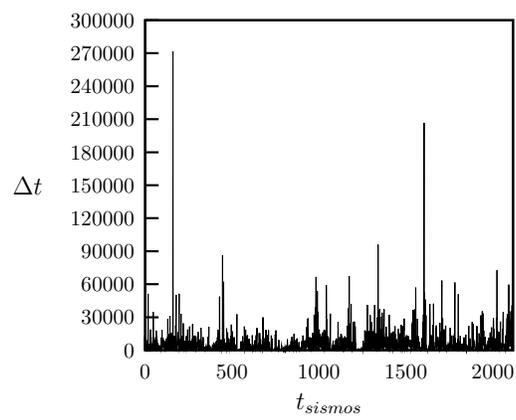


Figura 10. Serie de tiempo del número de sismos vs el tiempo entre sismos en minutos.

CAPÍTULO 2

Criticalidad autoorganizada

En este capítulo presentaremos lo que para algunos ha llegado ser uno de los grandes paradigmas científicos “*La Teoría de la Criticalidad Autoorganizada*” [6]. En este trabajo estamos suponiendo que el sistema de la falla de Boconó se comporta como un sistema crítico autoorganizado por lo que uno de nuestros objetivos es ajustar algunos de los observables de la dinámica de la falla de Boconó como: la magnitud, la profundidad y el tiempo entre sismos, a leyes de potencia y así hallar los exponentes característicos de las mismas.

Para ilustrar la teoría de la criticalidad autoorganizada, imagine que usted deja caer granos de arroz constantemente en un montículo. La adición de un grano más por lo general no significa nada, excepto por hacer el montón un poco más grande. Pero finalmente, cuando los lados del montón se hacen más escarpados, el equilibrio se hace tan precario que la caída de un solo grano puede provocar un alud - a veces hasta un alud catastrófico que destruye el montón. En este punto denominado de “criticalidad autoorganizada,” una perturbación diminuta puede producir una respuesta enorme.

La teoría de la criticalidad autoorganizada fue desarrollada por el físico teórico Danés Per Bak del Laboratorio Nacional de Brookhaven, en Nueva York en 1987, con el fin de

explicar las propiedades invariantes de sistemas dinámicos complejos lejos del equilibrio [5]. La hipótesis de Bak es que hay sistemas dinámicos que evolucionan de modo natural hacia un estado crítico, y una vez que han llegado a él exhiben una propiedad muy característica: una perturbación pequeña puede desencadenar respuestas de diversa magnitud, desde una respuesta pequeña, que no modifica sustancialmente el estado del sistema, hasta una respuesta extrema, que provoque el colapso total del mismo.

La criticalidad autoorganizada constituye uno de los caminos claros hacia el estudio de la complejidad, también es una efectiva explicación de los fenómenos emergentes, y en los años 90 cuando se desarrolló la criticalidad autoorganizada fue la primera teoría conocida como generador de complejidad [8]. El tema de base de la complejidad no es simplemente el movimiento, el problema consiste en el estudio de las transiciones orden/desorden, las cuales revelan, una cantidad de sorpresas y de novedades.

Según Bak, “ los sistemas con criticalidad autoorganizada evolucionan hacia un estado complejo crítico sin la interferencia de ningún agente externo. El proceso de autoorganización tiene lugar durante un muy largo período de transiciones. El comportamiento complejo, ya sea en geofísica o en biología, siempre es creado por un largo proceso de evolución. No puede ser comprendida con el estudio de los sistemas dentro de un marco de tiempo que es corto, comparado con este proceso evolutivo” [8]. Dicho radicalmente, en contraste con lo que se evidencia en la evolución, la criticalidad autoorganizada es una teoría catastrofista; esto es, la novedad es el resultado de dinámicas súbitas, y no graduales, que es lo que sostienen las teorías evolucionistas.

La teoría de la criticalidad autoorganizada, llamada a veces teoría de la complejidad,

se desarrolló de manera muy próxima a la teoría del caos ⁴. Al igual que la teoría del caos, la teoría de la criticalidad autoorganizada postula “cataclismo, cambio y enormes consecuencias derivadas de eventos aparentemente triviales, y aun así con una ley muy profunda escondida tras ellos”. La criticalidad autorganizada es una teoría usada para describir sistemas dinámicos que tienen puntos críticos que son atractores extraños ⁵. Los fenómenos críticos autorganizados pueden observarse en sistemas en desequilibrio con grados de libertad extendidos y con no-linealidad.

Entre las propiedades de la criticalidad autoorganizada tenemos que:

- Su comportamiento macroscópico exhibe invariancias de escala típicas de una transición de fase.
- Son procesos dominados por la interacción.
- La criticalidad autoorganizada es similar a las transiciones de fases termodinámicas, pero el valor del exponente se alcanza naturalmente.
- La evolución del estado crítico genera un atractor extraño.

No hay que olvidar que la criticalidad autoorganizada es sólo uno de los tantos mecanismos por los que se obtiene una dinámica con escala invariante, esto es, con leyes de potencia.

Son muchos los sistemas físicos que obedecen el comportamiento de la criticalidad autoorganizada entre ellos por ejemplo tenemos: terremotos [4], deslizamiento de tierras y

⁴La teoría del caos comenzó en 1963 con un trabajo de Lorenz, en el cual intentaba dar una explicación y predicción global del clima atmosférico.

⁵Un *atractor extraño* está representado por una trayectoria en el espacio de las fases donde pequeñas diferencias en las posiciones iniciales de dos puntos conducen, con el transcurso del tiempo o de la iteración matemática, a posiciones que divergen totalmente y que, por lo tanto, son impredecibles. Tienen una dimensión fractal.

avalanchas [43], precipitación [22], tormentas geomagnéticas [51], entre otros.

La criticalidad autoorganizada ⁶ define a los terremotos, como fenómenos que se encuentran permanentemente en un estado crítico y que se autoorganizan hacia un estado estacionario cuando se produce una perturbación del sistema. Para explicar esta descripción ciertamente compleja de los terremotos, Bak y sus colegas utilizaron un modelo sencillo para ilustrarlo, el denominado experimento de la pila de arena [6, 7] “ *Se tira un pequeño chorro de arena sobre una bandeja circular. El montón crece firmemente hasta que alcanza el límite y de repente, más arena (un solo grano, por ejemplo) puede desencadenar avalanchas de todo tipo, ya sea una avalancha pequeña, intrascendente, avalanchas de mediana entidad, o una tan grande que lleve al montón de arena a derrumbarse por completo. El montón, cuando no recibe más arena adicional, representa el sistema en el estado crítico, donde una ínfima perturbación fortuita puede arrastrarlo hacia un nuevo e imprevisible estado.*” Con este modelo sencillo, explicaron una de las evidencias empíricas más sorprendentes que presentan los terremotos, la ley de Gutenberg y Richter, establecida por Beno Gutenberg y Charles Richter en Caltech (California) en 1944 [30]. La ocurrencia de sismos generalmente asume que sigue la relación Gutenberg-Richter:

$$\log N(M) = a - bM, \quad (2.1)$$

donde, $a > 0$, $b > 0$ y $N(M)$ es el número de sismos que tienen una magnitud M durante un período de tiempo específico. Un valor alto de b significa que una fracción más pequeña del total de sismos ocurra en las magnitudes altas, mientras que un valor bajo de b implica una fracción mayor. Para un ajuste de mínimos cuadrados la expresión de la relación

⁶Self-Organized Criticality (SOC)

Gutenberg-Richter que ocurren en el arco volcánico de Nicaragua [19] se muestra en la figura 11.

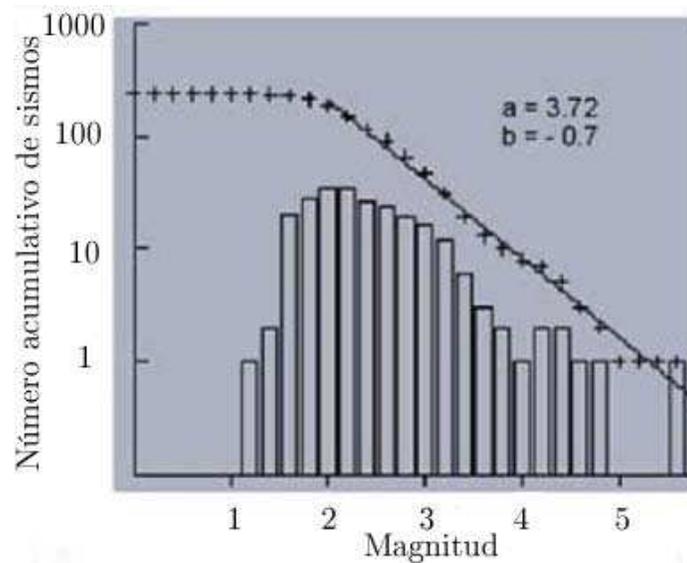


Figura 11. *Relación Gutenberg-Richter.*

Fuente: Fabio Segura Mojica

Los parámetros a y b de la figura 11, sirven para caracterizar una región sísmica, ya que a es un índice del nivel de la actividad sísmica y b indica la proporcionalidad de terremotos grandes y pequeños. La relación de Gutenberg-Richter, en este caso, muestra un valor bajo de b . A nivel mundial asociado a procesos de fallamiento el valor de b está en el rango de 0.6 a 1.2 [57]. La falta de sismos pequeños en la gráfica sólo refleja la escasez de cobertura de estaciones en los alrededores de la zona sísmica activada. Una utilidad inmediata de b es que es parte de los criterios para discernir entre actividad sísmica natural e inducida.

El modelo de Bak y sus colegas para terremotos, era similar a los modelos propuestos previamente para terremotos [56, 60], desarrollados mediante el fenómeno **SOC**. Por otra

parte, se ha estudiado el hecho de que los terremotos exhiben un comportamiento complejo espacio-temporal [37, 45] y que la distribución espacial de epicentros es fractal ⁷ y ellos ocurren sobre una estructura de fallas de tipo fractal [45, 52]. En 1991 Kan, Bak y Obukhov, construyeron un modelo dinámico simple para terremotos [38], y encontraron una distribución de la ley de energía para terremotos con $b \approx 0,6$ en tres dimensiones. Más tarde, Per Bak, Christensen, Danon y Scanlon [4] demostraron que la distribución de los tiempos de espera entre los terremotos que ocurren en California obedece una ley simple de escalamiento unificada de décimas de segundos a décimas de años.

⁷Un fractal es un objeto con tamaño y orientación variables y que cada instante tiene un aspecto similar al anterior.

CAPÍTULO 3

Series de tiempo

A continuación explicaremos el otro método que utilizaremos para caracterizar el comportamiento sísmico de la falla de Boconó mediante técnicas del análisis de series de tiempo de dinámicas no lineales en tiempo discreto, pues estamos suponiendo dinámica (determinismo) en nuestro sistema, la falla de Boconó. Entenderemos por una serie de tiempo al conjunto de observaciones ordenadas o, también, a la evolución de un fenómeno o variable a lo largo del tiempo. Cabe destacar que el campo del análisis de series de tiempo es muy amplio, incluye muchas técnicas y tiene aplicación en prácticamente todas las ciencias.

Uno de los objetivos del análisis de una serie temporal, de la que se dispone de datos en periodos regulares de tiempo, es el conocimiento de su patrón de comportamiento para prever la evolución futura, siempre bajo el supuesto de que las condiciones no cambiarán respecto a las actuales y pasadas. También sirve para obtener información de la dinámica del sistema, lo cual es uno de nuestros objetivos.

Con frecuencia los modelos de amenaza consideran a la sismicidad como un proceso estocástico de Poisson, lo cual implica la invarianza de ésta en el tiempo. Musson *et. al.* [49] mostraron que la sismicidad en Japón y Grecia se ajusta mucho mejor a un modelo

estadístico temporal Lognormal que a uno Poissoniano. El modelo Lognormal contrasta con el exponencial de Poisson, en el cual la probabilidad de ocurrencia de sismos es independiente del tiempo transcurrido. Otras distribuciones para los tiempos entre eventos han sido propuestas. Matthews, *et. al.* [47] propusieron el modelo de tiempo de paso Browniano, este modelo considera que los tiempos entre sismos siguen una distribución Gaussiana Inversa, también conocida como distribución Wald, la cual es levemente más compleja que la Lognormal.

Bendito en el 2001 analizó la amenaza sísmica del occidente venezolano en términos probabilísticos [1]. Un año más tarde analizó las variaciones espacio-temporales de los parámetros que representan la sismicidad del occidente venezolano, en términos de la tasa media de ocurrencia, a y b de la distribución frecuencia-magnitud de Gutenberg-Ritcher y de la magnitud mínima de reporte homogéneo [2]. También Prieto y Durán realizaron un análisis estadístico de la sismicidad del Piedemonte Llanero Colombiano entre 1993 al 2003 [34]. A diferencia de estos trabajos previos, nosotros en este trabajo no estamos considerando a la sismicidad de la falla de Boconó como un proceso estocástico ⁸ sino como un proceso dinámico.

Existen varios procedimientos estadísticos que permiten detectar si una serie de tiempo fue generada por algún proceso caótico ⁹ (o más generalmente un proceso no lineal). Partiendo de la base de que los procesos estocástico de interés son ergódicos, es decir, que en el tiempo tienden a pasar por todos los estados posibles, lo que estos procedimientos hacen es detectar la “dimensión natural” de los valores de una serie de tiempo, si dicha dimensión

⁸Cualquier proceso en el que se involucren probabilidades es un proceso estocástico.

⁹Un proceso caótico es aquel que es muy sensible a pequeñas perturbaciones, cualquier cosa por mínima que sea, altera su movimiento y no se puede predecir su respuesta.

es “alta” o no acotada (cuando el rango de valores “visitables” no puede ser acotado) se infiere que el proceso generador es estocástico. En caso contrario se considera que la serie fue generada por un proceso no lineal. En el trabajo de Balacco y Maradona [9] se definen estas nociones, desarrolladas en trabajos de Takens [78] y Grassberger - Procaccia [28], con más precisión.

Para obtener información de la dinámica del sistema, vamos utilizar el teorema de Takens [79] y para el enunciado del teorema se necesitan algunas definiciones y resultados previos.

Definición 3.1.1. *Una topología sobre un conjunto X es una colección de Γ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:*

- ϕ y X están en Γ .
- La unión de los elementos de cualquier subcolección de Γ está en Γ .
- La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de Γ está en Γ .

Un conjunto X para el que se ha definido una topología Γ se llama *espacio topológico*. Un espacio topológico es un par ordenado (X, Γ) , formado por un conjunto X y una topología Γ sobre X .

Definición 3.1.2. *Sea (X, Γ) un espacio topológico, diremos que un subconjunto U de X es un conjunto abierto de X si U pertenece a la colección Γ .*

Definición 3.1.3. *Una colección \mathcal{A} de subconjuntos del espacio topológico (X, Γ) se dice que cubre X , o que es un cubrimiento de X , si la unión de los elementos de \mathcal{A} coincide con X . Se dice que \mathcal{A} es un cubrimiento abierto de X si es un cubrimiento de X formado por conjuntos abiertos de X .*

Definición 3.1.4. Un espacio topológico (X, Γ) se dice que es compacto si de cada cubrimiento abierto \mathcal{A} de X podemos extraer una subcolección finita que también cubre X .

Ejemplo. La recta real \mathbb{R} no es compacta, pues el cubrimiento de \mathbb{R} por intervalos abiertos

$$\mathcal{A} = \{(n, n + 2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

no contiene ninguna subcolección finita que cubra \mathbb{R} .

Definición 3.1.5. Se llama sistema dinámico al par (X, h) , con $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto, llamado espacio de fases, y $h : X \rightarrow X$ una función continua tal que el estado del sistema en el momento t viene dado por $x_t = h(x_{t-1})$, lo que permite conocer la evolución del sistema dada una condición inicial x_0 .

En general, la función h no es conocida, y la información que se tiene del sistema procede de una serie temporal $\{x_t\}$, normalmente escalar, obtenida a través de una función de medida $\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$, con $x_t = \alpha(x_t)$.

Definición 3.1.6. Sea $\mathbf{F} : X \rightarrow Y$ una función sobre los espacios topológicos X e Y . Se dice que \mathbf{F} es un *embedding* si \mathbf{F} es un homeomorfismo¹⁰ entre X y $\mathbf{F}(X)$. Cada *embedding* es inyectivo y continuo. Se le llamará *dimensión de embedding* a la dimensión de X , que la denotaremos m .

La construcción a partir de una serie temporal de un espacio de fases equivalente al espacio de fases del sistema original [77, 78], que llamaremos *espacio reconstruido*, es la base de muchos de los métodos de análisis de series temporales. Los trabajos de Takens [78] y Casdagli [14] entre otros, han establecido la metodología necesaria para la modelización no-lineal de series temporales.

¹⁰Sean X e Y espacios topológicos; sea $f : X \rightarrow Y$ una biyección. Si la función f y su inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ son ambas continuas, entonces f se dice que es un *homeomorfismo*.

3.2. Reconstrucción del espacio de fases.

Recordemos que los sistemas dinámicos describen la evolución de un sistema para un espacio de fases $X \subset \mathbb{R}^n$. Ya que la sucesión $\{x_t\}$ es normalmente escalar se tiene que dicha sucesión no representa correctamente el espacio de fases del sistema dinámico, sólo tiene aplicación en algunas técnicas para desarrollar la estructura multidimensional usando los datos disponibles.

Ahora bien, ¿Qué es lo que nos asegura que podemos ir de la observación de una variable, a un estado multivariado o espacio de fases como es requerido para el estudio de la dinámica? La respuesta a esta pregunta está contenida en un teorema geométrico llamado *teorema de embedding* [82]. Este afirma que siempre es posible encontrar un atractor inmerso (embedded) en algún espacio \mathbb{R}^m , y ésta dimensión m tiene que ser un poco más que dos veces la dimensión del atractor. Para aclarar un poco más la relación entre el espacio de fases, las mediciones que comprenden la serie temporal, y el espacio de estados reconstruídos, veamos lo siguiente:

Supongamos que \mathbb{R}^k es el espacio de fases de un sistema dinámico, y que las trayectorias son atraídas a una variedad A ¹¹ de dimensión d . Supongamos que podemos hacer m mediciones simultáneas independientes en un sistema dado en un tiempo determinado, es decir, no sólo una medición por vez como en la serie temporal. Para cada estado tendremos entonces un vector de \mathbb{R}^m . Cuando hacemos mediciones a distintos tiempos, estamos por lo tanto adquiriendo vectores de \mathbb{R}^m , donde cada uno representa m mediciones simultáneas. Podemos pensar a estas mediciones como una función \mathbf{F} de \mathbb{R}^k a \mathbb{R}^m . Para cualquier tiempo, el estado es un punto de A en \mathbb{R}^k , y podemos evaluar \mathbf{F} en este punto

¹¹Una *variedad* es un espacio matemático abstracto en el cual cada punto p tiene una vecindad, es decir, un conjunto abierto que contiene a p .

haciendo m mediciones y formando un vector con ellas. El teorema dice que es de esperar que $\mathbf{F}(A)$ represente univocamente todos los estados pertenecientes a la variedad original A .

Por lo tanto, dos estados diferentes en A permanecen diferentes cuando son mapeados en \mathbb{R}^m , o dicho de otra manera $\mathbf{F}(A)$ no tiene autointersecciones. El teorema garantiza que es suficiente tomar m como $2d + 1$.

3.2.1. Coordenadas retrasadas.

Una de las técnicas de reconstrucción del espacio de fases es el *método de retraso*. Así, si tenemos una serie temporal escalar, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$, constituida por observaciones de un sistema dinámico desconocido, un conjunto de estados de un espacio de fases reconstruido estará formado por vectores de la forma

$$x_t = (x_{t-(m-1)\tau}, x_{t-(m-2)\tau}, \dots, x_t), \quad (3.2)$$

donde, τ es el factor de retardo elegido para construir las m -úplas y m es la dimensión del embedding.

Los teoremas de embedding de Takens [78] y Sauer [65] indican que si la sucesión $\{x_t\}$ consiste de medidas escalares del estado de un sistema dinámico, entonces bajo ciertas condiciones el tiempo de retraso proporciona sólo una imagen del conjunto original, siempre que m sea suficientemente grande.

En concreto, Takens [78] mostró que es suficiente con que elijamos \mathbf{F} de una clase de funciones especiales formadas estrictamente a partir de las coordenadas retrasadas, de una serie temporal de una medición. Si nosotros llamamos $h : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ a la función de medición, entonces la función de coordenadas retrasadas es

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [h(\mathbf{x}), h(g_{-\tau}(\mathbf{x})), \dots, h(g_{-(m-1)\tau}(\mathbf{x}))], \quad (3.3)$$

donde, g denota al sistema dinámico para el cual A es un atractor. La función \mathbf{F} puede verse como un mapa donde $g_{-\tau}$ representa τ pasos en el mapa, o una ecuación diferencial, en cuyo caso se denota el estado τ unidades atrás.

El método de las coordenadas retrasadas es una herramienta importante para la inspección visual de los datos, aún cuando la visualización se restringe en dos dimensiones, o a lo más a proyecciones bidimensionales de interpretación tridimensional. Un buen desarrollo en dos dimensiones puede dar alguna idea sobre una buena opción del tiempo de retraso para embedding dimensionales más altos.

El número de coordenadas del espacio de fases es una cantidad que debe ser determinada según el sistema en cuestión. Preguntarse por la dimensión del espacio de fases es equivalente a preguntarse si la estructura geométrica proyectada ha sido completamente develada. Es decir, si los puntos cercanos en el espacio de fases lo son debido a la dinámica y no simplemente debido a una proyección. Para ello deben estudiarse los puntos y su vecindad hasta que se pueda establecer que la cercanía de los puntos de la estructura obtenida obedecen a una razón dinámica y no a la de una proyección geométrica de un atractor de mayor dimensión en un espacio de fases de menor dimensión.

3.3. Elección del tiempo de retraso τ .

Debido al número finito de mediciones con precisión finita de que se dispone, es importante realizar una elección adecuada del tiempo de retraso τ .

Aunque teóricamente la elección del tiempo de retraso τ no tiene interés, desde un punto de vista práctico sí es importante. En principio se puede elegir cualquier tiempo τ de retraso, excepto ciertos múltiplos del período de la señal periódica. No obstante, es importante tener algunas prescripciones para elegir τ , como son:

- Este debe ser un múltiplo del tiempo de muestreo, dado que solamente tenemos datos en los tiempos de muestreo.
- Si el tiempo de retraso es muy corto, las coordenadas x_t y $x_{t+\tau}$ que buscamos para reconstruir el vector de datos no serán lo suficientemente independientes, esto significa que no habremos dejado suficiente tiempo para que el sistema evolucione y haya explorado el espacio de fases lo suficiente como para que arroje, en un sentido práctico numérico, información nueva acerca del espacio de fases.
- Dado que los sistemas caóticos son intrínsecamente inestables, si τ es muy grande, cualquier conexión entre las mediciones x_t y $x_{t+\tau}$ son numéricamente aleatorias una respecto de la otra.

Lo que se busca es un tiempo de retraso suficientemente grande como para que x_t y $x_{t+\tau}$ sean independientes entre sí, pero no tanto como para que ellas sean completamente independientes en un sentido estadístico. A pesar de que no existe un método riguroso y definitivo para determinar el valor óptimo del retardo, los dos métodos más utilizados son utilizar la función de autocorrelación y la función media de información mutua.

3.3.1. Función de autocorrelación.

Una forma de calcular el retardo τ es utilizar el primer cero de la función de autocorrelación. La autocorrelación es una herramienta matemática utilizada frecuentemente en el procesamiento de señales.

La función de autocorrelación se define como:

$$\mathcal{C}(\tau) = \sum_t (x_t - \bar{x})(x_{t+\tau} - \bar{x}), \quad (3.4)$$

donde, x_t es una medición en el tiempo t y \bar{x} es el valor esperado de x_n . Lo que se pretende conseguir es que los elementos de la serie que constituyen la m -úpla no presenten dependencia lineal.

La función de autocorrelación se define como la correlación cruzada de la señal consigo misma. Resulta de gran utilidad para encontrar patrones repetitivos dentro de una señal y se utiliza para analizar la estacionalidad de una serie.

3.3.2. Función media de información mutua.

Otra forma de determinar un valor adecuado para el retardo τ es utilizar el primer mínimo de la función media de información mutua, que mide cualquier correlación entre los datos de la serie temporal.

La información mutua entre una medición x_t extraída de un conjunto A y una $x_{t+\tau}$ extraída del conjunto B es la cantidad de información contenida en x_t acerca de la medición $x_{t+\tau}$. En bits esto es:

$$\log_2 \left[\frac{\mathcal{P}(x_t, x_{t+\tau})}{\mathcal{P}(x_t)\mathcal{P}(x_{t+\tau})} \right], \quad (3.5)$$

donde, $\mathcal{P}(x_t, x_{t+\tau})$ es la densidad de la probabilidad conjunta de que mediciones de A y B resulten en valores x_t y $x_{t+\tau}$. $\mathcal{P}(x_t)$ y $\mathcal{P}(x_{t+\tau})$ son las densidades de probabilidad individuales para las mediciones de A y B .

Si las mediciones de valores de A arrojan valores x_t completamente independiente de mediciones de valores de $B, x_{t+\tau}$, entonces la probabilidad conjunta se factoriza $\mathcal{P}(x_t, x_{t+\tau}) = \mathcal{P}(x_t)\mathcal{P}(x_{t+\tau})$ y la cantidad de información entre las mediciones, es decir, la información mutua, resulta ser nula, como era dado esperar. Al promedio sobre todas las mediciones de esta información estadística, se la denomina información mutua promedio entre las mediciones de A y las mediciones de B , esto es:

$$\mathcal{I}(\tau) = \sum_{x_t, x_{t+\tau}} \mathcal{P}(x_t, x_{t+\tau}) \log_2 \left[\frac{\mathcal{P}(x_t, x_{t+\tau})}{\mathcal{P}(x_t)\mathcal{P}(x_{t+\tau})} \right], \quad (3.6)$$

Esta cantidad no está relacionada con las reglas de evolución lineal o no-lineal de las cantidades medidas. Este es un producto netamente teórico que conecta dos conjuntos de mediciones entre ellas y establece un criterio para su dependencia mutua basado en la noción de la información compartida entre ellas.

Cuando τ se hace muy grande, el comportamiento caótico de la señal hace que las mediciones x_t y $x_{t+\tau}$ sean independientes en un sentido práctico, e $\mathcal{I}(\tau)$ tenderá a cero. Entonces esta función $\mathcal{I}(\tau)$ puede pensarse como un tipo de función de autocorrelación no-lineal para determinar cuando los valores x_t y $x_{t+\tau}$ son lo suficientemente independientes entre sí para ser usados como coordenadas de un vector de datos con retrasos temporales, pero no tan independientes como para que los mismos esten desconectados.

3.4. Elección de la mínima dimensión embedding.

A pesar de que el Teorema de Takens asegura la construcción de un espacio de fases homeomorfo al espacio de fases original para una dimensión embedding m suficientemente grande, la elección de dicha dimensión debe realizarse con cuidado cuando se dispone de una serie temporal finita de datos.

Para determinar una dimensión embedding adecuada pueden utilizarse distintos métodos, de los que destacamos los siguientes:

- El cálculo de algún invariante del conjunto atractor (por ejemplo, la dimensión de correlación) para distintas dimensiones de embedding, eligiendo aquella a partir de la cual el valor del invariante es independiente de la dimensión considerada.
- El método de los falsos vecinos, basado en el hecho de que si la dimensión de embedding elegida es demasiado pequeña para reconstruir el verdadero atractor, habrá puntos que, estando cerca en ese espacio, estarán lejos en el espacio reconstruido con la dimensión adecuada. Este método fue desarrollado por Kennel, Brown y Ababarnel [40] y ha sido muy utilizado en las aplicaciones prácticas. Como en el algoritmo interviene parámetros que tienen que fijarse a priori, Cao [13] desarrolla posteriormente otro método basado en la misma idea pero en el que no son necesarios parámetros a los que asignar valores subjetivos.

3.4.1. Dimensión de correlación.

La *dimensión de correlación* de un atractor es un tipo de dimensión probabilística y se define como:

$$d_c = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \mathcal{C}(\epsilon)}{\ln \epsilon}, \quad \text{con} \quad \mathcal{C}(\epsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N(\epsilon)^2}, \quad (3.7)$$

donde, $N(\epsilon)$ es el número de elementos del volumen con diametro ϵ .

La dimensión de correlación mide la complejidad geométrica del atractor. Para sistemas no lineales la dimensión de correlación no necesariamente es un valor entero. Con series de tiempo la dimensión de correlación se calcula como la pendiente de la región más lineal de

$\ln \mathcal{C}(\epsilon)$ vs $\ln(\epsilon)$ debido a que el hecho de tener una cantidad finita de datos distorsiona el calculo de d_c para valores extremos de ϵ .

Definición 3.4.1. *Dado un sistema dinámico (X, h) y dado $\epsilon > 0$ se define la correlación integral como la probabilidad de que dos puntos del atractor, tomados aleatoriamente según una medida de probabilidad μ definida sobre este atractor, estén a una distancia menor que ϵ ,*

$$\mathcal{C}(\epsilon) = \int_x \int_y \mu_x \mu_y I_\epsilon(x, y) dx dy, \quad (3.8)$$

donde, $I_\epsilon(x, y)$ es la función Heaviside,

$$I_\epsilon(x_t(m), x_s(m)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|(x_t(m), x_s(m))\| \leq \epsilon \\ 0 & \text{si } \|(x_t(m), x_s(m))\| > \epsilon \end{cases} \quad (3.9)$$

y $\|\cdot\|$ es la distancia elegida en el espacio reconstruido.

Cuando la información del sistema dinámico se obtiene de una serie temporal, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$, a partir de la que se han construido las m -úplas, $x_t = (x_{t-(m-1)\tau}, x_{t-(m-2)\tau}, \dots, x_t)$ una estimación de la correlación integral viene dada por:

$$\mathcal{C}_{m,N}(\epsilon) = \frac{2}{(N - (m - 1))(N - (m - 2))} \sum_{t < s} I_\epsilon(x_t(m), x_s(m)). \quad (3.10)$$

El valor $\mathcal{C}_{m,N}(\epsilon)$ representa la proporción de m -úplas del espacio reconstruido que están a una distancia menor que ϵ .

Si el atractor tiene una dimensión de correlación d_c se cumplirá

$$d_c = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{C}_{m,N}(\epsilon)}{\ln \epsilon}, \quad (3.11)$$

y para cualquier dimensión embedding mayor que m el valor de d_c no cambiará.

Grassberger y Procaccia [28] desarrollaron un algoritmo para estimar la dimensión de correlación a partir de una serie temporal. Este algoritmo requiere la identificación de una región de valores de ϵ en la que los puntos $(\ln \epsilon, \ln \mathcal{C}_{m,N}(\epsilon))$ mantengan una relación lineal. La dimensión de correlación será entonces la pendiente de dicha recta; es decir, $\mathcal{C}_{m,N}(\epsilon)$ será proporcional a ϵ^{d_c} . Este algoritmo presenta el inconveniente de ser sensible a la presencia de ruido en los datos y a la longitud de la serie. Normalmente, cuando se utiliza este algoritmo para estimar la dimensión de correlación se recurre al uso de gráficos donde se representa la pendiente de la recta ajustada para pequeños intervalos de ϵ . En un gráfico típico se podrá observar un intervalo de valores de ϵ donde las pendientes permanezcan relativamente constantes, y ese valor proporciona una estimación de la dimensión de correlación.

Cuando se tiene un número finito de datos, la estimación de la dimensión de correlación d_c siempre será menor que m , aunque los datos sean aleatorios. Ahora bien, para datos no deterministas esta estimación estará muy cerca de m para cualquier m , mientras que con una serie determinista los valores de d_c no estarán tan cerca de los de m y se estabilizarán a partir de una m apropiada [41].

Scheinkmann y LeBaron [66] fueron de los primeros investigadores en utilizar la dimensión de correlación para estudiar si una serie temporal procede de un sistema dinámico no lineal o bien sigue un proceso estocástico.

3.4.2. Método de Cao.

El método de Cao para la determinación de la mínima dimensión embedding tiene su origen el algoritmo de los falsos vecinos [40]. Sea $x_{n(t,m)}(m)$ el vecino más cercano de $x_t(m)$ en el

espacio de fases reconstruido m -dimensional para una distancia $\|\cdot\|$,

$$\|x_t(m) - x_{n(t,m)}(m)\| = \text{mín}\{\|x_t(m) - x_s(m)\| : s = (m-1)\tau + 1, \dots, N, s \neq t\}. \quad (3.12)$$

Si m no es una dimensión embedding apropiada, estos dos puntos, considerados en el espacio de dimensión correcta (y, por tanto, mayor) podrían no estar ya tan cerca, en cuyo caso se denominarán falsos vecinos. Si $x_{n(t,m)}(m+1) = (x_{n(t,m)}(m), z_{n(t,m)-m\tau})$, entonces $x_{n(t,m)}(m)$ es un falso vecino de $x_t(m)$ cuando al comparar las distancias $\|x_t(m) - x_{n(t,m)}(m)\|$ y $\|x_t(m+1) - x_{n(t,m)}(m+1)\|$ se verifica

$$\frac{|z_{t-m\tau} - z_{n(t,m)-m\tau}|}{\|x_t - x_{n(t,m)}\|} > \mathcal{R}_{tol}, \quad (3.13)$$

donde, \mathcal{R}_{tol} es un valor umbral. La dimensión m será la mínima dimensión de embedding cuando el porcentaje de falsos vecinos en el espacio de fases m -dimensional sea nulo o suficientemente próximo a cero. Como la serie temporal es finita y puede estar contaminada de ruido, el criterio anterior puede ser insuficiente, por lo que Kennel *et al.* (1992) sugieren un segundo criterio dado por

$$\frac{\|x_t(m+1) - x_{n(t,m)}(m+1)\|}{\mathcal{R}_A} > \mathcal{R}_{tol}, \quad (3.14)$$

con \mathcal{R}_A una medida del tamaño del atractor reconstruido (que no olvidemos es desconocido), estimada por

$$\mathcal{R}_A = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (z_t - \bar{z})^2}. \quad (3.15)$$

Dicho algoritmo dependerá, por tanto, de la elección de los parámetros \mathcal{R}_{tol} y \mathcal{R}_A .

En la figura 12 se muestra la fracción de falsos vecinos como función de la dimensión

de embedding para la serie de tiempo de Henón sin ruido.

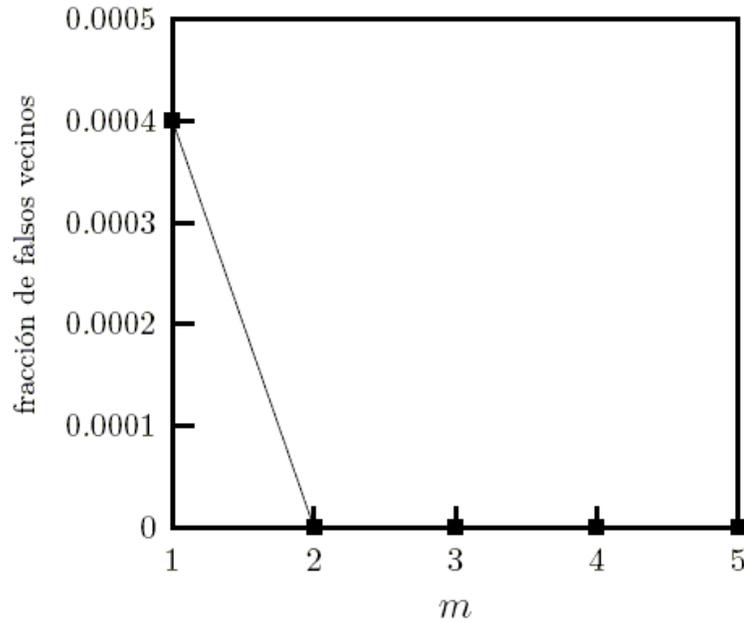


Figura 12. Método de los falsos vecinos para la serie de Henón.

De la cual, se puede observar que la dimensión de embedding para el sistema de Henón es $m = 2$ como era de esperar.

Para evitar tener que asignar valores a los parámetros \mathcal{R}_{tol} y \mathcal{R}_A , Cao [13] desarrolla un algoritmo modificado de los falsos vecinos. Este método calcula la media de los cocientes de las distancias entre cualquier punto y su vecino más cercano al aumentar en una unidad la dimensión embedding,

$$E(m) = \frac{1}{N - m\tau} \sum_{t=1+m\tau}^N \frac{\|x_t(m+1) - x_{n(t,m)}(m+1)\|}{\|x_t(m) - x_{n(t,m)}(m)\|}, \quad (3.16)$$

que sólo depende de m y del retardo τ , y se estudia el cociente

$$E1(m) = \frac{E(m+1)}{E(m)}. \quad (3.17)$$

Si la serie procede de un sistema determinista, habrá un claro valor de m a partir del cual $E1(m)$ se estabiliza en torno a 1, que se toma como la mínima dimensión embedding buscada. Sin embargo, si la serie es estocástica, $E1(m)$ crecerá suave y lentamente hacia 1.

3.5. Teorema de Takens.

El Teorema de Takens [79] nos sirve para reconstruir la dinámica de un sistema a través de m -úplas formadas por retardos de la serie temporal observada, es decir, garantiza la posibilidad de anticipar la dinámica futura de una serie temporal determinista considerando únicamente sus valores pasados. En concreto, el **Teorema de Takens** establece:

Teorema 3.5.1. *Bajo condiciones de diferenciabilidad, sea (X, h) es un sistema dinámico, con $X \subset \mathbb{R}^n$, y $\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$ la función de observación del sistema, entonces la aplicación de retardos $\Phi_{h,\alpha} : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, dada por $\Phi_{h,\alpha}(x) = (\alpha(h^{(m-1)\tau}(x)), \dots, \alpha(x))$, es un homeomorfismo sobre X siempre que $m \geq 2n + 1$, siendo m una dimensión de embedding y τ un retardo cualquiera.*

Por consiguiente, $(\Phi_{h,\alpha}(X), \mathbb{G})$, con $\mathbb{G} = \Phi_{h,\alpha} \circ h \circ \Phi_{h,\alpha}^{-1}$, es un sistema dinámico que reproduce el comportamiento dinámico del sistema (X, h) .

Por lo tanto, bajo las condiciones de diferenciabilidad necesarias, si se tiene una serie temporal que procede de la observación de un sistema dinámico, existe una función $\mathcal{F} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\mathcal{F}(x_t(m)) = (x_{t+1}(m))$ para m mayor que dos veces la dimensión del sistema dinámico subyacente y cada una de las m -úplas es un elemento de un nuevo sistema dinámico equivalente al sistema desconocido.

Stark [77] extiende el teorema de Takens a sistemas dinámicos no autónomos y a ciertos tipos de sistemas dinámicos estocásticos.

3.6. Componentes principales.

Si nuestro sistema es de alta dimensionalidad, ahora nuestro problema central es la reducción de la dimensionalidad: si es posible describir con precisión los valores de m variables por un pequeño subconjunto $r < m$ de ellas, se habrá reducido la dimensión del problema a costa de una pequeña pérdida de información. El análisis de componentes principales tiene este objetivo: dadas n observaciones de m variables, se analiza si es posible representar adecuadamente esta información con un número menor de variables construidas como combinaciones lineales de las originales.

La técnica de componentes principales es debida a Hotelling [32], aunque sus orígenes se encuentran en los ajustes ortogonales por mínimos cuadrados introducidos por Pearson [50]. Su utilidad es doble:

- Permite representar óptimamente en un espacio de dimensión pequeña observaciones de un espacio general m -dimensional. En este sentido, componentes principales es el primer paso para identificar las posibles variables latentes, o no observadas que generan los datos.
- Permite transformar las variables originales, en general correladas, en nuevas variables incorreladas, facilitando la interpretación de los datos.

Algebraicamente, el análisis de componentes principales genera nuevas variables, componentes, mediante una combinación lineal de las m variables originales. Aunque se requieren las m componentes principales para reproducir la variabilidad total, muchas veces

la mayor parte de ella está contenida en un número menor de componentes r . En ese caso, reemplazando las m variables originales por los r componentes, se reduce la dimensionalidad del problema conservando casi la totalidad de la información.

3.6.1. Cálculo de los componentes principales.

Para realizar el análisis de componentes principales se utiliza una matriz bidimensional. Formalmente, una matriz $\mathbf{X}_{m \times n}$.

▪ Cálculo del primer componente.

El primer componente principal se define como la combinación lineal de las variables originales que tiene varianza máxima. Los valores en este primer componente se representarán por un vector z_1 , dado por:

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{X}\mathbf{a}_1,$$

donde, para un punto x_i y una dirección $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m})'$ definida por un vector \mathbf{a}_1 de norma unidad, la proyección del punto x_i sobre esta dirección es el escalar:

$$\mathbf{z}_i = a_{11}x_{i1} + \dots + a_{1m}x_{im} = \mathbf{a}_1 x_i$$

y el vector que representa esta proyección será $\mathbf{z}_1 \mathbf{a}_1'$.

Como las variables originales tienen media cero también \mathbf{z}_1 tendrá media nula. Su varianza será:

$$\frac{1}{n} \mathbf{z}_1' \mathbf{z}_1 = \mathbf{a}_1' \mathbf{X}' \mathbf{X} \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1' \mathbf{S} \mathbf{a}_1 \quad (3.18)$$

donde, \mathbf{S} es la matriz de varianzas y covarianzas (en la que los elementos de la diagonal son las varianzas y los elementos fuera de la diagonal son las covarianzas) de las observaciones. Es claro que podemos maximizar la varianza sin límite aumentando el módulo del vector \mathbf{a}_1 . Para que la maximización de (Ec. 3.17) tenga solución debemos imponer una restricción al módulo del vector \mathbf{a}'_1 , y, sin pérdida de generalidad, impondremos que $\mathbf{a}'_1 \mathbf{a}_1 = 1$. Introduciremos esta restricción mediante el multiplicador de Lagrange:

$$\mathbf{M} = \mathbf{a}'_1 \mathbf{S} \mathbf{a}_1 - \lambda (\mathbf{a}'_1 \mathbf{a}_1 - 1)$$

y maximizaremos esta expresión de la forma habitual derivando respecto a los componentes de \mathbf{a}_1 e igualando a cero. Entonces:

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{a}_1} = 2\mathbf{S}\mathbf{a}_1 - 2\lambda\mathbf{a}_1 = 0,$$

cuya solución es:

$$\mathbf{S}\mathbf{a}_1 = \lambda\mathbf{a}_1 \tag{3.19}$$

lo que implica que \mathbf{a}_1 es un vector propio de la matriz \mathbf{S} , y λ su correspondiente valor propio. Para determinar qué valor propio de \mathbf{S} es la solución de (Ec. 3.18), multiplicando por la izquierda por \mathbf{a}'_1 esta ecuación,

$$\mathbf{a}'_1 \mathbf{S} \mathbf{a}_1 = \lambda \mathbf{a}'_1 \mathbf{a}_1 = \lambda$$

y concluimos, por (Ec. 3.17), que λ es la varianza de \mathbf{z}_1 . Como ésta es la cantidad que queremos maximizar, λ será el mayor valor propio de la matriz \mathbf{S} . Su vector asociado, \mathbf{a}_1 , define los coeficientes de cada variable en el primer componente principal.

Ejemplo. Ilustraremos con detalle el cálculo de las dos primeras componentes principales con los datos de los logaritmos de series de tiempo.

La matriz de varianzas y covarianzas de estos datos en logaritmos es,

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.15 & -0.19 \\ 0.15 & 0.13 & -0.03 \\ -0.19 & -0.03 & 0.16 \end{pmatrix}$$

Los valores propios son las raíces de la ecuación:

$$\begin{aligned} |\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I}| &= \left| \begin{pmatrix} 0.35 & 0.15 & -0.19 \\ 0.15 & 0.13 & -0.03 \\ -0.19 & -0.03 & 0.16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix} \right| = \\ &= 0.000382 - 0.0628\lambda + 0.64\lambda^2 - \lambda^3 = 0 \end{aligned}$$

Las raíces de este polinomio, son $\lambda_1 = 0.521$, $\lambda_2 = 0.113$, $\lambda_3 = 6.51 \times 10^{-3}$. El vector propio asociado a λ_1 nos da los pesos de la primera componente principal. Para calcular la primera componente, resolvemos el sistema

$$\mathbf{S}\mathbf{a}_1 = \lambda_1\mathbf{a}_1$$

que conduce a:

$$\begin{pmatrix} 0.35 & 0.15 & -0.19 \\ 0.15 & 0.13 & -0.03 \\ -0.19 & -0.03 & 0.16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} \\ \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{13} \end{pmatrix} = 0.521 \times \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} \\ \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{13} \end{pmatrix}$$

así,

$$\begin{pmatrix} -0.171\mathbf{a}_{11} + 0.151\mathbf{a}_{12} - 0.19\mathbf{a}_{13} \\ 0.15\mathbf{a}_{11} - 0.391\mathbf{a}_{12} - 0.03\mathbf{a}_{13} \\ -0.19\mathbf{a}_{11} - 0.03\mathbf{a}_{12} - 0.361\mathbf{a}_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y el sistema es compatible indeterminado. Para encontrar una de las infinitas soluciones tomemos la primera variable como parámetro, x , y resolvamos el sistema en función de x . La solución es,

$$\{\mathbf{a}_{11} = x, \quad \mathbf{a}_{12} = 0.427x, \quad \mathbf{a}_{13} = -0.562x\}$$

El valor de x se obtiene ahora imponiendo que el vector tenga norma unidad, con lo que resulta:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -0.817 \\ -0.349 \\ 0.459 \end{pmatrix}$$

y el primer componente es:

$$\mathbf{z}_1 = -0,817\mathbf{x}_1 - 0,349\mathbf{x}_2 + 0,459\mathbf{x}_3,$$

donde, \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 y \mathbf{x}_3 son las variables en logaritmos.

▪ **Cálculo del segundo componente.**

Vamos a obtener el mejor plano de proyección de las variables \mathbf{S} . Lo calcularemos estableciendo como función objetivo que la suma de las varianzas de $\mathbf{z}_1 = \mathbf{X}\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{z}_2 = \mathbf{X}\mathbf{a}_2$ sea máxima, donde \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 son los vectores que definen el plano. La función objetivo será:

$$\phi = \mathbf{a}'_1\mathbf{S}\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}'_2\mathbf{S}\mathbf{a}_2 - \lambda_1(\mathbf{a}'_1\mathbf{a}_1 - 1) - \lambda_2(\mathbf{a}'_2\mathbf{a}_2 - 1) \quad (3.20)$$

que incorpora las restricciones de que las direcciones deben de tener módulo unitario $(\mathbf{a}'_i \mathbf{a}_i) = 1, i = 1, 2$. Derivando e igualando a cero:

$$\frac{d\phi}{d\mathbf{a}_1} = 2\mathbf{S}\mathbf{a}_1 - 2\lambda_1\mathbf{a}_1 = 0$$

$$\frac{d\phi}{d\mathbf{a}_2} = 2\mathbf{S}\mathbf{a}_2 - 2\lambda_2\mathbf{a}_2 = 0$$

La solución de este sistema es:

$$\mathbf{S}\mathbf{a}_1 = \lambda_1\mathbf{a}_1 \quad (3.21)$$

$$\mathbf{S}\mathbf{a}_2 = \lambda_2\mathbf{a}_2 \quad (3.22)$$

que indica que \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 deben ser vectores propios de \mathbf{S} . Tomando los vectores propios de norma uno y sustituyendo en (Ec. 3.19), se obtiene que, en el máximo, la función objetivo es

$$\phi = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (3.23)$$

es claro que λ_1 y λ_2 deben ser los dos autovalores mayores de la matriz \mathbf{S} y \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 sus correspondientes autovectores. Observemos que la covarianza entre \mathbf{z}_1 y \mathbf{z}_2 , dada por $\mathbf{a}'_1\mathbf{S}\mathbf{a}_2$ es cero ya que $\mathbf{a}'_1\mathbf{a}_2 = 0$, y las variables \mathbf{z}_1 y \mathbf{z}_2 estarán incorreladas.

▪ **Generalización.**

Puede demostrarse análogamente que el espacio de dimensión r que mejor representa a los puntos viene definido por los vectores propios asociados a los r mayores valores propios de \mathbf{S} . Estas direcciones se denominan direcciones principales de los datos y a las nuevas variables por ellas definidas componentes principales. En general, la matriz \mathbf{X} (y por tanto la \mathbf{S}) tiene rango m , existiendo entonces tantas componentes principales como variables que se obtendrán calculando los valores propios o raíces características, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, de la matriz de varianzas y covarianzas de las variables, \mathbf{S} , mediante:

$$|\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \quad (3.24)$$

y sus vectores asociados son:

$$(\mathbf{S} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{a}_i = 0 \quad (3.25)$$

Los términos λ_i son reales, al ser la matriz \mathbf{S} simétrica pues la covarianza entre la variable original i y la j es la misma que entre la variable original j y la i , y positivos, ya que \mathbf{S} es definida positiva. Por ser \mathbf{S} simétrica si λ_j y λ_h son dos raíces distintas sus vectores asociados son ortogonales. Si \mathbf{S} fuese semidefinida positiva de rango $r < m$, lo que ocurriría si $m - r$ variables fuesen combinación lineal de las demás, habría solamente r raíces características positivas y el resto serían ceros. Llamando \mathbf{Z} a la matriz cuyas columnas son los valores de los m componentes, estas nuevas variables están relacionadas con las originales mediante:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{A},$$

donde, $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Calcular los componentes principales equivale a aplicar una transformación ortogonal \mathbf{A} a las variables \mathbf{X} (ejes originales) para obtener unas nuevas variables \mathbf{Z} incorreladas entre sí. Esta operación puede interpretarse como elegir unos nuevos ejes coordenados, que coincidan con los “ejes naturales” de los datos.

3.7. Dimensión dinámica o local.

Una vez que se ha determinado la dimensión de embedding, aún queda la cuestión de investigar el número de grados de libertad dinámicos que determinan la evolución del sistema en su movimiento alrededor del atractor.

La dimensión local d_L debe ser la misma para cualquier muestreo de datos que se realice y una forma para determinarla es utilizando los exponentes de Lyapunov.

3.7.1. Exponentes de Lyapunov

Dado que una de las manifestaciones más característica del comportamiento caótico es su sensibilidad a cambios en las condiciones iniciales del sistema, es lógico buscar la forma de medir el grado de sensibilidad o libertad de trayectorias vecinas en sus condiciones iniciales para caracterizar la caoticidad de un sistema.

La noción de divergencia exponencial de órbitas ¹² cercanas es formalizada con la introducción de los exponentes de Lyapunov [44]. Los exponentes de Lyapunov son una medida cuantitativa de la sensibilidad de un sistema a los cambios en las condiciones iniciales. Estos exponentes miden la separación exponencial de órbitas cercanas de un sistema.

Para un sistema dinámico que evoluciona según la ecuación f en un espacio de n dimensiones, el espectro del exponente Lyapunov $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ en general depende del punto de inicio x_0 . El exponente Lyapunov describe el comportamiento de los vectores en el espacio tangente al espacio de fase y son definidos por la matriz Jacobiana:

$$J^t(x_0) = \left. \frac{df^t(x)}{dx} \right|_{x_0} \quad (3.26)$$

La matriz de f describe cómo un pequeño cambio en el punto x_0 se propaga hasta el punto final $f(x_0)$. El límite:

¹²Llamamos órbita $O(x)$ a través del punto x , en un espacio de fases M al siguiente conjunto $O(x) = \{y \in M \text{ tales que } y = F(x, t) \text{ para algún } t \in \mathbb{R}\}$

$$L(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} (J^t \cdot (J^t)^T)^{\frac{1}{2t}} \Big|_{x_0} \quad (3.27)$$

define a una matriz $L(x_0)$ donde las condiciones para la existencia del límite son dadas por el teorema de Oseledec [54]. Si $\beta_i(x_0)$ son los autovalores dados de $L(x_0)$, entonces el exponente Lyapunov λ_i está definido por:

$$\lambda_i(x_0) = \ln \beta_i(x_0). \quad (3.28)$$

Es importante resaltar que aunque, el número de ellos es igual al número de dimensiones del espacio de fase. Es común referirse sólo a el más grande, porque es él quien determina la predictibilidad de un sistema.

El exponente de Lyapunov puede ser considerado como una medida de la atracción o repulsión desde un punto fijo en el espacio de fases, es decir, nos indican la razón de expansión ($\lambda > 0$), para las órbitas que se alejan exponencialmente cuando se tiene comportamiento caótico; o de contracción ($\lambda < 0$), para las órbitas que se acercan cuando el comportamiento es regular. También se podría aplicar esta misma noción a la divergencia de trayectorias cercanas, en general, a cualquier punto en el espacio de fases. Es difícil calcular exponentes de Lyapunov negativos, ya que el transitorio debido a ellos desaparece rápidamente, mientras que el debido a los positivos es mas duradero.

Si el sistema es caótico, su comportamiento es dominado por el máximo exponente de Lyapunov, definido como:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{d(0) \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} \ln \frac{d(t)}{d(0)} \right], \quad (3.29)$$

donde, $d(t)$ es la distancia de dos trayectorias a tiempo t en el espacio de fases.

Algunos de los métodos usados para calcular el máximo exponente de Lyapunov son:

- *Lyapunovs Globales.*

Para calcular el máximo exponente de Lyapunov generamos en $t = 0$ una configuración inicial del sistema (punto principal) y generamos otra condición inicial (la “hija”) las cuales están alejadas una pequeña distancia d_0 en el espacio de fases. Si hacemos evolucionar cada punto en el espacio de fases, podemos definir una distancia promedio entre el la trayectoria principal y la de la hija como [11]:

$$d(t) = \left(\sum_{i=1}^N [a(\mathbf{r}_l(t) - \mathbf{r}_s(t))^2 + b(\mathbf{p}_l(t) - \mathbf{p}_s(t))^2] \right)^{1/2}, \quad (3.30)$$

donde, \mathbf{r} y \mathbf{p} se refieren a las posiciones y momentos de cada trayectoria en el tiempo t . Los índices l y s se refieren a las trayectorias del punto principal y de la “hija”, a y b son dos parámetros arbitrarios los cuales expresan el hecho que los exponentes de Lyapunovs son independientes de la métrica usada en el espacio de fases. Esta forma de calcular el el máximo exponente de Lyapunov se denomina máximo exponente de Lyapunov global.

- *Método de Benettin.*

En este método, después de un intervalo temporal ξ , la distancia $d(\xi) = d_1$ es reescalada a d_0 en la dirección de máximo crecimiento y la cantidad $\ln[d_1 = d_0]$ es guardada. Si repetimos este procedimiento a cada intervalo de tiempo ξ y guardamos los incrementos logarítmicos $\ln \left[\frac{d_i}{d_{i-1}} \right]$ el máximo exponente de Lyapunov se calcula como:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\xi} \sum_{i=1}^N \ln \left| \frac{d_i}{d_{i-1}} \right|, \quad (3.31)$$

donde, $\frac{d_i}{d_{i-1}}$ es una medida de de la divergencia exponencial entre dos trayectorias inicialmente muy cercanas a lo largo de la dirección de máximo crecimiento a tiempo $i\xi$.

■ *Lyapunovs locales en el tiempo.*

Si la suma de la Ec.(3.31) la restringimos a N_i términos a partir del instante de tiempo $t_i = i\xi$ podemos definir los máximos exponentes de Lyapunov locales en el tiempo como [10]:

$$\lambda'_i = \lambda'(t_i) = \frac{1}{N_i\xi} \sum_{j=i}^{i+N_i} \ln \left| \frac{d_j}{d_{j-1}} \right| = \frac{1}{N_i\xi} \ln \left| \frac{d_{i+N_i}}{d_i} \right| \quad (3.32)$$

Este exponente local puede ser considerado como una estimación de camino corto del máximo exponente Lyapunov.

En este capítulo presentaremos los resultados obtenidos de la caracterización de la actividad sísmica de la falla de Boconó, al aplicar la teoría de la criticalidad autoorganizada y el análisis de series de tiempo de dinámicas no lineales para cada uno de los observables: magnitud, profundidad y tiempo entre sismos.

4.1. Exponente de la ley de potencia de los observables.

Para el cálculo del exponente de la ley de potencia que gobierna a algunos observables construimos los histogramas de la probabilidad de frecuencia de cada uno de ellos y luego ajustamos los histogramas a la ley de potencia:

$$P(X) \sim X^\beta, \quad (4.33)$$

donde, $P(X)$ representa la probabilidad de observar el valor X y β es el exponente que caracteriza a la ley de potencia.

La escogencia del número de intervalos para construir el histograma de frecuencias es fundamental. En la figura 13 se muestran tres histogramas con diferentes números de

intervalos para la magnitud. Por una parte si se escoge un número muy pequeño de intervalos (fig. 13 a) se tendrá pérdida de información, por otra parte si el número este es muy grande (fig. 13 c) se tendrán muchos intervalos vacíos, en ambos casos la aproximación del exponente, β , sería inadecuada. Así, el número de intervalos para construir el histograma (fig. 13 b) será el mayor número que presente la menor cantidad de intervalos vacíos.

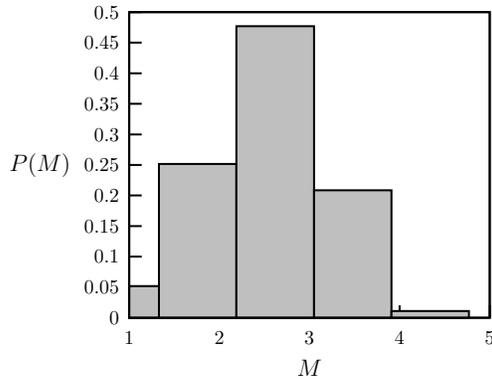


Figura 13 a).

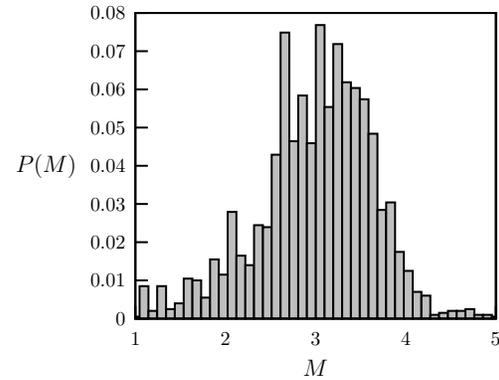


Figura 13 b).

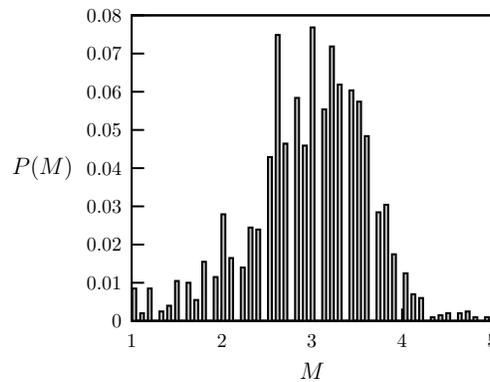


Figura 13 c).

Figura 13. Histograma de la magnitud, $P(M)$, para diferentes números de intervalos. En la figura a) se tienen 5 intervalos, la figura b) 44 intervalos y la figura c) 100 intervalos.

4.1.1. Magnitud.

Recordemos que los datos de la magnitud recopilados en el catálogo [42], son 2004 comprendidos en el período 1983-2006. El histograma de la magnitud, para el número de eventos reportados de la región de los Andes, son mostrados en la figura 13 b. La máxima probabilidad se tiene para los eventos de magnitud 3, también se puede observar que eventos con magnitud $M < 0.9$ no se registraron. El número de intervalos del histograma para la magnitud es de 44. Debido a la forma como fueron introducidos los datos en el catálogo no podemos realizar el análisis con todos ellos, pues no fue sino hasta mediados del año 1989 que se empezaron a registrar los eventos con magnitud $M < 2.5$, es por ello que el análisis lo realizamos con los 1091 datos de magnitud $M \geq 3$ que fueron registrados durante todo el período.

La figura 14 muestra el histograma de la magnitud, $P(M)$, contra la magnitud, M , con el eje Y en escala logarítmica y la recta $\ln(P(M)) = \beta_M M + c_M$ ajustada a los datos. El exponente obtenido en el ajuste es: $\beta_M = -2.7 \pm 0.2$. Hay que recordar que la magnitud corresponde a el logaritmo de la energía y por eso β_M es nuestro exponente a pesar de estar multiplicando a M y no elevándolo.

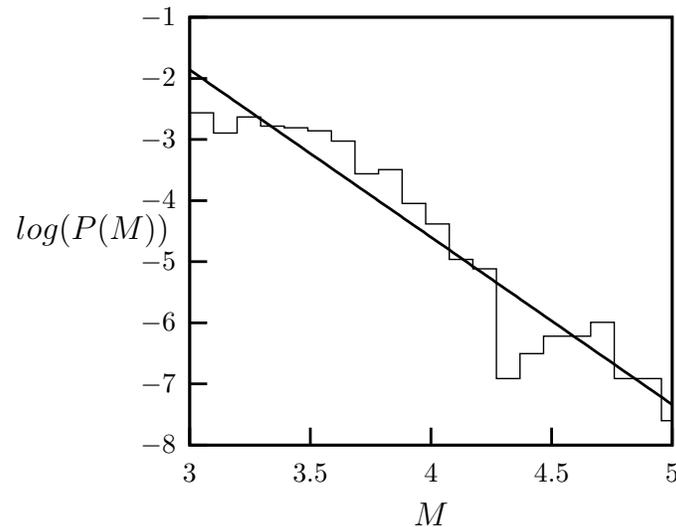


Figura 14. Histograma de la magnitud ajustado a una ley de potencia. La línea recta representa a la recta que mejor ajusta a los datos.

4.1.2. Profundidad.

Los datos de la profundidad entre el periodo 1983-2006 son 1027. En la figura 15 se muestra el histograma para la profundidad, con un número de 66 intervalos, en la cual se puede observar que los eventos registrados, tienen profundidades menores a -30 km, al igual que los eventos correspondientes al periodo 1471-1981 mostrados en la figura 16, la cual muestra la distribución de la sismicidad en la región andina, según el catálogo U.S. Geological Survey Earthquake Hazards Program (USGS) [81]. Note que en ambos casos la mayoría de los eventos correspondientes a la región de los Andes presentan una profundidad característica entre -33 km y 0 km, muy pocos con profundidades entre -200 km y -33 km. No se reportaron eventos con profundidades menores a -200 km.

A diferencia de los datos de la magnitud, los datos de la profundidad no están sesgados, es decir, que no se impusieron restricciones sobre la profundidad para ingresar datos al catálogo, esto es así siempre y cuando se considere la profundidad independiente de la magnitud.

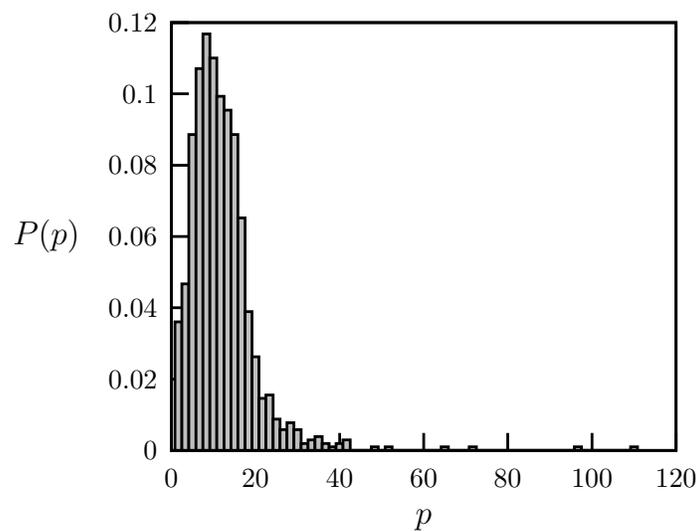


Figura 15. Histograma de la profundidad, $P(p)$, con 66 intervalos.

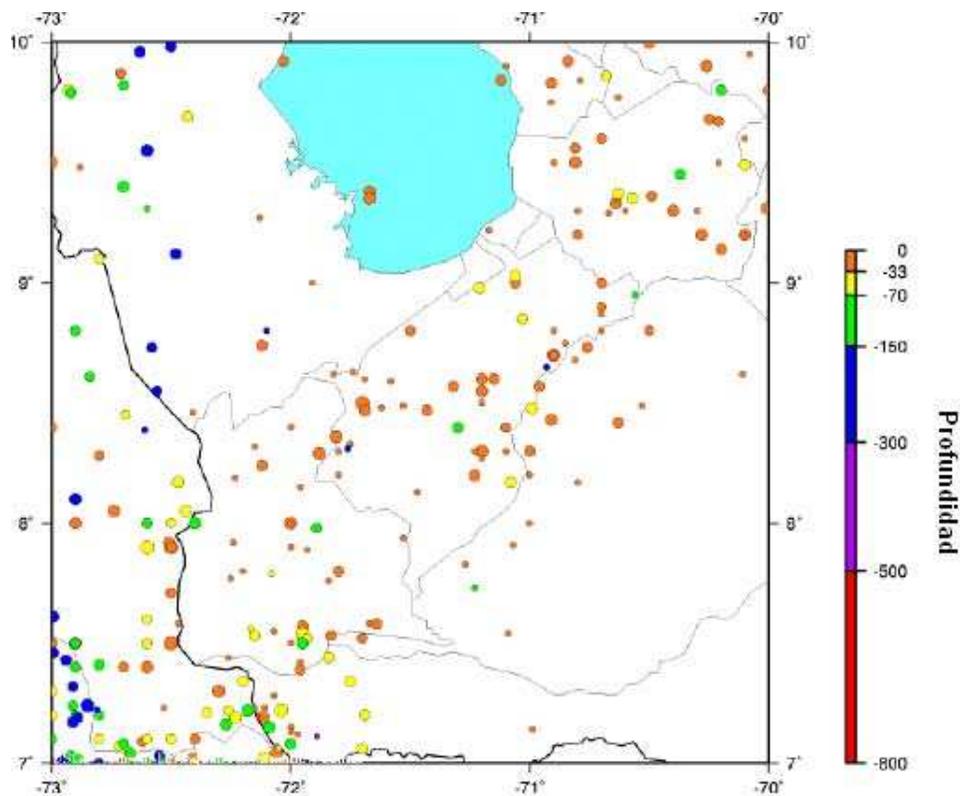


Figura 16. Mapa de sismicidad de Venezuela con $M \geq 2$ para el período 1471-1981.

Fuente: <http://earthquake.usgs.gov/index.php>

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede decir que el sistema de la falla de Boconó presenta una profundidad característica de -7 ± 2 km. Por esta razón no tiene sentido calcular el exponente de la ley de potencia, pues la profundidad no depende del comportamiento dinámico de la falla de Boconó sino de su geometría y ubicación en el espacio, como era de esperarse.

4.1.3. Tiempo entre sismos.

Por las mismas razones expuestas en la sección 4.2.1 para eliminar el sesgo introducido por la forma como se tomaron los datos, el tiempo entre sismos, medido en minutos, que vamos a considerar es el tiempo que correspondiente a los eventos con magnitud $M \geq 3$, así tenemos 1090 datos independientes. El histograma para el tiempo entre sismos se puede ver en la figura 17,

construido con un número de 75 intervalos; mostrando que la probabilidad máxima corresponde a los tiempos entre sismos, Δt , más pequeños. Por ejemplo solamente el 1% de las mediciones tienen $\Delta t > 1 \times 10^5$, es decir, una semana.

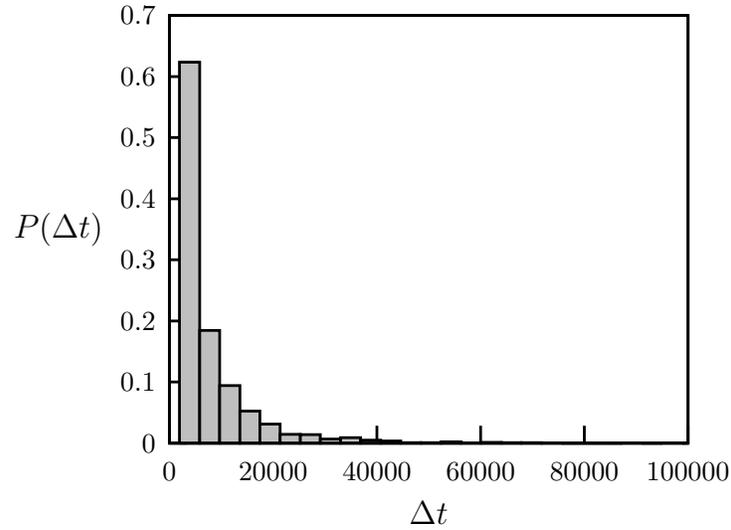


Figura 17. Histograma del tiempo entre sismos para eventos con $M \geq 3$ con ambos ejes en escala logarítmica.

La figura 18 muestra el histograma del tiempo entre sismos, $P(\Delta t)$, contra el tiempo entre sismos, Δt , con ambos ejes en escala logarítmica ajustada a la recta $\ln(P(\Delta t)) = \beta_{\Delta t} \ln(\Delta t) + c_{\Delta t}$. El exponente obtenido es: $\beta_{\Delta t} = -1.7 \pm 0.1$.

Así, por medio de la teoría de la criticalidad autoorganizada hemos logrado caracterizar la falla de Boconó en la Región de los Andes, ajustando los histogramas de los observables magnitud y tiempo entre sismos a la ley de potencia (Ec. 4.33) y se obtuvo un exponente para la magnitud de $\beta_M = -2.7 \pm 0.2$ y para el tiempo entre sismos de $\beta_{\Delta t} = -1.7 \pm 0.1$.

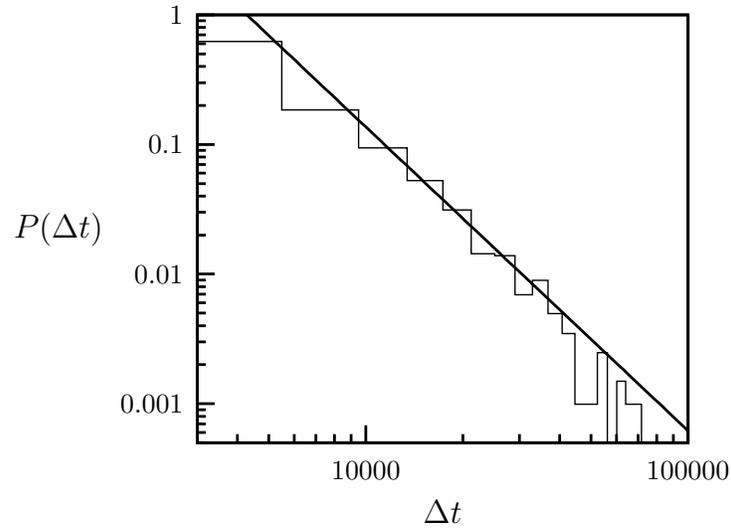


Figura 18. Histograma del tiempo entre sismos. La línea recta representa la ley de potencia que mejor se ajusta a los datos.

4.2. Elección de la mínima dimensión de embedding m .

Por lo discutido en la sección 4.2 para el estudio de la mínima dimensión de embedding, se tomó en cuenta los observables magnitud y tiempo entre sismos ya que ambos mostraron ser observables que siguen una dinámica crítica autoorganizada, a diferencia de la profundidad.

Para el cálculo de la dimensión de embedding se utilizó el método de falsos vecinos, sección 3.4.2, para distintos valores del umbral (\mathcal{R}_{tol}) y distintos retardos (τ). Considerando que nuestra serie de tiempo es finita y debido al número pequeño de datos con los que estamos trabajando, se estimó el umbral \mathcal{R}_{tol} más pequeño para el cual la curva de la dimensión *vs* la fracción de falsos vecinos, fnn , tiene un cero, es decir, la dimensión, d , será la mínima dimensión de embedding, m , cuando el porcentaje de falsos vecinos en el espacio de fases m -dimensional sea nulo o suficientemente próximo a cero.

En la figura 19 se muestra la fracción de falsos vecinos de la magnitud en función de la dimensión

de embedding para distintos valores del umbral (\mathcal{R}_{tol}) y distintos retardos (τ). Observe que dos curvas no cortan al eje X , las obtenidas con $\mathcal{R}_{tol} = 0.8$, $\tau = 5$ y $\mathcal{R}_{tol} = 1.0$, $\tau = 10$ en cambio hay dos que si lo cortan, $\mathcal{R}_{tol} = 1.2$, $\tau = 10$ y $\mathcal{R}_{tol} = 2.0$, $\tau = 10$. Como estamos considerando aquella que tenga el umbral \mathcal{R}_{tol} más pequeño tenemos que la dimensión de embedding para la magnitud es $m_M = 25$, pues es la curva con el menor valor umbral \mathcal{R}_{tol} para la cual el porcentaje de falsos vecinos, fnn en el espacio de fases d -dimensional es nulo.

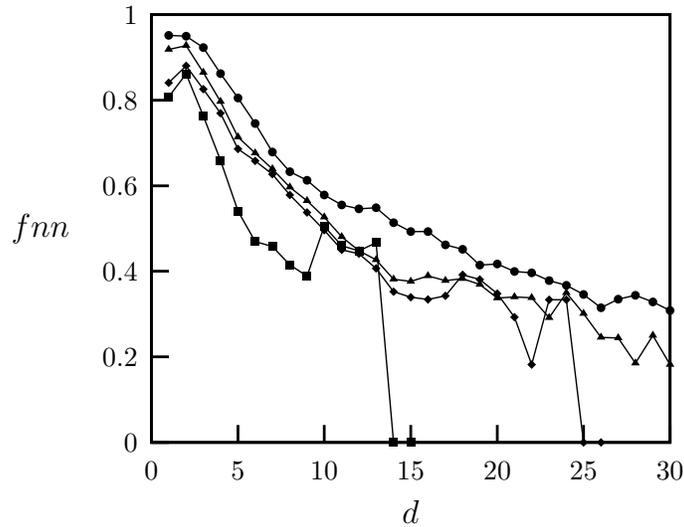


Figura 19. Fracción de falsos vecinos, fnn , vs dimensión de embedding, d , para la serie de tiempo M . • $\mathcal{R}_{tol}=0.8$ y $\tau=5$, ▲ $\mathcal{R}_{tol}=1.0$ y $\tau=10$, ◆ $\mathcal{R}_{tol}=1.2$ y $\tau=10$, ■ $\mathcal{R}_{tol}=2.0$ y $\tau=10$.

Por otra parte, la figura 20 muestra algunos de los resultados obtenidos al aplicar el método de falsos vecinos a el tiempo entre sismos (Δt) para distintos valores del umbral (\mathcal{R}_{tol}) y distintos retardos (τ). En este caso, la mínima dimensión de embedding es $m_{\Delta t} = 24$, ya que $\mathcal{R}_{tol} = 2.0$ es el menor valor umbral para el que se tiene que la curva de la dimensión d vs la fracción de falsos vecinos, fnn , corta al eje de las X , pues para valores de $\mathcal{R}_{tol} < 2.0$ y cualquier τ , se obtienen dimensiones mayores a $m_{\Delta t}24$.

Como ambas series provienen de una misma dinámica y las dimensiones obtenidas son muy similares para el resto del análisis de las series temporales de la falla de Boconó utilizaremos la mayor dimensión de embedding entre ellas, es decir, $m = m_M = 25$.

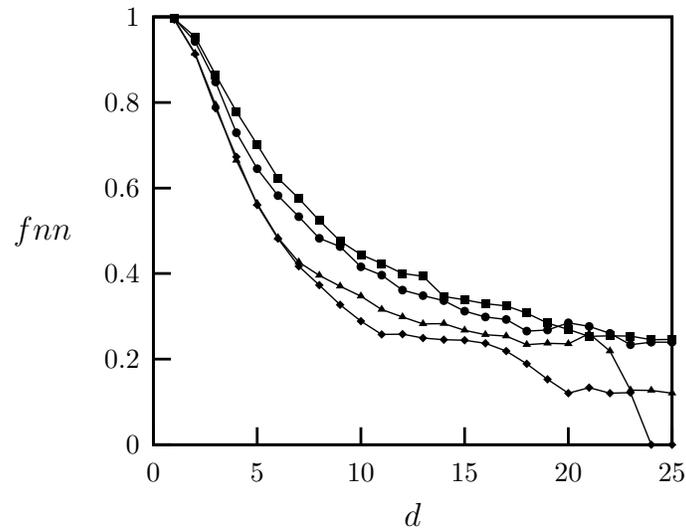


Figura 20. Fracción de falsos vecinos, fnn , vs dimensión de embedding, d , para la serie de tiempo Δt . ■ $\mathcal{R}_{tol}=1.0$ y $\tau=5$, ● $\mathcal{R}_{tol}=1.2$ y $\tau=15$, ▲ $\mathcal{R}_{tol}=1.8$ y $\tau=15$, ◆ $\mathcal{R}_{tol}=2.0$ y $\tau=25$.

4.3. Elección del tiempo de retraso τ .

Para calcular el valor adecuado de τ que usaremos luego en la reconstrucción del atractor mediante el teorema de Takens utilizamos la función media de información mutua y la función de autocorrelación discutidas en la sección 3.3. En la figura 21 se muestran las gráficas de la función de autocorrelación, \mathcal{C}_τ , y la función media de información mutua, \mathcal{I}_τ , de los datos correspondientes a la magnitud. Note que a pesar de que el primer mínimo de la función media de información mutua se encuentra en $\tau = 7$ se decidió tomar el segundo mínimo que se encuentra en $\tau = 10$ y no el primero, porque este último concuerda con el retardo del cálculo de m . También se puede observar de la figura 21, que la función de autocorrelación no corta al eje X por lo que el criterio de utilizar el primer cero de la función de autocorrelación falla.

Por las mismas razones el retardo, $\tau = 10$, se considera el adecuado al utilizar los datos del tiempo entre sismos, se puede observar en la figura 22 que la función media de información, \mathcal{I}_τ , tiene un mínimo cerca de $\tau = 10$, igualmente en este caso el criterio de la función de autocorrelación, \mathcal{C}_τ , no se cumple.

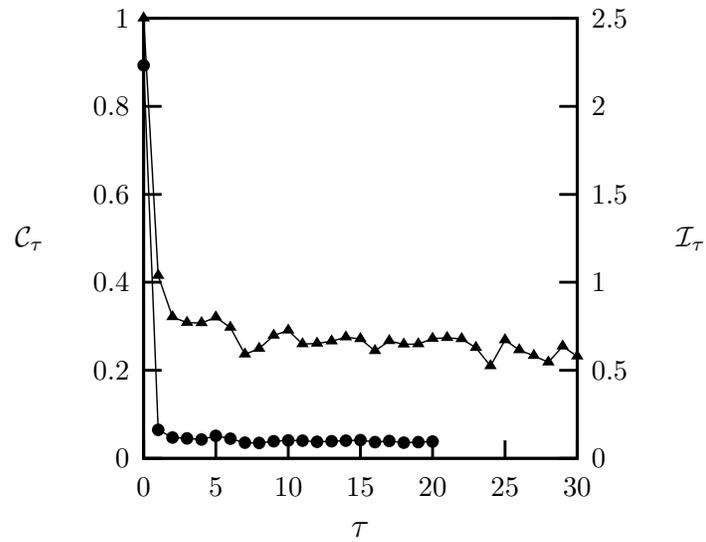


Figura 21. La curva con \blacktriangle es la función de autocorrelación, en el eje Y de la izquierda, y la de \bullet es la función media de información mutua, en el eje Y de la derecha, para la serie de tiempo M .

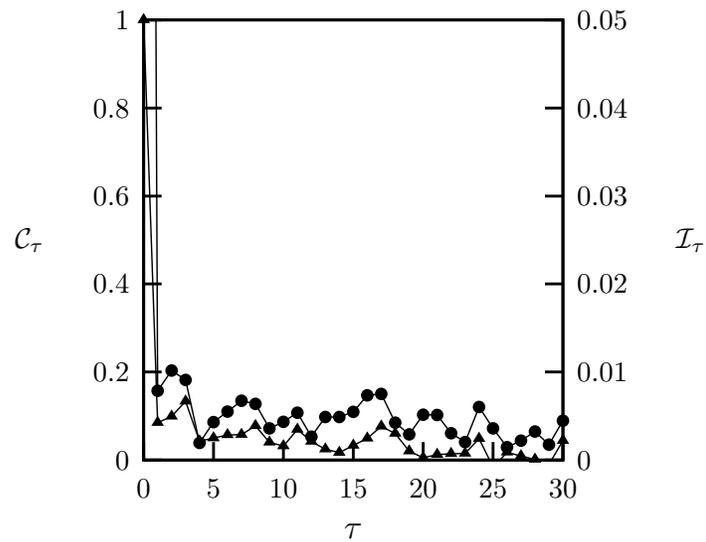


Figura 22. La curva con \blacktriangle es la función de autocorrelación, en el eje Y de la izquierda, y la de \bullet es la función media de información mutua, en el eje Y de la derecha, para la serie de tiempo Δt .

Así el tiempo de retraso adecuado para el sistema dinámico de la falla de Boconó con una dimensión de embedding de $m = 25$ es $\tau = 10$.

4.4. Componentes principales.

Ya que uno de nuestros objetivos es reconstruir la dinámica del sistema de la falla de Boconó usando el Teorema de Takens y como lo indica la dimensión de embedding m nuestro sistema es de alta dimensionalidad, utilizaremos el método de componentes principales para intentar encontrar un subespacio de dimensión menor que $m = 25$, tal que al proyectar sobre él los puntos conserven su estructura con la menor distorsión posible. En la figura 23 se muestran los autovalores según el número de componentes principales para la serie de tiempo M y en la figura 24 para la serie de tiempo Δt .

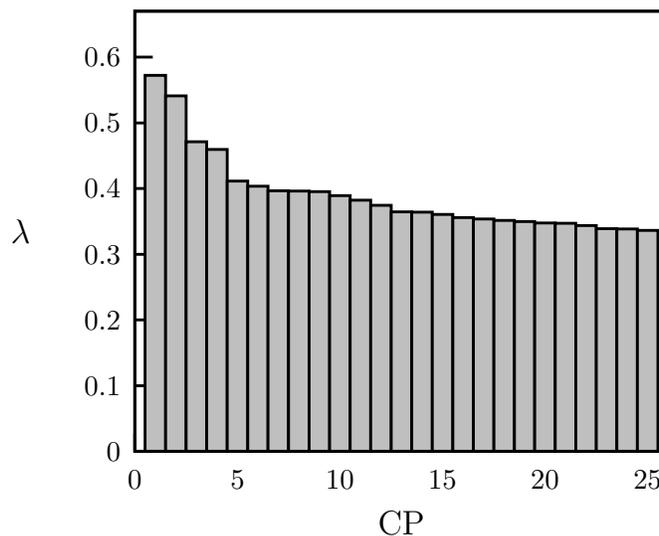


Figura 23. Representación de los autovalores, λ , vs el número de componentes principales, CP , para la serie de tiempo M .

Ya que la idea es excluir a las asociadas a autovalores pequeños en comparación con el autovalor mayor, es decir, cuyos valores sean componentes aproximadamente cero, concluimos por lo que muestran las figuras 23 y 24 que no es posible reducir el número de dimensiones, ya que todos los autovalores son similares tanto para la serie de tiempo M como para la serie de tiempo Δt . La

imposibilidad de reducir el número de dimensiones puede ser debido a la falta de datos sísmicos de la falla y lamentablemente así no podemos graficar en el espacio de fases la dinámica del sistema de la falla de Boconó en la Región de los Andes.

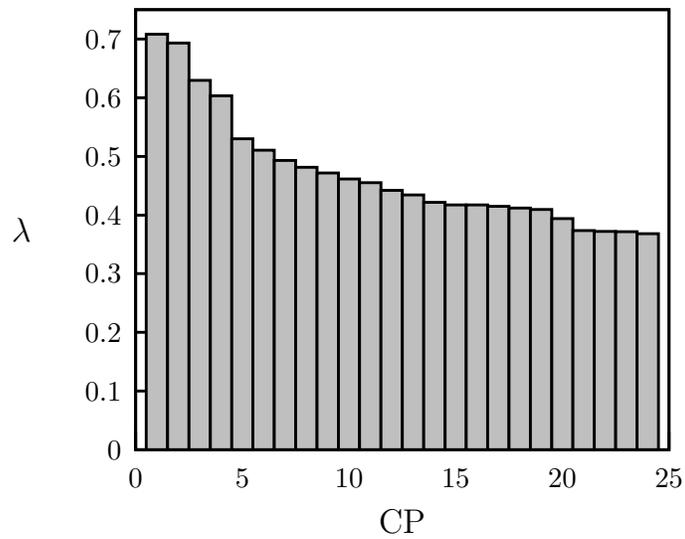


Figura 24. Representación de los autovalores, λ , vs el número de componentes principales, CP , para la serie de tiempo Δt .

Conclusión y Recomendaciones

En este trabajo se logró caracterizar la actividad sísmica de la falla de la Boconó en la Región de los Andes mediante la aplicación de la teoría de la criticalidad autoorganizada y el análisis de series de tiempo de dinámicas no lineales.

Se encontró el exponente β de la ley de potencia que siguen los terremotos considerando la magnitud y el tiempo entre sismos, y se determinó que la profundidad no depende del comportamiento dinámico de la falla sino más bien de su geología, como era de esperar. Para la magnitud se obtuvo $\beta_M = -2.7 \pm 0.2$ y para el tiempo entre sismos $\beta_{\Delta t} = -1.7 \pm 0.1$. El valor del exponente de la magnitud, β_M , es mayor de lo esperado, por ejemplo la falla de San Francisco tiene un exponente de $\beta = 0.4$, esto puede deberse a que el número de datos con los que trabajamos es pequeño y a que los eventos con magnitudes pequeñas, que son los que ocurren con más frecuencia, no están registrados.

Como al parecer la actividad sísmica de la falla de Boconó presenta un comportamiento **SOC**, recomendamos que se incluyan en el catálogo los sismos de baja magnitud, ya que son los más frecuentes, y como la actividad está gobernada por una ley de potencia, es decir, no tiene una escala característica, la información suministrada por los eventos de baja magnitud es tan valiosa como aquella aportada por los de magnitudes grandes.

Por otra parte se reconstruyó el espacio de fases, utilizando el Teorema de Takens, se determinó una dimensión de embedding de $m = 25$ y un tiempo de retraso de $\tau = 10$.

Mediante el método de componentes principales se encontró que todos los autovalores del sistema son similares lo que indica que cualquier proyección del espacio de fases implicaría una pérdida importante de información del sistema.

Los resultados obtenidos de la caracterización de la actividad sísmica de la región de los Andes de la falla de Boconó nos indican que se requieren más datos para poder hacer una mejor reconstrucción de la dinámica. La misma caracterización nos sugiere tres vías para contar con más datos, la primera consiste en registrar en el catálogo sismológico también eventos de magnitudes pequeñas, la segunda utilizar catálogos sismológicos de otras regiones que posean características similares a las obtenidas en este trabajo, y la tercera alternativa es la construcción de un modelo de la dinámica de sistema que se ajuste a los resultados aquí obtenidos.

Bibliografía

- [1] A. Bendito. *Curvas de isoaceleración para estados de desempeño estructural en el Occidente de Venezuela*. Boletín técnico imme. Vol 39 -N 2.
- [2] A. Bendito. *Variación espacio-temporal de los parámetros de recurrencia sísmica en el Occidente de Venezuela*. Boletín técnico imme. Vol 40 -N 1.
- [3] A. López-Sánchez. *Buscando otros mundos (Métodos dinámicos: uso de velocidades radiales)*. Instituto de Astrofísica de Canarias.
http://www.infoastro.com/200412/04planetas_extrasolares.html.
- [4] P. Bak; M. Christensen; L. Danon; T. Scanlon. *Unified Scaling Law for Earthquakes*. *Physics Res. Lett.* 88, 170581 (2002).
- [5] P. Bak; C. Tang; K. Wiesenfeld. *Self-organized criticality: an explanation of 1/f noise*. *Phys. Rev. Lett.* 59, 381-384.(1987)
- [6] P. Bak; C. Tang; K. Wiesenfeld. *Self-organized criticality*. *Physics Rev. A* 38:364-374 (1988).
- [7] P. Bak; C. Tang. *Earthquakes as a self-organized critical phenomenon*. *Geophys. Res.* 94: 15635-15637 (1989).
- [8] P. Bak. How Nature Works. *The Science of Self-Organized Criticality*. New York: Springer Verlag. (1996).
- [9] H. Balacco; G. Maradona. *Señal de caos en series de tiempo financieras: el spectrum de Lyapunov en el análisis de sensibilidad a condiciones iniciales*. Reunión Anual, 35, Córdoba, 13-15 noviembre 2000.

- [10] P. Balenzuela; A. Bonasera; C.O. Dorso Phys. Rev. E, vol. 62, p. 7848, 2000.
- [11] A. Bonasera; A. Rapisarda. Phys. Rev. Lett., vol. 75, p. 3434, 1995.
- [12] D. Broomhead; G. King. *Extracting qualitative dynamics from experimental data*. Physica D 20, 217 (1986).
- [13] L. Cao. *Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series*. Physica D 110, 43-50 (1997).
- [14] M. Casdagli. *Nonlinear prediction of chaotic time series*. Physica D, 35, 335-356.(1989)
- [15] R. Cisneros; L. Jiménez; M. Cosenza; A. Parravano. *Information transfer and nontrivial collective behavior in chaotic coupled map networks*. Physics Rev. (2002).
- [16] L. Cluff; W. Hansen. *Seismicity and Seismic-Geology of Northwestern Venezuela*. Vol I, Evaluation, Woodward Clyde & Associates, para Shell de Venezuela. (1969)
- [17] J. Eckmann; D. Ruelle. *Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents in dynamical systems*. Physica D; 1992: 56: 185-187.
- [18] E. Carmona; J. A. Esquivel; G. Estévez; M. Ibáñez. *Aproximación a la caracterización de las series sísmicas utilizando métodos no paramétricos*. Instituto andaluz de Geofísica, Universidad de Granada y el Dpto. de Informática. Universidad de A Coruña. <http://www.ugr.es/~iag/ins/cd/i/artcent.pdf>
- [19] F. Segura-Mojica. *Enjambre sísmico de Ometepe*. Nicaragua (2005).
- [20] L. Fonseca. *Aplicación de métodos estadísticos multivariantes para la caracterización de canchales de áridos*. Congreso Regional de Ciencia y Tecnología NOA 2002. Secretaría de Ciencia y Tecnología, Universidad Nacional de Catamarca. Producciones científicas. Sección: Ciencias de la Tierra y Ambiente.
- [21] Fundación Venezolana de Investigaciones Sismológicas (FUNVISIS). <http://www.funvisis.org.ve>.
- [22] A. García; F. Jiménez; J. Ayuso. *Influencia de la resolución temporal de los datos al utilizar la teoría de la criticalidad autoorganizada para describir la precipitación*. (2006).

- [23] R. Giegengack; R. I. Grauch. *Boconó fault, Venezuelan Andes (discussion)*. Science, 175: 558-560.(1972).
- [24] R. Giegengack; R. I. Grauch. *Geomorphologic expression of the Boconó fault, Venezuelan Andes or geomorphology to a fault: Abstracts with programs*. Geol. Soc. America, 4: 719-720. (1972)
- [25] R. Giegengack; R. I. Grauch. *Late Cenozoic climatic stratigraphy of the Venezuelan Andes*. Bol. Geol., Pub. Esp. 7, 2: 1187-1200. (1976)
- [26] R. Giegengack; R. I. Grauch; R. Shagam. *Geometry of Late-Cenozoic displacements along the Boconó fault, Venezuelan Andes*. Bol. Geol., Pub. Esp.7, 2: 1201-1226. (1976)
- [27] K. Grace. *Tectónica de placas*.
<http://www.monografias.com/trabajos4/tectonica/tectonica.shtml>
- [28] P. Grassberger; I. Procaccia. *Measuring the Strangeness of Strange Attractors*. Physica 9D: 189-208 (1983).
- [29] P. Grassberger; I. Procaccia. *Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal*. Phys. Rev. A 28, pág 2591-2593 (1983).
- [30] B. Gutenberg; S. Richter. Bull. Seism. Soc. Am.34: 184-188 (1944)
- [31] H. Arthur. *Geología Física*. Edición 4 (1952).
- [32] H. Hotelling. *Analysis of a complex of statistical variables into principal components*. Journal of Educational Psychology. Vol 24, 471-441, 498-520 (1933)
- [33] J. Munkres. *Topología 2^{da} edición*, pág 186-201.
- [34] J. Prieto; J. Durán. *Análisis estadístico del tiempo de ocurrencia entre eventos de baja magnitud en el Piedemonte Llanero (Colombia)*. Instituto Geofísico Universidad Javeriana, Bogotá, D. C., COLOMBIA.
- [35] J. Clinton. *Chaos and Time-Series Analysis*. Oxford University Press, (2003).
- [36] I. Jolliffe. *Principal component analysis*. Springer, New York (1986).
- [37] Y. Kagan; D. Jackson. Geophys. Res. 96, 419 (1991).

- [38] Ch. Kan; P. Bak; P. Obukhov. *Self-organized criticality in a crack-propagation model of earthquakes*. Physics. Res. A43, 625 (1991).
- [39] H. Kantz; T. Schreiber. *Nonlinear Time Series Analysis*. 2^{da} edición.
- [40] M. Kennel; R. Brown; H. Abarbanel. *Determining embedding dimension for phase-reconstruction using a geometrical construction*. Physical Review A 45, 3403-3411 (1992)
- [41] E. Kocenda. *An alternative to the BDS test: Integration across the correlation integral*. Econometric Review 20, 3, 337-351 (2001).
- [42] Laboratorio de Geofísica de la Universidad de Los Andes (LGULA).
<http://lgula.ciens.ula.ve>.
- [43] L. Gonzales. “*El efecto monón de arena*”.
http://desnivel.com/editorial/images/capitulos/ediciones_desnivel_quien_vive.pdf.
- [44] A. Lichtemberg; M. A. Lieberman. *Regular and chaotic dynamics*. Springer Verlag, 1992.
- [45] M. Marsan *et al.* J. Geophys. Res. 105, B12, 28081 (2000).
- [46] M. Merma Jara. Universidad Inca Garcilaso de la Vega, Maestría en Ingeniería de Sistemas. Lima Perú.
<http://www.monografias.com/trabajos30/seriesdetiempo/seriesdetiempo.shtml>
- [47] M. Matthews; W. Ellsworth; P. Reasenber. *A brownian model for recurrent earthquakes*. Bull. Seismol. Soc. Amer. 92, pp 2233-2250 (2002).
- [48] P. Molnar; L. Sykes. *Tectonics of the Caribbean and Middle America regions from focal mechanisms and seismicity*. Geol. Soc. America Bull., 80: 1639-1684 (1969)
- [49] W. Musson; T. Tsapanos; C. Nakas. *A power-law function for earthquake interarrival time and magnitude*. Bull. Seismol. Soc. Amer. 92, 5, 1783 - 1794 (2002).
- [50] K. Pearson. *On lines and planes of closest fit to systems of points in space*. Phil Mag Vol 2, 559-572 (1901).
- [51] A. Ojeda; B. Lazo; S. Savio; A. Calzadilla. Instituto de Geofísica y Astronomía, CITMA. *Modelación de los procesos de carga-descarga en la cola de la magnetosfera. Evidencias de*

- SOC*. Revista Ciencias de la Tierra y el Espacio. (Artículo 4).
http://www.iga.cu/revista/cte_06/art_06-04/id31.htm
- [52] M. Okubo; H. Aki. *Geophys. Res.* 92, 345 (1987).
- [53] Organización Panamericana de la Salud. *Vulnerabilidad de los sistemas de agua potable frente a desplazamientos*. 106p, (1997)
- [54] V. Oseledec. *A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems*. *Trans. Moscow Math. Soc.* 19. 197-221 (1968).
- [55] O. Morales; A. Balankin. *Metodología de predicción de precios del petróleo basada en dinámica fractal*. Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal México. (2005).
<http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/614/61490101.pdf>
- [56] S. Otsuka. *Earth Planet. Physics. Inter.* 6, 311 (1972).
- [57] R. Page. *Aftershocks and microaftershocks of the Great Alaska Earthquake of 1964*: *Bull. Seism. Soc. Am.*, No.58, 1131-1168 (1968)
- [58] P. Cantú Martínez; L. Gómez Guzmán. *El valor de la estadística para la salud pública*. Facultad de Salud Pública y Nutrición, Universidad Autónoma de Nuevo León. Centro de Ginecología y Obstetricia de Monterrey.
<http://www.respyn.uaul.mx/iv/1/ensayos/bioestadistica.html>
- [59] S. Pincus; I. Gladstone; R. Ehrenkranz. *A regularity statistic for medical data analysis*. *Journal of clinical monitoring*. Vol. 7, pág 335-3345 (1991)
- [60] R. Burridge; L. Knopoff. *Bull Seismolo. Soc. Am.* 57, 341 (1967).
- [61] R. Estévez; J. Laffaille. *Sismicidad y prevención sísmica en los Andes Venezolanos*.
<http://celeste.ciens.ula.ve/preve/bocono.htm>.
- [62] W. Reed. *Fundamentos de Geología*. Edición 4 (2000).
- [63] E. Rod; C. Jefferson; V. Osten; R. Mullen; G. Graves. *The determination of the Boconó fault*. *Bol. Inf., Asoc. Ven. Geol., Mín. y Petról.*, 1: 69-100. (1958)

- [64] I. Rosbaco; V. Bisaro; M. Romagnoli; R. Martignone. *Métodos estadísticos para la caracterización de ambientes climáticos y evaluación de respuestas de cultivos de soja*. Revista de investigaciones de la Facultad de Ciencias Agrarias. Número VI. Zavalla - Santa Fe - Argentina. (2004).
<http://www.fcagr.unr.edu.ar/Investigacion/revista/rev6/2.htm>
- [65] T. Sauer; J. Yorke; M. Casdagli. *Embedology*, J. Stat. Phys. 65, 579 (1991).
- [66] J. Scheinkman; B. LeBaron. *Nonlinear dynamics and stock returns*. Journal of Business (July), 311-337 (1986).
- [67] R. Shagam. *Evolución tectónica de los Andes venezolanos*. Bol. Geol., Pub. Esp. 5, 2: 1201-1261. (1972).
- [68] R. Shagam. *The northern termination of the Andes*: In: Nairns, A.E.M. & Stehli, F.G. (Eds.) *The ocean basins and Margins*, vol 3. *The Gulf of Mexico and the Caribbean*: Plenum Press, New York, p. 325-420. (1975)
- [69] C. Schubert; A. Singer; J. Soulas. *Excursión: La Falla de Boconó entre Santo Domingo y San Cristobal*. FUNVISIS, Simposio Neotectónica, Sismicidad y Riesgo Geológico en Venezuela y El Caribe, XXXIII Convención AsoVAC, 62p (1983)
<http://www.pdvsa.com/lexico/excursio/exc-on-83e.htm>.
- [70] C. Schubert; R. Sifontes. *Boconó fault, Venezuelan Andes: evidence of postglacial movement*. Science, 170: 66-69. (1970).
- [71] C. Schubert; R. Sifontes. *Boconó fault, Venezuelan andes (reply)*. Science, 175: 560-561. (1972)
- [72] C. Schubert. *Venezuela y la "nueva tectónica global"*. Acta Cient. Venezolana, 21: 13-16. (1970).
- [73] C. Schubert. *Morfología neotectónica de una falla rumbo-deslizante e informe preliminar sobre la falla de Boconó, Andes merideños*. Acta Cient. Venezolana, 31: 98-111. (1980)
- [74] C. Schubert. *Evolución post-glacial de un valle morrénico, Andes merideños*. Acta Cient. Venezolana, 32: 151-158. (1981)

- [75] C. Schubert. *Neotectonics of Boconó fault, western Venezuela*. Tectonophysics, 85: 205-220. (1982)
- [76] J. Sprott. *Chaos and Time-Series Analysis*. pág 211-239.
- [77] J. Stark. *Delay Embedding of Forced Systems: I Deterministic Forcing*. Journal of Nonlinear Science, 9, 225-332 (1999).
- [78] F. Takens. *Detecting Strange Attractors in Turbulence, en Dynamical Systems and Turbulence*. Lecture Notes in Mathematics 898, (D.Rand- L.Young, eds.), Springer-Verlag, Berlin (1981).
- [79] F. Takens. *Detecting nonlinearities in stationary time series*. International Journal of Bifurcation and Chaos. Vol. 3, No. 2, 241-256 (1993).
- [80] TISEAN. *Nonlinear time series analysis*.
<http://www.mpi-pks-dresden.mpg.de/~tisean/>
- [81] U.S. Geological Survey Earthquake Hazards Program.
<http://earthquake.usgs.gov/index.php>
- [82] H. Whitney. *Differentiable Manifolds*. Annals of Mathematics, vol 37 N 3, 645-680. (1936).
- [83] A. Wolf; J. B. Swift; H. L. Swinney; J.A. Vastano. *Determining Lyapunov exponents from a time series*. Physica D 1985; 16: 285- 317.