



UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
CENTRO DE FÍSICA FUNDAMENTAL
ÁREA DE CAOS Y SISTEMAS COMPLEJOS
MÉRIDA, VENEZUELA

**Flujos Caóticos Robustos
con Interacciones Globales**

Trabajo de grado presentado por:

Br. María Palazzi

Como requisito parcial para optar al título de:

Licenciada en Física

Tutor:

Dr. Mario Cosenza

Mérida, Julio 2011

Se investiga un sistema globalmente acoplado de flujos o ecuaciones diferenciales que presentan caos robusto. La dinámica local se describe mediante un sistema de ecuaciones que representa el comportamiento de un láser bajo ciertas condiciones, donde la existencia de caos robusto ha sido demostrada recientemente. Se estudia el comportamiento colectivo de este sistema en los casos de parámetros locales homogéneos y heterogéneos. La inclusión de heterogeneidad en los parámetros caóticos permite modelar muchos sistemas reales donde existe diversidad entre los elementos. En el caso homogéneo, se encuentra el surgimiento de sincronización caótica para ciertos valores del parámetro que representa la intensidad del acoplamiento. Para un acoplamiento global no difusivo en una variable, se encuentra el fenómeno de colapso de amplitud en el sistema, lo cual constituye uno de los resultados más novedosos de la presente tesis. Otro resultado de interés es la formación de clusters estacionarios en flujos caóticos heterogéneos. En particular, hemos encontrado que, a pesar de la heterogeneidad, existen rangos del parámetro de acoplamiento donde el sistema tiende a una mayor sincronización.

Palabras claves: Flujos Caóticos, Caos Robusto, Acoplamiento Global, Sincronización, Muerte de Amplitud.

Agradecimientos

Quiero expresar mi gratitud a todos los que me ayudaron en la realización de mi tesis y además a todas aquellas personas sin las cuales no me habría sido posible llegar hasta aquí.

En primer lugar a mi madre por hacer de mi lo que soy, por haber sido padre y madre. Te debo todo.

A mi abuela por brindarme sus palabras de aliento y su cariño, por siempre creer que lograría mis metas, aun cuando a veces ni yo misma lo creía.

Al Dr. Mario Cosenza por darme la oportunidad de desarrollar este trabajo. Gracias por todos sus consejos y su paciencia ante mis crisis académicas; para mi además de ser excelente profesional es una gran persona, digna de admiración.

A mis hermanas: María de los Angeles, Erika y Aixa por estar siempre presentes en las buenas y en las malas.

A mi novio Carlos, por todo tu apoyo, paciencia y cariño incondicional y a tu familia por abrirme las puertas de su hogar y aceptarme como una más de ustedes.

A Marbely, Vania y Daniela y sus familias por brindarme su amistad todos estos años.

A los profesores Kay Tucci y Gilberto Paredes por sus valiosas sugerencias y sus críticas constructivas.

Finalmente quiero dar gracias a mis compañeros caóticos.

A todos Gracias.

Para mí no hay emoción o satisfacción comparable a la que produce la actividad creadora, tanto en ciencia como en el arte, literatura u otras ocupaciones del intelecto humano. Mi mensaje, dirigido sobre todo a la juventud, es que si sienten inclinación por la ciencia, la sigan, pues no dejaré de proporcionarles satisfacciones inigualables.

Severo Ochoa

(1905-1993)

Resumen	iii
Agradecimientos	v
Índice	viii
Lista de Figuras	xi
1 Introducción.	1
1.1 Sistemas Dinámicos.	1
1.2 Caos Robusto.	2
1.3 Ejemplos de Sistemas Dinámicos con Caos Robusto.	3
1.4 Nuestro problema de investigación.	5
2 Flujos Caóticos Robustos	7
2.1 El Modelo de Láser de Shimizu-Morioka.	7
3 Flujos caóticos robustos homogéneos globalmente acoplados.	11
3.1 Sincronización.	11
3.2 Análisis de estabilidad del estado sincronizado en sistemas acoplados globalmente.	12
3.3 Colapso de Amplitud de osciladores.	15
3.4 Sincronización en flujos caóticos robustos homogéneos acoplados globalmente.	16
3.4.1 Acoplamiento global difusivo en todas las variables locales.	16
3.4.2 Acoplamiento global difusivo en una variable local.	19
3.4.3 Acoplamiento global no difusivo en una variable local.	21
4 Flujos caóticos robustos heterogéneos globalmente acoplados.	27
4.1 Heterogeneidad en los parámetros locales.	27
4.2 Sincronización en flujos caóticos robustos heterogéneos acoplados globalmente.	30
4.2.1 Acoplamiento global difusivo en todas las variables locales.	30
4.2.2 Acoplamiento global difusivo en una variable local.	33
4.2.3 Acoplamiento global no difusivo en una variable local.	33
5 Conclusiones	37

Bibliografía **39**

A Códigos elaborados **43**

A.1 Caso Homogéneo 43

A.2 Caso Heterogéneo 47

LISTA DE FIGURAS

1.1	Diagrama de bifurcación del sistema de Sprott	3
1.2	Diagrama de bifurcación del mapa logaritmico	4
1.3	Dos caras del atractor de Lorenz.	5
2.1	Digrama de Fase de los Exponentes de Lyapunov	8
2.2	Digrama de Fase de los Exponentes de Lyapunov	8
2.3	Digrama de Fase de los Exponentes de Lyapunov	9
2.4	Diagramas de bifurcación del sistema de shimizu-Morioka	9
2.5	Dos caras del atractor tipo Lorenz	10
2.6	Dos caras del atractor	10
3.1	Representación del acoplamiento global entre N elementos de un sistema.	12
3.2	La sincronización en función del parámetro de acoplamiento ϵ , acoplamiento de tipo difusivo a través de las tres variables	17
3.3	Evolución temporal de la variable X_1 y \bar{X} para el sistema desacoplado	18
3.4	Evolución temporal de la variable X_1 y \bar{X} para el sistema con acoplamiento de tipo difusivo a través de las tres variables y $\epsilon = 0.07$	18
3.5	Proyecciones en el plano X-Z para un elemento del sistema: (a) Cuando $\epsilon = 0$ (elementos desacoplados), (b) Cuando $\epsilon = 0.07$, correspondiente al estado de sincronización completa, (c) Proyección en el plano X-Z colectivo con $\epsilon = 0.07$, correspondiente a un estado de sincronización completa.	19
3.6	La sincronización en función del parámetro de acoplamiento ϵ , acoplamiento de tipo difusivo a través de la variable Z	20
3.7	Evolución temporal de la variable X_1 y \bar{X} para el sistema con acoplamiento difusivo a través de la variable Z y $\epsilon = 0.42$	20
3.8	Proyecciones en el plano X-Z para el elemento $i = 1$ del sistema: (a) Cuando $\epsilon = 0$ (elementos desacoplados), (b) Cuando $\epsilon = 0.42$, correspondiente al estado de sincronización completa, (c) Proyección en el plano X-Z colectivo con $\epsilon = 0.42$, correspondiente a un estado de sincronización completa.	21
3.9	La sincronización en función del parámetro de acoplamiento ϵ , acoplamiento a través de la variable Z	22

3.10	Evolución temporal de la variable X_1 y \bar{X} para el sistema con acoplamiento a través de la variable Z y $\epsilon = 0.19$	22
3.11	Proyecciones en el plano X-Z para un elemento del sistema: (a) Cuando $\epsilon = 0$ (elementos desacoplados), (b) Cuando $\epsilon = 0.19$, correspondiente al estado de sincronización completa), (c) Proyección en el plano X-Z colectivo con $\epsilon = 0.19$, correspondiente a un estado de sincronización completa.	23
3.12	Evolución temporal de la variable X_1 para el sistema acoplado a través de la variable Z	24
3.13	Evolución temporal de la variable Y_1 y Z_1 para el sistema con acoplamiento a través de la variable Z y $\epsilon = 0.375$	24
3.14	Proyecciones en el plano X-Y para un elemento del sistema: (a) Cuando $\epsilon = 0$ (elementos desacoplados), (b) Cuando $\epsilon = 0.21$, (c) Cuando $\epsilon = 0.25$, (d) Cuando $\epsilon = 0.375$	25
4.1	Digrama de Fase de los Exponentes de Lyapunov	28
4.2	Distribución de los parámetros locales	29
4.3	Diagrama de bifurcación del sistema de Shimizu-Morioka en función de a_i para los b_i correspondientes a la recta	29
4.4	La sincronización en función del parámetro de acoplamiento ϵ , acoplamiento de tipo difusivo a través de las tres variables	30
4.5	Evolución temporal de la variable X_1, X_{10}, \bar{X} para el sistema con acoplamiento de tipo difusivo a través de las tres variables y $\epsilon = 0$	31
4.6	Evolución temporal de la variable X_1, X_{10}, \bar{X} para el sistema con acoplamiento de tipo difusivo a través de las tres variables y $\epsilon = 0$	31
4.7	Proyecciones en el plano X-Z: (a) Para el elemento $i = 1$ del sistema cuando $\epsilon = 0$, (b) Para el elemento $i = 10$ del sistema cuando $\epsilon = 0$, (c) Para el elemento $i = 1$ del sistema, (c) Para el elemento $i = 10$ del sistema, (e) Proyección en el plano X-Z colectivo. Los últimos tres gráficos se realizaron para un valor de $\epsilon = 0.49$	32
4.8	La sincronización en función del parámetro de acoplamiento ϵ , acoplamiento de tipo difusivo a través de la variable Z	33
4.9	La sincronización en función del parámetro de acoplamiento ϵ , acoplamiento de tipo no difusivo a través de la variable Z	34
4.10	Evolución temporal de la variable X_1, X_{147}, \bar{X} para el sistema con acoplamiento de tipo no difusivo a través de una variable local $\epsilon = 0.21$	34
4.11	Histogramas de los estados de los elementos del sistema en un instante de tiempo asintótico con $\epsilon = 0.21$	35
4.12	Histogramas de los estados de los elementos del sistema en el instante de tiempo asintótico $t = 1000$, después de despreciar 100 transientes, con $\epsilon = 0.21$	36

INTRODUCCIÓN.

*“In mathematics the art of asking questions
is more valuable than solving problems“.*

Georg Cantor

Es un hecho conocido que el ser humano ha buscado entender cómo funciona todo lo que nos rodea e interactúa con nosotros, es decir, como evolucionan los sistemas en el universo. Para esto, se vale de modelos matemáticos que ayudan a describir el comportamiento de dichos sistemas. Estos modelos equivalen a un conjunto de reglas determinadas, tales como ecuaciones matemáticas, las cuales, partiendo de ciertas condiciones iniciales, describen la evolución de un sistema en el tiempo. Un conjunto de reglas que especifican cómo será el cambio del estado de un sistema en el tiempo, es lo que se conoce como un **sistema dinámico**.

1.1 Sistemas Dinámicos.

Existen diversos tipos de sistemas dinámicos, según las reglas que lo definen. Por ejemplo, si un sistema está descrito mediante funciones iterativas, decimos que se trata de un **sistema dinámico discreto en el tiempo**, que puede representarse de la siguiente forma:

$$\mathbf{X}_{t+1} = (\mathbf{X}_t, \beta), \quad (1.1)$$

donde $\mathbf{X}_t \in \mathbb{R}^d$ representa el conjunto de d variables de estado del sistema en el tiempo t y β es un parámetro del sistema. El espacio matemático de las variables de estado se llama **espacio de fase del sistema**. Si se trata de ecuaciones diferenciales, tendremos un **sistema dinámico continuo en el tiempo**, y generalmente se representan como:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t, \beta). \quad (1.2)$$

En el caso de sistemas continuos, la solución de la ecuación diferencial (o sistemas de ecuaciones diferenciales) corresponde a una trayectoria en el espacio de fase. La derivada (ec 1.2) es el vector tangente a la

trayectoria, y representa la velocidad en cada uno de los puntos de la misma [1]. Es por esta razón que usualmente a las ecuaciones diferenciales de la forma (ec 1.2) se les llama también *flujos*. Además, si el tiempo no aparece de manera explícita en las ecuaciones, se dice que el sistema dinámico es autónomo. Adicionalmente, los sistemas dinámicos pueden ser lineales o no lineales.

- Un sistema es **lineal** si en sus ecuaciones sólo aparecen términos de esta forma $\beta \mathbf{X}_i$ [1]. Además, la solución del sistema obedece el principio de superposición.
- Un sistema es **no lineal** en todos los otros casos.

Durante siglos, los sistemas no lineales recibieron poca atención debido a las dificultades matemáticas que presenta. En cambio, el comportamiento de los sistemas lineales fue comprendido y analizado con claridad. Sin embargo, los sistemas dinámicos más abundantes en la naturaleza son realmente no lineales; es decir, son en su mayoría representables por sistemas de ecuaciones no lineales. Por ejemplo, el clima, la propagación de epidemias, el tráfico vehicular, los sistemas sociales y económicos, sistemas biológicos e incluso las neuronas, se describen mediante ecuaciones no lineales.

Actualmente entendemos que la mayoría de los fenómenos naturales y artificiales (hechos por los humanos) son complejos debido a la ubicuidad de la no linealidad. El surgimiento del estudio del **caos** en los últimos años ha permitido avanzar en nuestro conocimiento de estos sistemas.

1.2 Caos Robusto.

Un sistema dinámico caótico es un sistema no lineal cuya evolución presenta sensibilidad extrema a cambios en sus condiciones iniciales; es decir, un cambio infinitesimal en sus condiciones iniciales hará que el sistema evolucione de manera distinta. En el caso de flujos, el estado asintótico del sistema en el espacio de fase describe una geometría fractal, y se denomina **atractor extraño** [1].

El fenómeno de caos ocurre para ciertos valores de uno o varios parámetros del sistema. En la mayoría de los casos, es posible encontrar soluciones periódicas en valores de parámetros adyacentes a los parámetros donde ocurre caos. Esto significa que pequeños cambios en los valores de los parámetros pueden conducir a la supresión del caos; esto se conoce como *caos frágil*.

El ejemplo más simple conocido de un flujo caótico que exhibe *caos frágil*, es el sistema elemental de Sprott ¹ representado por una ecuación diferencial de tercer orden que se reducen a un sistema de tres ecuaciones diferenciales de primer orden, de la forma [2]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -Az - y + |x| - 1\end{aligned}\tag{1.3}$$

donde A es un parámetro. La figura (1.1) muestra el diagrama de bifurcación de los valores máximos de la variable x en función del parámetro A . Como puede verse en la figura (1.1), existen ventanas de comportamiento periódico diseminadas dentro de las regiones donde el sistema es caótico.

¹<http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/abschaos.htm>

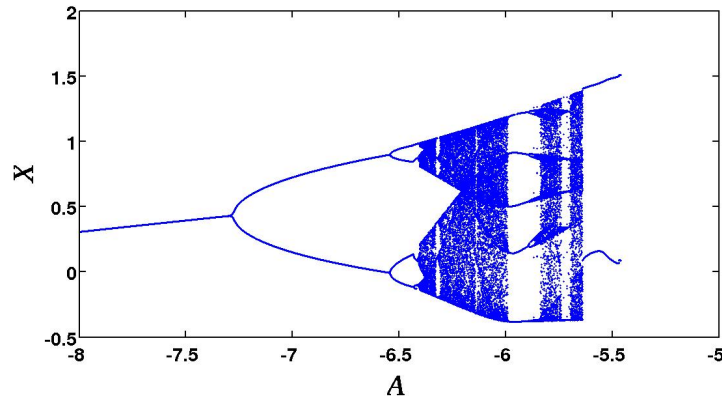


Figura 1.1: Diagrama de bifurcación de máximos de x en función del parámetro A en el sistema de Sprott.

En sistemas discretos como mapas se ha encontrado el fenómeno denominado *caos robusto*, el cual consiste en la existencia de intervalos finitos de parámetros donde solamente ocurren comportamientos caóticos. La noción de *caos robusto* fue discutida por primera vez por Majumdar y Mitra (1994) [3], y es usada para describir caos con la ausencia de soluciones periódicas en un intervalo de parámetros. Años más tarde, el concepto fue introducido de nuevo por Banerjee *et al.* [4], quienes sugerían que para aplicaciones prácticas las órbitas caóticas debían ser “robustas” e ilustraron el fenómeno con un modelo de un circuito eléctrico. Banerjee *et al.* estaban en lo cierto; es necesario tener regiones caóticas confiables en aplicaciones prácticas. El interés por el *caos robusto* se ha visto incrementado debido a las diversas aplicaciones en el mundo real como en los sistemas económicos, dinámica neuronal o en comunicaciones con señales encriptadas usando láseres semiconductores con salida caótica, por mencionar unos ejemplos.

Si bien el término *robusto* es el más usado, algunos autores como J. A. Gallas, sugieren que este término no es del todo adecuado. Gallas argumenta que en Física la noción de *robusto* se asocia a la teoría de perturbaciones; es decir *robusto* quiere decir que es resistente a perturbaciones. Gallas propone los términos *caos denso* o *caos homogéneo* los cuales parecen ser más apropiados para describir la ausencia de ventanas periódicas en intervalos extensos de parámetros de un sistema [5].

1.3 Ejemplos de Sistemas Dinámicos con Caos Robusto.

A continuación presentamos algunos sistemas dinámicos que presentan caos robusto estudiados por Zeraoulia y Sprott [6]

- **Mapa Uniforme a trozos en 1-D:** El mapa $x_{n+1} = |\tanh s(x_n - c)|$ representa un modelo de redes neuronales y fue estudiado por Potapov y Ali [7], los cuales mostraron que para ciertos valores de s y c no pueden existir soluciones periódicas estables.
- **Mapas No Uniformes:** Otro modelo de redes neuronales con caos robusto es el conocido Perceptrón

[8], que no es mas que un modelo de red neuronal retroalimentada de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \cdot x + b > 0 \\ 0, & \text{para el caso contrario} \end{cases} \quad (1.4)$$

donde ω es un vector de valores reales, $\omega \cdot x$ es el producto punto (calcula la suma ponderada) y b es una constante independiente de los valores de entrada. Las propiedades de la serie de tiempo del perceptrón son generadas a partir de funciones de transferencia monótona y no monótona, se sabe que para un perceptrón con función monótona sólo se producirá caos frágil, mientras que para un perceptrón con una función no monótona se podrá generar caos robusto para ciertos valores de sus parámetros.

- **Mapa Logarítmico:** El mapa $f(x_t) = b + \ln |x_t|$ presenta caos robusto para $b \in [-1, 1]$, como se observa en la figura 1.2 en la cual se muestra el diagrama de bifurcación de esta mapa y que fue estudiado por González en [9].

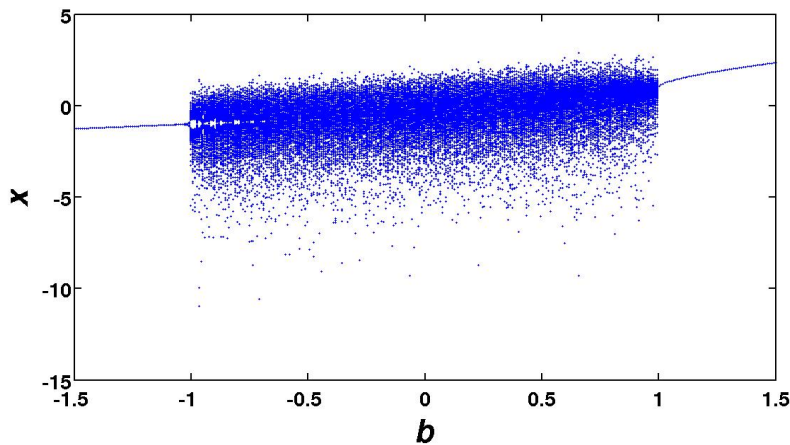


Figura 1.2: Digrama de Bifurcación del mapa logarítmico.

- **El Sistema Original de Lorenz:**

Uno de los sistemas dinámicos caóticos más simples es el modelo matemático de Lorenz para representar el comportamiento de la atmósfera.

Edward Lorenz (1917-2008), meteorólogo estadounidense fue quién descubrió el fenómeno de caos en 1963, con su modelo matemático muy simplificado, con el cual intentaba capturar el comportamiento de los rollos de convección que se producen en la atmósfera. Las ecuaciones que representan el modelo de Lorenz son de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax + ay \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \quad (1.5)$$

Para ciertos valores de a , b y r este sistema es caótico. Donde los parámetros a y r representan el número de Prandtl² y el número de Rayleigh³, respectivamente.

Se ha demostrado en [10],[11] que estas ecuaciones poseen un atractor *robusto*, es decir, que se mantiene bajo pequeñas perturbaciones en los parámetros a , r y b . Esto es el sentido dado por Gallas al término *caos robusto*.

En la figura 1.3 se muestra una imagen con la evolución en el espacio de fase del sistema de ecuaciones de Lorenz.

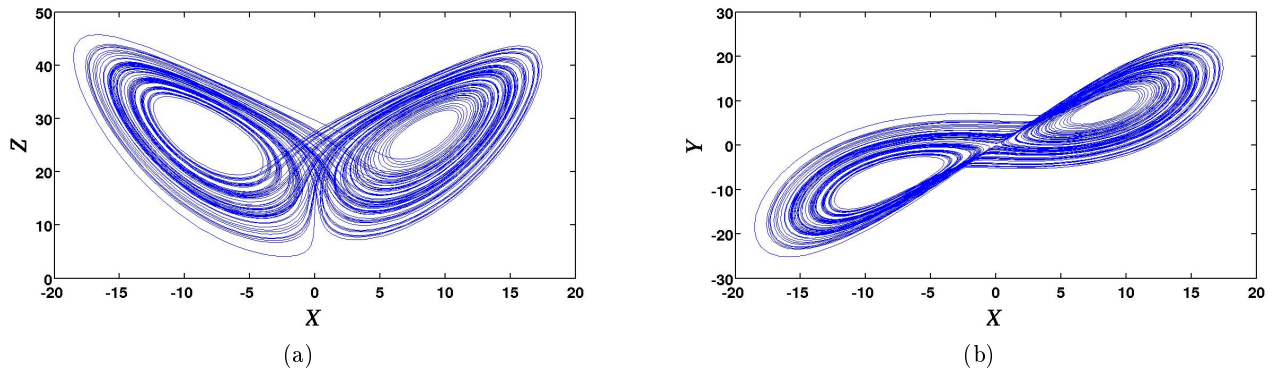


Figura 1.3: (a):Proyección en el plano X-Z del atractor caótico para el sistema Lorenz.(b): Proyección en el plano X-Y del atractor caótico para el sistema Lorenz. Para $a = 10$, $r = 28$ y $b = \frac{8}{3}$.

Como se puede observar existe una gran cantidad de sistemas conocidos con caos robusto, siendo la mayoría de ellos mapas discretos. Sin embargo, recientemente Gallas encontró una extensa región de parámetros donde ocurre caos robusto en un sistema de ecuaciones diferenciales que describen un modelo de láser [5]. Hasta el presente, este constituye el segundo ejemplo de un sistema dinámico continuo con caos robusto, el cual será el foco de estudio de esta tesis.

1.4 Nuestro problema de investigación.

Muchos sistemas en la naturaleza se pueden describir como un conjunto de elementos dinámicos no lineales sujetos a interacciones mutuas. En particular, el concepto de sistemas con interacciones globales se ha utilizado ampliamente para modelar una gran cantidad de sistemas físicos, químicos, biológicos, sociales y económicos. En la mayoría de estos estudios, se asume por simplicidad que los elementos dinámicos son idénticos. Sin embargo, en muchas situaciones reales es común encontrar elementos heterogéneos interactuando en un sistema. Esto es particularmente cierto en sistemas sociales y biológicos donde existe diversidad generalizada.

²es un número adimensional proporcional al cociente entre la difusividad de momento (viscosidad) y la difusividad térmica.

³es un número adimensional asociado con la transferencia de calor en el interior de un fluido. Tomados de //es.wikipedia.org

Por otro lado, los pocos estudios realizados sobre sistemas de elementos heterogéneos se refieren a sistemas dinámicos discretos, como redes de mapas acoplados [12], [13], incluyendo mapas con caos robusto [14], [9].

En esta Tesis investigamos un sistema globalmente acoplado de flujos que presentan caos robusto. Para describir la dinámica de los elementos utilizamos el sistema de ecuaciones de Shimizu-Morioka, en el cual fue demostrada la existencia de caos robusto por J. A. Gallas. Consideramos estos elementos con parámetros locales homogéneos y heterogéneos. En particular, investigamos el surgimiento de sincronización caótica y el fenómeno de colapso de amplitud en este sistema. Para tal fin, hemos desarrollado un código numérico propio en Fortran 90 para integrar los sistemas de ecuaciones diferenciales abordados en esta tesis.

En el Capítulo 2 presentamos el modelo de láser de Shimizu-Morioka, en el que fue descubierto caos robusto por Gallas.

En el Capítulo 3 hacemos una breve revisión sobre sistemas acoplados globalmente y algunos comportamientos colectivos que surgen en sistemas con estas interacciones. Se presenta nuestra investigación acerca de los comportamientos colectivos de sistemas de Shimizu-Morioka acoplados, para el caso homogéneo y para diversas intensidades del acoplamiento. Se realiza el estudio de la sincronización del sistema, en función del acoplamiento.

En el Capítulo 4 investigamos los comportamientos colectivos que surgen cuando se introduce heterogeneidad en los parámetros de los elementos para diversas formas de acoplamiento globales.

El Capítulo 5 contiene las conclusiones de esta tesis.

FLUJOS CAÓTICOS ROBUSTOS

A dictionary definition of chaos is “a disordered state of collection; a confuse mixture”. This is an accurate description of dynamical system theory today - or of any other lively field of research.

Morris Hirsch

2.1 El Modelo de Láser de Shimizu-Morioka.

Un sistema dinámico continuo con atractor de tipo Lorenz es el modelo de láser de Shimizu-Morioka, estudiado por Shilnikov [15], [16] y [17] y más recientemente estudiado por Gallas [5], quien encontró que este sistema es el primero de este tipo en presentar una fase caótica robusta tan extensa. Gallas construyó el diagrama de fase en el espacio de parámetros del sistema calculando los exponentes de Lyapunov. Los valores de parámetros para los cuales el mayor exponente de Lyapunov del sistema es positivo corresponde a la existencia de caos. Haciendo un barrido fino en el espacio de parámetros, se observan intervalos extensos de caos robusto figuras 2.1 - 2.3.

El sistema de Shimizu-Morioka está definido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x(1-z) - by \\ \dot{z} &= -a(z-x^2).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Este sistema fue introducido como una aproximación al modelo de Lorenz para números de Rayleigh altos, y se ha mostrado que constituye un modelo reducido de las ecuaciones de Maxwell-Bloch para el estado de intensidad cero de láseres que contienen un absorbente saturable [16].

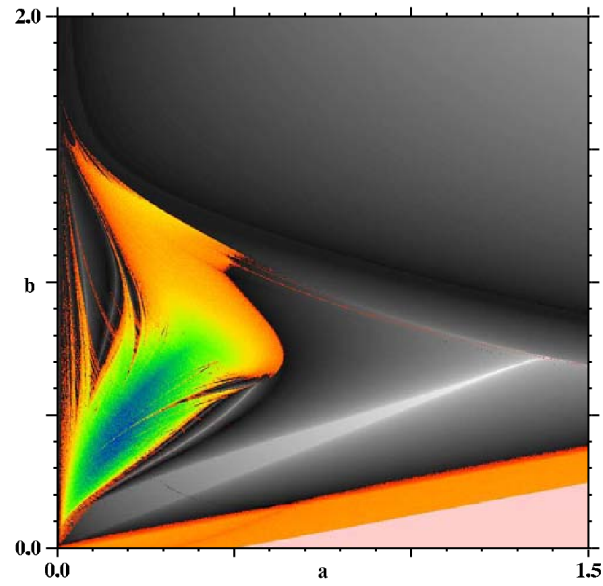


Figura 2.1: Diagrama de fase del máximo exponente de Lyapunov para 800x800 puntos. La región coloreada indica el dominio de caos, es decir exponente de Lyapunov positivo, las regiones sin color indican soluciones periódicas (exponente negativo). La región rosada representa las soluciones divergentes del sistema. [5]

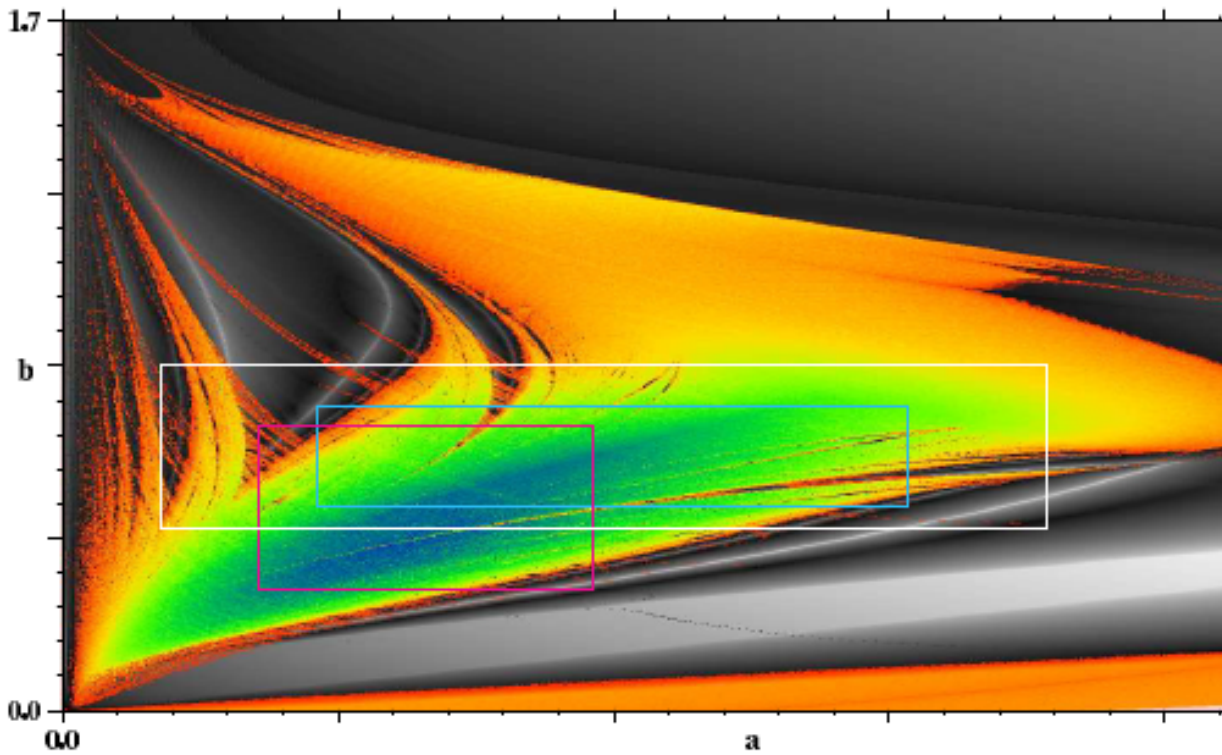


Figura 2.2: Magnificación del diagrama de fase del máximo exponente de Lyapunov de la figura 2.1 para 800x800 puntos. Se muestra la extensa fase caótica. [5]

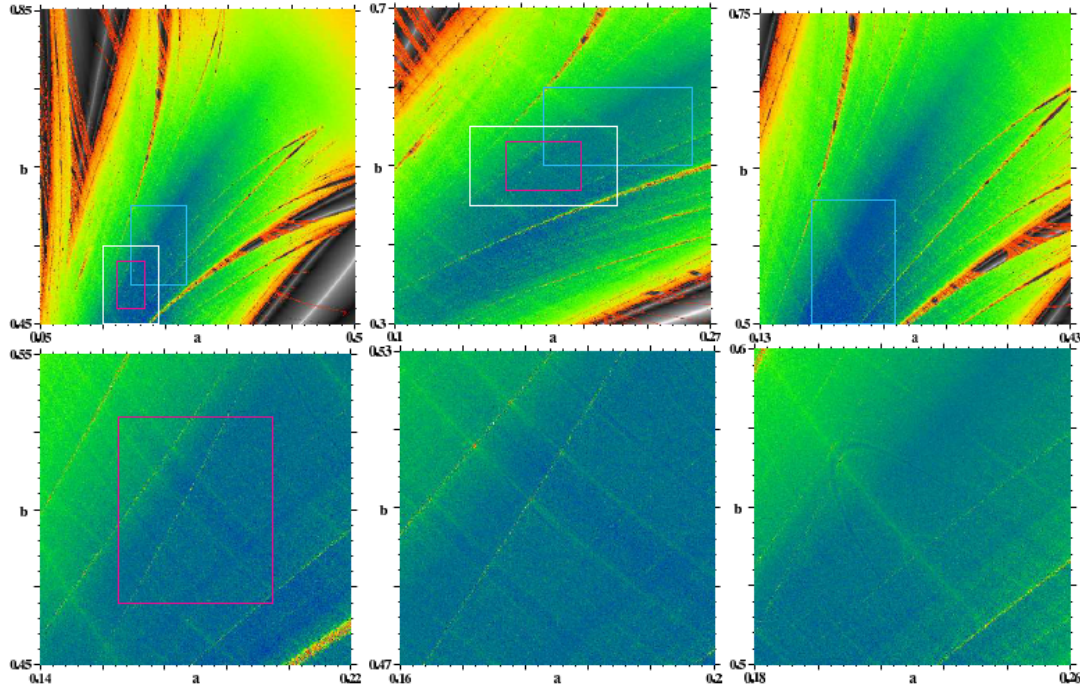


Figura 2.3: Fila Superior: Magnificación de la imagen 2.2, el cuadro blanco resalta la región $a \in [0.14, 0.22] \times b \in [0.45, 0.55]$, el cuadro magenta destaca la región $a \in [0.16, 0.20] \times b \in [0.47, 0.53]$ y el cuadro cian destaca la región $a \in [0.18, 0.26] \times b \in [0.50, 0.60]$. Los paneles de la fila inferior muestran aumentos de estas tres cajas. Cada uno de los seis paneles muestra el diagrama de fase del máximo exponente de Lyapunov para 400×400 puntos. [5]

En la figura 2.4a se puede observar el diagrama de bifurcación de máximos de x en función del parámetro a para un $b = 0.75$; la figura 2.4b muestra el diagrama de bifurcación de máximos de x en función del parámetro b para un $a = 0.3$. En ambos casos las ventanas periódicas corresponden a los pequeños puntos sin color que están dentro de la región coloreada de la figura 2.1.

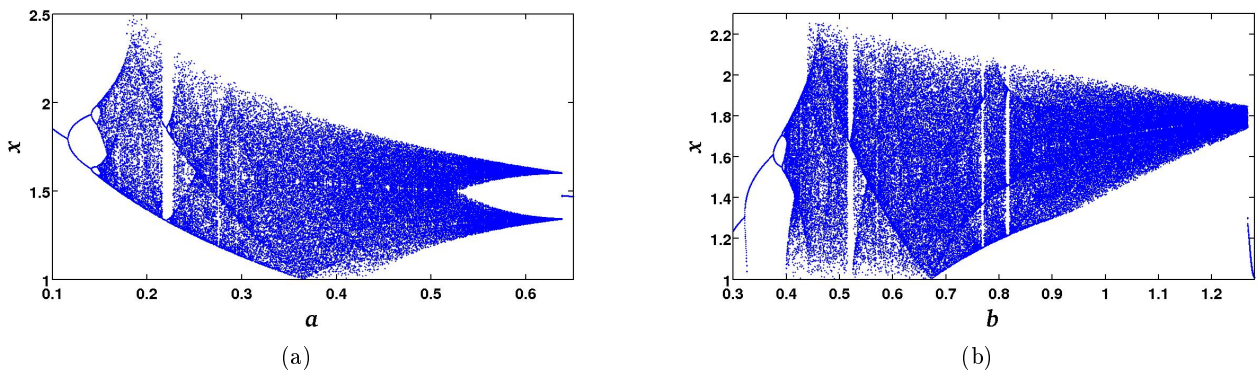


Figura 2.4: (a): Diagrama de bifurcación de la variable x en función del parámetro a tomando $b = 0.75$. (b): Diagrama de bifurcación de la variable x en función del parámetro b tomando $a = 0.3$

En las figuras 3.5 y 2.6 se muestran dos caras del atractor caótico de este modelo para distintos parámetros, se evidencia la presencia de un atractor de tipo Lorenz y un atractor diferente. Este sistema posee tres estados estacionarios (F_0, F_{\pm}). El primer estado estacionario F_0 ($x = y = z = 0$) corresponde al estado en el que el láser se encuentra apagado y los estados F_{\pm} ($x = \pm 1, y = 0$ y $z = 1$) corresponden a los estados estacionarios del láser en funcionamiento [18].

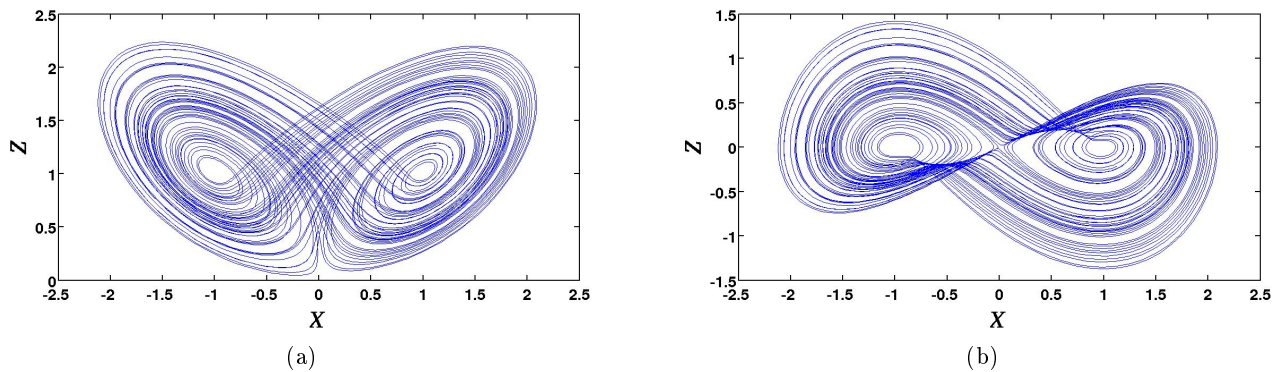


Figura 2.5: (a):Proyección en el plano X-Z del atractor caótico para el sistema Shimizu-Morioka.(b): Proyección en el plano X-Y. Estos atractores fueron graficados tomando los valores de parámetros $a = 0.375$ y $b = 0.81$. Se observa que con estos parámetros este sistema presenta un atractor de tipo Lorenz.

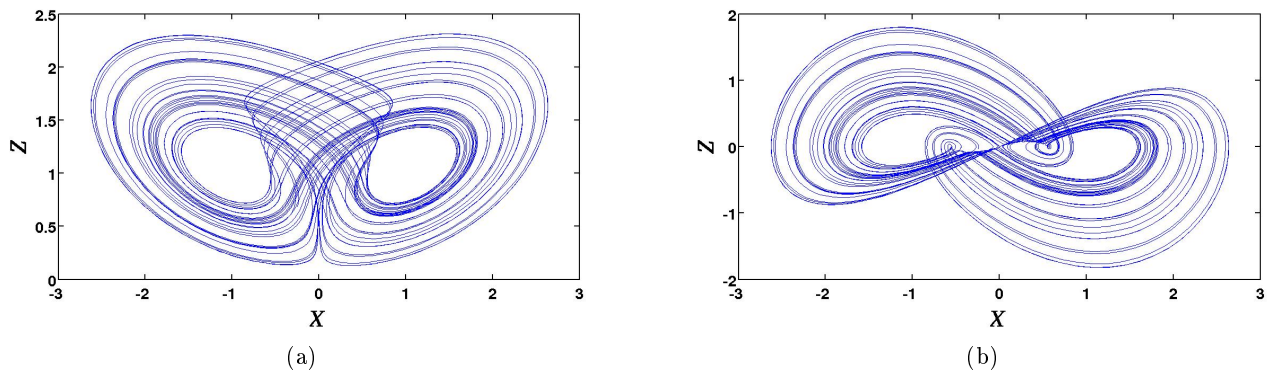


Figura 2.6: (a):Proyección en el plano X-Z del atractor caótico para el sistema Shimizu-Morioka.(b): Proyección en el plano X-Y. Estos atractores fueron graficados tomando los valores de parámetros $a = 0.19145$ y $b = 0.81$. Como puede observarse con estos parámetros este sistema presenta un atractor diferente al anterior.

FLUJOS CAÓTICOS ROBUSTOS HOMOGÉNEOS GLOBALMENTE ACOPLADOS.

“El todo como suma de las partes. El todo como entidad que emerge de las partes y es distinto del agregado de las partes.”

Platón

Entre las consecuencias principales de las interacciones entre osciladores acoplados globalmente se encuentran el surgimiento de fenómenos de sincronización, colapso de amplitud y formación de clusters, entre otros; además como dichos fenómenos son universales, han despertado mucho interés en diversas áreas de la ciencia. En particular, se ha hecho énfasis en el estudio de sistemas acoplados globalmente para modelar una gran variedad de sistemas físicos, químicos y biológicos, tanto continuos como discretos en el tiempo [19].

En este trabajo nos interesamos por estudiar los fenómenos colectivos que surgen debido a la interacción de sistemas dinámicos caóticos robustos en tiempo continuo (flujos caóticos robustos) acoplados globalmente. Se considera tanto el caso homogéneo, donde todos los elementos del sistema son idénticos, como el caso heterogéneo donde los parámetros de los elementos son diferentes.

3.1 Sincronización.

Al acoplar varios osciladores puede surgir el fenómeno de la sincronización, que no es más que decir que estos evolucionen idénticamente en el tiempo. Esto ocurre cuando algunos de los osciladores cambian su trayectoria, para seguir la trayectoria de otros osciladores o hacia una nueva trayectoria diferente de la original que será igual para todos los osciladores.

Este fenómeno fue discutido por primera vez por el famoso científico holandés Christiaan Huygens, quien observó la sincronización de dos relojes de péndulo que colgaban en una de las paredes de su cuarto y supuso que esto no ocurrió por casualidad y que era debido a que estos interactuaban entre sí de alguna forma.

Huygens estaba en lo cierto, ya que se ha demostrado que este fenómeno depende de las propiedades de las interacciones entre los osciladores, además de otros factores como el ruido externo o la diversidad entre los osciladores. Otra característica a destacar es que la sincronización es un efecto esencialmente no lineal y debido a su universalidad ha sido encontrado en muchos sistemas físicos, incluyendo los sistemas caóticos, en los cuales fue observado por primera vez por Percora y Carrol [20].

No obstante, ahora se sabe que para que varios osciladores acoplados sigan la misma trayectoria en el espacio de fase, debe haber un valor umbral en la intensidad del acoplamiento, si se tiene un acoplamiento muy fuerte, este podría romper la sincronización y si se tiene un acoplamiento muy débil este podría no ser suficiente para hacer que el sistema se sincronice.

Sabiendo esto podemos preguntarnos si al acoplar un número grande de elementos caóticos estos pueden llegar a sincronizarse, y de ser así, para qué valores del parámetro de acoplamiento esto ocurre y si dicha sincronización es o no es un estado estable del sistema.

3.2 Análisis de estabilidad del estado sincronizado en sistemas acoplados globalmente.

El acoplamiento global es la dependencia de un elemento de los estados de todos los demás elementos en el sistema; es decir, todos interactúan con todos de manera idéntica (ver figura 3.1). Por lo general, el término que expresa la interacción entre los elementos se representa como una función de la media (campo medio) de todos los elementos [19],

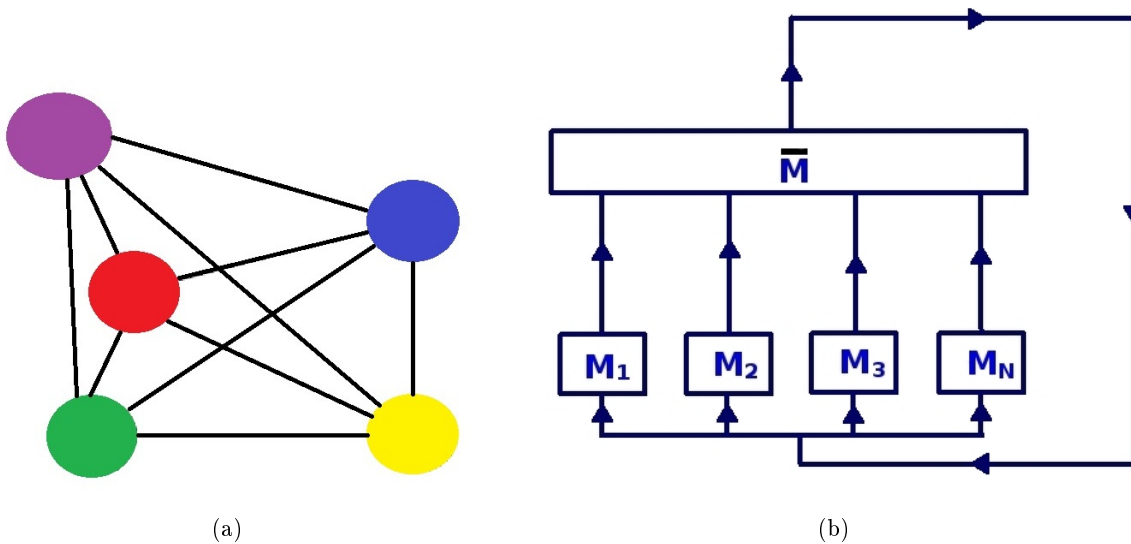


Figura 3.1: (a): Figura esquemática que muestra el acoplamiento global entre N elementos de un sistema, (b): Figura esquemática que muestra el acoplamiento entre N elementos de un sistema a través del campo medio de los elementos.

Basándonos en el trabajo realizado en [21], presentamos el análisis de estabilidad para un sistema de N flujos globalmente acoplado de esta forma:

$$\dot{\mathbf{m}}_i = \mathbf{F}(\mathbf{m}_i) + \epsilon \bar{\mathbf{m}} \quad (3.1)$$

donde $i = 1, 2, \dots, N$ y

$$\mathbf{m}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{m}_i) = \begin{pmatrix} F_1(x_i, y_i, z_i) \\ F_2(x_i, y_i, z_i) \\ F_3(x_i, y_i, z_i) \end{pmatrix} \text{ y} \quad (3.3)$$

$$\bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{m}_j(t) \quad (3.4)$$

Además con

$$\bar{\mathbf{m}}(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \\ \bar{z}(t) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

siendo $\bar{x}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t) = x_p(t)$; $\bar{y}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(t) = y_p(t)$ y $\bar{z}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i(t) = z_p$.

En el estado de sincronización $\bar{\mathbf{m}}(t) = m_{sinc}$

$$\bar{\mathbf{m}}(t) = m_{sinc} = \begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \\ z_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{sinc}(t) \\ y_{sinc}(t) \\ z_{sinc}(t) \end{pmatrix} \quad \forall i \quad (3.6)$$

Ahora consideremos una perturbación pequeña del estado de sincronización y expandamos en series de Taylor, para obtener:

$$\bar{\mathbf{m}}(t) = m_{sinc} + \eta \mathbf{m}_i = \begin{pmatrix} x_{sinc}(t) \\ y_{sinc}(t) \\ z_{sinc}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta x_i(t) \\ \eta y_i(t) \\ \eta z_i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \\ \bar{z}(t) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Se observa que hemos despreciado los términos de orden superior ηx_i^2 , ηy_i^2 y ηz_i^2 . Además en este estado de sincronización $\bar{\mathbf{m}}_i = m_{sinc} = \mathbf{m}_i$, entonces podemos reescribir la Ec. (3.7) para tener,

$$\mathbf{m}_i = m_{sinc} + \eta \mathbf{m}_i \quad (3.8)$$

Ahora tomamos la derivada en el tiempo para la Ec. (3.8)

$$\dot{\mathbf{m}}_i = \dot{m}_{sinc} + \eta \dot{\mathbf{m}}_i \quad (3.9)$$

Pero recordemos que la Ec. (3.1) es de la forma

$$\dot{\mathbf{m}}_i = \mathbf{F}(\mathbf{m}_i) + \epsilon \bar{\mathbf{m}}$$

Por lo que podemos sustituir Ecs. (3.7) y (3.8) en la Ec. (3.1) para obtener

$$\dot{m}_{sinc} + \eta \dot{\mathbf{m}}_i = \mathbf{F}(m_{sinc} + \eta \mathbf{m}_i) + \epsilon \bar{\mathbf{m}} \quad (3.10)$$

O si consideramos que $\bar{\mathbf{m}} = m_{sinc}$

$$\dot{\bar{\mathbf{m}}} + \eta \dot{\mathbf{m}}_i = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{m}} + \eta \mathbf{m}_i) + \epsilon \bar{\mathbf{m}} \quad (3.11)$$

Pero sabemos que $\mathbf{F}(x^* + \eta) = \mathbf{F}(x^*) + \mathbf{DF}(x^*)\eta$ [22], donde x^* es el estado sincronizado, η es la perturbación al estado sincronizado y \mathbf{DF} es la matriz Jacobiana de las derivadas de \mathbf{F} evaluada en el estado sincronizado, por la que podemos sustituir esto en la Ec. (3.11) para que finalmente obtengamos:

$$\dot{\bar{\mathbf{m}}} + \eta \dot{\mathbf{m}}_i = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{m}}) + \mathbf{DF}(\bar{\mathbf{m}})\eta \mathbf{m}_i + \epsilon \bar{\mathbf{m}} \quad (3.12)$$

Donde

$$\mathbf{DF} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial z} \end{pmatrix}_{(\bar{\mathbf{m}})}$$

Tomando los promedios de la Ec. (3.1)

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{m}}_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}(\mathbf{m}_i) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{m}}_i = \bar{\mathbf{F}} + \epsilon \bar{\mathbf{m}} = \dot{\bar{\mathbf{m}}} \quad (3.13)$$

sustituyendo Ec. (3.13) en (3.12).

$$\bar{\mathbf{F}} + \epsilon \bar{\mathbf{m}} + \eta \dot{\mathbf{m}}_i = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{m}}) + \mathbf{DF}(\bar{\mathbf{m}})\eta \mathbf{m}_i + \epsilon \bar{\mathbf{m}} \quad (3.14)$$

Claramente se ve que $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{m}})$, y también obtenemos que.

$$\eta \dot{\mathbf{m}}_i = \mathbf{DF}(\bar{\mathbf{m}})\eta \mathbf{m}_i \quad (3.15)$$

Cuya solución es

$$\eta \mathbf{m}_i = e^{\mathbf{DF}t} \eta \mathbf{m}_i(0) \quad (3.16)$$

Los autovalores y autovectores de \mathbf{DF} son

$$\mathbf{DF} \mathbf{u}_i = \mu_i \mathbf{u}_i \quad (3.17)$$

Donde μ_i son los autovalores y $\eta \mathbf{m}_i(0)$ es una combinación lineal de \mathbf{u}_i (\mathbf{u}_i es una base en el espacio n-dimensional)

$$\eta \mathbf{m}_i(0) = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{u}_i \quad (3.18)$$

y además

$$e^{\mathbf{DF}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{DF}^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_i^n t^n}{n!} \quad (3.19)$$

Sustituyendo (3.18) y (3.19) en (3.16) obtenemos

$$\eta \mathbf{m}_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_i^n t^n}{n!} \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^N a_i e^{\mu_i t} \mathbf{u}_i \quad (3.20)$$

La estabilidad del estado sincronizado depende de la parte real de los autovalores de \mathbf{DF} ($Re(\mu_i)$). La órbita es estable si

$$Re(\mu_i) < 0 \forall i \quad (3.21)$$

y será inestable si

$$Re(\mu_i) > 0 \text{ para algún } i \quad (3.22)$$

Los autovalores se determinan a través de la ecuación característica

$$\det[\mathbf{DF} - \mu_i \mathbf{I}] = 0 \quad (3.23)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad

3.3 Colapso de Amplitud de osciladores.

Un fenómeno interesante de sincronización fue descubierto por Lord Rayleigh en su “Theoy of Sound” [23] el cual describe un caso particular de sincronización de un sistema acústico:

“When two organ-pipes of the same pitch stand side by side, complications ensue which not unfrequently give trouble in practice. In extreme cases the pipes may almost reduce one another to silence. Even when the mutual influence is more moderate, it may still go so far as to cause the pipes to speak in absolute unison, in spite of inevitable small differences.”

Rayleigh observó no sólo sincronización mutua cuando dos tubos distintos, pero similares empezaban a sonar al unísono, sino también el efecto relacionado de colapso de la oscilación, cuando el acoplamiento entre los sistemas que interactúan origina la supresión de las oscilaciones [24].

El cese simultáneo de las oscilaciones en un sistema de elementos acoplados se interpreta como una sincronización en un punto fijo común. Recientemente se ha encontrado que este fenómeno particular de sincronización es posible en diversos sistemas consistentes de osciladores acoplados, incluyendo osciladores caóticos.

Como ya se mencionó, la interacción entre osciladores produce una supresión de las oscilaciones de los sistemas y reemplaza esto por un estado de equilibrio en un punto fijo en los sistemas acoplados. Estos puntos fijos pueden existir en el sistema desacoplado pero puede que sean inestables, o puede que surga un punto fijo nuevo, creado por el acoplamiento.

La muerte de oscilaciones (o muerte de amplitud), puede ser usada para controlar la dinámica oscilatoria de los sistemas, en algunos casos puede usarse para suprimir las oscilaciones no deseadas [25], por ejemplo, se sabe que en osciladores acoplados el retardo o la diversidad entre los osciladores pueden usarse inducir la muerte de las oscilaciones [26] [27], pero son pocos los otros escenarios conocidos para los cuales la muerte de amplitud puede ocurrir. En [28] se presenta un caso en el cual ocurre la muerte de amplitud en un sistema caótico considerando un acoplamiento muy particular pero que no posee retardo en el tiempo y sin diversidad entre los osciladores.

En vista de que son pocos los escenarios conocidos para los cuales este fenómeno puede ocurrir, es importante profundizar en su estudio para lograr tener una comprensión de la muerte de oscilación y sus causas, ya que existen casos en los cuales la muerte de las oscilaciones puede ser perjudicial si estas son

esenciales para el buen funcionamiento del sistema. Por ejemplo, en los láseres acoplados la muerte de amplitud puede ocurrir y la misma representa un obstáculo para el objetivo de obtener máxima potencia de salida mediante la sincronización de varios láseres [25], o incluso en algunos sistemas vivos, por ejemplo células cardíacas, sistemas ecológicos y en el cerebro cuando presenta casos patológicos de supresión o interrupción de la oscilación cuando ocurren trastornos neuronales como la enfermedad de Alzheimer o la enfermedad de Parkinson, etc [29, 30].

3.4 Sincronización en flujos caóticos robustos homogéneos acoplados globalmente.

En este trabajo hemos estudiado tres tipos de flujos caóticos robustos con parámetros idénticos acoplados globalmente. La integración numérica de los sistemas de ecuaciones diferenciales resultantes se realizó utilizando el método de Runge- Kutta de cuarto orden, tomado de la subrutina correspondiente [31], con un paso de integración $h = 0.01$.

Para validar el código, integramos las conocidas ecuaciones de Lorenz, de Sprott y de Rössler, y obtuvimos una excelente representación de los correspondientes atractores.

3.4.1 Acoplamiento global difusivo en todas las variables locales.

Consideraremos en primer lugar un sistema de $N = 10000$ osciladores idénticos con un acoplamiento global difusivo en todas las variables locales (Ec. 3.38) para estudiar la influencia del acoplamiento en el surgimiento de sincronización.

$$\begin{aligned}\frac{dX_i}{dt} &= Y_i + \epsilon(\bar{X} - X_i) \\ \frac{dY_i}{dt} &= X_i(1 - Z_i) - bY_i + \epsilon(\bar{Y} - Y_i) \\ \frac{dZ_i}{dt} &= -a(Z_i - X_i^2) + \epsilon(\bar{Z} - Z_i),\end{aligned}\tag{3.24}$$

donde

$$\bar{X}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(t)\tag{3.25}$$

$$\bar{Y}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i(t)\tag{3.26}$$

$$\bar{Z}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_i(t).\tag{3.27}$$

Los parámetros locales a y b se toman fijos, mientras que la intensidad del acoplamiento descrita por el parámetro ϵ se va variando. Como condiciones iniciales se asignan valores aleatorios para las variables de cada oscilador. Para cada valor de ϵ , se despreciaron las primeras 100 unidades de tiempo y todos los gráficos se realizaron considerando las 900 unidades de tiempo siguientes.

Una manera de caracterizar la sincronización de un sistema es mediante la desviación estándar de los valores las variables para cada instante de tiempo [21],

$$\sigma_i(t) = \sqrt{(X_i(t) - \bar{X})^2 + (Y_i(t) - \bar{Y})^2 + (Z_i(t) - \bar{Z})^2}. \quad (3.28)$$

Seguidamente, definimos el promedio $\langle \sigma(t) \rangle$ dado por

$$\langle \sigma(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i(t). \quad (3.29)$$

Por último, definimos la cantidad \mathcal{S}

$$\mathcal{S} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \langle \sigma(t) \rangle, \quad (3.30)$$

donde T es un intervalo de tiempo suficientemente grande, después de despreciar los transientes. Los estados de sincronización corresponden a valores de $\mathcal{S} = 0$.

La figura 3.2 muestra los valores obtenidos de la cantidad \mathcal{S} en función del parámetro de acoplamiento ϵ para valores fijos de parámetros locales $a = 0.375$ y $b = 0.81$. Se observa que para $\epsilon \geq 0.07$, $\mathcal{S} \rightarrow 0$, por lo tanto ocurre sincronización caótica completa del sistema.

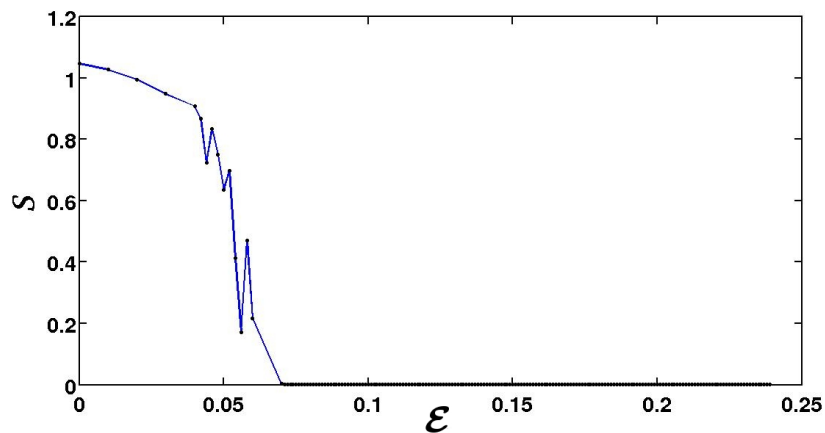


Figura 3.2: Cálculo de la cantidad \mathcal{S} de la sincronización en función del parámetro de acoplamiento ϵ . Para los parámetros locales $a = 0.375$ y $b = 0.81$.

En las figuras 3.3 y 3.4 se muestra la evolución temporal de la variable X para un elemento del sistema y la evolución temporal de \bar{X} . La figura 3.3a corresponde al estado desacoplado del sistema ($\epsilon = 0$); para este caso todos los elementos de la población oscilan de forma independiente, y sus contribuciones al campo medio casi se anulan entre sí. En la figura 3.3b puede observarse que \bar{X} es pequeña si se compara con la amplitud de un oscilador.

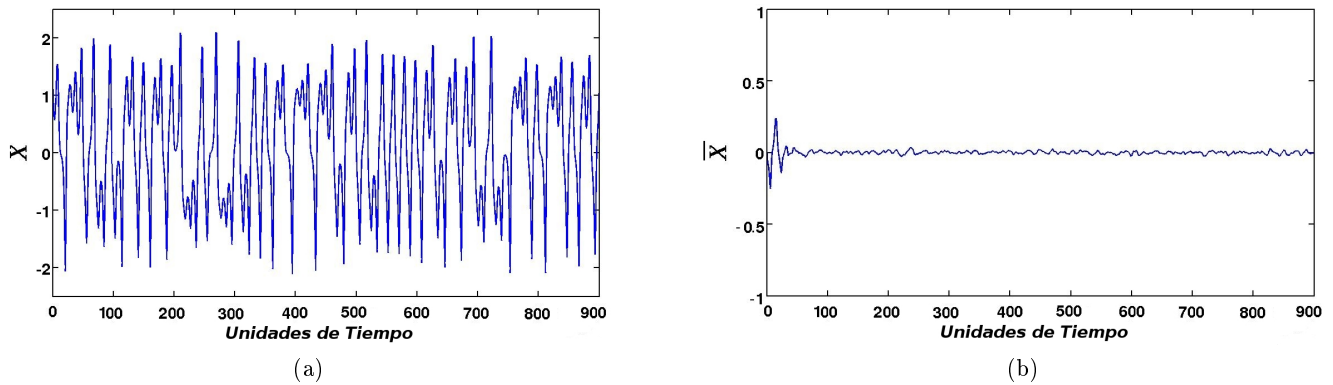


Figura 3.3: (a):Evolución temporal de la variable X_1 del sistema .(b): Evolución temporal de \bar{X} . Estas graficas se realizaron tomando los valores de parámetros locales $a = 0.375$ y $b = 0.81$ y el parámetro de acoplamiento $\epsilon = 0$.

La figura 3.4 muestra un estado de sincronización caótica, para el valor de acoplamiento $\epsilon = 0.07$ a partir del cual ocurre la sincronización.

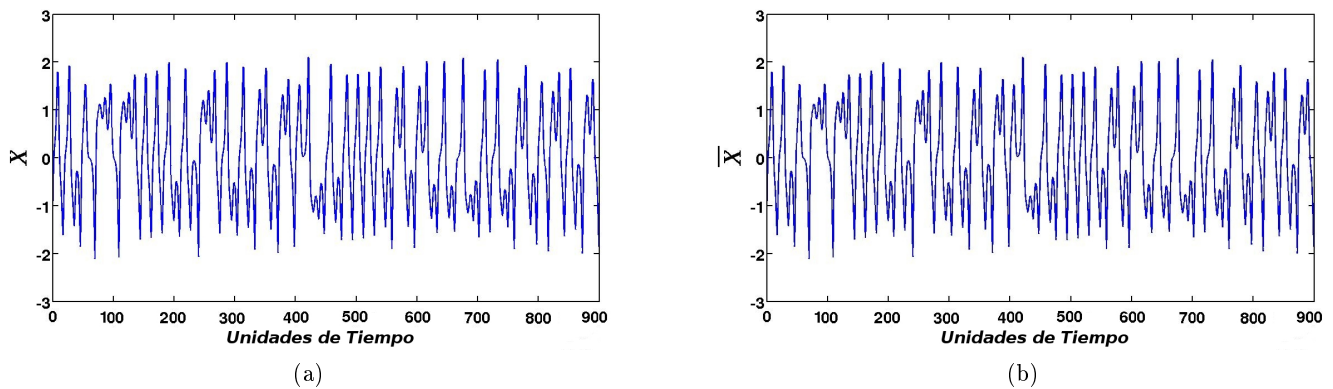


Figura 3.4: (a):Evolución temporal de la variable X_1 del sistema .(b): Evolución temporal de \bar{X} . Estas graficas se realizaron tomando los valores de parámetros locales $a = 0.375$ y $b = 0.81$ y el parámetro de acoplamiento $\epsilon = 0.07$.

Finalmente, en la figura 3.5a se muestra el atractor de un elemento del sistema cuando $\epsilon = 0$. Este atractor es común a todos los elementos. Por otra parte, en las figuras 3.5b y 3.5c se muestran los atractores para un elemento del sistema y para el campo medio del sistema en un estado de sincronización caótica con $\epsilon = 0.07$.

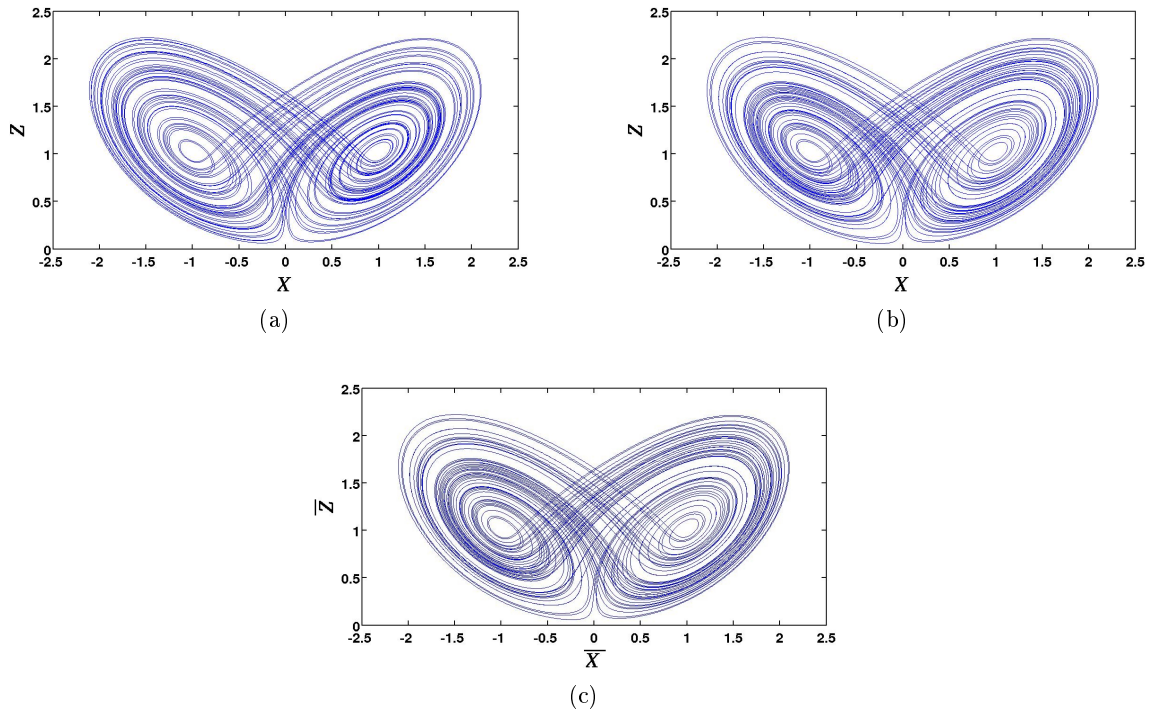


Figura 3.5: Proyecciones en el plano X-Z para un elemento del sistema: (a) Cuando $\epsilon = 0$ (elementos desacoplados), (b) Cuando $\epsilon = 0.07$, correspondiente al estado de sincronización completa, (c) Proyección en el plano X-Z colectivo con $\epsilon = 0.07$, correspondiente a un estado de sincronización completa.

3.4.2 Acoplamiento global difusivo en una variable local.

A continuación, consideramos un acoplamiento de tipo difusivo sólo a través de la variable Z del sistema (Ec. 3.31), tomando nuevamente los parámetros locales a y b fijos y aumentando la intensidad del parámetro de acoplamiento ϵ .

$$\begin{aligned}
 \frac{dX_i}{dt} &= Y_i \\
 \frac{dY_i}{dt} &= X_i(1 - Z_i) - bY_i \\
 \frac{dZ_i}{dt} &= -a(Z_i - X_i^2) + \epsilon(\bar{Z} - Z_i)
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

La figura 3.6 muestra los valores obtenidos para la cantidad S en función del parámetro de acoplamiento ϵ , con $a = 0.375$ y $b = 0.81$ fijos. Se observa en la figura 3.6 que para diversos intervalos de ϵ ocurre sincronización. A partir de $\epsilon > 0.42$ ocurre nuevamente sincronización.

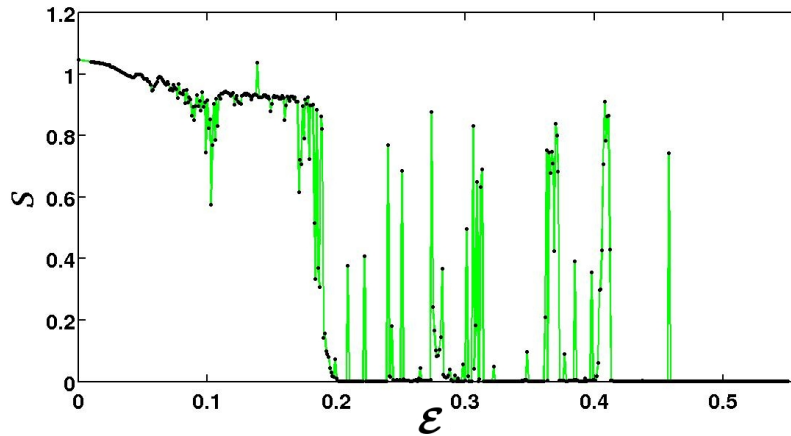


Figura 3.6: Cálculo de la cantidad \mathcal{S} en función del parámetro de acoplamiento ϵ . Para los parámetros locales $a = 0.375$ y $b = 0.81$.

En la figura 3.7 se muestra la evolución temporal de la variable X para un elemento del sistema y la evolución temporal de \bar{X} y corresponde a un estado de sincronización caótica con $\epsilon = 0.42$.

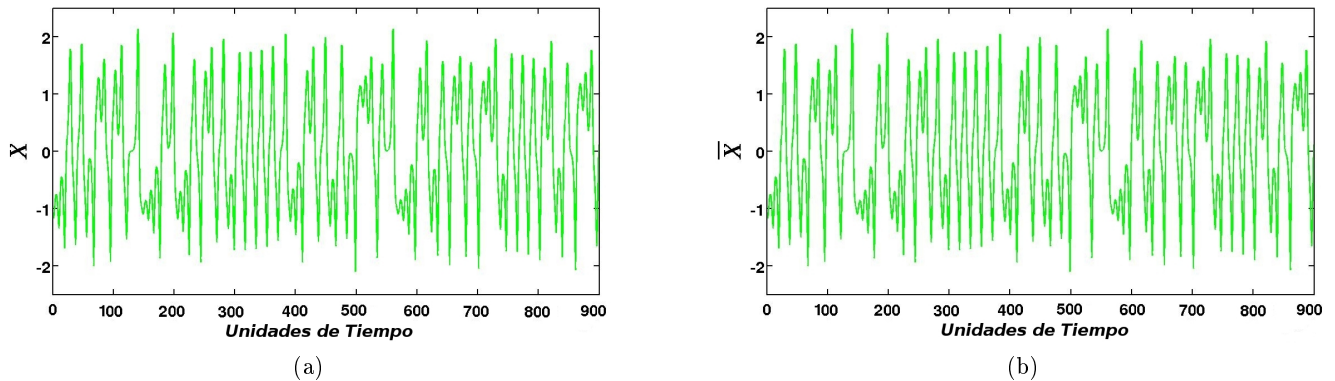


Figura 3.7: (a):Evolución temporal de la variable X_1 del sistema.(b): Evolución temporal de \bar{X} . Estas graficas se realizaron tomando los valores de parámetros locales $a = 0.375$ y $b = 0.81$ y el parámetro de acoplamiento $\epsilon = 0.42$.

La figura 3.8a muestra el atractor de un elemento del sistema cuando éstos están desacoplados para los valores de parámetros locales a y b establecidos. En las figuras 3.8b y 3.8c se muestran respectivamente, los atractores para un elemento y para el campo medio del sistema en un estado de sincronización completa ($\epsilon = 0.42$).

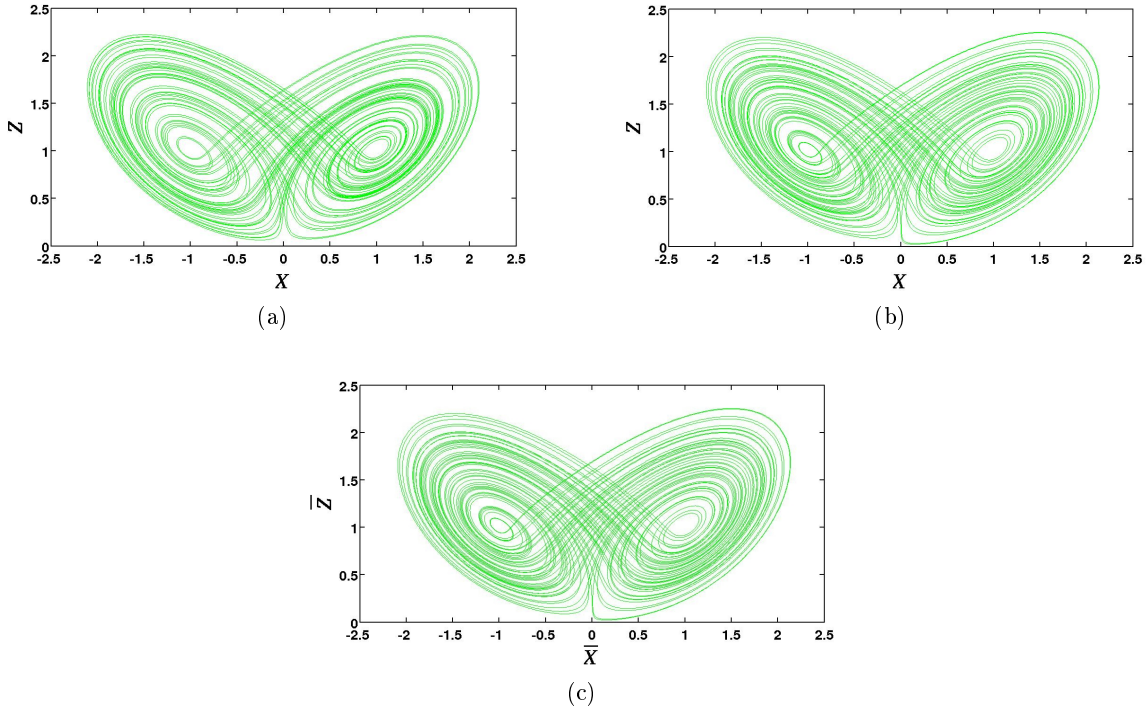


Figura 3.8: Proyecciones en el plano X-Z para el elemento $i = 1$ del sistema: (a) Cuando $\epsilon = 0$ (elementos desacoplados), (b) Cuando $\epsilon = 0.42$, correspondiente al estado de sincronización completa, (c) Proyección en el plano X-Z colectivo con $\epsilon = 0.42$, correspondiente a un estado de sincronización completa.

Como puede observarse, el acoplamiento global es muy eficiente para inducir sincronización en un sistema de osciladores caóticos idénticos. Además, la simplicidad del acoplamiento global permite una amplia aplicación tecnológica, como por ejemplo: construcción de sistemas de comunicación modernos, las redes de generadores eléctricos acoplados y los láseres, lo hacen una herramienta de gran utilidad en una gran variedad de disciplinas en las que se trabajan con sistemas compuestos por gran cantidad de elementos interactuando y en las cuales es necesario tener cierto control sobre el comportamiento del sistema.

3.4.3 Acoplamiento global no difusivo en una variable local.

El último caso de acoplamiento global homogéneo que consideramos consiste en un acoplamiento no difusivo a través de la variable Z del sistema (Ec. 3.32). Nuevamente tomamos los parámetros locales a y b fijos, y variamos la intensidad del parámetro de acoplamiento ϵ .

$$\begin{aligned}
 \frac{dX_i}{dt} &= Y_i \\
 \frac{dY_i}{dt} &= X_i(1 - Z_i) - bY_i \\
 \frac{dZ_i}{dt} &= -a(Z_i - X_i^2) + \epsilon \bar{Z}
 \end{aligned}
 \tag{3.32}$$

La figura 3.9 muestra los valores obtenidos para la cantidad \mathcal{S} en función del parámetro de acoplamiento ϵ para $a = 0.375$ y $b = 0.81$. Se observa la existencia de varios intervalos de ϵ donde ocurre la sincronización

del sistema. Sin embargo, el tipo de sincronización es diferente para distintos intervalos del parámetro ϵ . Para el intervalo $\epsilon \in [0.19, 0.25]$ se obtiene sincronización de oscilaciones caóticas y periódicas. Para $\epsilon = 0.375$ ocurre sincronización en un punto fijo. Estos resultados se trataran por separado.

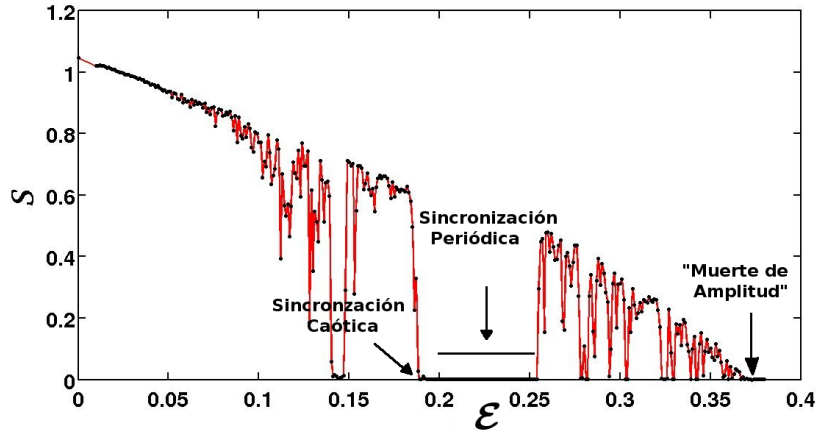


Figura 3.9: Cálculo de la cantidad S de la en función del parámetro de acoplamiento ϵ . Para los parámetros locales $a = 0.375$ y $b = 0.81$.

Sincronización de oscilación.

En la figura 3.10 se muestran la evolución temporal de la variable X para un elemento del sistema y la evolución temporal de \bar{X} para $\epsilon = 0.19$. Se observa un estado de sincronización caótica. La figura 3.11a

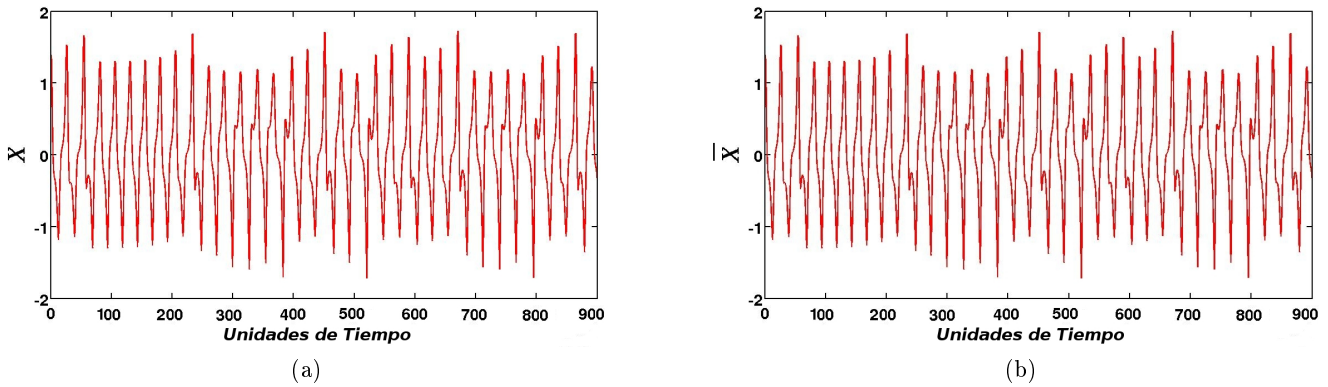


Figura 3.10: (a):Evolución temporal de la variable X_1 del sistema.(b): Evolución temporal de \bar{X} . Estas graficas se realizaron tomando los valores de parámetros locales $a = 0.375$ y $b = 0.81$ y el parámetro de acoplamiento $\epsilon = 0.19$.

muestra el atractor de un elemento del sistema cuando éstos están desacoplados ($\epsilon = 0$). En las figuras 3.11b y 3.11c se muestran los atractores para un elemento y para el campo medio del sistema en un estado de sincronización con $\epsilon = 0.19$. Para este caso tenemos que la trayectoria en la cual se sincronizan los elementos difiere de la trayectoria de un elemento aislado.

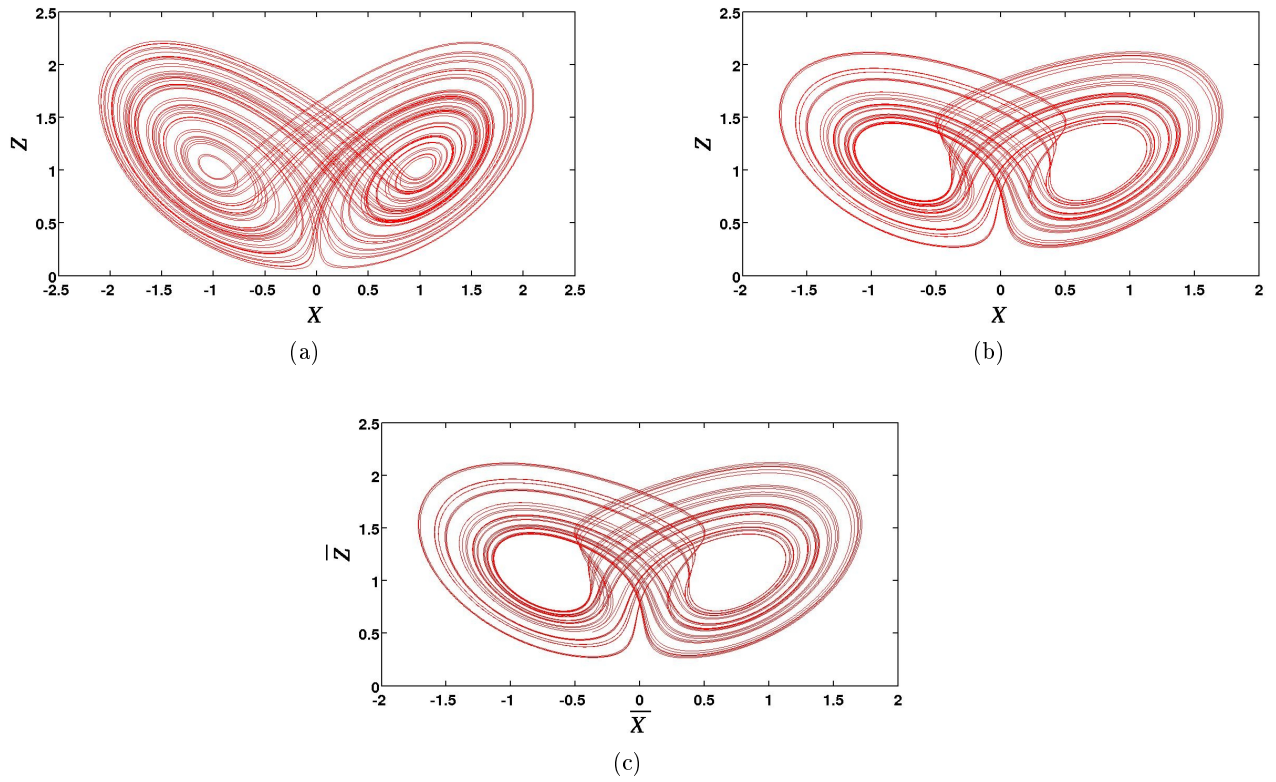


Figura 3.11: Proyecciones en el plano X-Z para un elemento del sistema: (a) Cuando $\epsilon = 0$ (elementos desacoplados), (b) Cuando $\epsilon = 0.19$, correspondiente al estado de sincronización completa), (c) Proyección en el plano X-Z colectivo con $\epsilon = 0.19$, correspondiente a un estado de sincronización completa.

Sincronización en un Punto fijo (Colapso de Amplitud).

En la figura 3.12 se muestra la evolución temporal de la variable X para un elemento, incrementando el valor de ϵ . Se observa cómo la variable X evoluciona hacia el colapso de amplitud. La figura 3.13 muestra la evolución temporal para las variables Y y Z del mismo elemento para $\epsilon = 0.375$, correspondiente al estado de colapso de amplitud. Puede observarse el estado estacionario sincronizado corresponde al punto fijo $(X_i = 0, Y_i = 0, Z_i = 3), \forall i$.

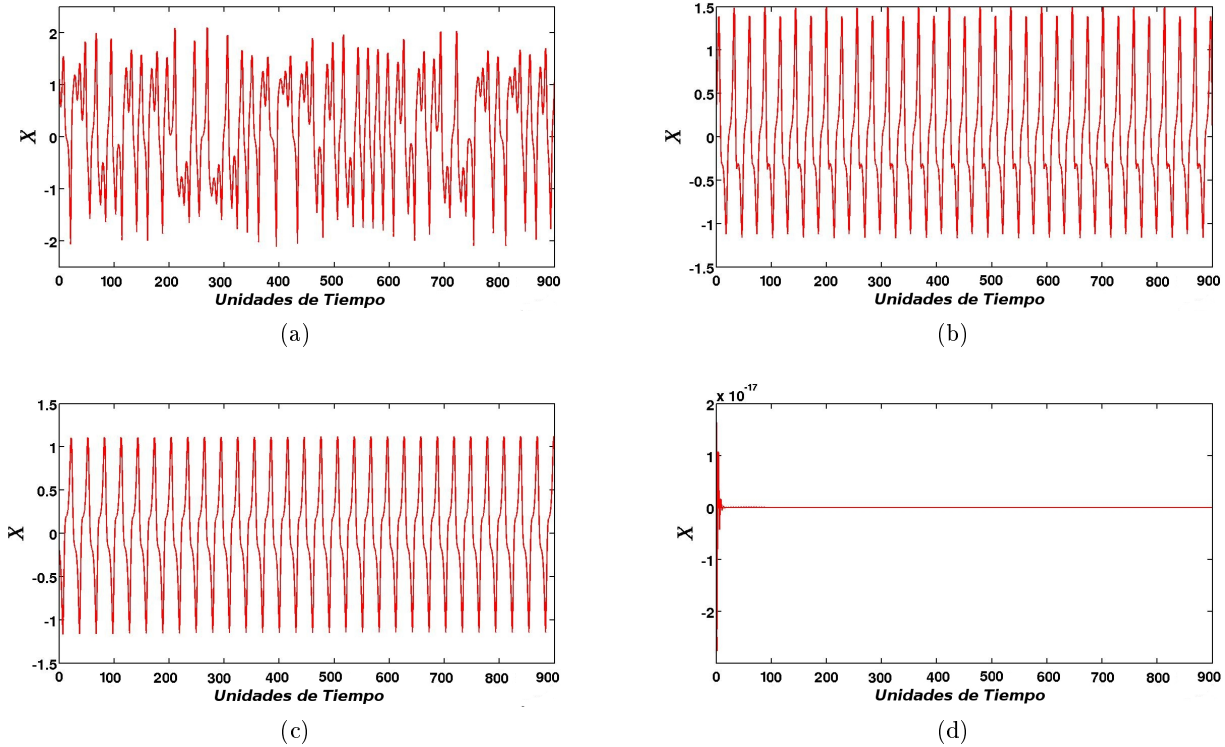


Figura 3.12: Evolución temporal de la variable X_1 del sistema (a) para $\epsilon = 0$, (b) para $\epsilon = 0.21$, (c) para $\epsilon = 0.25$, (d) para $\epsilon = 0.375$

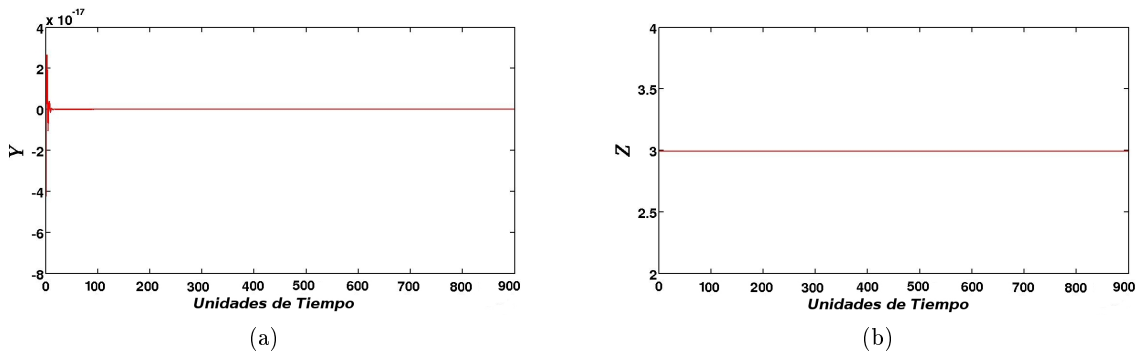


Figura 3.13: (a):Evolución temporal de la variable Y_1 del sistema .(b): Evolución temporal de Z_1 .

En la figura 3.14 se muestra la proyección en el plano X-Y para diferentes valores de ϵ para de un elemento del sistema, y se observa cómo se va modificando su atractor hasta llegar a un punto fijo.

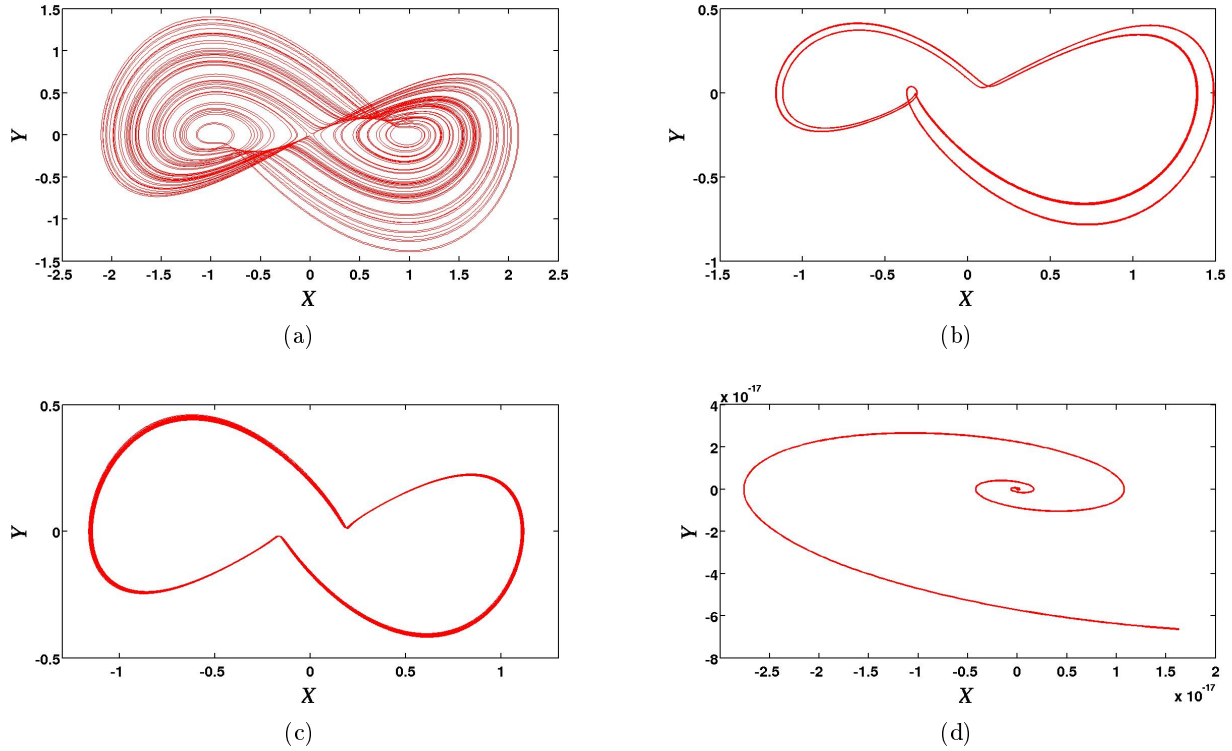


Figura 3.14: Proyecciones en el plano X-Y para un elemento del sistema: (a) Cuando $\epsilon = 0$ (elementos desacoplados), (b) Cuando $\epsilon = 0.21$, (c) Cuando $\epsilon = 0.25$, (d) Cuando $\epsilon = 0.375$

La observación de colapso de amplitud en flujos caóticos robustos globalmente acoplados es uno de los resultados más relevantes de esta tesis. Hasta donde tenemos conocimiento, el fenómeno de colapso de amplitud de osciladores acoplados se había observado principalmente en sistemas con interacciones que poseen retardo temporal, o con esquemas más complicados de acoplamiento. Por lo tanto, nuestros resultado sugieren que nos encontramos ante un escenario alternativo para la ocurrencia del colapso de amplitud.

Podemos obtener analíticamente la condición para la existencia del estado sincronizado en punto fijo colapso de amplitud, para el sistema dado por la Ec. (3.32). El punto fijo común satisface $\dot{X}_i = \dot{Y}_i = \dot{Z}_i = 0$. Sustituyendo esto en 3.32 obtenemos,

$$\begin{aligned}
 0 &= Y_i \\
 0 &= X_i(1 - Z_i) - bY_i \\
 0 &= -a(Z_i - X_i^2) + \epsilon\bar{Z},
 \end{aligned}
 \tag{3.33}$$

Las soluciones de estas ecuaciones conducen a dos puntos fijos posibles:

$$X_i = 0, \quad Y_i = 0, \quad Z_i = K = cte \quad \text{si } \epsilon = a \quad (3.34)$$

$$X_i = \sqrt{1 - \frac{\epsilon}{a}}, \quad Y_i = 0, \quad Z_i = 1 \quad \text{Sólo si } \epsilon \leq a \quad (3.35)$$

El estado estacionario sincronizado obtenido mediante integración numérica ocurre justamente cuando $\epsilon = a = 0.375$, esto concuerda con el resultado obtenido de forma analítica. Recordemos del Capítulo 2 que un oscilador aislado posee tres estados estacionarios $x = y = z = 0$ y $x = \pm 1, y = 0, z = 1$. Como puede observarse, el estado estacionario sincronizado del sistema acoplado corresponde a un punto fijo nuevo creado por el acoplamiento.

FLUJOS CAÓTICOS ROBUSTOS HETEROGÉNEOS GLOBALMENTE ACOPLADOS.

“There are two possible outcomes: If the result confirms the hypothesis, then you’ve made a measurement. If the result is contrary to the hypothesis, then you’ve made a discovery”.

Enrico Fermi

La heterogeneidad en sistemas dinámicos es una situación muy común; es decir, los elementos que constituyen dichos sistemas no son idénticos en general. En la práctica, será inevitable que exista diversidad en los elementos, como por ejemplo en los sistemas sociales, donde cada individuo posee características propias, en sistemas de redes neuronales, modelos económicos o en sistemas biológicos [19]. De aquí la importancia de investigar el comportamiento colectivo de sistemas dinámicos heterogéneos acoplados.

En esta tesis, estudiamos el efecto que tiene la heterogeneidad en los parámetros locales en el comportamiento de sincronización de flujos caóticos robustos globalmente acoplados. En particular, el descubrimiento de Gallas de caos robusto en las ecuaciones de Shimizu-Morioka permite utilizar estos flujos para investigar el efecto de la heterogeneidad local de sistemas caóticos.

4.1 Heterogeneidad en los parámetros locales.

Consideremos un sistemas heterogéneo globalmente acoplado dado por las Ecs. (4.1), (4.2) y (4.3),

$$\begin{aligned}
 \frac{dX_i}{dt} &= Y_i \\
 \frac{dY_i}{dt} &= X_i(1 - Z_i) - b_i Y_i \\
 \frac{dZ_i}{dt} &= -a_i(Z_i - X_i^2) + \epsilon \bar{Z}
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dX_i}{dt} &= Y_i \\
\frac{dY_i}{dt} &= X_i(1 - Z_i) - b_i Y_i \\
\frac{dZ_i}{dt} &= -a_i(Z_i - X_i^2) + \epsilon(\bar{Z} - Z_i)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dX_i}{dt} &= Y_i + \epsilon(\bar{X} - X_i) \\
\frac{dY_i}{dt} &= X_i(1 - Z_i) - b_i Y_i + \epsilon(\bar{Y} - Y_i) \\
\frac{dZ_i}{dt} &= -a_i(Z_i - X_i^2) + \epsilon(\bar{Z} - Z_i)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Los valores de los parámetros locales b_i y a_i se tomarán distribuidos en una región del diagrama de fase del plano (a, b) donde exista caos robusto. Para tal fin procedemos de la siguiente manera:

Se trazó un segmento de recta en el plano (a, b) , tal que se encuentre completamente dentro de la región de caos robusto (ver figura 4.1). Calculamos la pendiente de la recta, que nos dió un valor de $m = 1.67$, y el corte con el eje b el cual quedó en $b_o = 0.2$. Entonces tomamos los valores de $a_i \in [0.1, 0.4]$ que están dentro del segmento de recta. Los valores de b_i fueron entonces calculados mediante la ecuación de la recta,

$$b_i = 1.67a_i + 0.2 \tag{4.4}$$

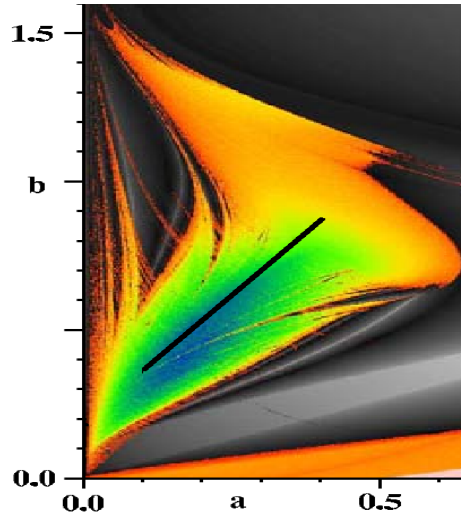


Figura 4.1: Diagrama de fase del máximo exponente de Lyapunov para 800x800 puntos. La región coloreada indica el dominio de caos, es decir exponente de Lyapunov positivo y las regiones sin color indican soluciones periódicas (exponente negativo). La región rosada representa las soluciones divergentes del sistema. La recta representa la zona donde se distribuyeron los valores de los parámetros locales a y b [5]

Una vez asignados aleatoriamente los valores de los parámetros locales, éstos permanecen constantes en el tiempo. Para verificar que los parámetros locales quedaran distribuidos en la forma deseada, graficamos

los valores de b_i vs. a_i en la figura 4.2 y realizamos el diagrama de bifurcación de máximos de x en función del parámetro a_i para los b_i correspondientes con la ecuación (4.4).

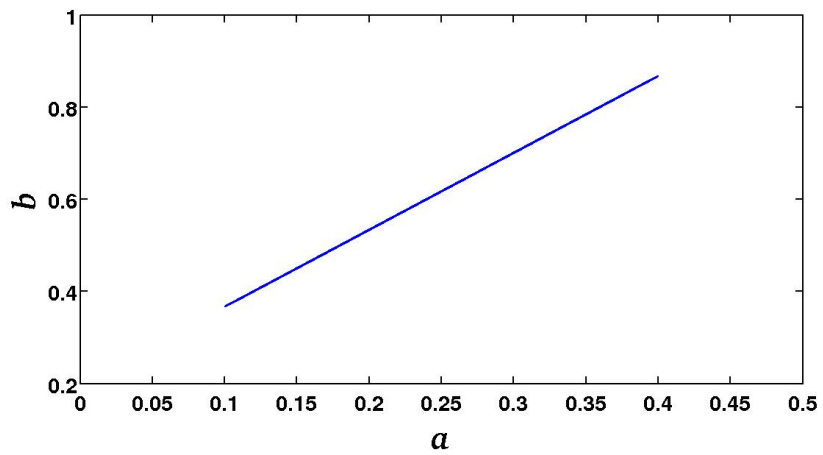


Figura 4.2: Gráfico de verificación de la distribución de los parámetros b_i y a_i de la forma deseada.

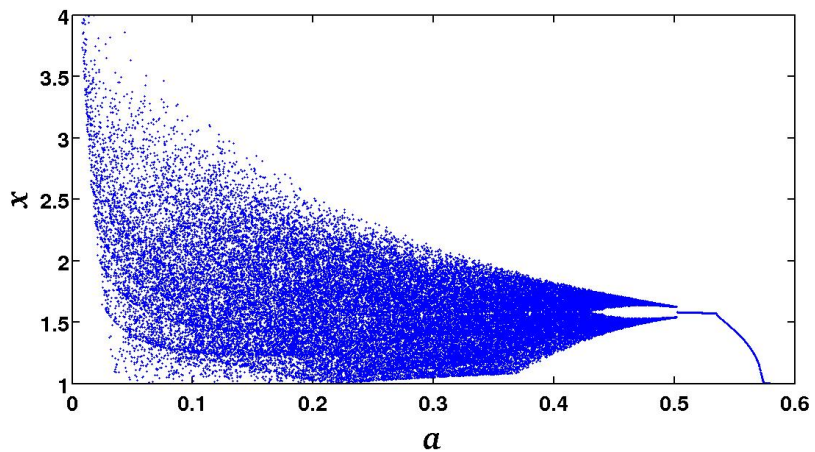


Figura 4.3: Diagrama de bifurcación de máximos de X en función de a_i para los b_i correspondientes a la recta $b_i = 1.67a_i + 0.2$.

4.2 Sincronización en flujos caóticos robustos heterogéneos acoplados globalmente.

4.2.1 Acoplamiento global difusivo en todas las variables locales.

Se considera un sistema de $N = 10000$ osciladores con un acoplamiento global difusivo (Ec. 4.5) para estudiar la influencia de la intensidad de acoplamiento en el surgimiento de sincronización, tomando los parámetros locales a_i y b_i distribuidos como se explicó en la figura 4.1. Se asignan condiciones iniciales aleatorias para las variables de cada oscilador. Se despreciaron los primeros 100 pasos de tiempo y todos los gráficos se realizaron considerando los 900 pasos de tiempo siguientes.

$$\begin{aligned}\frac{dX_i}{dt} &= Y_i + \epsilon(\bar{X} - X_i) \\ \frac{dY_i}{dt} &= X_i(1 - Z_i) - b_i Y_i + \epsilon(\bar{Y} - Y_i) \\ \frac{dZ_i}{dt} &= -a_i(Z_i - X_i^2) + \epsilon(\bar{Z} - Z_i)\end{aligned}\tag{4.5}$$

La figura 4.4 muestra los valores obtenidos para la cantidad \mathcal{S} en función del parámetro de acoplamiento ϵ para el sistema con diversidad en los parámetros locales. Se observa en la figura que el sistema tiende a la sincronización a medida que se incrementa el parámetro ϵ , aunque no llega a alcanzar la sincronización completa.

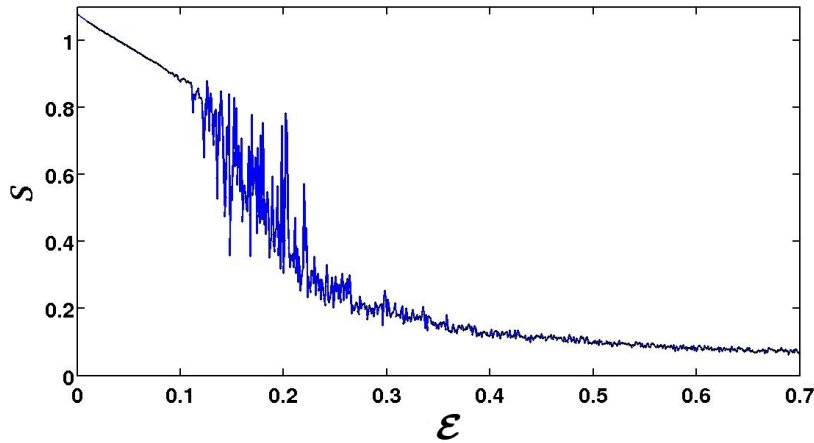


Figura 4.4: Cálculo de la cantidad \mathcal{S} en función del parámetro de acoplamiento ϵ .

En las figuras 4.5 y 4.6 se muestran la evolución temporal de la variable X para el elemento $i = 1$ y el elemento $i = 10$ del sistema y la evolución temporal de \bar{X} . La figura 4.4 corresponde al estado desacoplado del sistema ($\epsilon = 0$) y se observa un comportamiento similar al caso homogéneo: Todos los elementos de la población oscilan de forma independiente y sus contribuciones al campo medio casi se anulan entre sí.

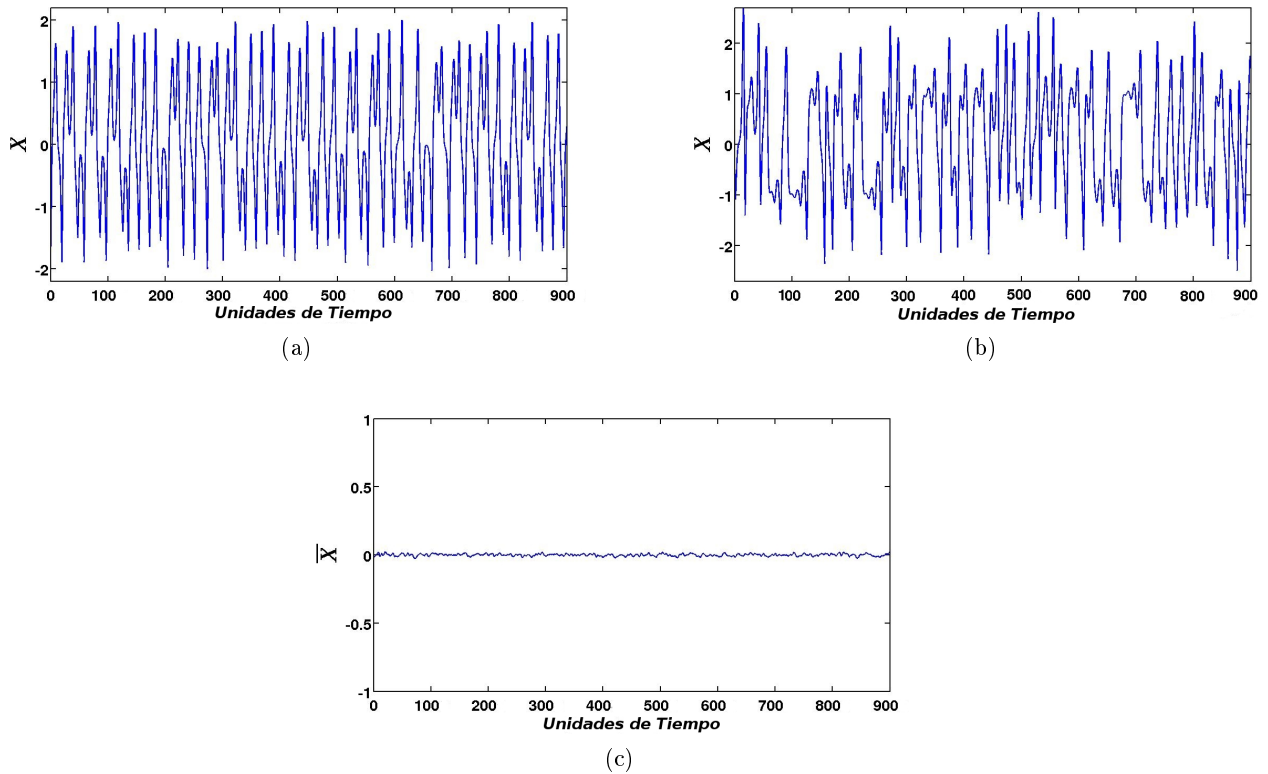


Figura 4.5: (a):Evolución temporal de la variable X_1 del sistema. (b): Evolución temporal de a variable X_{10} del sistema. (c): Evolución temporal de \bar{X} . Con $\epsilon = 0$.

La figura 4.6 corresponde a $\epsilon = 0.49$, donde ocurre un cierto grado de sincronización. Aunque no puede distinguirse claramente en la figura 4.6, las trayectorias no son completamente idénticas. Se observa que el sistema está cerca de la sincronización.

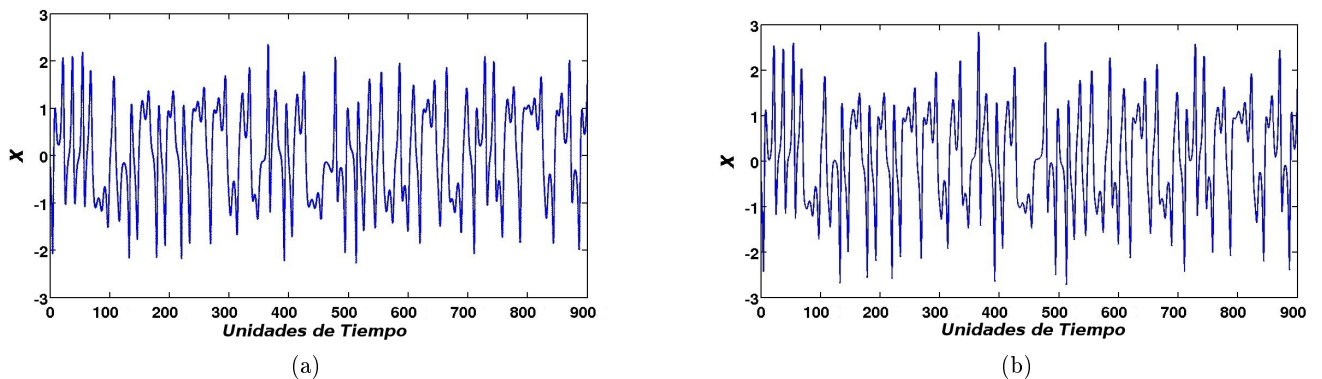


Figura 4.6: (a):Evolución temporal de la variable X_1 del sistema. (b): Evolución temporal de la variable X_{10} del sistema. Tomando $\epsilon = 0.49$.

En la figuras 4.7a y 4.7b se muestra los atractores del elemento $i = 1$ y el elemento $i = 10$ del sistema,

respectivamente cuando están desacoplados ($\epsilon = 0$). Nótese que dichos atractores difieren entre sí debido a la diversidad en sus parámetros locales. Por otra parte, en las figuras 4.7c, 4.7d y 4.7e, se muestran los atractores para el elemento $i = 1$ y el elemento $i = 10$ elemento del sistema y el atractor para el campo medio para $\epsilon = 0.49$. Como se puede observar, los osciladores cambian sus trayectorias originales diferentes hacia una trayectoria bastante parecida para todos; si bien las nuevas trayectorias no son idénticas.

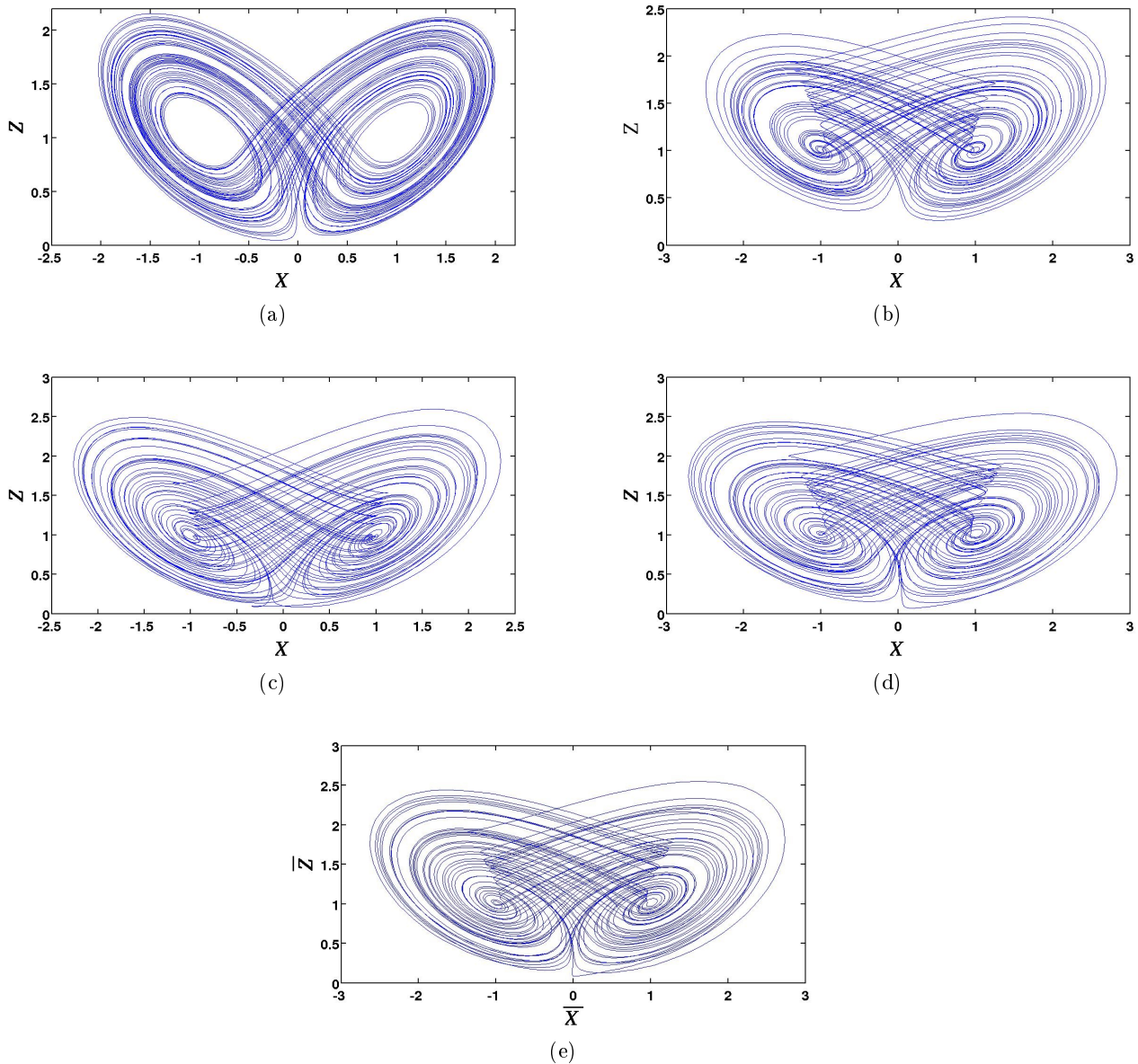


Figura 4.7: Proyecciones en el plano X-Z: (a) Para el elemento $i = 1$ del sistema cuando $\epsilon = 0$, (b) Para el elemento $i = 10$ del sistema cuando $\epsilon = 0$, (c) Para el elemento $i = 1$ del sistema, (c) Para el elemento $i = 10$ del sistema, (e) Proyección en el plano X-Z colectivo. Los últimos tres gráficos se realizaron para un valor de $\epsilon = 0.49$.

4.2.2 Acoplamiento global difusivo en una variable local.

Consideramos un sistema de ($N = 10000$) osciladores con un acoplamiento global difusivo en la variable Z (Ec. 4.6), tomando los parámetros locales a_i y b_i distribuidos sobre la región de caos robusto encontrada por Gallas,

$$\begin{aligned} \frac{dX_i}{dt} &= Y_i \\ \frac{dY_i}{dt} &= X_i(1 - Z_i) - b_i Y_i \\ \frac{dZ_i}{dt} &= -a_i(Z_i - X_i^2) + \epsilon(\bar{Z} - Z_i). \end{aligned} \quad (4.6)$$

La figura 4.8 muestra los valores obtenidos para la cantidad \mathcal{S} en función del parámetro de acoplamiento ϵ para el. Podemos observar que la sincronización no aparece fácilmente en este caso.

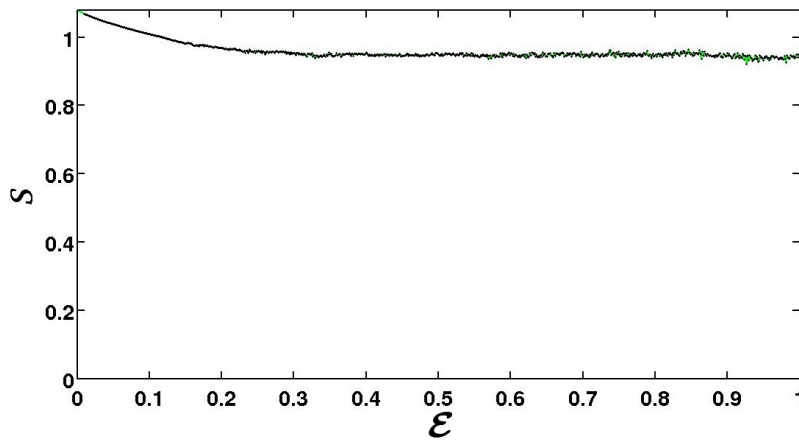


Figura 4.8: Cálculo de la cantidad \mathcal{S} en función del parámetro de acoplamiento ϵ .

4.2.3 Acoplamiento global no difusivo en una variable local.

Para finalizar, se considera un sistema de $N = 10000$ osciladores con un acoplamiento global no difusivo a través de la variable Z (Ec. 4.7).

$$\begin{aligned} \frac{dX_i}{dt} &= Y_i \\ \frac{dY_i}{dt} &= X_i(1 - Z_i) - b_i Y_i \\ \frac{dZ_i}{dt} &= -a_i(Z_i - X_i^2) + \epsilon \bar{Z} \end{aligned} \quad (4.7)$$

La figura 4.9 muestra los valores obtenidos para la cantidad \mathcal{S} en función del parámetro de acoplamiento ϵ para el sistema. Podemos que existe un intervalo de ϵ en el cual el sistema tiende a sincronizarse. Para valores mayores de ϵ las variables de estado de los elementos tienden a crecer abruptamente.

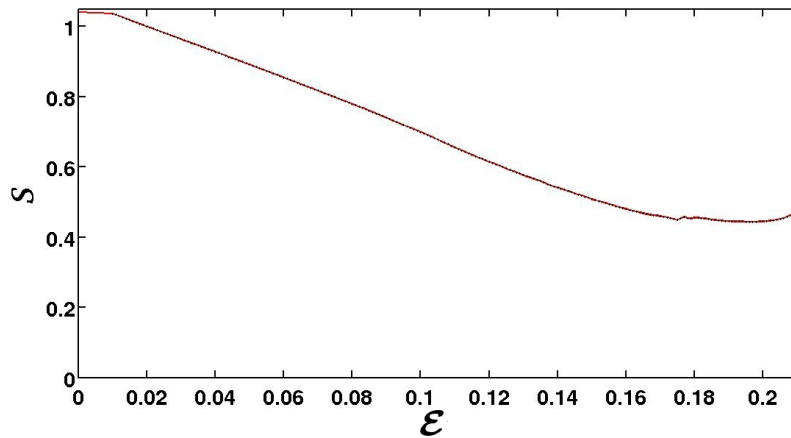


Figura 4.9: Cálculo de la cantidad S en función del parámetro de acoplamiento ϵ .

La figura 4.10 muestra la evolución temporal de la variable X para dos elementos del sistema, correspondientes a un $\epsilon = 0.21$. Se observa que ambos elementos llegan a un punto fijo, pero dicho punto no es el mismo para los elementos.

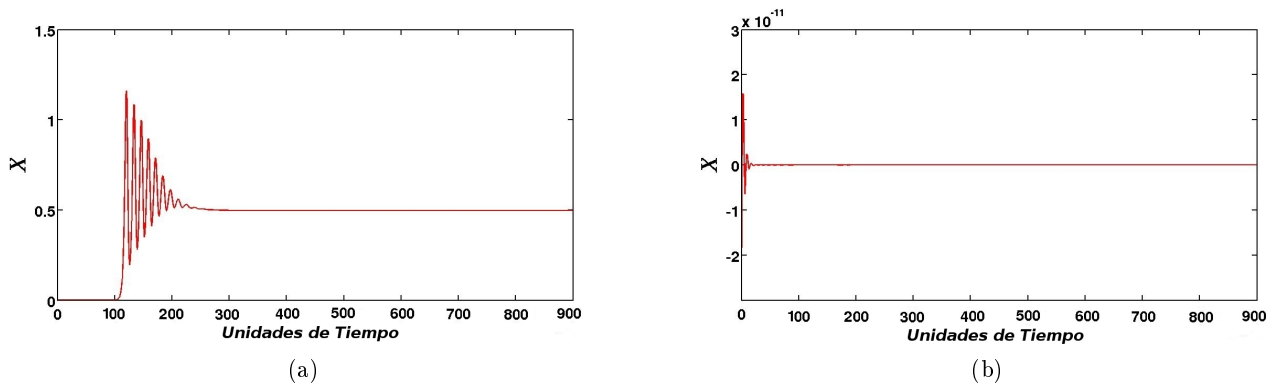


Figura 4.10: (a): Evolución temporal de la variable X_1 del sistema. (b): Evolución temporal de a variable X_{147} del sistema. Tomando $\epsilon = 0.21$.

En las figuras 4.11 y 4.12 se muestran los histogramas de los estados de los elementos del sistema para dos instantes de tiempo diferentes, correspondientes a $\epsilon = 0.21$. Como puede verse en las figuras 4.10 y 4.11, a partir de cierto instante de tiempo, distintos grupos de elementos del sistema tienden a sincronizarse en diferentes puntos fijos, formando clusters. El cluster más grande ocurre en el punto fijo ($X = Y = 0, Z = 1$), el cual no corresponde a un punto fijo de un sistema desacoplado.

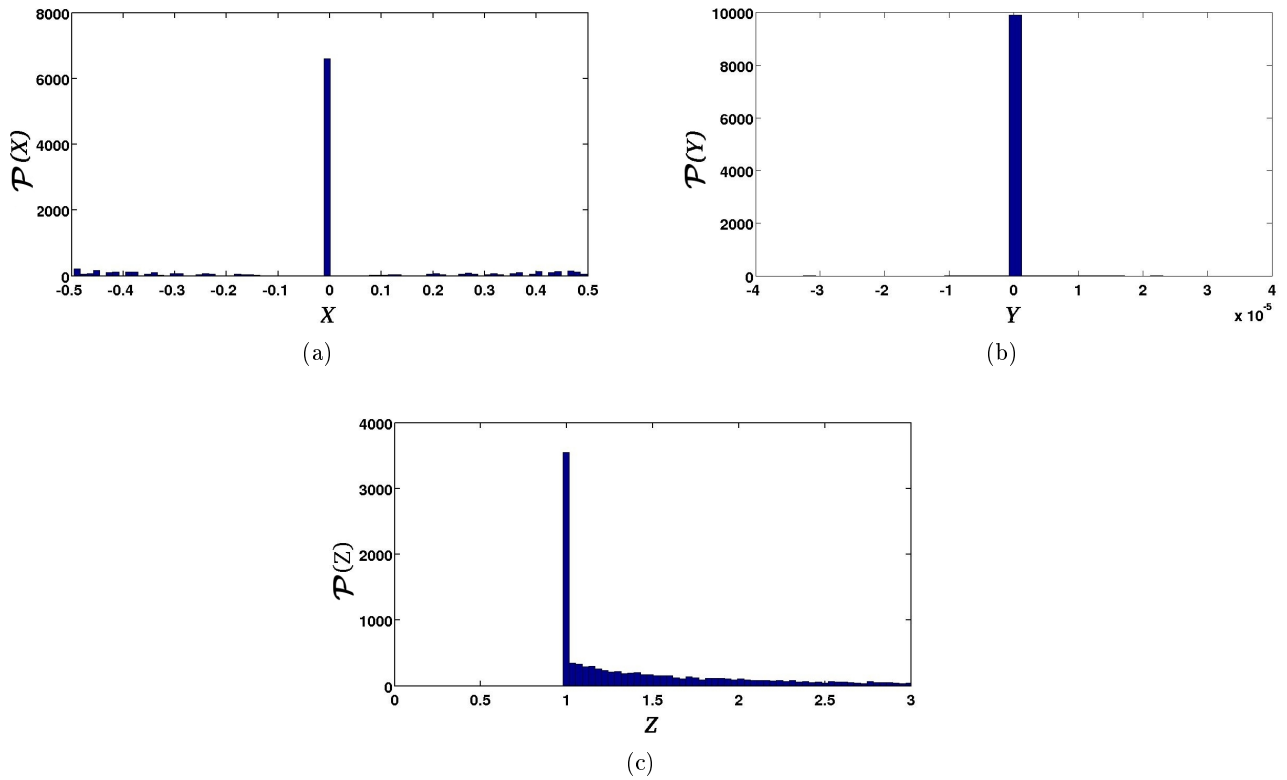


Figura 4.11: Histogramas de los estados de de los elementos del sistema en un instante de tiempo asintótico con $\epsilon = 0.21$. (a) Para la variable X de los elementos, (b) Para la variable Y de los elementos, (c) Para la variable Z de los elementos.

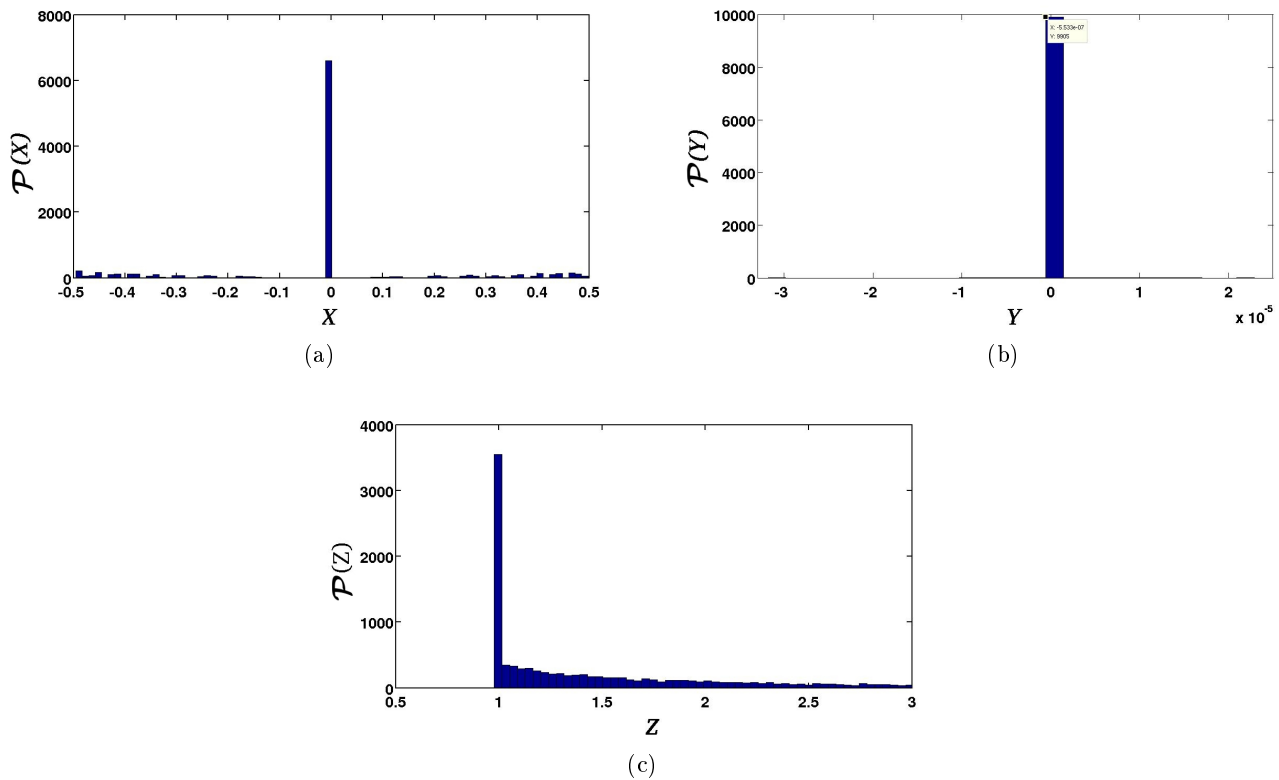


Figura 4.12: Histogramas de los estados de los elementos del sistema en el instante de tiempo asintótico $t = 1000$, después de despreciar 100 transientes, con $\epsilon = 0.21$. (a) Para la variable X de los elementos, (b) Para la variable Y de los elementos, (c) Para la variable Z de los elementos.

CONCLUSIONES

“Satisfaction of one’s curiosity is one of the greatest sources of happiness in life“.

Linus Pauling

La existencia de caos robusto en sistemas dinámicos de tiempo continuo fue demostrada por primera vez por J. A. Gallas en el 2010 [5], en el sistema de tres ecuaciones de Shimizu-Morioka que describen de una forma reducida la dinámica de un láser semiconductor [16]. En esta tesis hemos utilizado estas ecuaciones para investigar el fenómeno de sincronización en sistemas de flujos caóticos robustos sujetos a interacciones globales.

Consideramos estas ecuaciones con parámetros locales homogéneos y heterogéneos. En particular, hemos investigado el surgimiento de sincronización caótica y el fenómeno de colapso de amplitud en este sistema. Escogimos esta dinámica local con caos robusto porque permite introducir heterogeneidad mediante una distribución de parámetros en un rango que garantiza la existencia de caos para todos los elementos del sistema. De esta forma, el surgimiento de cualquier tipo de comportamiento colectivo no podría atribuirse a la existencia de órbitas periódicas locales, sino como resultado de las interacciones entre los elementos. Los casos que hemos estudiado y los resultados obtenidos se resumen en la siguiente tabla:

ACOPLAMIENTO	CASO HOMOGÉNEO	CASO HETEROGÉNEO
Difusivo en todas las variables locales	Sincronización caótica a partir de un ϵ crítico.	Tiende a la sincronización caótica.
Difusivo en una de las variables locales	Sincronización caótica para ciertos intervalos del parámetro ϵ .	No aparece fácilmente la sincronización.
No difusivo en una de las variables locales	Sincronización caótica, periódica y en un punto fijo (colapso de amplitud).	Tiende a la sincronización en un punto fijo.

Uno de los resultados más relevantes de esta investigación es la ocurrencia de colapso de amplitud en un sistema de flujos caóticos robustos con acoplamiento no difusivo en una variable. Hasta donde tenemos conocimiento, este fenómeno se ha encontrado en sistemas de osciladores periódicos y en sistemas caóticos con retardo temporal en el acoplamiento. Por lo tanto, consideramos nuestro resultado constituye una contribución novedosa en la búsqueda de las condiciones necesarias para la aparición del fenómeno de colapso de amplitud.

Otro resultado interesante de nuestro trabajo es la formación de clusters estacionarios en flujos caóticos heterogéneos. En particular, hemos encontrado que, a pesar de la heterogeneidad, existen rangos del parámetro de acoplamiento donde el sistema tiende a una mayor sincronización. La inclusión de heterogeneidad en sistemas dinámicos de elementos interactivos es importante para modelar muchos sistemas reales en la naturaleza.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] H. G. Schuster y W. Just. *Deterministic Chaos*. Editorial Wiley, 4 edition, (2005).
- [2] J.C. Sprott. Simple chaotic flow with abs nonlinearity. <http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/abscahos.htm>. Revisado el 03-04-2011, 2004.
- [3] M. Majumdar and T. Mitra. Robust chaos in dynamic optimization models. *Ricerche Economiche*, 48(3):225, (1994).
- [4] S. Banerjee, J. Yorke y C. Grebogi. Robust chaos. *Physical Review Letters*, 80:3049, (1998).
- [5] J. A. C. Gallas. The structure of infinite periodic and chaotic hub cascades in phase diagrams of simple autonomous flows. *Internacional Journal of Bifurcation and Chaos*, 2(2):197, (2010).
- [6] E. Zeraoulia y J. C. Sprott. On the robustness of chaos in dynamical systems: Theories and applications. *Front. Phys.*, 3:195, (2008).
- [7] A. Potapov y M. K. Ali. Robust chaos in neural networks. *Physics Letters A*, 277:310, (2000).
- [8] B Widrow y M. A. Lehr. 30 years of adaptative neural networks: Perceptron, madaline and back-propagation. *Proc. IEEE*, 78, (1990).
- [9] J. González. Inducción de orden colectivo por heterogeneidad en sistemas de elementos caóticos. Tesis de Maestría, Universidad de los Andes, Mérida-Venezuela, (2001).
- [10] J. Guckenheimer y R. F. Williams. Structural stability of lorenz attractors. *Publications Mathématiques de L'IHÉS*, 50(1):307, (1979).
- [11] V. Afraimovich, V.V. Bykov y L.P. Shil'nikov. On attracting nonstructurally stable limiting sets of the type of lorenz attractor. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 44:150, (1982).
- [12] K. Kaneko. Mean field fluctuation of a network of chaotic elements. *Physica D*, 55:368, (1992).
- [13] K. Kaneko y T. Shibata. Heterogeneity induced order in globally coupled chaotic systems. *Europhys. Lett*, 38(6):417, (1997).
- [14] A. Valdéz. Comportamientos colectivos inducidos por diversidad en redes dinámicas. Tesis de Licenciatura, Universidad de los Andes, Mérida-Venezuela, (2010).

- [15] A. L. Shilnikov. On bifurcations of the lorenz attractor in the shimizu-morioka model. *Physica D*, 62:338, (1993).
- [16] A. L. Shilnikov. Homoclinic phenomena in laser model. *Comput. Math. Appl.*, 34:245, (1997).
- [17] L. P. Shilnikov, A. L. Shilnikov, D. Turaev y L. Chua. Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics, part 2.
- [18] D. Yu. Volkov y A.G. Valdimirov. Low-intensity chaotic operations of a laser with a saturable absorber. *Optics Communications*, 100:351, (1993).
- [19] I. Gomes. *Aspectos de sincronización en un sistema caótico*. Tesis Doctoral, Universitat de Les Illes Balears, Palma de Mallorca, (2006).
- [20] L. M. Pecora y T. M. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, 64:821, (1990).
- [21] G. Paredes. Sincronización y comportamiento colectivo en sistemas de flujos caóticos elementales globalmente acoplados. Tesis de Maestría, Universidad de los Andes, Mérida-Venezuela, (2004).
- [22] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, (1993).
- [23] Lord Rayleigh. *The theory of sound*. Dover, New York, second edition, (1877).
- [24] M. Rosenblum y A. Pikovsky. Synchronization: from pendulum clocks to chaotic lasers and chemical oscillators. *Contemporary Physics*, 44(5):401, (2003).
- [25] F. Atay. Oscillator death in coupled functional differential equations near hopf bifurcation. *J. Differential Equations*, 221:190, (2006).
- [26] V. Resmi, G. Ambika y R. E. Amritkar. General mechanism for death in coupled systems. *ArXiv e-prints*, 2011.
- [27] A. Prasad. Amplitude death in coupled chaotic oscillators. *ArXiv e-prints*, (2005).
- [28] R. Karnatak, R. Ramaswamy y A. Prasad. Amplitude death in the absence of time delays in identical coupled oscillators. *Physical Review E*, 76, (2007).
- [29] D. J. Selkoe. Alzheimer's disease results from the cerebral accumulation and cytotoxicity of amyloid β -protein. *Journal of Alzheimer's Disease*, 3:75, (2001).
- [30] B. Caughey y T. Peter. Protofibrils, pores, fibrils and neurodegeneration: Separating the responsible protein aggregates from the innocent bystanders. *Annu. Rev. Neurosci.*, 26:267, (2003).
- [31] W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling y M. Metcalf. *Numerical recipes in fortran 90*, volume 2. Cambridge University Press, 2 edition, (1997).

- [32] N. Islam, H. P. Mazumdar y A. Das. On the stability control of the schimizu-morioka system of dynamical equations. *Diferencial Geometry-Dynamical System*, 11:135, (2009).
- [33] T. Gross y U. Feudel. Analytical search for bifurcation surfaces in parameter space. *Physica D*, 195:292, (2004).
- [34] R. E. Tanzi. The synaptic $\alpha\beta$ hypothesis of alzheimer disease. *Nature Neuroscience*, 8(8):977, (2005).
- [35] M. Rosenblum y A. Pikovsky. Delayed feedback control of collective synchrony: An approach to suppression of pathological brain rhythms. *Physical Review E*, 70, (2004).



CÓDIGOS ELABORADOS

A continuación se presentan los códigos elaborados en lenguaje FORTRAN, para integrar los sistemas de ecuaciones diferenciales acoplados globalmente, tanto para el caso homogéneo como para el caso heterogéneo.

A.1 Caso Homogéneo

```

PROGRAM RK
!-----
! Este programa resuelve n sistemas de ecuaciones diferenciales
! Metodo de Runge-Kutta de cuarto orden
!-----
IMPLICIT NONE
! son contadores para los DO.
INTEGER :: I, M, w, aa , J
!N es nro de dimensiones, NSTEP iteraciones, NT Unidades de tiempo,
!SIS son los sistemas
INTEGER :: N, NSTEP, NT, SIS
PARAMETER(SIS=10000, N=3)
! H es el paso de integracion, X(SIS,3) son las soluciones,
! Fa(3) son los promedios de cada dimension
DOUBLE PRECISION :: H, X(SIS,N), Fa(N)
! XI(3) rango menor de los valores de CI, XF(3) es el rango mayor de las CI,
! PP(3) es la diferencia del rango, R(SIS,3) el nro aleatorio
DOUBLE PRECISION :: XI(N), XF(N), PP(N), R(SIS,N)
!-----
!WRITE(*,*)"Introduzca el rango menor de valores X(0),Y(0),Z(0), para las CI"
!READ*, XI(1), XI(2), XI(3)

```

```

!WRITE(*,*)"Introduzca el rango mayor de valores X(0),Y(0),Z(0), para las CI"
!READ*, XF(1), XF(2), XF(3)
!WRITE(*,*)"Introduzca el paso con el que desea integrar"
!READ*, H
!WRITE(*,*)"Introduzca el numero de unidades de tiempo que desea integrar"
!READ*, NT
!-----
!Aca se asigna el nro de iteraciones, las unidades de tiempo entre el paso
NSTEP = int(dble(NT)/H)
CALL RANDOM_NUMBER(R)
! Se asignan las condiciones iniciales aleatorias dentro del rango definido
PP = XF - XI
DO I = 1 , SIS
  DO J = 1 , N
    X(I,J)=XI(J) + R(I,J)*(PP(J))
  ENDDO
ENDDO
!-----
OPEN(13, FILE="xp1.dat", POSITION="append", STATUS="unknown")
OPEN(31, FILE="x1SYS.dat", POSITION="append", STATUS="unknown")
OPEN(1, FILE="x2SYS.dat", POSITION="append", STATUS="unknown")
OPEN(11, FILE="x3SYS.dat", POSITION="append", STATUS="unknown")
OPEN(18, FILE="PSIGMA.dat", POSITION="append", STATUS="unknown")
!-----
!-----
!-----
!do: este simplemente se encarga de sacar el promedio de las
  ! condiciones iniciales
  DO aa=1,N
    Fa(aa)=sum(X(:,aa))/DBLE(SIS)
  ENDDO
!-----
!primer do: este se encarga de hacer las iteraciones del "tiempo"
DO 6 M=1,NSTEP
  !segundo do: este se encarga de llamar a el metodo de integracion para cada
  ! uno de los sistemas
  DO 20 w=1, SIS
    !Se llama la subrutina de integracion
    CALL RK4SYS(N, X(w,:), H, Fa)
  ENDDO
20

```

```

!tercer do: este simplemente se encarga de sacar el promedio de los
! X_i, Y_i y Z_i anteriores.
DO aa=1,N
  Fa(aa)=sum(X(:,aa))/DBLE(SIS)
ENDDO
!-----
  IF (M>=int(100.0/H)) THEN
!Se llama la subrutina que calcula el promedio de la desviación estándar
CALL PDE(X, Fa, SIS)
!Se escribe en el archivo de salida los valores promedios de cada dimension
WRITE(13,*) Fa
!Se escribe en el archivo de salida todas las X's de todos los sistemas
WRITE(31,*) X(:,1)
!Se escribe en el archivo de salida todas las Y's de todos los sistemas
WRITE(1,*) X(:,2)
!Se escribe en el archivo de salida todas las Z's de todos los sistemas
WRITE(11,*) X(:,3)
!-----
6  ENDDO
!-----
!----- Se cierran los archivos de salida -----
CLOSE(13)
CLOSE(31)
CLOSE(1)
CLOSE(11)
CLOSE(18)
!-----
STOP
END PROGRAM
!*****
!-----
! EL METODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN
! las entradas son:
! N:es el numero de ecuaciones de cada sistema
! X: es el vector con los valores para poder integrar, ademas el mismo
! es la salida con los nuevos datos
! H: es el paso de integracion
! fa: es un vector (1:3) que se utilizará como Funcion de acoplamiento
!-----
SUBROUTINE RK4SYS(N, X, H, Fa)

```

```

IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION :: X(3), Y(3) , k1(3), k2(3), k3(3), k4(3), Fa(3)
DOUBLE PRECISION :: H2, H6, H
INTEGER :: N, I
    H2= (5.d-1)*H
    H6=H/(6.d0)
    CALL XSYS(X, k1, Fa)
    DO 2 I=1,N
Y(I)=X(I) + H2*k1(I)
2    enddo
    CALL XSYS(Y, k2, Fa)
    DO 3 I=1,N
Y(I)=X(I) + H2*k2(I)
3    enddo
    CALL XSYS(Y, k3, Fa)
    DO 4 I=1,N
Y(I)=X(I) + H*k3(I)
4    enddo
    CALL XSYS(Y, k4, Fa)
    DO 5 I=1,N
X(I) = X(I) + H6*(k1(I) + (2.d0)*(k2(I) + k3(I)) + k4(I))
5    enddo
    RETURN
    END SUBROUTINE

!-----
! EN ESTA SUBROUTINA SE ENCUENTRAN LAS ECUACIONES A RESOLVER
! X: Son los valores anteriores
! DX: Es un vector (1:3) con los valores de los k del runge-kutta
! para cada una de las dimensiones
! Fa: es un vector (1:3) que se utilizará como funcion de acoplamiento;
!-----
SUBROUTINE XSYS(X, DX, Fa)
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION :: X(3), DX(3), Fa(3)
!a, b son los parametros intrinsecos del sistema de ecuaciones
! e: es el parametro de acoplamiento
DOUBLE PRECISION :: e, a, b
!!! GALLAS !!!
    a=4.0d-1
    b=9.0d-1

```

```

e=2.2d-1
DX(1)= X(2)
DX(2)= X(1) - X(1)*X(3) - b*X(2)
DX(3)= -a*(X(3) - X(1)**2) + e*Fa(3)
RETURN
END SUBROUTINE
!-----
! EN ESTA SUBROUTINA SE CALCULA EL PROMEDIO DE LA DESVIACION
!ESTÁNDAR PARA CADA SISTEMA
! X(SIS,3): una matriz de las 3 variables de cada sistema
! Fa: es un vector (1:3) que contiene los promedios de las variables para cada sistema;
!SIGMA: Es la desviación estandar de cada sistema
!PSIGMA: Es el promedio de las desviones estandar
!-----
SUBROUTINE PDE(X, Fa, SIS)
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION :: X(SIS,3), Fa(3), SIGMA(SIS), PSIGMA
INTEGER :: I, SIS
DO I=1,SIS
SIGMA(I)=SQRT((X(I,1) - Fa(1))**2 + (X(I,2) - Fa(2))**2 + (X(I,3) - Fa(3))**2)
ENDDO
PSIGMA=sum(SIGMA(:))/DBLE(SIS)
WRITE(18,*) PSIGMA
RETURN
END SUBROUTINE
!-----

```

A.2 Caso Heterogéneo

```

PROGRAM RK
!-----
! Este programa resuelve n sistemas de ecuaciones diferenciales
! Metodo de Runge-Kutta de cuarto orden
!-----
IMPLICIT NONE
! son contadores para los DO.
INTEGER :: I, M, w, aa , J, U
!N es nro de dimensiones, NSTEP iteraciones, NT Unidades de tiempo,
! SIS son los sistemas

```

```

INTEGER :: N, NSTEP, NT, SIS
PARAMETER(SIS=1300, N=3)
! H es el paso de integracion, X(SIS,3) son las soluciones, Fa(3) son los
! promedios de cada dimension, A y B son los paramtros intrinsecos de los sistemas
DOUBLE PRECISION :: H, X(SIS,3), Fa(3), A(SIS), B(SIS)
!XI(3) rango menor de los valores de CI, XF(3) es el rango mayor de las CI,
!PP(3) es la diferencia del rango para fijar las CI, R(SIS,3) el nro aleatorio,
!U es la diferencia del rango para fijar los A
DOUBLE PRECISION :: XI(3), XF(3), PP(3), R(SIS,3), U
!-----
!WRITE(*,*)"Introduzca el rango menor de valores X(0),Y(0),Z(0), para las CI"
!READ*, XI(1), XI(2), XI(3)
!WRITE(*,*)"Introduzca el rango mayor de valores X(0),Y(0),Z(0), para las CI"
!READ*, XF(1), XF(2), XF(3)
!WRITE(*,*)"Introduzca el paso con el que desea integrar"
!READ*, H
!WRITE(*,*)"Introduzca el numero de unidades de tiempo que desea integrar"
!READ*, NT
!-----
!Aca se asigna el nro de iteraciones, las unidades de tiempo entre el paso
NSTEP = int(dble(NT)/H)
CALL RANDOM_NUMBER(R)
! Se asignan las condiciones iniciales aleatorias dentro del rango definido
PP = XF - XI
DO I = 1 , SIS
  DO J = 1 , N
    X(I,J)=XI(J) + R(I,J)*(PP(J))
  ENDDO
ENDDO
!-----
! se asignan los valores de A aleatorios dentro de un rango definido.
! se asigna los valores de B mediante la ec. de la recta usando los
! valores de A obtenidos de forma aleatoria.
U = 4.0d-1 - 1.0d-1
A = 1.0d-1 + R(:,1)*(U)
DO q=1,SIS
  B(q)= 1.67*A(q) + 2.0d-1
ENDDO

```



```

!-----
OPEN(13, FILE="xp1.dat", POSITION="append", STATUS="unknown")
OPEN(31, FILE="x1SYS.dat", POSITION="append", STATUS="unknown")
OPEN(1, FILE="x2SYS.dat", POSITION="append", STATUS="unknown")
OPEN(11, FILE="x3SYS.dat", POSITION="append", STATUS="unknown")
OPEN(14, FILE="ASYS.dat", POSITION="append", STATUS="unknown")
OPEN(16, FILE="BSYS.dat", POSITION="append", STATUS="unknown")
OPEN(18, FILE="PSIGMA.dat", POSITION="append", STATUS="unknown")
!-----
!-----
!do: este simplemente se encarga de sacar el promedio de las
! condiciones iniciales
DO aa=1,N
  Fa(aa)=sum(X(:,aa))/DBLE(SIS)
ENDDO
!-----
!-----
!primer do: este se encarga de hacer las iteraciones del "tiempo"
DO 6 M=1,NSTEP
  !segundo do: este se encarga de llamar a el metodo de integracion para cada
  ! uno de los sistemas
  DO 20 w=1, SIS
    !Se llama la subrutina de integracion
    CALL RK4SYS(N, X(w,:), H, Fa, A(w), B(w))
20  ENDDO
!tercer do: este simplemente se encarga de sacar el promedio de los
! X_i, Y_i y Z_i anteriores.
DO aa=1,N
  Fa(aa)=sum(X(:,aa))/DBLE(SIS)
ENDDO
!-----
!-----
IF (M>=int(100.0/H)) THEN
!Se llama la subrutina que calcula el promedio de la desviación estándar
CALL PDE(X, Fa, SIS)
!Se escribe en el archivo de salida los valores promedios de cada dimension
WRITE(13,*) Fa
!Se escribe en el archivo de salida todas las X's de todos los sistemas
WRITE(31,*) X(:,1)
!Se escribe en el archivo de salida todas las Y's de todos los sistemas
WRITE(1,*) X(:,2)
!Se escribe en el archivo de salida todas las Z's de todos los sistemas

```

```

        WRITE(11,*) X(:,3)
!-----
6  ENDDO
    WRITE(14,*) A(:)
    WRITE(16,*) B(:)
!-----
!----- Se cierran los archivos de salida -----
    CLOSE(13)
    CLOSE(31)
    CLOSE(1)
    CLOSE(11)
!-----
STOP
END PROGRAM
!-----
!-----
! EL METODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN
! las entradas son:
! N:es el numero de dimensiones de los sistemas
! X: es el vector con los valores para poder integrar, ademas el mismo
! es la salida con los nuevos datos
! H: es el paso de integracion
! fa: es un vector (1:3) que se utilizará como Funcion de acoplamiento
! A y B son los parametros intrinsecos del sistema, son distitntos para cada sistema
!-----
SUBROUTINE RK4SYS(N, X, H, Fa, A, B)
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION :: X(3), Y(3) , k1(3), k2(3), k3(3), k4(3), Fa(3)
DOUBLE PRECISION :: H2, H6, H, T, A, B
INTEGER :: N, I
    H2= (5.d-1)*H
    H6=H/(6.d0)
    CALL XSYS(X, k1, Fa, A, B)
    DO 2 I=1,N
Y(I)=X(I) + H2*k1(I)
2    enddo
    CALL XSYS(Y, k2, Fa, A, B)
    DO 3 I=1,N
Y(I)=X(I) + H2*k2(I)
3    enddo

```

```

        CALL XSYS(Y, k3, Fa, A, B)
        DO 4 I=1,N
Y(I)=X(I) + H*k3(I)
4      enddo
        CALL XSYS(Y, k4, Fa, A, B)
        DO 5 I=1,N
X(I) = X(I) + H6*(k1(I) + (2.d0)*(k2(I) + k3(I)) + k4(I))
5      enddo
        RETURN
        END SUBROUTINE

```

```

!-----
! EN ESTA SUBROUTINA SE ENCUENTRAN LAS ECUACIONES A RESOLVER
! X: Son los valores anteriores
! DX: Es un vector (1:3) con los valores de los k del runge-kutta
! para cada una de las dimensiones
! Fa: es un vector (1:3) que se utilizará como funcion de acoplamiento;
! A y B son los parametros intrinsecos del sistema, son distitntos para cada sistema
!-----

```

```

SUBROUTINE XSYS(X, DX, Fa, A, B)
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION :: X(3), DX(3), Fa(3), A, B
! e es el parametro de acoplamiento
DOUBLE PRECISION :: e
!!! GALLAS !!!
    e= 1.5d-1
    DX(1)= X(2)
    DX(2)= X(1) - X(1)*X(3) - B*X(2)
    DX(3)= -A*(X(3) - X(1)**2) + e*Fa(3)
RETURN
END SUBROUTINE

```

```

!-----
! EN ESTA SUBROUTINA SE CALCULA EL PROMEDIO DE LA DESVIACION
!ESTÁNDAR PARA CADA SISTEMA
! X(SIS,3): una matriz de las 3 variables de cada sistema
! Fa: es un vector (1:3) que contiene los promedios de las variables para cada sistema;
!SIGMA: Es la desviación estandar de cada sistema
!PSIGMA: Es el promedio de las desviones estandar
!-----

```

```

SUBROUTINE PDE(X, Fa, SIS)
IMPLICIT NONE

```

```
DOUBLE PRECISION :: X(SIS,3), Fa(3), SIGMA(SIS), PSIGMA
INTEGER :: I, SIS
DO I=1,SIS
SIGMA(I)=SQRT((X(I,1) - Fa(1))**2 + (X(I,2) - Fa(2))**2 + (X(I,3) - Fa(3))**2)
ENDDO
PSIGMA=sum(SIGMA(:))/DBLE(SIS)
WRITE(18,*) PSIGMA
RETURN
END SUBROUTINE
!-----
```