



Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Mérida - Venezuela

Departamento de Física
Centro de Física Fundamental
Área de Caos y Sistemas Complejos

**Formación de Estructuras en un Modelo
Sociodinámico de Conflictos**

Trabajo de grado presentado ante la ilustre
Universidad de Los Andes
como requisito parcial para optar al Título de:
Licenciado en Física

Presentado por:
Br. Diego B. Ortiz S.

Tutor:
Dr. Mario Cosenza

Mérida, Junio de 2008

This will be an eye-opening trip across disciplines that I hope will challenge you to step out of the box of reductionism and explore, link by link, the next scientific revolution: the new science of networks.

Albert Barabasi, *Linked*, The New Science of Networks.

Resumen

Se desarrolla un modelo dinámico coevolutivo de emergencia de estructuras o coaliciones en sistemas sociales basado en las ideas de formación de nuevos actores sociales propuestas por Robert Axelrod. Este modelo permite aplicar diversos conceptos y herramientas provenientes del estudio de sistemas complejos y mecánica estadística. La interacción entre los agentes del sistema sigue la dinámica de conflicto o pago de tributo (pay or else) descrita por Axelrod como un proceso característico en relaciones de poder en sistemas sociales o internacionales. La transferencia de tributos y la ocurrencia de conflictos determinan la aparición de compromisos o acoplamientos entre los agentes, de modo que la conectividad de la red que forman los agentes cambia en el tiempo. De este modo, los estados de los agentes coevolucionan con la topología de la red de conectividad, lo cual permite el surgimiento de conjuntos de elementos fuertemente acoplados que son interpretados como coaliciones. Se investigan las propiedades del modelo en redes regulares. Se encuentran comportamientos colectivos no triviales, tales como leyes de potencia en las distribuciones de probabilidad de tamaños de conflictos, similares a las que se observan en datos históricos y otros sistemas físicos fuera de equilibrio.

It must be splendid to command millions of people in great national ventures, to lead a hundred thousand to victory in battle. But it seems to me greater still to discover fundamental truths in a very modest room with very modest means-truths that will still be foundations of human knowledge when the memory of these battles is painstakingly preserved only in the archives of the historian.

Ludwig Boltzmann.

Agradecimientos

A Dios quien me puso en este camino y se aseguró de que pudiera llegar al final.

Como un pequeño testimonio por el gran apoyo brindado durante estos años, en los cuales he logrado terminar mi carrera profesional quisiera agradecer a quienes hicieron posible culminar esta meta. Sin ellos llegar a este punto y hacerlo realidad no tendría sentido alguno:

A mi tutor Mario Cosenza, por su gran sabiduría, paciencia, calma. Porque más que un tutor es un padre y un ejemplo a seguir.

Al Profesor Kay Tucci, sin el cual este trabajo no hubiese sido posible, a quien le agradezco infinitamente su ayuda. A usted y al Profesor Mario les estaré eternamente agradecido por todo el conocimiento que han compartido conmigo.

A Juan Carlos, por su gran apoyo, por sus ideas, consejos y grandes aportes para el desarrollo de esta tesis gracias por todo.

Al Profesor Orlando Álvarez por su gran simpatía y amistad.

Al Profesor Antonio Parravano, por su gran sentido del humor y su trato cordial.

A mis amigos caóticos que me han ayudado tanto, José Luis, Javier, Hender, Jose Manuel, Aquiles, Miguel Angel, y las infaltables tortugas ninja Victor y Leonardo, gracias por todo.

A las niñas del grupo Mariana y Alejandrita.

A mi Madre, y hermanos Norma, David y Andrés, a los cuales les debo mi vida completa.

A mis tías Chepita y Myriam, porque no hay palabras para expresar todo lo que les debo a ustedes.

A la familia Manjarres Ramos por adoptarme como un hijo, a los cuales considero mi segunda familia.

A Belkis por su gran amistad y por darme calor de hogar lejos de casa.

A Joany no hay palabras para describir todo lo que te amo.

A Kristell gracias por tu gran amistad durante todos estos años.

A mi amigos de San Cristóbal, Mérida y Caracas con los cuales tengo tantos recuerdos, con los que he crecido y siempre serán hermanos para mi.

Índice general

Resumen	I
Introducción	1
1. Modelo de Formación de Coaliciones	4
1.1. Modelo de tributo y conflicto de Axelrod.	4
1.2. Formulación matemática del modelo de tributo y conflicto.	7
1.3. Dinámica del modelo de conflicto y tributo	12
1.3.1. Sistema Unidimensional.	12
1.3.2. Sistema Bidimensional.	22
2. Formación de Estructuras en el Modelo de Axelrod.	25
3. Comportamientos colectivos en el modelo de Axelrod	35
3.1. Caracterización de la Matriz de Compromisos	35
3.2. Propiedades estadísticas y leyes de potencia en el modelo de Axelrod	39
Conclusiones	49
Bibliografía	52

Ahora que la mente humana ha comprendido la física celeste y la física terrestre, la física química, la física orgánica, tanto vegetal como animal, queda una Ciencia por completar la serie de ciencias de la observación: la Física Social. Esta es la que los hombres más necesitan hoy en día; y ésta es el objetivo del presente trabajo.

Auguste Comte, Cours de Philosophie Positive (1830).

Introducción

La presente investigación pretende mostrar y comprender la emergencia de estructuras, organización y asociación en sistemas complejos, a partir de las interacciones entre unidades básicas en un contexto social. En la presente tesis desarrollamos un modelo socio-dinámico basado en un modelo propuesto por el destacado sociólogo Robert Axelrod, de la Universidad de Michigan, en un artículo titulado *Building New Political Actors* [1].

Expertos en ciencias sociales emplean una variedad de conceptos y teorías para analizar el surgimiento de nuevas estructuras, agrupaciones o alianzas, las cuales Axelrod denomina nuevos actores políticos en su artículo.

Los modelos previos han asumido de entrada la presencia de organizaciones complejas y, por lo tanto, no proponen mecanismos para explicar cómo pudieron aparecer estas estructuras organizadas. Tradicionalmente, el paradigma fundamental de los modelos de formación de estructuras sociales o coaliciones ha sido la teoría de juegos [2]. Esta teoría presupone el conocimiento de quiénes son los agentes en un sistema, y las estrategias que éstos adoptan en condiciones muy particulares; pero los agentes no forman espontáneamente alianzas o estructuras organizadas. En contraste, el

modelo de Axelrod [1] utiliza técnicas y conceptos provenientes del estudio de los sistemas complejos adaptativos [3][4][5].

La tarea en manos involucra la emergencia de estados colectivos auto-organizados en una sociedad. Esto es una cuestión vital en el mundo actual, ya que estamos experimentando una era en la cual la unidad política estándar, la nación, ya no es completamente estable. Vemos por un lado, como algunos estados se están desintegrando, como la Unión Soviética y Yugoslavia; mientras que por otro lado, entidades grandes se están organizando, como la Unión Europea, la O.N.U., la O.E.A., el Merco Sur, el Alba, y otras asociaciones regionales, para lograr una mayor sustentabilidad socio-económica. El problema de la agrupación y separación de estructuras y alianzas políticas es esencial para el entendimiento del futuro de la geopolítica mundial.

El problema guarda semejanza con la forma cómo sistemas biológicos hacen la transición de estructuras simples (organismos unicelulares) a estructuras con mayor grado de organización y funcionalidad (organismos multicelulares, órganos y tejidos) [6]. Del mismo modo, las neuronas del cerebro se organizan para producir procesos mentales sofisticados, como la memoria, razonamiento lógico o la conciencia [7], y las redes de mapas acoplados, introducidas simultáneamente por K. Kaneko [8] y R. Kapral [9], pueden exhibir comportamientos colectivos no triviales [10].

Estos fenómenos colectivos presentes en diversos contextos y que aparecen de forma universal, se enmarcan dentro del estudio de los sistemas complejos.

Actualmente existe un gran interés en estudiar y comprender las redes dinámicas coevolutivas por sus aplicaciones en una gran cantidad de campos (sociología, política, economía, biología, entre otras).

En la presente tesis nos proponemos investigar los comportamientos colectivos que se generan en el modelo de tributo y conflicto de Axelrod como un ejemplo interesante de un sistema complejo en el cual la dinámica de interacción entre sus elementos constituyentes está regida por reglas simples, locales y bien definidas.

Así, de tal forma en el Capítulo 1 se presenta una revisión del modelo de Axelrod, y se desarrolla su correspondiente formulación matemática, incluyendo los códigos computacionales e interfaces gráficas.

El Capítulo 2 contiene la contribución central de esta tesis, que consiste en el desarrollo de un código computacional basado en un algoritmo genético para ordenar las matrices de acoplamiento que surgen en la evolución de este sistema. Este proceso de ordenamiento permite caracterizar la formación de estructuras y el surgimiento de niveles superiores de organización.

En el Capítulo 3 se procede a la caracterización de las estructuras o coaliciones que se forman en las matrices de acoplamiento. Además, se estudian las propiedades estadísticas, y las distribuciones de probabilidad en este sistema. Se encuentra que estas distribuciones siguen leyes de potencia similares a las encontradas en datos históricos reales.

Finalmente se presentan los resultados de este trabajo en las Conclusiones.

If ever there was a time for complexity theory to come into its own within the operations research community (much as mathematical search theory did in WWII), that time is now!

Neil Johnson.

Capítulo 1

Modelo de Formación de Coaliciones

1.1. Modelo de tributo y conflicto de Axelrod.

La idea básica de este modelo consiste en mostrar cómo pueden surgir nuevos niveles de organización y asociación en sistemas sociales a partir de reglas simples de interacción entre los elementos del sistema.

Dado que el objetivo del modelo es explicar la emergencia de nuevos actores o estructuras, es importante tener un criterio que pueda ser usado para identificar a un nuevo actor cuando éste surja. El criterio propuesto por Axelrod para identificar un nuevo actor político como un conjunto emergente de relaciones entre unidades existentes, es el siguiente

1. Control efectivo sobre los subordinados.
 - a. Pequeña rebelión.
 - b. No independencia.

2. Acción colectiva ("todos para uno y uno para todos").

- a. Paternalismo: protección del débil por el fuerte.
- b. Política exterior.

3. Reconocimiento por otros de que se es un actor.

Esta lista está inspirada en leyes internacionales históricas y contemporáneas, y en la relativa práctica del reconocimiento de nuevos estados por la comunidad mundial de naciones. Por ejemplo, de 13 colonias iniciales, se creó una nación llamada Estados Unidos, cuando el gobierno central fue establecido, se obtuvo

1. Control efectivo sobre los estados individuales:

- a. con sólo pequeños niveles de rebelión (por lo menos hasta la guerra civil),
y
- b. con una prohibición de tratados entre estados individuales y otras naciones;

2. control colectivo sobre importantes recursos:

- a. que permitió que intereses federales dominaran sobre los intereses estatales, por lo menos en un dominio importante; y
- b. que permitió el desarrollo de una política exterior en materia de guerra y paz; y

3. reconocimiento de su independencia por otras naciones, como Francia y Gran Bretaña.

Mientras que la emergencia de los Estados Unidos no es un ejemplo muy típico, ilustra el proceso esencial de cómo un nuevo actor puede resultar del agrupamiento de pequeños agentes. En el caso estadounidense. El caso más típico, y el cual se modela en este trabajo, ocurre cuando el surgimiento de una estructura consiste esencialmente en una coalición o cluster.

En el contexto de este trabajo definimos una coalición como una configuración de elementos contiguos en el espacio cuyo grado de acoplamiento mutuo es mayor que

un cierto valor umbral. En general, existe un elemento que posee el mayor número de conexiones o acoplamientos con los demás agentes, coaliciones de este tipo se definen como imperios. Algunos ejemplos históricos que ilustran este proceso son el imperio romano, persa, soviético y chino, entre otros.

Decimos que existe un conflicto entre dos agentes (o conjuntos de agentes) en disputa cuando hay pérdida de recursos de todos los agentes involucrados. Los conflictos resultan costosos para ambos bandos, pero especialmente para el más débil [11][12]. Un tributo en el modelo consiste en la transferencia forzada de recursos del demandado al demandante. Esta transferencia de tributo se asume como una cantidad fija. Se descarta en el modelo la posibilidad de conquista territorial o absorción de un agente por otro para garantizar que cada agente pueda mantenerse como unidad elemental independiente y para permitir la aparición de acoplamientos o compromisos entre los agentes. De esta manera surge la posibilidad de la emergencia de conjuntos de elementos que formen coaliciones o clusters.

Coacción en general y extorsión en particular juegan un rol central en la formación de estados a través del tiempo [13]. Por esta razón, la base de este modelo es la dinámica simple de conflicto o pago de tributo “pay or else”, descrita por Axelrod como proceso característico en relaciones internacionales o en la distribución de poder en sistemas sociales.

La dinámica elemental de *pay or else* consiste en que un agente puede hacer una demanda de transferencia de recursos a uno de sus vecinos, bajo la amenaza de la posibilidad de un conflicto en caso de que aquel no acceda a la demanda.

Desde el punto de vista de los sistemas complejos, el modelo consiste en un sistema dinámico espaciotemporal discreto, del tipo redes de mapas acoplados (espacio y tiempo discretos, y estados continuos) con interacciones adaptativas; es decir, los acoplamientos entre los elementos no son fijos sino que dependen del estado de los mismos. No existen objetivos específicos, racionalidad ni intencionalidad. Por lo tanto, el comportamiento colectivo resultante de las interacciones del sistema es auto-organizado. Nuestra motivación es mostrar cómo ciertos ingredientes dinámi-

cos mínimos son capaces de explicar el surgimiento espontáneo de estructuras y organizaciones colectivas comunes en muchos sistemas dinámicos, y en este caso particular, en un contexto social. Los agentes del sistema representan unidades sociales o políticas independientes, tales como individuos, que interactúan de acuerdo a reglas locales bien definidas.

1.2. Formulación matemática del modelo de tributo y conflicto.

En esta parte desarrollamos la formulación matemática del modelo de la emergencia de nuevos actores políticos de Axelrod [14].

El sistema se define por N agentes ubicados en una red con condiciones de contorno periódicas para garantizar que todos los elementos tengan la misma cantidad de vecinos y así evitar favorecer algún agente en particular. Cada agente i del sistema posee un recurso o riqueza W_i , que describe su estado. La riqueza inicial es escogida de una distribución uniforme $W_i \in [W_{\text{mín}}, W_{\text{máx}}]$. Estos parámetros, como los demás en el modelo, son en cierto punto arbitrarios y han sido seleccionados por conveniencia.

En cada iteración del sistema, un elemento i es escogido al azar para volverse activo (A) y demandar un pago de tributo q a uno de sus vecinos j , que se denota como blanco (T). Inicialmente, el blanco T de la demanda debe ser uno de sus primeros vecinos (j), pero durante la evolución del sistema, esta restricción cambia cuando se empiecen a considerar las alianzas. Una vez que el actor A tiene la posibilidad de hacer una demanda, éste no tiene necesariamente que llevarla a cabo si las condiciones no le son favorables.

Si A realiza una demanda, el blanco T tiene dos opciones.

- 1) Si T paga, riqueza será transferida directamente de T a A . La cantidad de riqueza transferida es q (tributo) si T tiene esa cantidad ($W_T > q$), de otra

manera, la cantidad transferida a A es todo lo que tenga B (W_T si $W_T < q$).

- b) Si T pelea en lugar de pagar, cada lado involucrado pierde en proporción de la riqueza de su oponente. Es decir,

$$L_A = kW_T; \tag{1.1}$$

y

$$L_T = kW_A; \tag{1.2}$$

donde L_A y L_T son las pérdida de riqueza del elemento activo A y el blanco elegido T , y k es un parametro que describe la pérdida.

Este proceso es similar a la dinámica simple de desgaste propuesta por Lanchester [11][12]. La idea es que en una pelea ambos lados pierden, pero el lado más fuerte impone mayor daño que el lado más débil.

El ciclo básico del modelo es llamado un año. Un año consiste en un número λ de activaciones. Después de cada año, los recursos de cada agente se incrementan en una cantidad r , la cual representa una cosecha u otra fuente homogénea de ingresos. El año termina con una cosecha que incrementa la riqueza de cada actor en r . Esto introduce nueva riqueza en el sistema. Esta cantidad r representa ganancias no provenientes de un pago de tributo.

Es importante señalar que, desde un punto de vista de la física, se está estudiando un sistema que se encuentra fuera de equilibrio y al que periódicamente se le está reinyectando energía (riqueza) para mantener la dinámica (sistema disipativo).

El siguiente paso es estudiar las reglas de decisión utilizadas por los agentes para hacer y responder a las demandas. Para establecer estas reglas se deben realizar algunas consideraciones:

El agente activo A debe decidir a quien demandar, el blanco ideal T es lo suficientemente débil como para que elija pagar en vez de ir a un conflicto, y que no cause demasiado daño si decide pelear. Por otra parte, el blanco ideal debe ser lo suficientemente fuerte para que esté en condiciones de pagar tanto como sea posible.

Estas tres consideraciones son los requisitos mínimos que debe cumplir un elemento del sistema para ser seleccionado como mejor blanco. Se define la vulnerabilidad de un vecino j con respecto a A como

$$V_{A,j} = \frac{W_A - W_j}{W_A}, \quad (1.3)$$

siendo W_A y W_j las riquezas del elemento activo (A) y el vecino (j).

Una regla de decisión apropiada que combina estas tres consideraciones es elegir entre los blancos potenciales aquel que maximice el producto de la vulnerabilidad $V_{A,j}$ del blanco y su pago posible, cuya expresión matemática la definimos como

$$T = \{j | \max[V_{A,j} \times \min(W_j, q)]\}. \quad (1.4)$$

Si ningún blanco potencial tiene vulnerabilidad positiva (ningún blanco potencial es más débil que el demandante), entonces ninguna demanda es hecha.

La regla de decisión usada por el blanco es más simple: T pelea si y sólo si ello le costara menos que pagar tributo q , es decir si $L_T < \min(W_j, q)$.

Nótese que después de un conflicto, la diferencia de riqueza entre A y T es $(1 + k)(W_A - W_T)$.

Hasta ahora hemos considerado sólo interacciones con primeros vecinos. Pero para estudiar el desarrollo de la emergencia de nuevos actores, tiene que haber una manera de que los actores básicos trabajen juntos. La idea fundamental para el surgimiento de coaliciones es que los elementos generen grados de compromisos entre ellos. Definimos como compromisos a la medida de la intensidad del acoplamiento entre los elementos del sistema. Estos grados de acoplamiento o niveles de compromisos permiten que en el sistema surjan coaliciones (clusters), y que a su vez se

formen grupos bien diferenciados. Estos grados de compromiso son generados por las opciones de pagar o pelear durante la evolución dinámica del modelo. Los grados de compromisos entre los N agentes del sistema se describen por una matriz simétrica $N \times N$ de compromisos \mathbf{C} .

Inicialmente, no existen compromisos entre los agentes del sistema; éstos se van creando a medida que las demandas, los pagos y los conflictos tienen lugar. Además, cada actor está completamente comprometido consigo mismo $C_{ii} = 1$, Los compromisos C_{ij} entre i y j se incrementan cuando:

- a) i paga tributo a j (sumisión, servilidad).
- b) i recibe tributo de j (protección), o
- c) i pelea en el mismo bando de j (amistad).

Similarmente, los compromisos disminuyen cuando:

- d) i pelea en el bando opuesto de j (hostilidad).

Una vez establecida la dinámica de demandas y tributos y de cómo éstas acciones aumentan o disminuyen los compromisos, incorporamos la posibilidad de la formación de coaliciones o alianzas. Una alianza o coalición es un conjunto de elementos cuyos compromisos mutuos son mayores que un valor umbral dado u .

Inicialmente, el blanco T de la demanda debe ser uno de sus primeros vecinos (j), pero durante la evolución del sistema ésta restricción cambia cuando se empiecen a considerar las alianzas¹.

Un agente k adyacente, ya sea al elemento atacante A o al agente blanco T , se une al agente con el que tenga mayor compromiso. En el caso de que k posea iguales

¹Por ejemplo, supongamos que tenemos un sistema unidimensional de 10 elementos con condiciones periódicas, y el agente 1 decide hacer una demanda al agente 3; esto es posible si y sólo si el actor 2 está más comprometido con 1 que con 3. Luego, el agente 5 puede unirse a favor de 3 si 4 se le une también a 3, y esto ocurre si 4 y 5 tienen más compromisos (mayor acoplamiento) con 3 que con 1.

compromisos con A y con T , entonces k permanece neutral. Esta dinámica permite distinguir tres grupos en el sistema en un instante dado:

- i) Una coalición en favor del agente A , a la que llamaremos coalición α .
- ii) Una coalición en favor del blanco T , que definiremos como coalición τ .
- iii) Un grupo de agentes neutrales.

Como hemos indicado, si un agente i se une a una coalición α o τ , éste aportará a la coalición parte de su riqueza proporcionalmente a su compromiso C_{iA} o C_{iT} , donde C_{iA} y C_{iT} son los grados de compromiso entre los elementos i y A , y los elementos i y T , respectivamente. La riqueza de las coaliciones W_α y W_τ vienen dadas por las siguientes expresiones

$$W_\alpha = \sum_{i=1}^{N_\alpha} C_{Ai} W_i, \quad (1.5)$$

y

$$W_\tau = \sum_{i=1}^{N_\tau} C_{Ti} W_i, \quad (1.6)$$

donde N_α y N_τ son los conjuntos de elementos que pertenecen a la coalición atacante o a la coalición defensora, respectivamente. Se asume que la matriz de compromisos y las riquezas de todos los elementos forman parte del conocimiento común, por lo tanto, cuando un agente activo A está evaluando la vulnerabilidad de un posible blanco j , aquel puede tomar en cuenta los compromisos y las riquezas de todos los elementos que se unirán a un lado o al otro. Entonces la vulnerabilidad del posible blanco j tomando en cuenta las coaliciones α y τ se escribe

$$V_{A,j} = \frac{W_\alpha - W_\tau}{W_\alpha}. \quad (1.7)$$

De forma similar, se define la pérdida de cada elemento de una coalición en caso de conflicto como

$$L_{i \in \alpha} = kW_\tau \frac{W_i}{W_\alpha}, \quad (1.8)$$

$$L_{i \in \tau} = kW_\alpha \frac{W_i}{W_\tau}. \quad (1.9)$$

En resumen, nuestro modelo consta de cinco parámetros:

- a) El incremento uniforme de riqueza r al final de cada ciclo de λ iteraciones.
- b) La constante de proporcionalidad para pérdida de riqueza k .
- c) El parámetro de cambios de compromisos c .
- d) Unidad de tributos q .
- e) Umbral de compromiso para pertenecer a una coalición u .

1.3. Dinámica del modelo de conflicto y tributo

1.3.1. Sistema Unidimensional.

Comenzaremos por estudiar la dinámica del modelo de Axelrod en un sistema unidimensional. Este sistema consta de $N = 10$ elementos, ubicados en una red unidimensional con condiciones de contorno periódicas. En el sistema la riqueza inicial se distribuye de forma aleatoria en el intervalo $W_i \in [300, 500]$. La cosecha se fija en $r = 20$. Esta cosecha r se reinyecta uniformemente a cada elemento después de $\lambda = 3$ activaciones, estas activaciones definen un ciclo de cosecha, y cada ciclo es un año en la simulación. La constante de pérdida es $k = 0,25$, y el valor de umbral para formar coaliciones es $u = 0,5$. Los grados de compromisos entre los N agentes del sistema se describen por una matriz simétrica de compromisos C , de tamaño $N \times N$, cuyas componentes C_{ij} toman valores entre 0 y 1, correspondientes a ausencia de compromiso y a máximo compromiso, respectivamente. En el modelo suponemos que los compromisos aumentan o disminuyen en una cantidad constante $c = 0,1$ cada vez que se realiza una opción de pago de tributo o de conflicto. Se asume siempre que cada actor está completamente comprometido consigo mismo, $C_{ii} = 1$. Inicialmente, no existen compromisos entre los agentes del sistema, $C_{ij} = 0$, éstos se van creando a medida que las demandas, los pagos de tributo y los conflictos tienen lugar. La cantidad de tributo la fijamos en $q = 250$.

La forma aleatoria de escoger el elemento activo en cada iteración introduce una no linealidad en el sistema que, junto con las reglas de interacción entre los elemen-

tos y la evolución de los acoplamientos, son los ingredientes mínimos que producen la complejidad de este sistema.

Como en cualquier simulación estocástica, el modelo tributo necesita ser ejecutado muchas veces para explorar el tipo de historia que genera. Se realizaron 100 simulaciones correspondientes a distintas distribuciones de condiciones iniciales. En el caso del modelo tributo existe dos fuentes de variación aleatoria: la riqueza inicial de los actores, y la selección de tres actores cada año para ser activos.

Antes de hacer un estudio del comportamiento colectivo del sistema, una buena manera de empezar a apreciar la dinámica del modelo es hacer un breve análisis del comportamiento dinámico de algunos de sus elementos. Las figuras 1.1-a, 1.2-a y 1.3-a, muestran la evolución de la riqueza de los 10 elementos para distintas realizaciones. Estas figuras representan un período de 1000 años para cada elemento en el eje horizontal.

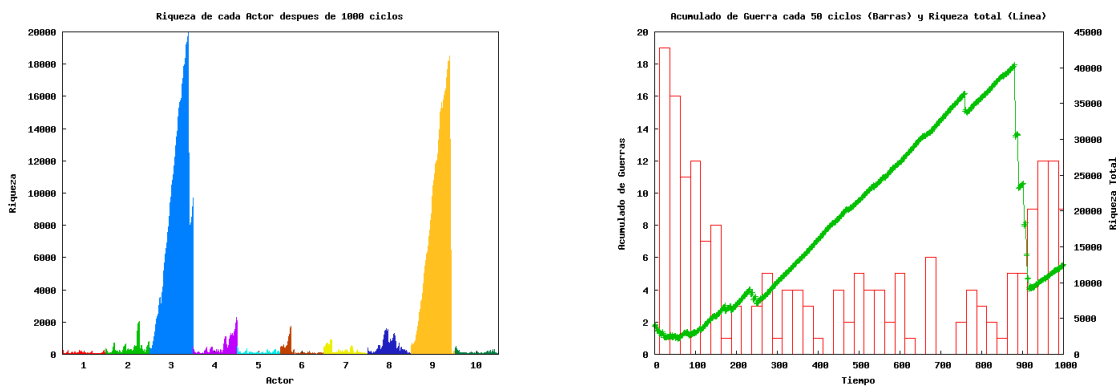


Figura 1.1: a) Evolución de la riqueza a lo largo de la simulación de los 10 elementos del sistema. b) Conflictos consecutivos cada 50 años (barras). W_{total} como función del tiempo (línea). Arreglo unidimensional para $N = 10$, $u = 0,5$, $r = 20$, $q = 250$, $\lambda = 3$.

La figura 1.1-a muestra como dos de los actores (actores 3 y 9) son más ricos que los otros durante la evolución, con el actor 3 teniendo la riqueza mayor. Un observación detallada de la figura 1.1 también muestra que algo dramático sucedió cerca del año 1000; una repentina caída se presenta en los dos actores más ricos,

especialmente en el actor 9.

La figura 1.1-b muestra el número de conflictos consecutivos cada 50 años, y también muestra la riqueza total de la población en el tiempo. Se produjeron muchos conflictos durante la simulación, con un resurgimiento de las peleas en los últimos 200 años. La reaparición de los conflictos corresponde al colapso de la riqueza total de la población en el año 800. Este tipo de colapso mayor sucede en muy pocas realizaciones del modelo.

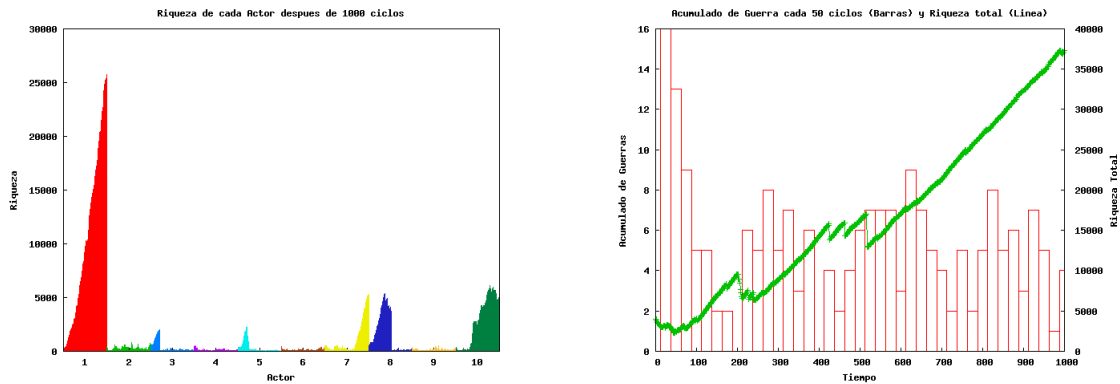


Figura 1.2: a) Evolución de la riqueza a lo largo de la simulación de los 10 elementos del sistema. b) Guerras consecutivas cada 50 años (barras). W_{total} como función del tiempo (línea). Arreglo unidimensional para $N = 10$, $u = 0,5$, $r = 20$, $q = 250$, $\lambda = 3$.

La figura 1.2-a muestra que uno de los elementos (actor 1) acumula mayor riqueza que cualquiera de los otros. Se ve un interesante comportamiento de los elementos 7 y 8; el elemento 8 acumula mucha riqueza, luego experimenta una rápida pérdida, mientras otro elemento (actor 7) surge en el sistema.

La figura 1.2-b muestra un patrón irregular en los conflictos acumulados cada 50 años, y varias caídas moderadas en la riqueza global.

Diferentes historias son generadas por distintas realizaciones de las condiciones iniciales, con los mismos parámetros. Por ejemplo, la figura 1.3 muestra tres actores exitosos; muy pocos conflictos ocurren luego del año 500, y se observa un crecimiento

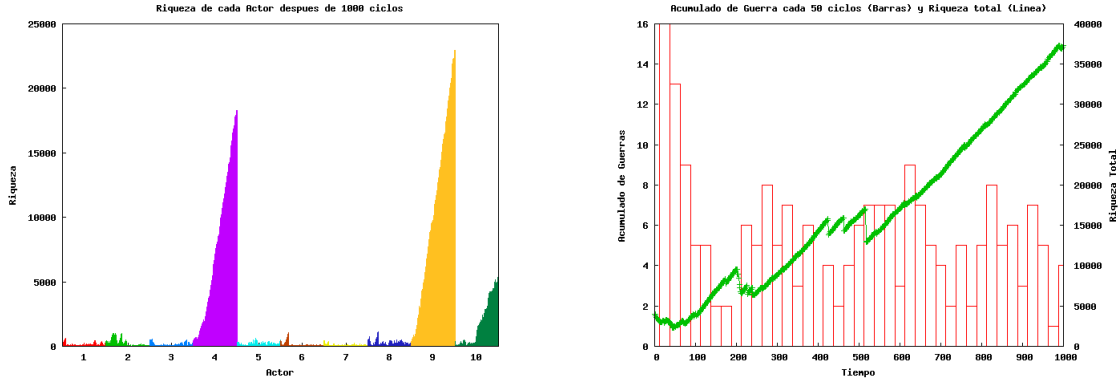


Figura 1.3: a) Evolución de la riqueza a lo largo de la simulación de los 10 elementos del sistema. b) Guerras consecutivas cada 50 años (barras). W_{total} como función del tiempo (línea). Arreglo unidimensional para $N = 10$, $u = 0,5$, $r = 20$, $q = 250$, $\lambda = 3$.

sostenido de la riqueza global.

Las figuras muestran claramente que en cada simulación el sistema sigue una evolución histórica distinta; incluso se puede ver que la historia de cada elemento es diferente en cada realización. Estas variaciones de riquezas en los elementos están sujetas a las acciones de pagar, pelear y de los compromisos que se van creando durante la evolución del sistema.

Otro aspecto interesante a estudiar es el comportamiento de la riqueza total del sistema a lo largo de su evolución. En la figura 1.4 se grafica la riqueza total (W_{total}) del sistema como función del tiempo para varias realizaciones con condiciones iniciales distintas. Como se esperaba, cada realización muestra una historia diferente. Sin embargo se puede notar que, independientemente de la realización, la tendencia de la riqueza total del sistema es creciente, a pesar de los colapsos que ocurren durante la evolución.

Ahora bien, considerando los resultados obtenidos en las simulaciones mostradas en las figuras 1.2 y 1.3, se puede concluir que, aunque la riqueza total del sistema tienda a ir aumentando, la distribución de ésta entre los elementos no es equitativa. Como muestra la figura 1.5, sólo pocos elementos acumulan grandes cantidades de

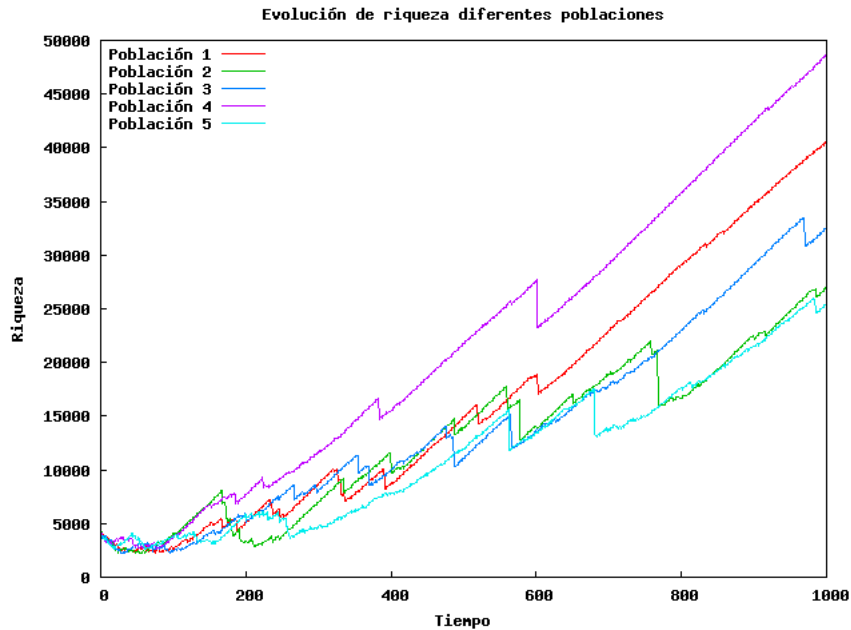


Figura 1.4: Evolución de la W_{total} como función del tiempo. Arreglo unidimensional para $N = 10$, $u = 0,5$, $r = 20$, $q = 250$, $n = 3$.

riqueza, mientras que para el resto su nivel de riqueza es bajo. Estas diferencias en la distribución de riqueza permiten que aquellos agentes muy ricos formen imperios, agrupando a todos aquellos elementos que no les pueden ofrecer pelea y que están obligados a pagar tributo, y por lo tanto comprometerse.

La dinámica del sistema también genera un patrón de compromisos reflejado en la matriz de acoplamiento. Típicamente el primer patrón que emerge se distingue porque los actores desarrollan niveles bajos de compromiso con sus vecinos. Este patrón está ilustrado² en la figura 1.6-a, que muestra la matriz de compromisos en el año 50 correspondiente a la figura 1.3. La figura 1.6-b enseña la red de compromisos asociada a esta simulación. La figura 1.7-a presenta la matriz de compromisos y la figura 1.7-b exhibe la correspondiente red asociada para este sistema en el año 500. La figura 1.7 revela la formación de dos coaliciones, sin ningún compromiso o conexión entre ellas.

²Para el análisis y visualización de los patrones de compromiso, las matrices de compromisos y las redes de compromisos utilizamos el software Pajek 1,15 desarrollado en la universidad de Ljubljana, Slovenia, por Vladimir Batagelj, Andre Mrvar y la contribución de Matjaz Zaversnik.

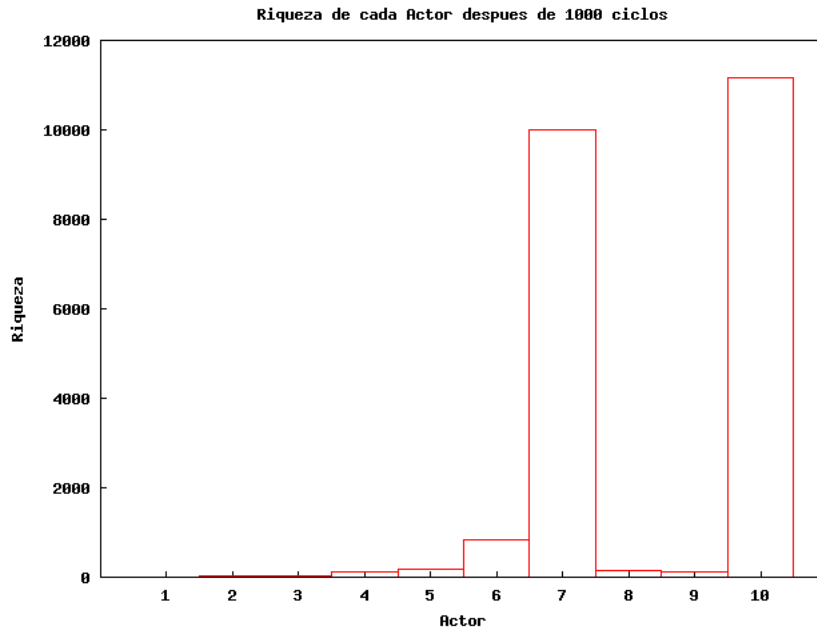


Figura 1.5: Distribución de riqueza de los elementos en $t = 1000$ años.

En algunos casos, es posible la formación de dos coaliciones que tienen en común uno o dos agentes.

La tabla 1.1 muestra la secuencia de pagos de tributos y de conflictos que involucran a un actor en particular para distintos tiempos en una simulación. Se observa que, por ejemplo en el año 50, se escoge como elemento activo al 4, y éste exige demanda de pago a 5; sin embargo 5 decide pelear en vez de pagar y, como consecuencia, 5 se enfrenta a una pequeña coalición formada por 3 y 4. Esta acción hace que el compromiso entre 3 y 4 aumente entre ellos, y los compromisos de 3 y 4 con 5 disminuyan, además de la pérdida de riqueza de los elementos por el hecho de enfrentarse.

Como se ve en la tabla 1.1, en el año 60, el agente 6 demanda pago al agente 5, y éste decide pagar en lugar de pelear; esta acción permite que el compromiso entre 5 y 6 se incremente. En el año 500, ocurre una situación interesante; se observa que 7 exige pago de tributo a 8, sin embargo éste decide pelear en vez de pagar, formando dos coaliciones que se enfrentan. En este caso se observa que todos los

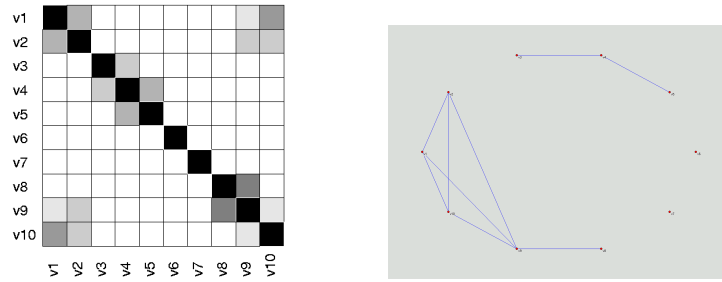


Figura 1.6: a) Matriz de compromisos en el año 50. b) Red asociada a la matriz de compromisos en el año 50.

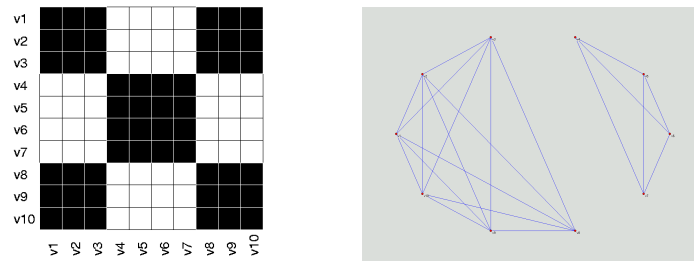


Figura 1.7: a) Matriz de compromisos en el año 500. b) Red asociada a la matriz de compromisos en el año 500.

elementos del sistema se involucran en el conflicto. La figura 1.7-a muestra la matriz de compromisos C , del sistema para el año 500 y en la figura 1.7-b muestra la red de compromisos asociada a esta matriz. Claramente se ve que existen dos grupos bien diferenciados. Estos grupos forman las coaliciones atacante α y la coalición defensora τ .

Año	Activo	Blanco	Rol
50	4	5	-- a A D - - - - -
60	6	5	- - - P R - - - - -
100	8	7	a a a - d d D A a a
200	5	7	- - - - R - P - - -
500	7	8	d d d a a a A D d d

Cuadro 1.1: Evolución de las coaliciones. A = atacante; D = defensor; a = aliado atacante; d = aliado defensor; P = pago de tributo; R = receptor de tributo.

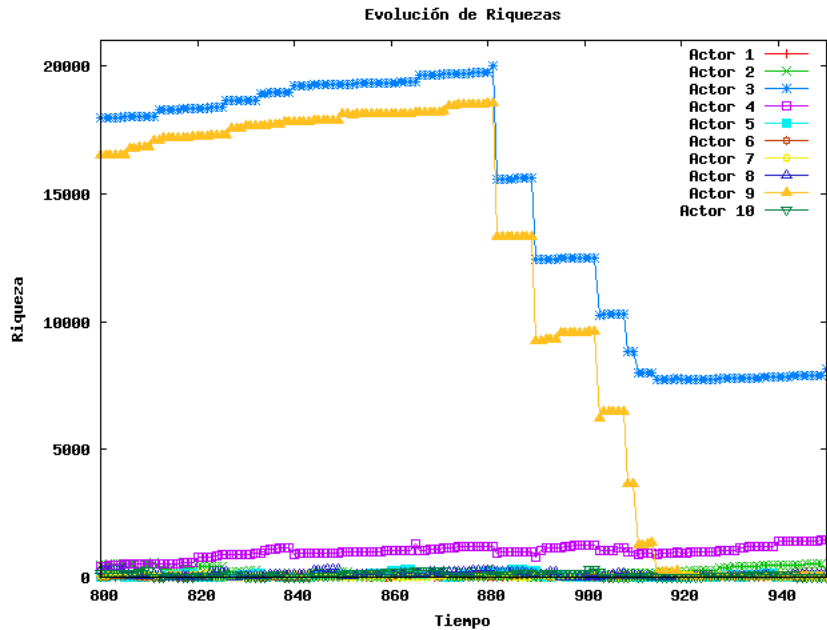


Figura 1.8: Evolución de la riqueza de 10 elementos del sistema en el período de colapso de los actores mas ricos. Arreglo unidimensional para $N = 10$, $u = 0,5$, $r = 20$, $q = 250$, $n = 3$.

Al observar cómo los compromisos conducen a la formación de coaliciones, regresemos al caso inusual de la figura 1.1 donde los dos actores más fuertes colapsan. Ahora podemos ver en detalle el período del colapso que tiene lugar entre los años 860 y 920. Esto es mostrado en la figura 1.8 y en la tabla 1.2. En el año 881, el actor 5 demanda al actor 7, resultando en una "guerra mundial" que involucra a los actores del 1 al 5 contra los demás actores. El actor 3, el más fuerte de este grupo, entra en el conflicto a pesar de tener un compromiso mínimo con 5, pero no posee ningún compromiso con el actor 7. Como el compromiso que 3 tiene con 5 es sólo del 10%, el agente 3 contribuye sólo con el 10% de su riqueza al conflicto y por lo tanto pierde muy poco. Pero en el año 882, el actor 7 vuelve a ser atacado por 5; en este momento 3 contribuye con el 20% de su riqueza, y pierde un poco más. Ahora 3 está más comprometido con los elementos de su coalición de 1 a 5. Desde el año 883 hasta el 887 se llevaron a cabo otras cinco "guerras mundiales" entre las mismas coaliciones (aunque hayan sido diferentes atacantes y blancos). Como los miembros de cada bando se comprometieron cada vez más entre si, más recursos fueron aportados a los conflictos, y por lo tanto se produjeron mayores pérdidas.

El resultado fue una fuerte caída en las riquezas de los actores más ricos de cada coalición (3 en un bando y 9 en el otro).

Año	Activo	Blanco	Rol
881	5	7	a a a a A d D d d d
882	5	7	a a a a A d D d d d
883 – 887			otras 5 Guerras Mundiales

Cuadro 1.2: Evolución de las coaliciones. A = atacante; D = defensor; a = aliado atacante; d = aliado defensor; P = pago de tributo; R = receptor de tributo.

Esta caída dramática del actor más fuerte de cada coalición se produjo por que estos estaban involucrados en peleas provocadas por actores débiles con los cuales se había desarrollado un compromiso.

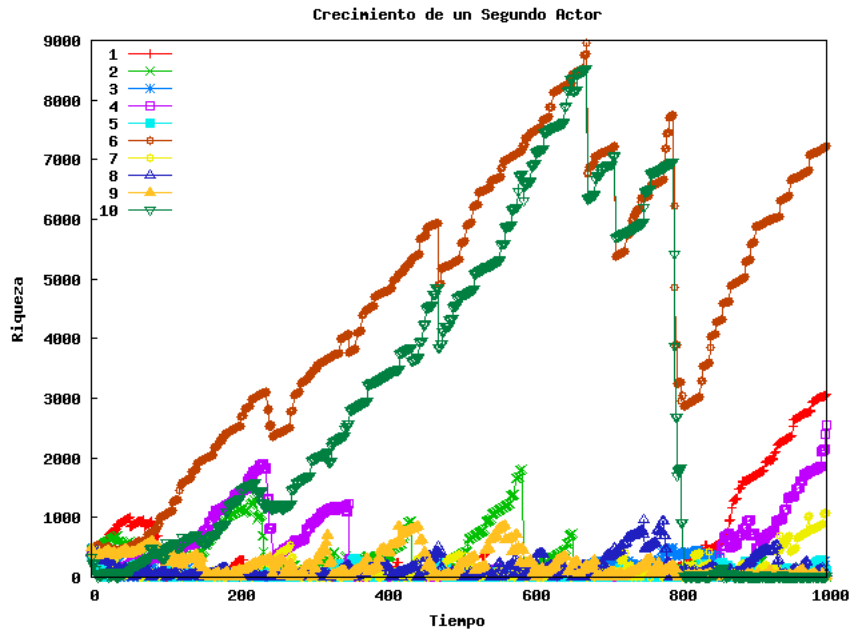


Figura 1.9: Crecimiento de un segundo Actor en un mismo cluster. Arreglo unidimensional para $N = 10$, $u = 0, 5$, $r = 20$, $q = 250$, $n = 3$.

Las coaliciones no son sólo formadas por compromisos mutuos; también son creadas por pago de tributo. El actor más fuerte en un cluster típicamente per-

manece fuerte y crece realizando demandas y recogiendo tributo de los miembros de su coalición. Como los actores crecen lentamente debido a la cosecha anual, el miembro más fuerte de la coalición realiza demandas sobre los débiles y reduce sus riquezas. De hecho si el miembro más fuerte selecciona blancos lucrativos, su demanda tiende a ser rotada entre los miembros de su coalición. Esta rotación tiene la imprevista consecuencia de prevenir que cualquier agente en su coalición aumente fuertemente su riqueza. Pero a veces un miembro débil del cluster escapa de la demanda, lo que le permite ir aumentando suficientemente su riqueza para realizar sus propias demandas sobre miembros aún más débiles. Si el azar le permite ser activo varias veces en esta etapa crítica, este agente puede acumular suficiente tributo como para que el actor más fuerte de la coalición no lo considere como el blanco de su demanda. Un ejemplo de este proceso ocurre luego del año 200 en la figura 1.9. En este ejemplo, el actor 10 ha logrado crecer a la sombra del agente más fuerte de su coalición, el actor 6.

Las demandas dentro del cluster no siempre tienen como resultado pagos de tributo. De hecho (guerras civiles pueden ocurrir); es decir, conflictos entre miembros de una misma coalición. El miembro mas fuerte de una coalición típicamente es lo suficientemente fuerte como para prevenir esa lucha tomando partido por alguno de los bandos. Sin embargo, si el miembro más fuerte está igualmente comprometido con el atacante y con el defensor, permanecerá neutro. Esto permite que ocurran guerras civiles si el actor activo encuentra un blanco lucrativo dentro del mismo cluster, y el blanco encuentra que le costará más pagar tributo que pelear. El atacante y el defensor pueden incluso encontrar aliados entre los demás actores si éstos no están igualmente comprometidos con los dos bandos.

Como vemos, realizaciones diferentes de la distribución de riqueza inicial y el orden en el que los actores son escogidos para ser activos pueden generar grandes diferencias en la evolución del sistema.

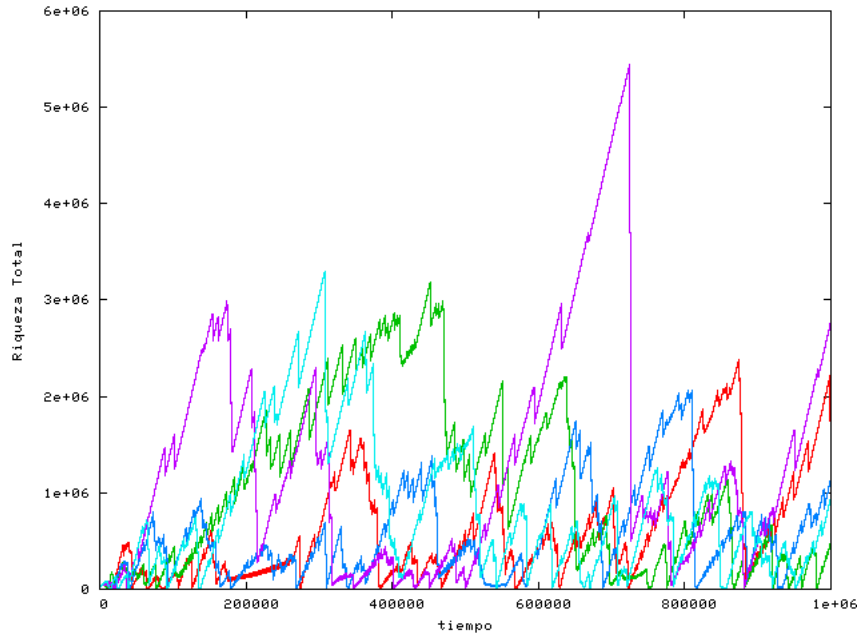


Figura 1.10: Evolución de la W_{total} como función del tiempo. Arreglo unidimensional para $N = 100$, $u = 0,5$, $r = 20$, $q = 250$, $n = 3$.

1.3.2. Sistema Bidimensional.

Estudiemos ahora como afecta al comportamiento del sistema una nueva topología de la red de conectividad. Proponemos una red bidimensional con condiciones de contorno periódicas y vecindad de Von Newman (4 vecinos). En la figura 1.10 se muestran distintas realizaciones de la evolución de la riqueza total del sistema para la red bidimensional.

Los resultados que se obtienen son muy diferentes a los encontrados para el caso unidimensional. En el caso unidimensional, la tendencia de la riqueza total del sistema es creciente a pesar de los colapsos que ocurren durante la evolución, mientras que para esos mismos valores de parámetros en el caso bidimensional, esta tendencia no se cumple; por el contrario la riqueza total no sigue ningún comportamiento regular. En el sistema bidimensional subidas y caídas drásticas se presentan en cortos períodos de tiempo, lo que muestra que el sistema gana y pierde riqueza con facilidad. Luego de un transiente, cada realización sigue una evolución diferente; existen períodos donde la riqueza total del sistema es prácticamente nula, mientras que en

el caso unidimensional el sistema siempre tiene una ganancia total neta de riqueza.

Estudiamos a continuación el desarrollo del patrón de compromisos para el caso bidimensional, para lo cual enfocamos nuestra atención en la matriz de compromisos. La figura 1.11 muestra la matriz de compromisos para un tiempo asintótico en el caso bidimensional, y la figura 1.12 muestra la red asociada a esta misma realización. Como podemos ver, en la red se observan los grupos y coaliciones formados para ese instante de tiempo; en cambio, si nos fijamos en la matriz de compromisos las coaliciones formadas para ese instante de tiempo no resultan tan obvias. Por lo tanto es necesario desarrollar un algoritmo que ordene la matriz de compromisos antes de continuar estudiando el comportamiento y evolución del modelo.

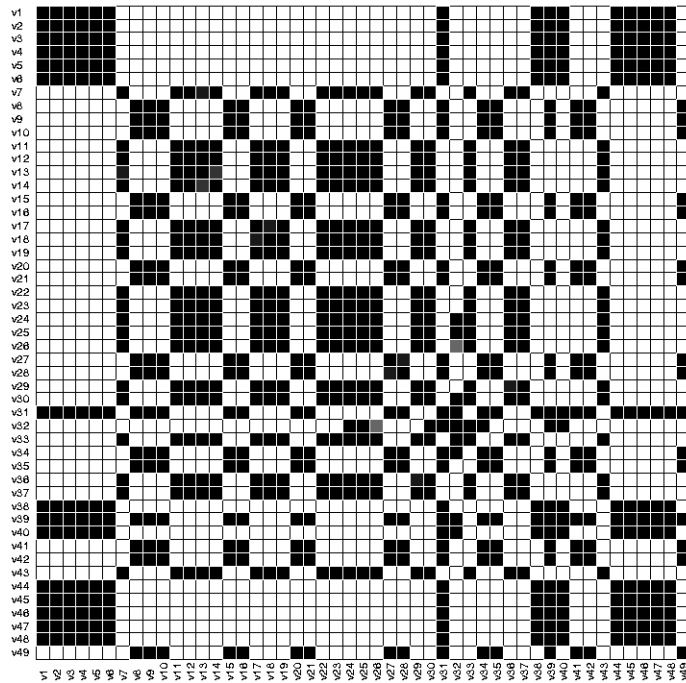


Figura 1.11: Matriz de compromisos para el caso bidimensional para un tiempo asintótico.

Esta tarea se realiza en el siguiente capítulo.

El desarrollo de un algoritmo para el ordenamiento de la matriz de compromisos constituye una nueva herramienta que podrá ser utilizada para el estudio de redes

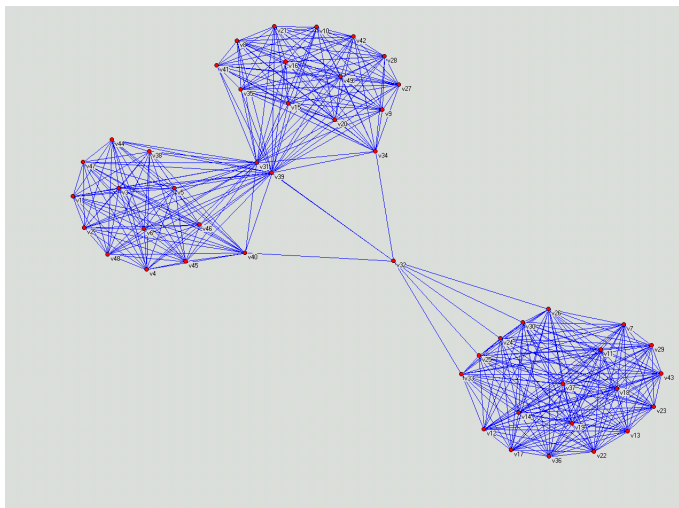


Figura 1.12: Red asociada a la matriz de compromisos para el caso bidimensional y para un tiempo asintótico.

complejas en otros sistemas.

We physicists are like Columbus, not really knowing what we are doing, but nevertheless doing something important.

Dietrich Stauffer.

Capítulo 2

Formación de Estructuras en el Modelo de Axelrod.

Tal y como señalamos al final del anterior Capítulo, en este apartado nos proponemos a desarrollar un algoritmo que permita ordenar la matriz de compromisos asociado al modelo de Axelrod [1].

La figura 2.1 muestra la matriz de compromisos para una red bidimensional de tamaño $N = 7 \times 7$. Mostramos en la Figura 2.2 la red asociada a esta matriz para ese instante de tiempo. Desarrollaremos un programa basado en algoritmos genéticos enfocado en el ordenamiento de la matriz de compromisos.

Como sabemos los algoritmos genéticos son métodos adaptativos que se utilizan para resolver problemas de búsqueda y optimización; están basados en la teoría de la evolución de Darwin en la cual aquellos individuos que posean los caracteres más ventajosos dejarán más descendencia. Si tales caracteres se deben a diferencias genéticas, la composición de la población tenderá a cambiar, aumentando el número de individuos con dichas características. Con base en estas ideas, los algo-

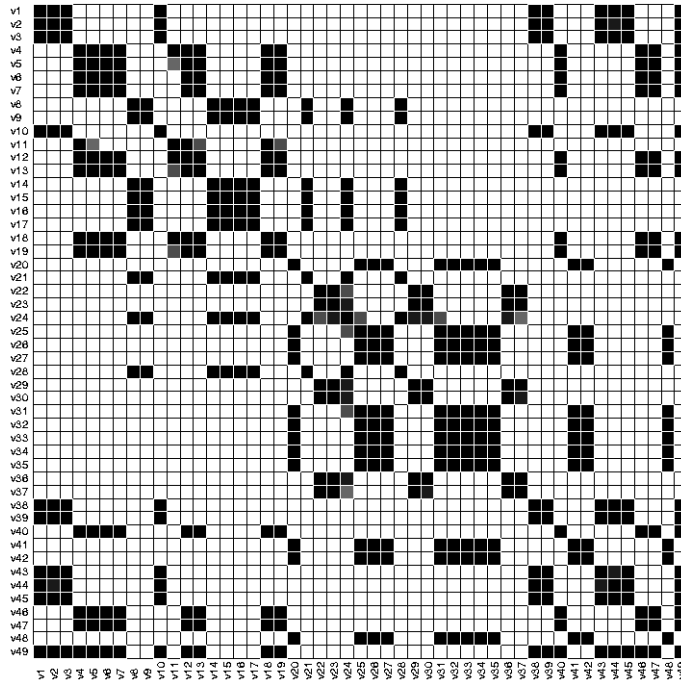


Figura 2.1: Matriz de compromisos para el caso bidimensional. $t = 15000$

ritmos genéticos son capaces de ir creando soluciones para problemas del mundo real.

Las condiciones que debe cumplir un problema para ser tratable mediante algoritmos genéticos son:

- Su espacio de búsqueda (i.e., sus posibles soluciones) debe estar delimitado dentro de un cierto rango.
- Debe poderse definir una función de aptitud que nos indique qué tan buena o mala es una cierta respuesta.
- Las soluciones deben codificarse de una forma que resulte relativamente fácil de implementar en la computadora.

Siendo comprobado la posibilidad de atacar nuestro problema mediante el desarrollo de un algoritmo genético, nos disponemos a su creación. En primer lugar desarrollamos la función de aptitud la cual no es más que la función objetivo de nuestro problema. Para esto veamos las siguientes dos matrices de compromisos correspondientes a un sistema de 4 elementos, las cuales son en efecto la misma matriz

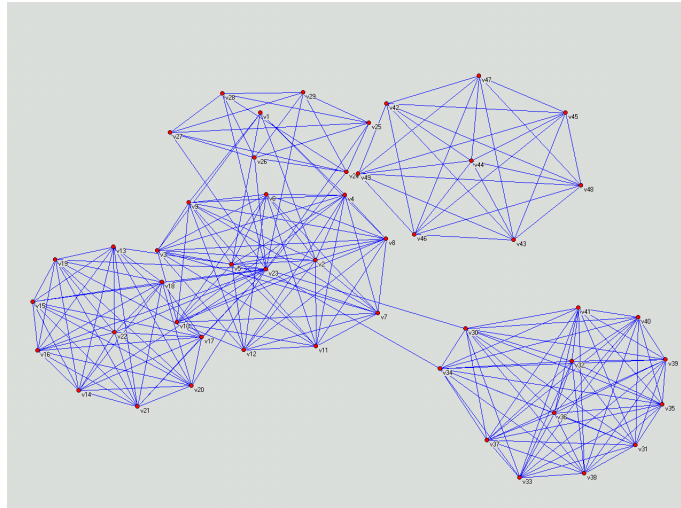


Figura 2.2: Red asociada a la matriz de compromisos para el caso bidimensional.
 $t = 15000$

sólo que una está desordenada y la otra se encuentra ordenada:

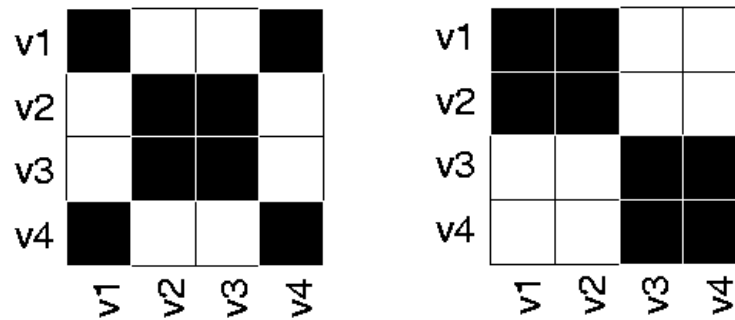


Figura 2.3: (a) Matriz de compromisos desordenada para caso bidimensional. b) Matriz de compromisos ordenada para el caso bidimensional.

Luego del análisis de estas dos matrices logamos desarrollar la función aptitud de la siguiente manera. Definimos la suma de las distancias que existe entre el elemento de la diagonal con respecto a cada uno de los elementos que se encuentran dentro del umbral para la formación de coaliciones (mayor a 0,5). Debido a la simetría de la matriz, realizamos esta suma sólo para la diagonal superior.

Veamos cómo se realiza esta suma en las matrices mostradas. Tomemos la matriz

2.3-a; se observa que el elemento 1 está comprometido sólo con el elemento 4. Por lo tanto la distancia (la sustracción de 4 menos 1) entre estos dos elementos es de 3. Pasamos al elemento 2; este sólo está comprometido con 3, por lo tanto se encuentra a una distancia de 1. Como sólo estamos tomando en cuenta la diagonal superior derecha, no realizamos esta operación para los elementos 3 y 4. Entonces la suma total de distancias ($3 + 1$) para la matriz 2.3-a es de 4.

Realicemos este mismo procedimiento para la matriz 2.3-b. Tomamos el elemento 1, hallamos los elementos que están comprometidos con él; sólo 2 está comprometido con 1, así que la suma de las distancias para este elemento es de 1. El elemento 2 se encuentra comprometido sólo con 1 y éste ya fue tomado en cuenta. Vamos al elemento 3, el cual está solamente comprometido con 4, arrojando una suma de 1. La suma total para la matriz 2.3-b es $1 + 1 = 2$. Como podemos ver la suma total de la matriz ordenada 2.3-b es menor que la suma de la matriz que se encuentra desordenada 2.3-a. Luego la matriz ordenada corresponde a las columnas V_2, V_3, V_1, V_4 .

Habiendo desarrollado nuestra función de aptitud, nos disponemos a generar la población inicial a partir de la cual serán obtenidos los hijos. Debido a que el problema consiste en el ordenamiento de una matriz, la población inicial también es una matriz a la cual llamaremos matriz padre, y ésta será la copia de la matriz de compromisos original del sistema para ese tiempo específico. Trabajamos con una copia de la matriz padre, ya que no debemos modificar la matriz original; esto produciría alteraciones en la evolución del sistema.

Entonces de esta matriz padre definimos dos vectores o genes. El primero que comienza desde el elemento 1 y llega hasta el elemento en el cual el compromiso entre el elemento y su vecino sea menor que el umbral (en la matriz 2.3-a el gen uno sería sólo el elemento 1). Teniendo esto, definimos al gen dos desde el elemento que sigue hasta que otra vez se cumpla la condición anterior, que es encontrar un elemento en el cual el compromiso entre ese elemento y su vecino sea menor que el umbral (en la matriz 2.3-a el gen dos son los elementos 2 y 3). Hacemos uso del operador “translocación”: colocamos el gen 2 de primero y el gen 1 de segundo; los demás elementos que no se encuentran dentro de los genes permanecen iguales. Con

esto creamos una nueva matriz, la cual llamamos matriz hijo.

Aplicamos la función aptitud a la matriz padre y a la matriz hijo para poder decidir cuál de las dos matrices está más ordenada; la matriz que haya resultado con una función aptitud menor será ahora designada como la matriz padre. Esto nos lleva a dos casos:

- i) Si la función aptitud de la matriz hijo arroja un resultado mayor que la matriz padre, es decir, está más desordenada, entonces la matriz padre no es reemplazada por la matriz hijo, regresamos al inicio del algoritmo y tomamos como gen uno lo que era el gen dos, y nos disponemos a elegir el nuevo gen dos.
- ii) Si la función aptitud de la matriz hijo arroja una suma menor que la matriz padre, reemplazamos la matriz padre por la matriz hijo; regresamos al inicio del algoritmo, escogemos dos nuevos genes, ahora en lugar de escoger los dos primeros genes de la matriz escogemos el segundo y el tercero; translocamos estos genes; generamos la nueva matriz hijo; comparamos cuál de las dos es más ordenada, y escogemos a la más ordenada como la nueva matriz padre. Escogemos los dos genes que siguen (el tercer y cuarto) y repetimos este proceso hasta que el gen dos termina como el último elemento del sistema.

Si usamos este algoritmo para ordenar la matriz de compromisos de la figura 2.1, obtendremos la matriz de la figura 2.4 que es su respectiva matriz ordenada. Pero este arreglo no es suficiente para algunas matrices, por lo que extendemos al algoritmo para todos los casos posibles.

Veamos la matriz de la figura 2.5; mostramos en la figura 2.6 la red asociada a dicha matriz y mostramos en la figura 2.7 la correspondiente matriz luego de aplicarle el algoritmo genético. Como vemos este primer algoritmo no es suficiente para el ordenamiento completo de la matriz. En la red asociada se observan claramente dos grupos bien definidos que se encuentran conectados sólo por dos elementos. Esto debería notarse en la matriz de compromiso ordenada, pero no es así.

Partiendo de la matriz parcialmente ordenada de la figura 2.7, definiremos ahora los genes con un nuevo criterio: el gen uno terminará cuando se llegue a un elemento

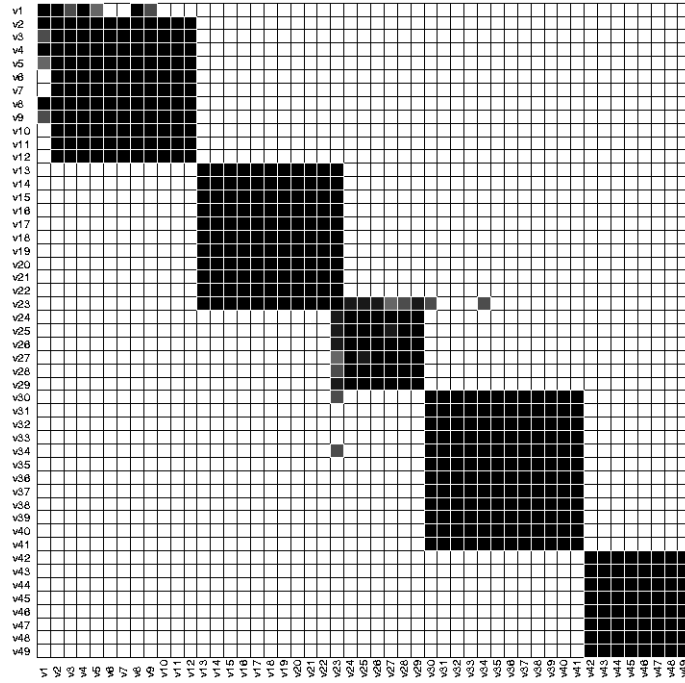


Figura 2.4: Matriz de compromisos para caso bidimensional. $t = 15000$

cuyo valor de compromiso que se encuentra en su diagonal superior derecha inmediata sea menor al umbral (elemento 12 en la matriz de la figura 2.7), y definimos al gen dos desde el elemento siguiente donde termina el gen uno hasta encontrar de nuevo un elemento cuyo valor de compromiso que se encuentra en su diagonal superior derecha inmediata sea menor al umbral. Como la matriz es simétrica, el valor de compromiso que se encuentra en la diagonal inferior izquierda inmediata es el mismo valor que el de su diagonal superior derecha inmediata. Llamaremos a los elementos que cumplan con esta condición elementos con ancho uno.

Hacemos uso de nuevo del operador translocación; translocamos estos dos genes, creamos una nueva matriz que la llamamos matriz hijo; aplicamos la función aptitud a la matriz padre y a la matriz hijo; la matriz que haya resultado con una función aptitud menor será ahora designada como la matriz padre. Lo cual nos lleva a dos casos:

- i) Si la función aptitud de la matriz hijo arroja un resultado de distancia total mayor que la matriz padre, entonces la matriz padre no es reemplazada por

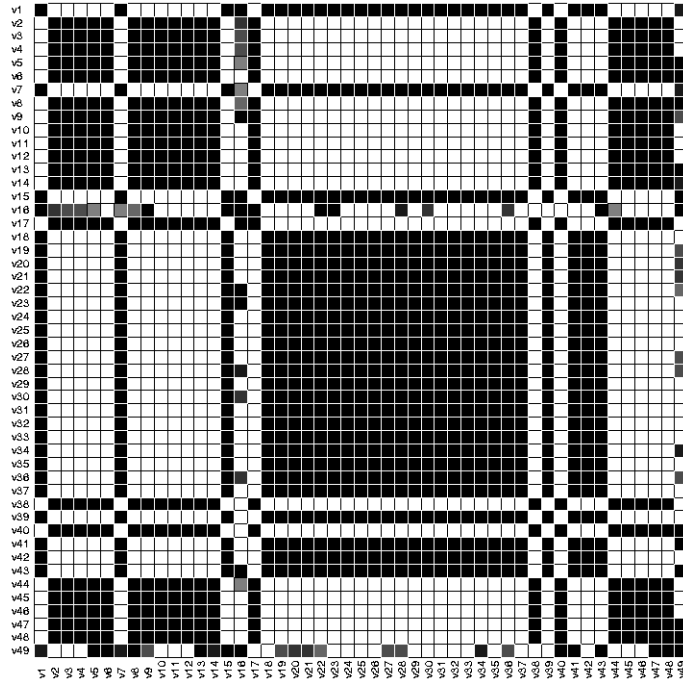


Figura 2.5: Matriz de compromisos para el caso bidimensional. $t = 500000$

la matriz hijo; regresamos al inicio del algoritmo y tomamos como gen uno lo que era el gen dos, y nos disponemos a elegir el nuevo gen dos.

- ii) Si la función aptitud de la matriz hijo arroja una distancia total menor que la matriz padre, reemplazamos la matriz padre por la matriz hijo; regresamos al inicio del algoritmo; escogemos dos nuevos genes; ahora en lugar de escoger los dos primeros genes de la matriz escogemos el segundo y el tercero; translocamos estos genes; generamos la nueva matriz hijo; comparamos cual de las dos está mas ordenada, y escogemos a la mas ordenada como la nueva matriz padre. escogemos los dos genes que siguen (el tercer y cuarto) y repetimos este proceso hasta que el gen dos termina como el último elemento del sistema.

Realizamos de nuevo este ordenamiento, pero ahora en lugar de tomar los elementos con ancho uno para definir a los genes, tomamos los elementos con ancho dos; luego con ancho tres así hasta llegar a un ancho igual a la mitad del número de elementos que conforman el sistema.

Iteramos el algoritmo hasta que la distancia total de la matriz resultante alcanza

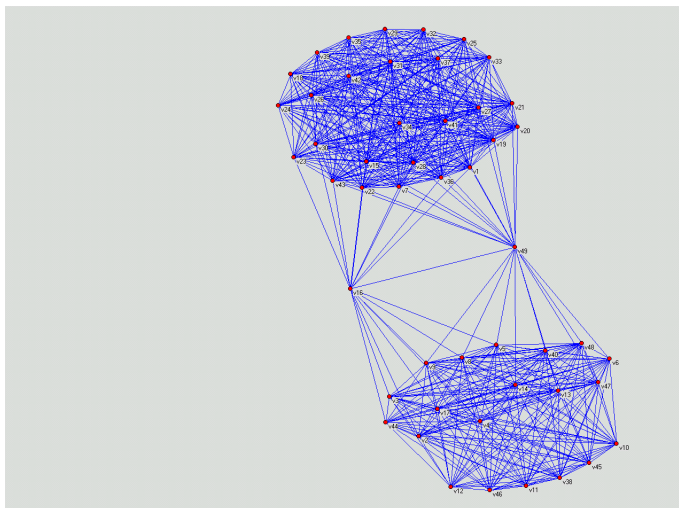


Figura 2.6: Red asociada a la matriz de compromisos para el caso bidimensional.
 $t = 500000$

un valor estacionario.

Luego de realizar este algoritmo completo, la matriz de la figura 2.5 queda ordenada como se observa en la figura 2.8. Con la matriz ordenada de esta manera se puede observar claramente que existen dos grupos bien definidos en el sistema para este instante, los cuales se encuentran conectados solamente por dos elementos.

Como otro ejemplo de este algoritmo genético de ordenamiento, consideremos la matriz que mostramos en la figura 1.11. Luego de aplicar el algoritmo sobre esa matriz, ésta queda ordenada como se muestra en la figura 2.9. Este ordenamiento concuerda exactamente con la red asociada a dicha matriz mostrada en la figura 1.12, en la cual se observan tres grupos bien diferenciados.

Como hemos visto en el modelo de tributos y conflictos, el sistema se auto-organiza formando coaliciones. Este proceso de auto-organización constituye un comportamiento colectivo emergente a partir de las interacciones entre los elementos que integran el sistema y cuyas reglas de evolución son simples. Sin embargo desde el punto de vista de la Física, surgen preguntas interesantes tales como: ¿este sistema presentará algún comportamiento universal?; ¿existe alguna ley de escala que per-

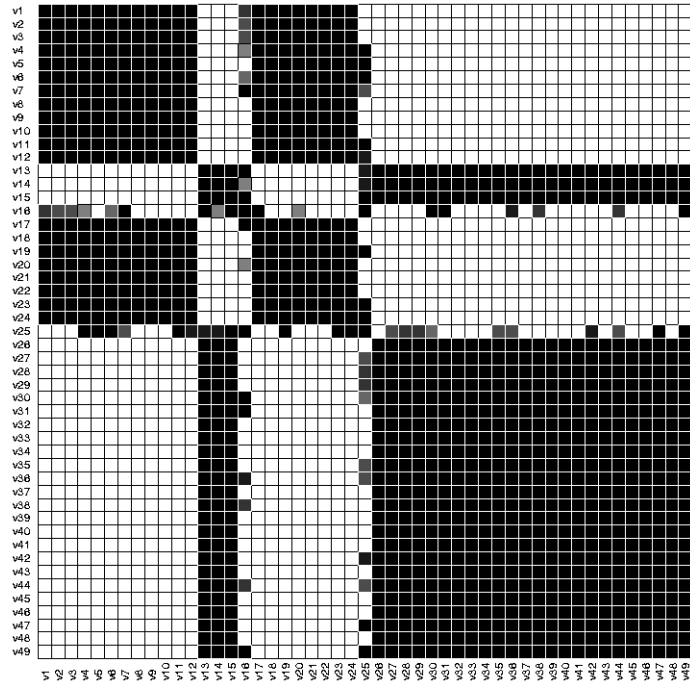


Figura 2.7: Matriz de compromisos para el caso bidimensional. $t = 500000$

¿Podemos caracterizar estadísticamente al sistema?. En el siguiente capítulo abordaremos estas cuestiones.

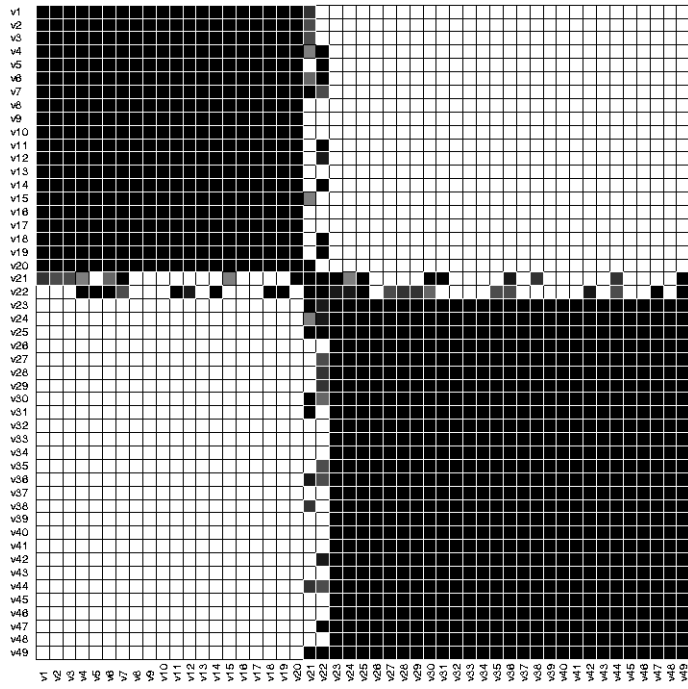


Figura 2.8: Matriz de compromisos para el caso bidimensional. $t = 500000$

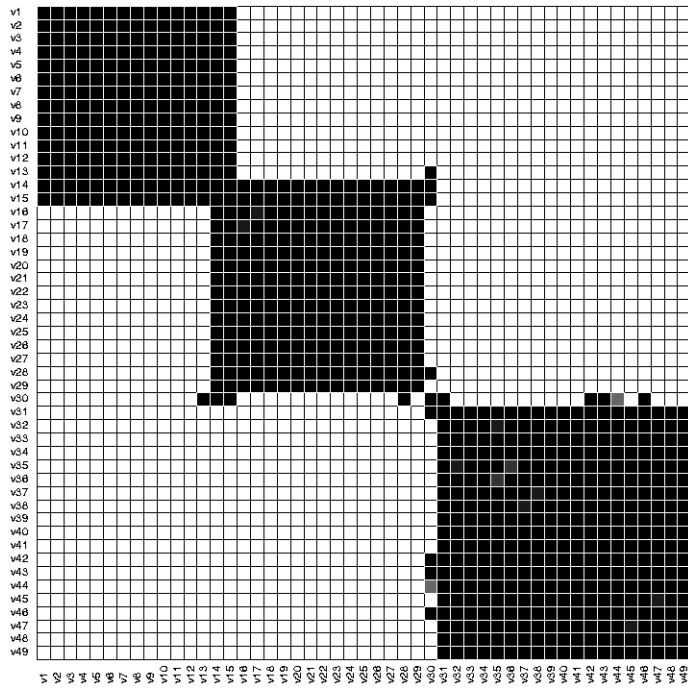


Figura 2.9: Matriz de compromisos para el caso bidimensional.

The task is, not so much to see what no one has yet seen; but to think what nobody has yet thought, about that which everybody sees.

Erwin Schrödinger.

Capítulo 3

Comportamientos colectivos en el modelo de Axelrod

3.1. Caracterización de la Matriz de Compromisos

La estructura y formación de coaliciones que se observan en el modelo depende de los compromisos que son creados entre los agentes durante la evolución del sistema. Como sabemos, estos compromisos aumentan o disminuyen de acuerdo a las acciones que toman los agentes debido a la dinámica del sistema. La matriz C_{ij} registra los compromisos entre cualquier par de agentes en un tiempo t cualquiera, mostrando cómo los elementos se encuentran conectados entre sí formando una red. En $t' = t + 1$, las acciones que han tomado los elementos cuando las demandas de tributo se ejecutan modifican los compromisos, y por tanto hay un cambio en $C_{ij}(t')$.

Para cuantificar estos cambios en la estructura de C_{ij} introducimos un parámetro que mide la actividad de ésta matriz entre t y $t + 1$, usado inicialmente por J. Ito y K. Kaneko [8] en el contexto de redes de mapas con acoplamiento adaptativo, y que se define como

$$A(t) = \frac{1}{(N-1)^2} \sum_{i,j} |C_{ij}^{t+1} - C_{ij}^t|. \quad (3.1)$$

La actividad $A(t)$ representa el cambio promedio instantáneo en la intensidad de los compromisos de los agentes del sistema durante su evolución.

Estudiemos el comportamiento de la actividad al variar uno de los parámetros del sistema. La figura 3.1 muestra la evolución de la actividad para una red bidimensional con vecindad de Von Newman, $N = 5 \times 5$, en la cual realizamos la reinyección de la cosecha cada tres iteraciones ($\lambda = 3$). Además, mostramos la evolución de la riqueza total del sistema para esta misma simulación.

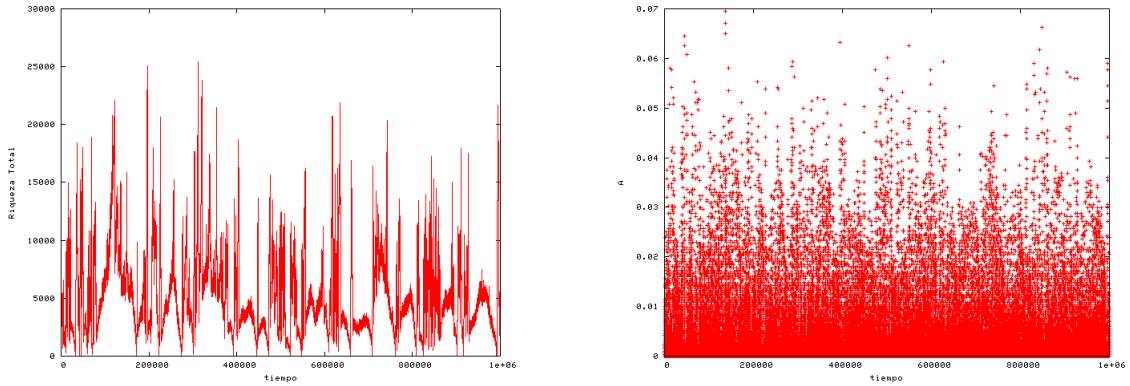


Figura 3.1: a) W_{total} como función del tiempo. b) Actividad de la matriz como función del tiempo. Red bidimensional con vecindad de Von Newman, $N = 25$, $\lambda = 3$ $u = 0,5$, $r = 1$, $q = 12,5$.

Como vemos en la evolución de la riqueza total, el sistema no tiene ningún comportamiento regular para una topología de conectividad de dos dimensiones. Esto se ve reflejado en la actividad del sistema; observamos en la figura cómo la actividad varía en todo el tiempo de simulación. Recordemos que una actividad alta se traduce en un gran cambio en la matriz de compromisos entre el tiempo t y $t + 1$, y una actividad baja significa que no hubo un gran cambio en la matriz de compromisos entre los tiempos t y $t + 1$.

Lo interesante se observa cuando variamos el tiempo de reinyección de la cosecha

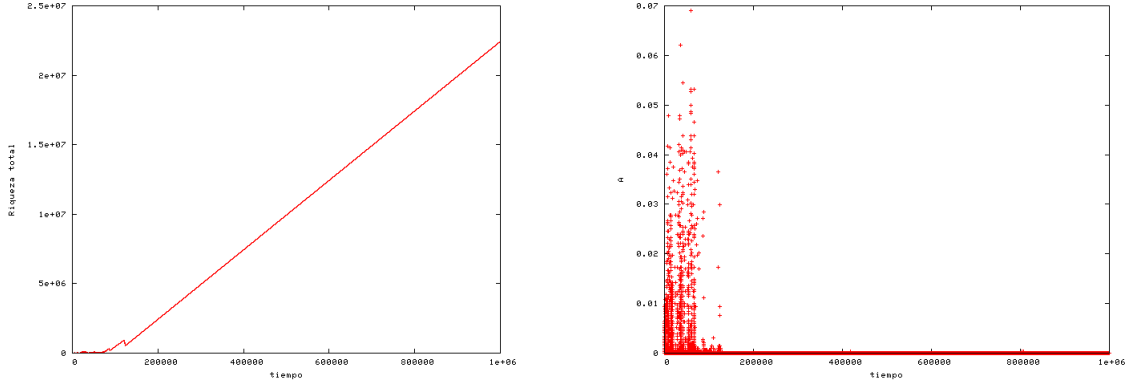


Figura 3.2: a) W_{total} como función del tiempo. b) Actividad como función del tiempo. Red bidimensional con vecindad de Von Newman, $N = 25$, $\lambda = 1$, $u = 0,5$, $r = 1$, $q = 12,5$.

(λ) en el sistema. En la figura 3.2 mostramos la evolución de la riqueza total y el comportamiento de la actividad para el mismo sistema mostrado en la figura 3.1, con $\lambda = 1$. La riqueza total del sistema tiene un comportamiento creciente regular, y solamente hay cambios en la actividad al inicio de la simulación. Luego de un tiempo $t \approx 200000$, la actividad en el sistema es cero o casi cero. La matriz de compromisos no cambia a partir de este tiempo. La figura 3.3 muestra los conflictos acumulados en el tiempo. Como podemos observar solamente ocurren conflictos en los primeros años de la evolución; para el tiempo en que la actividad se vuelve estacionaria, no hay más conflictos en el sistema; este comportamiento es de esperar en un sistema al cual se le está reinyectando riqueza con mucha frecuencia.

Ahora veamos que le sucede al sistema cuando el tiempo de reinyección de la cosecha es muy grande. En la figura 3.4 mostramos la evolución de la riqueza total para el mismo sistema con $\lambda = 50$. Además mostramos el comportamiento de la actividad en el tiempo. Asintóticamente, la actividad alcanza un comportamiento periódico entre dos bandas. En esta situación la matriz de compromisos se mantiene estacionaria, con unos pocos elementos cuyos acoplamientos varían periódicamente entre dos coaliciones.

Para estudiar el comportamiento colectivo del sistema en términos del parámetro λ , construimos un diagrama de bifurcación de la actividad versus λ . Para esto rea-

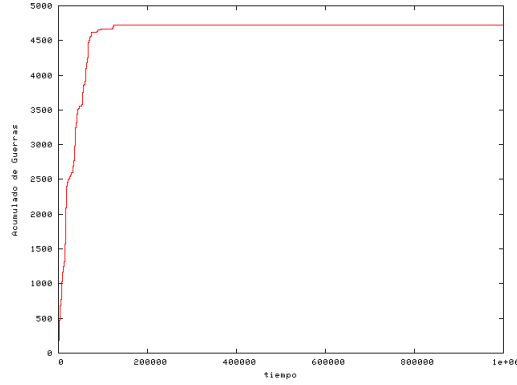


Figura 3.3: Número acumulado de conflictos en el tiempo. Red bidimensional con vecindad de Von Newman, $N = 25$, $\lambda = 1$, $u = 0,5$, $r = 1$, $q = 12,5$.

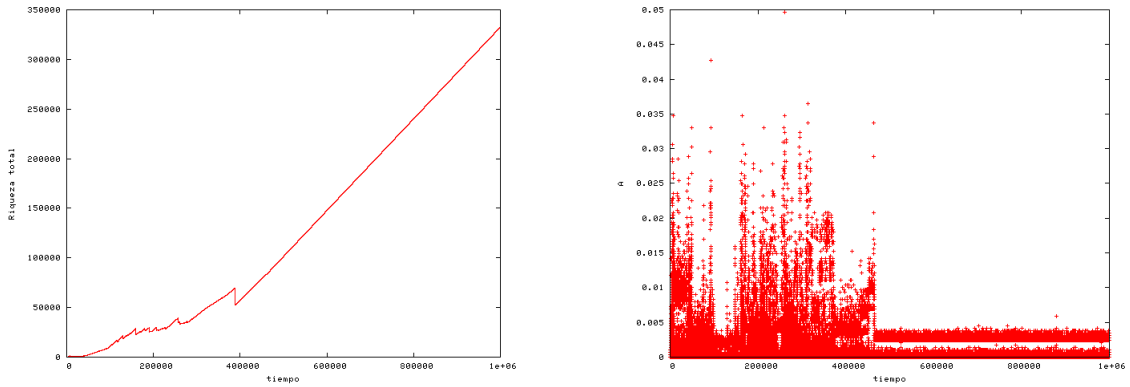


Figura 3.4: a) W_{total} como función del tiempo. b) Actividad como función del tiempo. Red bidimensional con vecindad de Von Newman, $N = 25$, $\lambda = 50$, $u = 0,5$, $r = 1$, $q = 12,5$.

lizamos un barrido del parámetro en un rango $\lambda \in [1, 5000]$. Para cada valor de λ , descartamos un transiente de 10^6 y tomamos 10^3 iteraciones luego del transiente. En la figura 3.5 graficamos la actividad en función de λ .

Como vemos en este diagrama de bifurcación tres regiones pueden ser claramente identificadas, la primera region va desde $\lambda = 1$ hasta $\lambda = 25$ y en ella notamos que A puede tomar un rango amplio de valores. La segunda región va desde $\lambda = 25$ hasta $\lambda = 1000$, en la cual la actividad sólo toma valores entre en dos bandas periódicas. La una ultima región comienza en $\lambda = 1000$ y en ella la actividad en el sistema se hace cero. El valor crítico para la aparición de bandas periódicas en la actividad es $\lambda \approx N$.

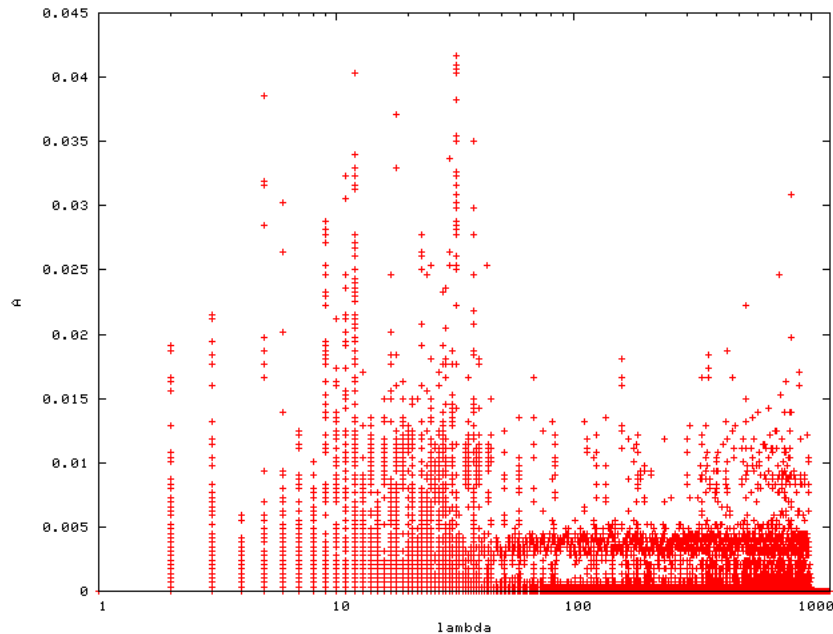


Figura 3.5: Actividad en función de lambda. Red bidimensional con vecindad de Von Newman, $N = 25$, $\lambda = 50$, $u = 0,5$, $r = 1$, $q = 12,5$.

3.2. Propiedades estadísticas y leyes de potencia en el modelo de Axelrod

Las leyes de potencia se presentan cuando la distribución de probabilidad de una variable varía como una potencia de esta variable. Las leyes de potencia en ciertos contextos también se conocen como leyes de Zipf o las distribuciones de Pareto. Las leyes de potencia aparecen en física, biología, geología, economía y finanzas, ciencias computacionales, ciencias demográficas y sociales.

Muchas de las cosas que se miden en un sistema tienen un tamaño o escala típica. Ejemplos de sistemas con escalas típicas presentan un valor medio entre un máximo y un mínimo, que se manifiesta como un pico en la distribución de probabilidad. En la figura 3.6 se muestran ejemplos de la estatura de una población masculina y de la velocidad de los carros en Inglaterra.

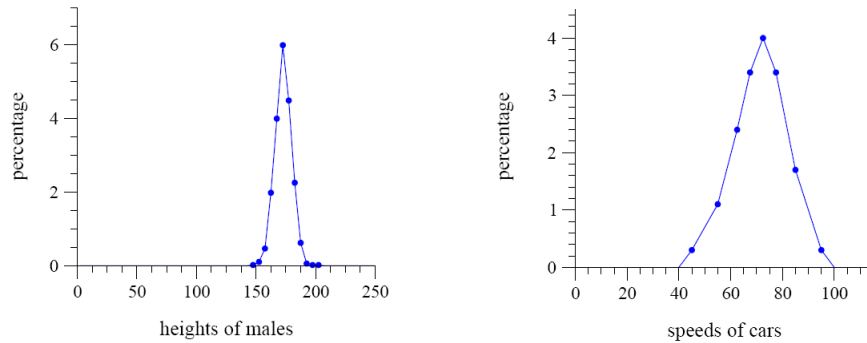


Figura 3.6: a) Histograma de la altura en centímetros de hombres americanos. Data tomada *the National Health Examination Survey, 1959 – 1962*. b) Histograma de velocidades de motores en millas/hora de carros en Inglaterra. Data tomada de *Transport Statistics 2003*.

Pero no todas las cosas que medimos son tomadas alrededor de un valor típico. Algunas medidas tienen un rango enorme; algunas veces muchos ordenes de magnitud. Un ejemplo clásico es el tamaño de las ciudades, como vemos en la figura 3.7-a, donde se muestra el histograma de la distribución de tamaños de ciudades en Estados Unidos, y en la cual se observa que la mayor de ciudades corresponde a ciudades pequeñas y que existe un número pequeño de ciudades con poblaciones muy grandes.

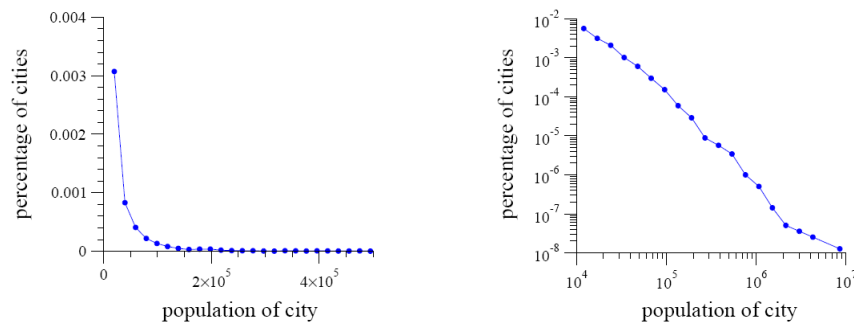


Figura 3.7: a) Histograma de la población de todas las ciudades de Estados Unidos con población de 10000 o mas. b) Histograma de la misma data, pero graficada en escala logarítmica. Data tomada de 2000 *US Census*.

La figura 3.7-b muestra de nuevo el histograma de las ciudades, pero en escala

log-log. La figura sigue una línea recta. Este hecho fue descubierta por Auerbach [15], aunque también se le atribuye a Zipf [16]. Hagamos que $p(x)dx$ sea la fracción de ciudades con población entre x y $x + dx$. Si el histograma es una línea recta en la escala log-log, entonces $\ln p(x) = -\beta \ln x + c$, donde β y c son constantes. Tomando el exponencial a ambos lados de la ecuación obtenemos

$$p(x) = Cx^{-\beta}, \quad (3.2)$$

con $C = e^c$.

Se dice entonces que las distribuciones que siguen la forma anterior son leyes de potencia. La constante β es llamada el exponente de la ley de potencia (la constante C la mayoría de las veces no es importante).

Un método más sofisticado de graficar la data es calcular la función de distribución acumulada. En lugar de hacer un histograma simple de la data, graficamos la probabilidad $P(x)$ en función de x .

Las distribuciones acumuladas de leyes de potencia ocurren en una gran cantidad de fenómenos, como en magnitudes de terremotos, cráteres de la luna, guerras, frecuencia de palabras usadas en el lenguaje, frecuencia de ocurrencia de nombres personales en diferentes culturas, el número de citas por papers, el número de entradas en páginas web, la venta de libros, entre otros.

Tomando la data de Small y Singer [17], y de Roberts y Turcotte [18] mostramos en la figura 3.8 la distribución acumulada de la intensidad de 119 guerras que ocurrieron entre los años 1816 al 1980. La intensidad de las guerras se define tomando el número de muertes entre todos los países participantes en una guerra, dividido entre la población total de los países involucrados y multiplicado por 10000 [19]. De esta manera, las intensidades de la Primera y Segunda Guerra mundiales son 141,5 y 106,3 muertes en batalla por 10000, respectivamente. La peor guerra entre este rango de años fue la pequeña pero destructiva guerra entre Paraguay y Bolivia entre los años 1932 y 1935 con una intensidad de 382,4.

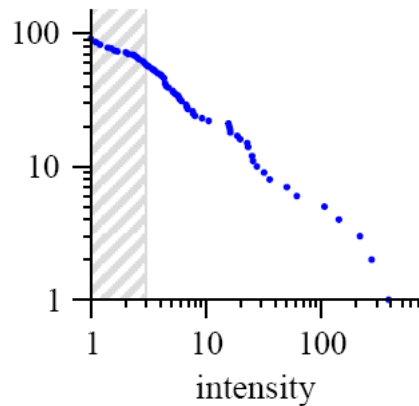


Figura 3.8: Distribución acumulada de la Intensidad en guerras entre los años 1816–1980, medida con las muertes en batalla por 10000 de la población de los países participantes. La data que se encuentra sombreada fue excluida para el cálculo del exponente de la ley de potencia [17].

Como vemos la figura, 3.8 corresponde a una distribución acumulada para guerras reales en un período de tiempo, y muestra claramente que sigue un comportamiento de ley de potencia de la forma $P(x) = Cx^{-\beta}$, cuyo exponente crítico es de $\beta = 1,8$. Esta distribución implica que guerras donde la cantidad de víctimas en batalla es muy grande, son muy pocas o escasas (WWI, WWII y el conflicto entre Paraguay y Bolivia); mientras que guerras o conflictos donde las muertes en batalla son pocas, son mucho mas frecuentes.

Veamos qué sucede si calculamos las distribuciones acumulativas de los tamaños de conflictos en el modelo presentado en esta tesis. En principio para cada tiempo de iteración del sistema, conocemos el número de elementos que pertenecen a la coalición atacante α , la defensora τ y la cantidad total de elementos involucrados en un conflicto entre α y τ . En la figura 3.9 y 3.10 se muestra la distribución acumulada de tamaños (número de agentes involucrados) de los conflictos en escala log-log para nuestro sistema. Estas distribuciones se calcularon a partir de 100 realizaciones de condiciones iniciales.

Como podemos observar, las tres gráficas siguen una ley de potencia de la forma $P(x) = Cx^{-\beta}$. Los exponentes críticos correspondientes a cada una de estas dis-

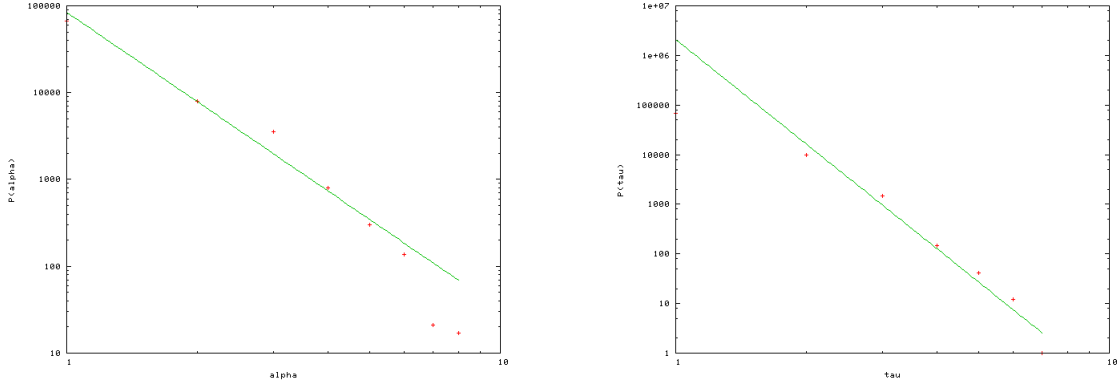


Figura 3.9: a) Distribución de probabilidad de tamaño de la coalición α . b) Distribución de probabilidad de tamaño de la coalición τ . Sistema unidimensional con $N = 10$, $u = 0,5$, $r = 1$, $q = 12,5$, $\lambda = 3$.

tribuciones se muestran en la tabla 3.1. Estas distribuciones implican que conflictos donde se ven involucrados grandes grupos son muy pocos o escasos, mientras que conflictos entre pocos agentes son mucho más frecuentes. Este resultado está cualitativamente relacionado con la observación histórica de la intensidad de guerras. En nuestro caso la intensidad se mide por el número de elementos involucrados en el conflicto.

$P(\alpha)$	$(\alpha)^{-3,4}$
$P(\tau)$	$(\tau)^{-6,9}$
$P(\alpha + \tau)$	$(\alpha + \tau)^{-4,6}$
$P(A)$	$(A)^{-3,7}$
$P(L_T)$	no ley de potencia

Cuadro 3.1: Cuadro con leyes de potencia para el caso unidimensional.

En la figura 3.11 mostramos la distribución de probabilidad para la actividad A . Tomamos el acumulado de 100 simulaciones para realizar esta distribución. Al igual que para el caso de las coaliciones obtenemos una ley de potencia, como sabemos la actividad $A(t)$ representa el cambio promedio instantáneo en la intensidad de los compromisos de los agentes del sistema, por lo que una ley de potencia en este caso implica que cambios grandes en la matriz de compromisos son muy escasos, mientras

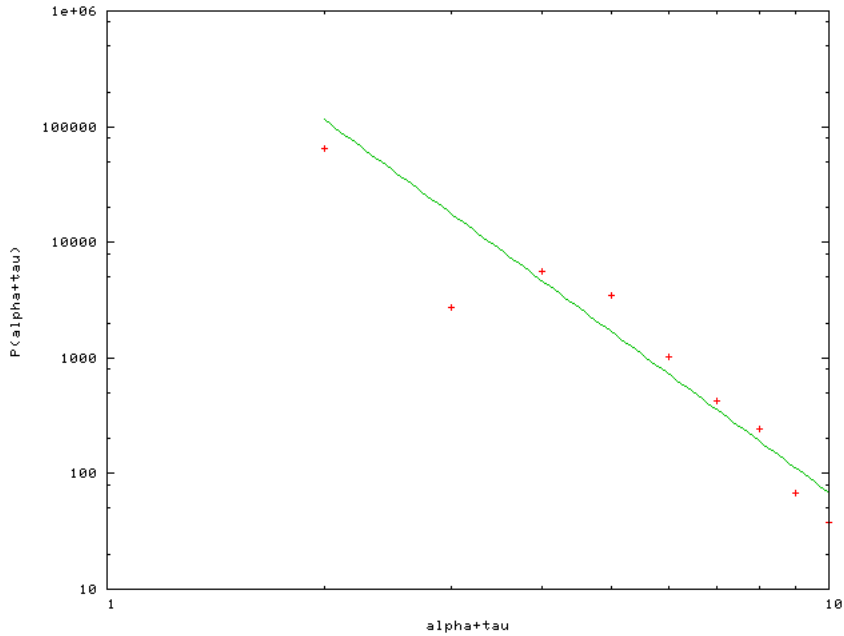


Figura 3.10: Distribución de probabilidad de tamaño total $\alpha + \tau$. Sistema unidimensional con $N = 10$, $u = 0,5$, $r = 1$, $q = 12,5$, $\lambda = 3$.

que cambios pequeños en la matriz de compromisos ocurren con mucha frecuencia.

Veamos ahora la distribución de probabilidad para la pérdida total de riqueza ($L_T = L_\alpha + L_\tau$) del sistema, esto se muestra en la figura 3.12. Como vemos la distribución de probabilidad para la pérdida total del sistema no sigue una ley de potencia, en cambio el gráfico muestra un máximo. Este máximo se puede interpretar como la cantidad de riqueza promedio que pierde el sistema en su evolución.

Exploremos qué sucede para el caso bidimensional. la figura 3.13 y 3.14 muestra las distribuciones de probabilidad de tamaños de conflictos para la coalición atacante α , la defensora τ y la cantidad de elementos total involucrados en un conflicto $\alpha + \tau$. Se observa una ley de potencia para tamaños pequeños de conflictos. Si vemos la figura 3.14, podemos observar una ley de potencia para tamaños $(\alpha + \tau)$ desde 2 hasta 20.

Sin embargo la distribución de probabilidad para la actividad A mostrada en la figura 3.15 sigue una ley de potencia de la forma $P(A) \sim A^{-1,3}$.

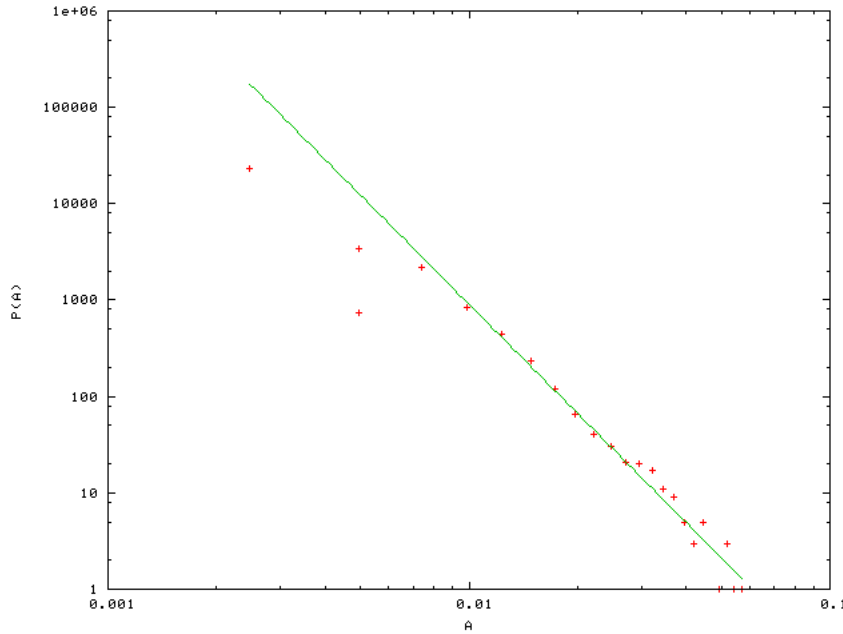


Figura 3.11: Distribución de probabilidad de la Actividad. Sistema unidimensional con $N = 10$, $u = 0,5$, $r = 1$, $q = 12,5$, $\lambda = 3$.

Por último se muestra en la figura 3.16 la distribución de probabilidad para la pérdida total de riqueza ($L_T = L_\alpha + L_\tau$) del sistema para el caso bidimensional. Vemos que esta distribución no sigue una ley de potencia al igual que para el caso unidimensional, el gráfico muestra un máximo, el cual puede ser interpretado como la cantidad de riqueza promedio que pierde el sistema en su evolución.

Las leyes de potencia aparecen en una gran variedad de fenómenos naturales, sociales, terremotos, población de ciudades, venta de libros, sólo por nombrar unos cuantos. Como hemos visto, leyes de potencia en las distribuciones de tamaños de conflictos y en la actividad de la matriz de compromisos también aparecen en el modelo de tributo y conflicto estudiado en esta tesis. Estas distribuciones aparecen en las distribuciones de probabilidad de guerras y conflictos del mundo real. Esto destaca el carácter universal de las leyes de potencia en la naturaleza, las cuales son una importante área de investigación actual.

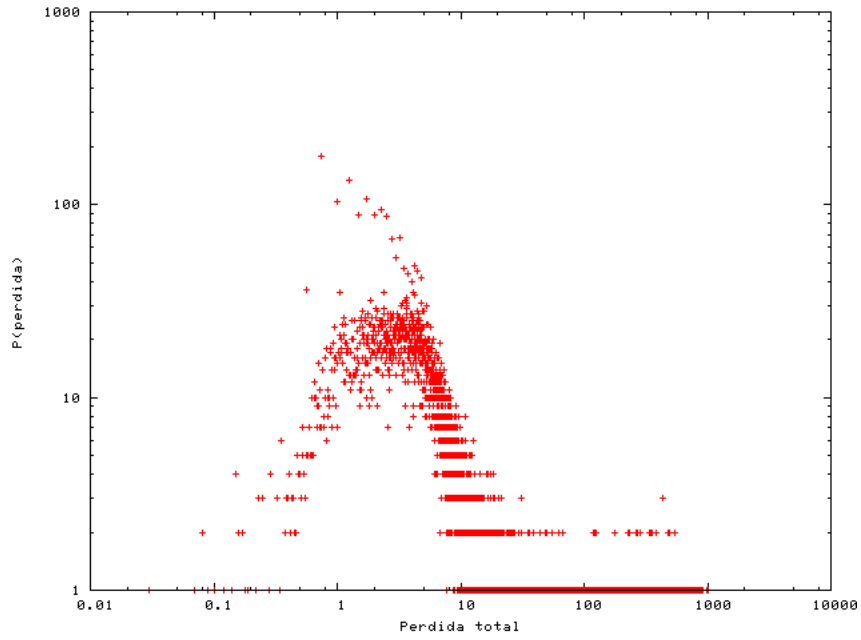


Figura 3.12: Distribución de probabilidad de pérdida de riqueza total del sistema. Sistema unidimensional con $N = 10$, $u = 0,5$, $r = 1$, $q = 12,5$, $\lambda = 3$.

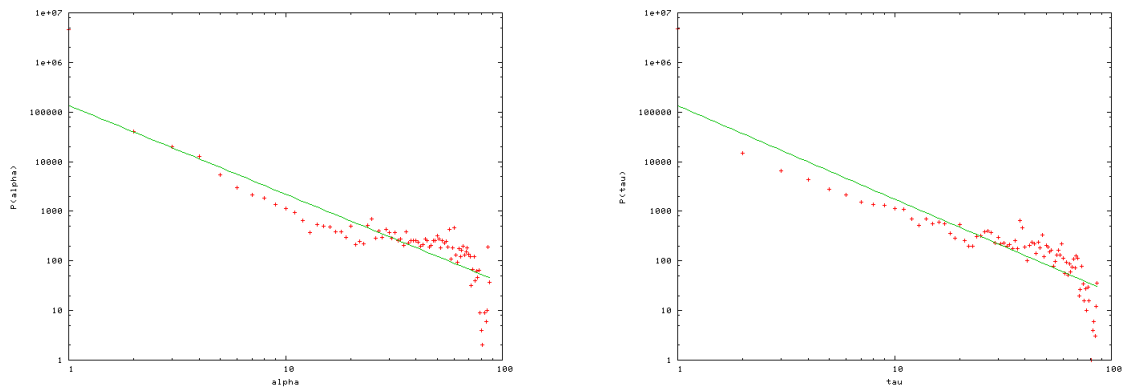


Figura 3.13: a) Distribución de probabilidad de tamaño de la coalición α . b) Distribución de probabilidad de tamaño de la coalición τ . Sistema bidimensional con $N = 100$, $u = 0,5$, $r = 1$, $q = 12,5$, $\lambda = 3$.

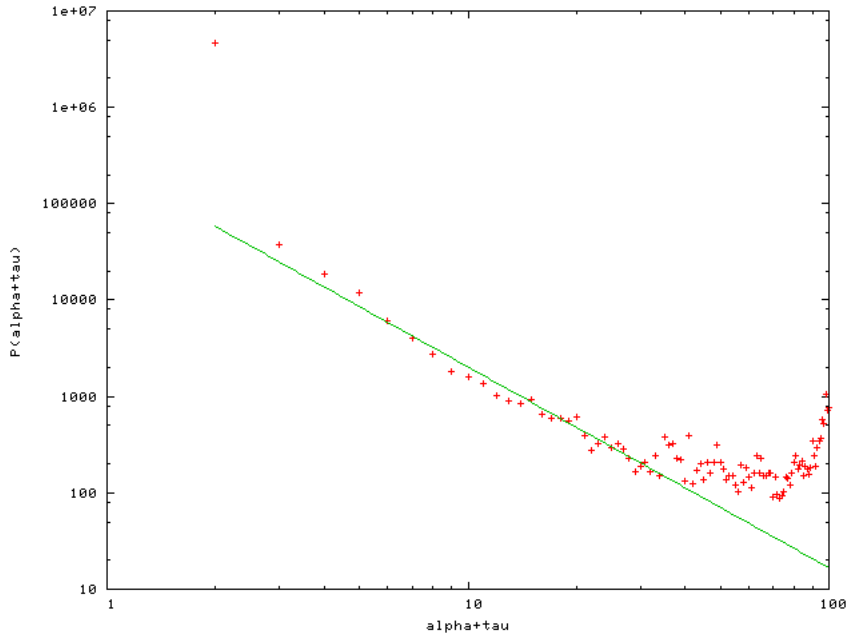


Figura 3.14: Distribución de probabilidad de tamaño de la coalición $\alpha + \tau$. Sistema bidimensional con $N = 100$, $u = 0,5$, $r = 1$, $q = 12,5$, $\lambda = 3$.

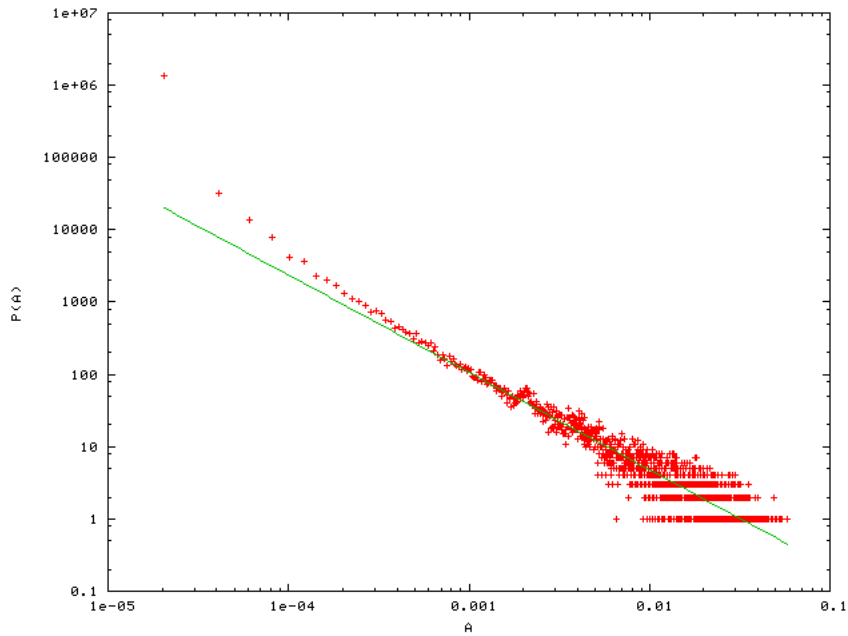


Figura 3.15: Distribución de probabilidad de la Actividad. Sistema bidimensional con $N = 100$, $u = 0,5$, $r = 1$, $q = 12,5$, $\lambda = 3$.

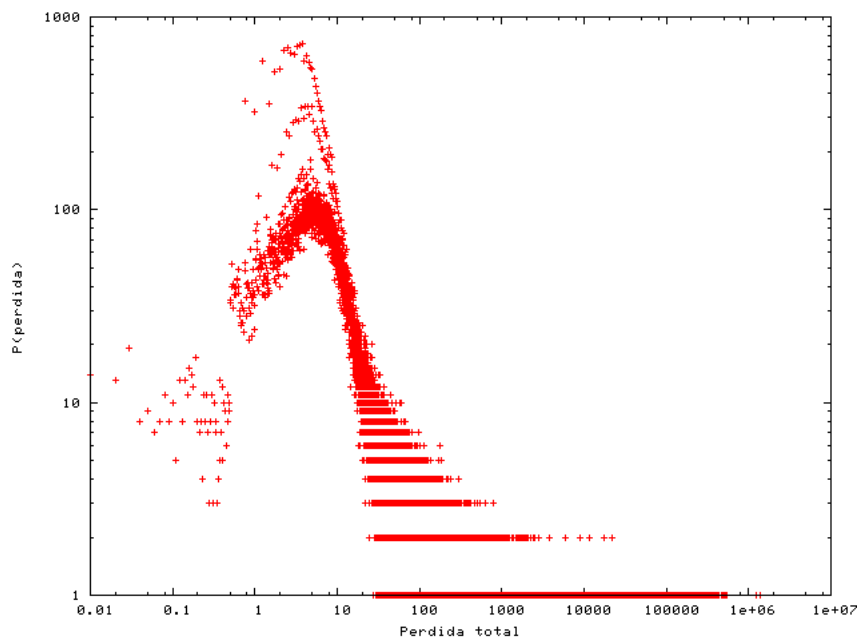


Figura 3.16: Distribución de probabilidad de pérdida de riqueza total del sistema. Sistema bidimensional con $N = 100$, $u = 0,5$, $r = 1$, $q = 12,5$, $\lambda = 3$.

*Without doubt there are
many exciting discoveries
still waiting to be made.*

M. E. J. Newman.

Conclusiones

En esta tesis hemos desarrollado física y computacionalmente un modelo propuestos por el sociólogo Robert Axelrod, para explicar la emergencia de estructura y organización en un sistema sujeto a una dinámica de conflictos. El modelo está basado en la dinámica simple de “pay or else” en la cual un elemento puede hacer demanda de un tributo sobre otro elemento bajo la amenaza de un conflicto. Además se hace uso de conceptos sencillos y típicos de la experiencia histórica, como lo son la formación de imperios y las guerras civiles.

Se trata de un sistema complejo en el cual la organización emerge a partir de interacciones entre elementos que se rigen bajo reglas locales, simples y bien definidas. Los N elementos del sistema son ubicados en una red ya sea unidimensional o bidimensional, restringidos a interactuar inicialmente con sus primeros vecinos. Los acoplamientos o compromisos entre los elementos dependen a su vez de los estados y de las acciones tomadas por los elementos. Esto hace que la dinámica corresponda a un sistema coevolutivo, donde los estados y la red de conectividad cambian simultáneamente en el tiempo. Este tipo de redes adaptativas son de gran interés en la ciencia contemporánea por su gran aplicación en diferentes disciplinas, como la economía, sociología, ecología, etc.

Hemos desarrollado toda la formulación matemática y los códigos computacionales necesarios para investigar este modelo. Aparte de esto, nuestra contribución

central ha sido la implementación de un algoritmo genético para ordenar las matrices de compromisos, lo que permite identificar las coaliciones que se forman en el tiempo. Este algoritmo es bastante general y eficiente y puede ser usado para ordenar matrices en otros problemas.

Es interesante observar que, a pesar de que no existen objetivos específicos, racionalidad ni intencionalidad en el modelo, el sistema alcanza un comportamiento colectivo organizado que se manifiesta en la estructura de sub-bloques resultante en la matriz de compromisos.

Estudiamos la evolución del sistema en una red bidimensional encontrando que la topología de la red influye de manera importante en las propiedades colectivas del modelo, observamos que en el caso de la red unidimensional el comportamiento de la riqueza total es creciente, mientras que para el caso bidimensional este comportamiento no se cumple. Para un sentido más realista del modelo proponemos estudiar en el futuro la dinámica de este modelo en redes de pequeño mundo y redes libres de escala, las cuales son comunes en sistemas sociales reales.

Hemos introducido un parámetro de orden novedoso para caracterizar el comportamiento colectivo de este sistema, como es la actividad, un concepto propuesto por J. Ito y K. Kaneko [4] en el contexto de mapas con acoplamiento adaptativo. Esta actividad representa el cambio promedio instantáneo en la intensidad de los compromisos del sistema durante su evolución.

Además de esto, realizamos un estudio de las propiedades estadísticas del sistema, mediante las distribuciones de probabilidad de diversas cantidades. Obtuvimos leyes de potencia para la distribución de probabilidad de tamaños de conflictos y para la actividad de la matriz de compromisos. Enfatizamos el hecho que leyes de potencia se han observado en las distribuciones de intensidad de guerras históricas. Luego, nuestro modelo contiene los ingredientes mínimos que reproducen la fenomenología histórica real. A su vez nuestros resultados proporcionan sustento al carácter universal de las leyes de potencia en sistemas fuera de equilibrio.

En resumen, en el modelo de tributo de Axelrod demuestra que es posible generar altos niveles de organización colectiva a partir de agentes elementales que interactúan según reglas locales y simples. En particular, la dinámica del “pay or else” combinada con mecanismos para el incremento y disminución de compromisos entre agentes, pueden conducir a la formación de nuevos actores en un sistema social.

Por último queremos enfatizar la importancia de la investigación interdisciplinaria que se está produciendo en la ciencia contemporánea y en particular del área de la física que se ha denominado Sociodinámica o Sociofísica, a la cual esta tesis espera haber contribuido.

Bibliografía

- [1] Robert Axelrod, *Building New Political Actors, Artificial Societies*, 1995.
- [2] Von Neumann J. y Morgenstern O., *Theory of Games and Economic Behavior*, The University Press, Princeton, 1944.
- [3] Stein D. L., *Lectures in the Science of Complexity*, Redwood City, Addison-Wesley, 1989.
- [4] Fontana W., *Functional Self-Organization in Complex Systems*, Redwood City, Addison-Wesley, 1990.
- [5] Holland J. H. *Complex Adaptive Systems*, 1992.
- [6] Buss Leo W., *The evolution of individuality*, Princeton N.J., Princeton University Press, 1987.
- [7] Hebb, D. O. *The Organization of Behavior*, New York 1988.
- [8] K. Kaneko, *Prog. Theor. Phys.* 72, 480 (1984).
- [9] I. Waller and R. Kapral, *Phys. Rev. A* 30, 2047 (1984).
- [10] M. G. Cosenza and J. González, *Prog. Theor. Phys.* 100, 21 (1998).
- [11] Lanchester F.W., *Mathematics in Warfare*, Simond & Schuster, New York, 1956.
- [12] Epstein J.M., *The Calculus of Conventional War: Dynamic Analysis Without Lanchester Theory*, Washington, Brookings, 1985.
- [13] Tilly C., *War Making and State Makings as Organized Crime*, Cambridge University Press, 1985.

- [14] J. C. González-Avella, Fenómenos Colectivos en Modelos de Dinámica Social. Tesis de Maestria. Universidad de los Andes, Mérida - Venezuela, 42-65 (2006).
- [15] F. Auerbach, Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration. Petermanns Geographische Mitteilungen 59, 74-76 (1913).
- [16] G. K. Zipf, Human Behaviour and the Principle of Least Effort. Addison-Wesley, Reading, MA (1949).
- [17] M. Small and J. D. Singer, Resort to Arms: International and Civil Wars, 1816-1980. Sage Publications, Beverley Hills (1982).
- [18] D. C. Roberts and D. L. Turcotte, Fractality and selforganized criticality of wars. Fractals 6, 351-357 (1998).
- [19] M. E. Newman, Power laws, Pareto distributions and Zipf's law. Contemporary Physics 46, 323-351 (2005).