



Universidad de Los Andes

Facultad de Ciencias

Centro de Física Fundamental

Area de Caos y Sistemas Complejos

**Desarrollo de un algoritmo para generar redes
apolonias y su aplicación en dinámica social**

Trabajo de grado presentado ante la ilustre
Universidad de Los Andes
como requisito parcial para optar al Título de:
Licenciado en Física

Presentado por:
T.S.U. Jorge A. Moreno M.

Tutor:
Dr. Mario Cosenza

Mérida, Mayo de 2010

A mi adorada Nonna, única y eterna.
A mis padres, a quienes les debo todo lo que soy y seré.
A mi nueva y hermosa familia, mis dos grandes amores.
A mi admirado Tío Daniel, quien estará siempre conmigo.
A mis hermanos, compañeros de vida.
A mi familia de siempre, cada uno de mis seres queridos.
A mi familia Carrillo Torres, quienes me han tomado como uno más de ellos.
A mis compañeros de estudio y grandes amigos, con los que crecí y viví.
A mis admirados profesores, quienes me ayudaron a andar y hacer el camino.

“Nuestro siglo propende a la romántica veneración del desorden, de lo elemental y de lo caótico.”

Jorge Luis Borges

Agradecimientos

Principalmente a mi tutor y guía, el Profesor Mario Cosenza, por su gran dedicación, ayuda y apoyo incondicional. Gracias por sus sabios y útiles consejos, por su paciencia y colaboración.

Muy especialmente al Profesor Kay Tucci, por contribuir enormemente en el desarrollo de este trabajo. Gracias por su buena disposición de todos los días.

A la Profesora Mayerlin Uzcátegui, por brindarme su ayuda en los momentos más necesitados.

A mi jurado, Profesores Kay Tucci, Gilberto Paredes y Miguel Escalona, por acompañarme en este gratificante trabajo y ayudarme a hacerlo aún mejor.

A todos mis compañeros del grupo de Caos, en especial a Víctor, Leonardo, Diego, José Luis, Adriana, Andrea, Alejandra, Aquiles, Douglas y Sirius, quienes siempre estuvieron allí para ayudar en todo momento.

A los Profesores Mario, Antonio, Kay, Maye, Francisco Hidrobo y Luis Nuñez, por sembrarme la semilla de la verdadera Ciencia, y darme las herramientas necesarias para abordarla.

A ISyS, y todos sus contribuyentes.

Por otro lado, quiero agradecer a mis padres, quienes han hecho posible este grandioso triunfo. Muchas gracias por todo su apoyo y refugio en todos los aspectos.

A mis amadas, Gaby y Dharma, por ayudarme y acompañarme día a día y hacer que todo en mi vida sea mejor.

A mi familia y a la familia Carrillo Torres, por estar siempre cerca y brindarme su valiosa ayuda.

A todos los que han contribuido de una u otra forma en mis pensamientos, mi carrera y este trabajo. Siempre les estaré agradecido.

Gracias... totales!

“Entities of an essentially new sort are entering the sphere of scientific thought. Classical science in its diverse disciplines, be it chemistry, biology, psychology or the social sciences, tried to isolate the elements of the observed universe –chemical compounds and enzymes, cells, elementary sensations, freely competing individuals– expecting that, by putting them together again, conceptually or experimentally, the whole or system –cell, mind, society– would result and be intelligible. Now we have learned that for an understanding not only the elements but their interrelations as well are required...”

Ludwig Bertalanffy

“I adore simple pleasures. They are the last refuge of the complex.”

Oscar Wilde

Resumen

Las redes apolonias han sido objeto de mucha atención recientemente debido a que en ellas coexisten varias propiedades que se encuentran en otros modelos relevantes de redes complejas y en diversos sistemas reales. En la presente tesis desarrollamos un algoritmo propio, conceptualmente simple y computacionalmente eficiente para la construcción de redes apolonias, con el principal objetivo de contribuir a la investigación de procesos dinámicos sobre este tipo de redes. Como una aplicación novedosa de nuestro algoritmo, estudiamos el modelo de influencia social de Axelrod definido sobre redes apolonias. En particular, hemos encontrado que el punto crítico de la transición de fase en el modelo de Axelrod aumenta con el tamaño de la red apolonia como una ley de potencia. Este comportamiento es similar al obtenido por otros autores para redes libres de escala convencionales, pero difiere del resultado observado en redes libres de escala con alto coeficiente de agrupamiento. Nuestros resultados sugieren que la existencia de la transición de fase en el límite termodinámico en redes libres de escala no puede ser atribuido solamente al alto coeficiente de agrupamiento, sino que otras propiedades topológicas, como la correlación de grado o fractalidad de la red, pudieran tener un papel relevante en las propiedades colectivas del modelo de Axelrod.

Índice general

Resumen	v
Introducción	1
1. Redes	4
1.1. Redes y grafos	4
1.2. Características y propiedades de las redes	6
1.2.1. Adyacencia	6
1.2.2. Distribución de grado	7
1.2.3. Conexión	8
1.2.4. Longitud característica	8
1.2.5. Coeficiente de agrupamiento	9
1.3. Topología de las redes	10
1.3.1. Redes regulares	10
1.3.2. Redes jerárquicas (árboles)	12
1.3.3. Redes Aleatorias	13
1.4. Redes complejas	14
1.4.1. Propiedades estadísticas de las redes complejas	17
1.5. Redes evolutivas	19
1.5.1. Redes de pequeño mundo (<i>Small-world</i>)	19
1.5.2. Redes exponenciales	22
1.5.3. Redes libres de escala	23
1.6. Redes deterministas	25
1.7. Redes fractales	26

2. Redes apolonias	31
2.1. Propiedades	34
2.1.1. Orden y tamaño	34
2.1.2. Distribución de grado	35
2.1.3. Coeficiente de agrupamiento	36
2.1.4. Longitud característica	38
2.1.5. Espectro de autovalores	38
3. Un algoritmo para generar redes apolonias	40
3.1. Identificación y etiquetado de nodos en la red	40
3.2. Obtención de la tabla de vecinos	44
4. Modelo de influencia cultural de Axelrod en redes apolonias	48
4.1. Modelo cultural de Axelrod	48
4.1.1. Dinámica del modelo	49
4.1.2. Formulación matemática	50
4.1.3. Evolución y comportamientos emergentes	50
4.1.4. Transición de fase en el modelo de Axelrod	52
4.2. Influencia de la topología en el modelo social de Axelrod	53
4.3. Modelo de influencia social de Axelrod en redes apolonias	57
Referencias	63

“I can’t understand why people are frightened of new ideas. I’m frightened of the old ones.”

John Cage

Introducción

En años recientes la comunidad científica ha mostrado un creciente interés en el estudio de las redes en diferentes contextos, tales como Internet, World Wide Web, y redes sociales y biológicas de varias clases. Desde la física a la biología y las ciencias sociales, los investigadores han encontrado que una gran variedad de sistemas pueden ser representados como redes que poseen propiedades comunes, y de las cuales hay mucho que aprender. Por ejemplo, el estudio de la Web ha llevado a la creación de nuevos y poderosos motores de búsqueda con un desempeño muy superior al de sus predecesores. El estudio de redes sociales ha llevado a nuevas ideas acerca de la propagación de enfermedades y de las técnicas para controlarlas. El estudio de redes metabólicas nos ha enseñado acerca de los bloques de construcción fundamentales de la vida y nos han proporcionado nuevas herramientas para el análisis de los inmensos volúmenes de datos bioquímicos que están siendo producidos por el secuenciamiento de genes [1].

La gran cantidad de sistemas reales, naturales o artificiales, que pueden ser estudiados y analizados mediante redes ha llevado al surgimiento de la nueva Ciencia de Redes (*Network Science*). Se trata de una reciente disciplina científica que estudia las interconexiones existentes en diversos sistemas de carácter físico, biológico, social, tecnológico y de información. Este campo de la Ciencia busca descubrir los principios comunes, algoritmos y herramientas que gobiernan el comportamiento de estas redes [2].

El estudio empírico de diversas redes reales ha permitido caracterizar ciertas propiedades que se manifiestan en todo tipo de sistemas, y que además juegan un

papel muy importante en las dinámicas y procesos que ocurren en ellos. Paralelamente, han surgido una serie de desarrollos que extienden la antigua teoría de grafos, y se han propuesto distintos modelos evolutivos que logran explicar de algún modo cómo las propiedades de las redes complejas emergen de simples reglas que describen la dinámica de las conexiones entre sus elementos.

En particular, en nuestro grupo de investigación en Caos y Sistemas Complejos se ha desarrollado una herramienta para la investigación de procesos dinámicos en una gran variedad de estas redes. Esta herramienta es conocida como *ISyS* (*Inhomogeneous Systems Simulator*) y fué creada originalmente por el Dr. Kay Tucci [3]. Esta herramienta incorpora una colección de varios modelos de redes con el fin de poder realizar estudios dinámicos sobre ellas.

Recientemente, se ha propuesto un modelo de red determinista, denominada *red apolonia* [4, 5], en la cual coexisten varias propiedades de otras redes complejas. Por este motivo, su estudio resulta de gran interés. En particular, es muy importante disponer de un algoritmo eficiente que permita generar redes apolonias, con el fin de poder investigar procesos dinámicos sobre ellas.

En la presente tesis desarrollamos un algoritmo propio, conceptualmente simple y computacionalmente eficiente para la construcción de redes apolonias. Este algoritmo ha sido implementado con la intención de incorporarlo de manera natural a la plataforma de computación ISyS. Nuestro objetivo es contribuir a la investigación de procesos dinámicos sobre este tipo de redes. Como una aplicación novedosa de nuestro algoritmo, estudiamos el modelo de influencia social de Axelrod [6] definido sobre redes apolonias.

En el Capítulo 1 presentamos una revisión del tema de redes, incluyendo el tópico actual de redes complejas. Se introducen varios conceptos que permiten caracterizar las propiedades estadísticas y topológicas de las redes. Se muestran diversos modelos de redes complejas y sus propiedades características. Debido a lo reciente del tema, no existen en la actualidad textos destinados al estudio de redes complejas. La revisión que hacemos en este Capítulo es una de las contribuciones que consideramos de utilidad para la iniciación en la investigación de estos temas.

El Capítulo 2 contiene una descripción de las redes apolonias y una revisión de sus propiedades características. Se destaca el interés suscitado por el estudio de estas redes.

En el Capítulo 3 introducimos nuestro algoritmo para generar redes apolonias. En su desarrollo, se presenta el procedimiento geométrico que seguimos para el etiquetado de los nodos, que permite obtener la tabla de vecinos correspondiente a una red apolonia para cualquier nivel de construcción.

En el Capítulo 4 se implementa una red apolonia generada con nuestro algoritmo, y se aplica para la investigación de un modelo de dinámica social sobre esta red. Específicamente, estudiamos la influencia de las propiedades topológicas características de esta red en el modelo de influencia social de Axelrod. Este modelo ha sido investigado previamente en varias redes complejas, pero no en redes apolonias. Nuestros resultados permiten comparar los efectos colectivos asociados a la topología de la red apolonia subyacente con tales efectos producidos por otras redes complejas.

Finalmente, se presentan las conclusiones derivadas de este trabajo.

*"Networks are on our minds nowadays.
Sometimes we fear their power... and with
good reason"*

Steven H. Strogatz

Capítulo 1

Redes

En este Capítulo presentamos una revisión del tema de redes, incluyendo el tópico actual de redes complejas. Debido a lo reciente del tema, no existen textos destinados al estudio de redes complejas. La revisión que hacemos en este Capítulo es una de las contribuciones que consideramos de utilidad para la iniciación en la investigación de estos temas.

1.1. Redes y grafos

El concepto de red surge del objeto matemático llamado grafo, estudiado en la teoría de grafos. Un *grafo* es una representación abstracta de un conjunto de objetos conectados entre sí. Estos objetos interconectados son llamados vértices o nodos, y los enlaces que conectan a un par de vértices son llamados aristas o arcos y pueden ser orientados o no. Los grafos suelen representarse gráficamente como un conjunto de puntos (para los vértices) unidos por líneas (para las aristas), como se ilustra en la Figura 1.1 [7].

Matemáticamente, un grafo puede verse como un par ordenado $G = (V, E)$, donde: V es un conjunto (no vacío) de vértices o nodos; y E es un conjunto de arcos o aristas que relacionan estos nodos. Como ejemplo, la Figura 1.2 presenta un grafo

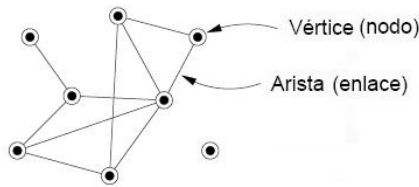


Figura 1.1: Representación general de un grafo. Fuente: [8]

con su respectiva representación gráfica. Como sólo la información de conexión es importante, la forma pintoresca del grafo es irrelevante, es decir, no importa la forma de las aristas ni la posición espacial de los vértices [7].

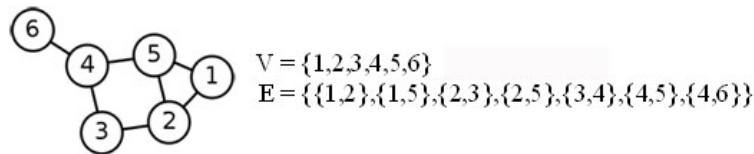


Figura 1.2: Ejemplo de un grafo y su representación gráfica. Este grafo en particular presenta 6 vértices y 7 aristas ($|V| = 6$, $|E| = 7$). Fuente: [7]

El trabajo de Leonhard Euler sobre el problema de los puentes de Königsberg (1736) es considerado el primer resultado de la teoría de grafos. La ciudad de Königsberg (actualmente Kaliningrado, Rusia) era famosa por sus siete puentes que unían ambos lados del río Pregel con dos de sus islas. Dos de los puentes unían la isla mayor con el lado oriental y otros dos con el lado occidental. La isla menor estaba conectada a cada lado por un puente y el séptimo puente unía ambas islas (ver Figura 1.3). El problema consistía en encontrar un camino a través de la ciudad que cruzara todos los puentes, sólo una vez cada uno. Euler notó que el camino dentro de cada masa de tierra era irrelevante y que la única característica importante en la ruta era la secuencia de los puentes cruzados. Esto le permitió reformular el problema en términos abstractos, tomando en cuenta sólo la forma en que los puentes que las conectaban dichas masas de tierra. En términos de grafos, cada masa de tierra se representaría con un vértice y cada puente con una arista, dando como resultado una estructura matemática de grafo, como se puede observar en la Figura 1.3. Abstrayendo este problema y planteándolo con la (entonces no concreta) teoría de grafos, Euler consigue demostrar que el problema de los puentes de Königsberg no tiene solución, es decir, en el grafo asociado no existe una ruta completa que no pase por alguna

arista dos veces. Luego, Euler resuelve el problema más general: ¿Qué condiciones debe satisfacer un grafo para garantizar que haya alguna solución?; encontrando que el número de aristas (en este caso puentes) debía ser par. Actualmente este tipo de soluciones son llamadas rutas Eulerianas en su honor. La descripción matemática de vértices y aristas de Euler fundó la teoría de grafos como herramienta matemática para estudiar las propiedades de las relaciones entre objetos en una estructura de red [7].

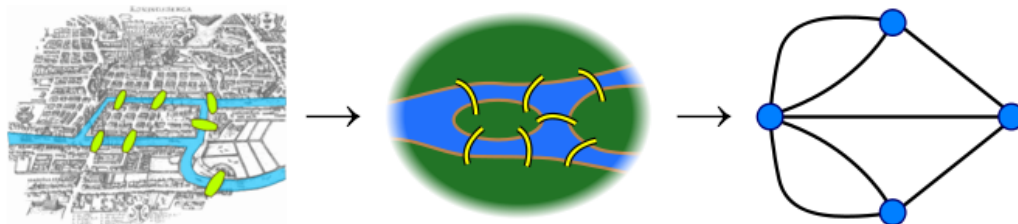


Figura 1.3: Problema de los siete puentes de Königsberg. Fuente: [7]

Los grafos son una herramienta muy potente, ya que prácticamente cualquier problema puede representarse mediante un grafo. La teoría de redes se basa en el estudio de grafos como una representación de relaciones entre objetos discretos con propiedades específicas, modelando bien sea sistemas abstractos como también sistemas reales [2, 7].

1.2. Características y propiedades de las redes

1.2.1. Adyacencia

Dos vértices son adyacentes si existe una arista que los una, es decir, si están conectados entre sí. A los vértices adyacentes comúnmente se dice que son vecinos. Una forma de representar las adyacencias existentes en un grafo es a través de la matriz de adyacencia, que no es más que una matriz cuyas filas y columnas vienen etiquetadas por los vértices del grafo, y donde cada posición (i, j) puede valer 1 ó 0, según los vértices i y j sean adyacentes o no, respectivamente. En un grafo no dirigido se presentará una matriz de adyacencia simétrica (por lo que se les llama redes simétricas a aquellas con esta característica), mientras que en un grafo

no dirigido se presentará una matriz asimétrica (redes asimétricas). Si se trata de grafos simples (sin auto-enlaces) la diagonal de la matriz de adyacencia será de ceros [7].

Una representación equivalente a la matriz de adyacencia es una lista de adyacencia (también conocida como tabla de vecinos). Esta puede verse como una tabla con dos columnas donde la primera contiene el número o identificador de cada uno de los nodos de la red, uno por cada fila; y en la segunda se listan los números o identificadores de todos aquellos nodos que son adyacentes al nodo de la primera columna [7].

En la Figura 1.4 se muestra la matriz y tabla de adyacencia correspondiente al grafo presentado en la Figura 1.2.

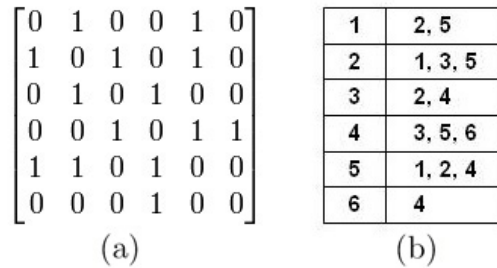


Figura 1.4: Ejemplo de matriz de adyacencia (a) y tabla de adyacencia (b).

1.2.2. Distribución de grado

El grado o valencia k de un vértice en un grafo es el número de aristas incidentes a ese vértice. Una arista es incidente a un vértice si ésta lo une a otro. En otros términos, el grado de un nodo es el número total de enlaces que éste posee. Al grado de un vértice también se le llama grado local [7, 8, 9].

No necesariamente todos los nodos en una red tienen el mismo grado o número de enlaces. Tal repartición en los grados de los nodos en toda la red está caracterizada por una función de distribución $P(k)$, que representa la probabilidad de que un vértice de la red elegido uniformemente al azar tenga grado k (k enlaces). Si se define p_k como la fracción de vértices en la red que poseen grado k , y se grafica p_k haciendo un histograma de los grados de todos los vértices en la red, entonces este histograma representa la distribución de grado $P(k)$ de la red [8, 10].

A pesar de que el grado de un vértice es una cantidad local, la distribución de grado frecuentemente determina algunas propiedades globales importantes de las redes. De hecho, la distribución de grado es una de las características estadísticas básica en las redes [9].

1.2.3. Conexión

Se llama camino a una secuencia de vértices dentro de un grafo, tal que exista una arista entre cada vértice y el siguiente. Se dice que dos vértices están conectados si existe un camino que vaya de uno a otro, de lo contrario estarán desconectados. Dos vértices pueden estar conectados por varios caminos. La longitud de un camino viene dada por el número de aristas dentro de él. Así, los vértices adyacentes están conectados por un camino de longitud 1, y los segundos vecinos por un camino de longitud 2. Si un camino empieza y termina en el mismo vértice se le llama ciclo [7].

Se dice que un grafo está conectado, si todo par de vértices en él puede ser conectado por algún camino, en caso contrario se dice que está desconectado. Se le llama componente de un grafo al subgrafo (subconjunto de vértices y aristas) en el cual todo par de vértices está conectado por un camino. En otras palabras, los componentes de un grafo serán todos los máximos subgrafos conectados. Así, un grafo conectado tendrá un solo componente que consistirá en el grafo completo [7].

1.2.4. Longitud característica

La distancia entre dos vértices es la longitud del camino más corto entre ellos. La distancia entre un vértice consigo mismo es cero, y cuando dos vértices están desconectados su distancia se define infinita. Al camino más corto entre dos vértices también se conoce como camino geodésico. Puede haber más de un camino geodésico entre dos vértices [7, 8].

La longitud característica ℓ de una red, es definida en Ref. [11] como el número de aristas en el camino más corto entre dos vértices, promediado sobre todos los pares de vértices. En otras palabras, ℓ es la distancia promedio de todos los pares de nodos en la red. Esta medida también se conoce como longitud media.

La longitud característica mide la separación típica entre dos vértices en el grafo y es una propiedad global. Matemáticamente ℓ puede escribirse como [2]:

$$\ell = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} d_{ij}, \quad (1.1)$$

donde d_{ij} es la distancia entre el vértice i y el vértice j . Para grafos simétricos la Ecuación (1.1) se reduce a [8]:

$$\ell = \frac{1}{\frac{1}{2}n(n-1)} \sum_{i>j} d_{ij}. \quad (1.2)$$

Esta definición de ℓ es problemática para las redes con más de un componente, ya que en estos casos existirán vértices que no tengan un camino de conexión, por lo que (convencionalmente) tendrán una distancia infinita, haciendo ℓ también infinita. Para evitar este problema se suele definir ℓ como la distancia promedio entre todos los pares de vértices que tengan un camino de conexión. Así, aquellos pares que pertenezcan a dos componentes distintos serán excluidos del promedio. Otra alternativa es definir ℓ en su forma recíproca [8]:

$$\ell^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}n(n-1)} \sum_{i>j} d_{ij}^{-1}, \quad (1.3)$$

donde los valores infinitos de d_{ij} no contribuyen nada a la suma.

1.2.5. Coeficiente de agrupamiento

El coeficiente de agrupamiento C de una red (clustering coefficient), se define en [11] de la siguiente manera: Si un vértice i posee k_i vecinos, entonces entre estos podrán existir hasta $k_i(k_i-1)/2$ aristas conectándolos unos con otros (en el caso en que cada vecino de i esté conectado con cada otro vecino de i); C_i (coeficiente de agrupamiento local) denotará la fracción de estos posibles enlaces que efectivamente existan; y C será definido como el promedio de C_i sobre todos los vértices i de la red.

El coeficiente de agrupamiento local puede entonces escribirse como [10]:

$$C_i = \frac{E_i}{\frac{1}{2}k_i(k_i-1)}, \quad (1.4)$$

donde E_i es el número de aristas (enlaces) existentes entre los k_i vértices vecinos de i . Para aquellos vértices que posean grados 0 ó 1, se conviene colocar $C_i = 0$, para

evitar indeterminaciones en la ecuación (1.4). El máximo valor de C_i posible será 1, si todos los vecinos de i son también vecinos entre ellos, y el mínimo valor será 0, si ningún par de los vecinos de i son vecinos entre sí. El coeficiente local de un vértice cuantifica cuán cerca están sus vecinos de formar un *clique* (subconjunto de vértices tal que existe una arista que conecta cada par de vértices) [7, 8].

El coeficiente de agrupamiento global será [12]:

$$C = \langle C_i \rangle_i = \left\langle \frac{E_i}{\frac{1}{2}k_i(k_i - 1)} \right\rangle_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{E_i}{\frac{1}{2}k_i(k_i - 1)}, \quad (1.5)$$

C_i es una medida de qué tan vecinos son entre sí los vecinos de i , mientras que C mide la formación típica de grupos o comunidades (cliques) en toda la red. C podrá tomar valores entre 0 y 1, y representa la probabilidad promedio de que dos vértices, ambos vecinos de otro vértice en común, sean también vecinos entre ellos [8, 11].

Existe otra definición alternativa para el coeficiente de agrupamiento global, dada en términos de triples y triángulos presentes en la red [8], sin embargo la referida en este trabajo será la correspondiente a la Ecuación (1.5).

1.3. Topología de las redes

A la disposición de los elementos de una red (nodos y enlaces) se le llama topología de red, que no es más que la forma o estructura que presenta su grafo asociado. Según la topología que posea, cada red tendrá diferentes propiedades específicas, intrínsecas a dicha topología [7].

En Física, las interacciones entre los componentes de un sistema se han estudiado desde hace mucho tiempo desde el punto de vista de redes, y para esto se han utilizado varios modelos estándares de topologías. Los prototipos usados más comúnmente se explican a continuación [13].

1.3.1. Redes regulares

Una red regular es aquella en la que cada nodo tiene el mismo número de vecinos, es decir, todos los vértices tienen el mismo grado de conexión o valencia. Se habla entonces del grado de la red, equivalente al grado de los nodos. Una red regular con todos sus vértices de grado k es llamada red k -regular (o red regular de grado k).

Se dice que una red es altamente regular si además de ser regular también cumple con que todos los pares de nodos adyacentes tengan el mismo número de vecinos comunes; y que todos los pares de nodos no adyacentes tengan el mismo número de vecinos comunes [14].

Existen varias topologías de redes regulares. Las más comunes y utilizadas en teoría de redes son:

Redes circulares: Presentan una topología donde cada nodo está conectado exactamente con dos otros nodos, obteniéndose una distribución de nodos con forma de anillo o único ciclo, como se ilustra en la Figura 1.5-a. Estas redes de anillo son 2-regulares, pues $k = 2$, pero también se pueden expandir añadiendo conexiones con los segundos vecinos a cada nodo, es decir, formando enlaces con aquellos nodos que estén a dos órdenes de distancia, obteniéndose una red 4-regula (Figura 1.5-b), y así sucesivamente con los vecinos de cualquier orden que permita la red [14].

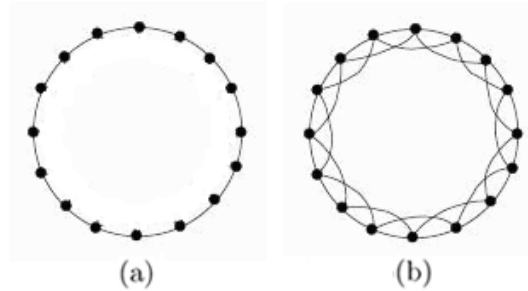


Figura 1.5: Ejemplo de red circular con $k = 2$ (a) y $k = 4$ (b).

Redes euclidianas: En esta topología cada nodo de la red está conectado con dos vecinos a lo largo de cada dimensión (una o más). En el caso de dos dimensiones (ver Figura 1.6), estas redes también son conocidas como mallas, ya que su grafo forma una cuadrícula donde los nodos se encuentran en las intersecciones y a través de las líneas están conectados con sus primeros cuatro vecinos. En general, una red d -dimensional es conectada periódicamente (los bordes opuestos están conectados), y la topología resultante es un toroide, por lo que a la red se le llama toroidal. En particular, para el caso de una sola dimensión se obtiene un anillo cerrado y es equivalente a una red circular [14].

Redes globales: Su topología es representada por un grafo completo, donde cada par de nodos poseen un enlace entre ellos, es decir, cada nodo está conectado

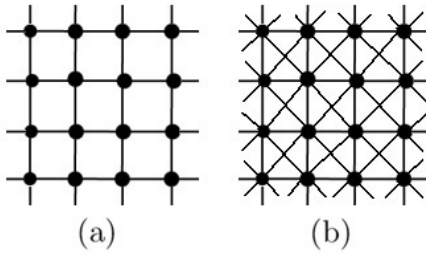


Figura 1.6: Ejemplo de red euclidiana con $k = 4$ (a) y $k = 8$ (b).

con todos los demás nodos de la red (ver Figura 1.7). En una red global toda conexión posible es realizada, y siendo n nodos en la red, habrán $n(n-1)/2$ enlaces. El grado de una red global con n elementos es $n-1$ [14].

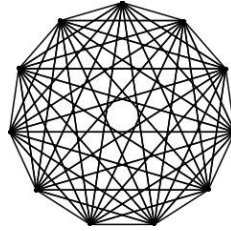


Figura 1.7: Ejemplo de red global.

1.3.2. Redes jerárquicas (árboles)

Las redes jerárquicas son aquellas que en su topología puede distinguirse cierta jerarquía u orden, es decir, los nodos de la red y sus enlaces están organizados en una estructura de niveles o capas, pudiendo hablar de superior, inferior o mismo nivel. A estas estructuras se les llama árboles porque son representadas normalmente en forma de un árbol invertido (la raíz arriba y las hojas abajo), como se muestra en la Figura 1.8. En estas redes todos los enlaces se encuentran en forma jerárquica y no existen ciclos (camino cerrados). Así, un nodo sólo puede tener enlaces con un nodo del nivel superior inmediato (padre) y con uno o más nodos del nivel inferior inmediato (hijos), y no con nodos de su mismo nivel. Al nodo de mayor jerarquía se le llama nodo raíz y no presenta ningún nodo padre. A los nodos que no poseen hijos se les llama nodos terminales (o también hojas). Al número de hijos de un nodo se le dice ramificación (*branching*). En general cada nodo pudiera tener

un número específico de hijos (árboles de multi-ramificación), y si todos los nodos poseen el mismo número, entonces se habla del factor de ramificación r del árbol, y la red puede ser considerada r -regular. Un árbol con factor de ramificación 1 es equivalente a una topología lineal. Otro caso especial de árbol es aquel en que todos los nodos están unidos al nodo raíz, topología conocida como estrella. El número de enlaces para una red de árbol de n nodos es de $n - 1$. En un árbol dos nodos sólo estarán conectados a través de un único camino [15].

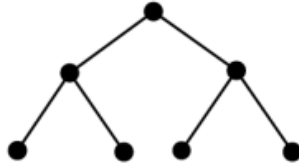


Figura 1.8: Ejemplo de árbol de ramificación 3.

1.3.3. Redes Aleatorias

Una red aleatoria es aquella cuyo grafo es generado por algún proceso aleatorio, es decir, los enlaces entre los nodos son determinados y distribuidos en forma aleatoria. Uno de los modelos más estudiados es el de Erdős-Rényi (ER), propuesto en 1959 [16], en el que un grafo aleatorio es obtenido comenzando con un conjunto de n nodos desconectados y añadiendo enlaces entre ellos al azar [7, 10].

Existen dos variantes del modelo de Erdős-Rényi (ER):

Modelo $G(n, p)$: En este modelo cada posible par formado con los n nodos de la red es enlazado con una probabilidad p (independiente de los demás enlaces). Se puede ver que la red tiene $pn(n - 1)/2$ enlaces en promedio, la distribución de grado es binomial y el grado medio es $k = p(n - 1)$.

Modelo $G(n, M)$: Este modelo da como resultado una red con n nodos y M enlaces escogidos uniformemente al azar. Esto es: se selecciona un par de nodos de la red al azar y se enlazan, repitiendo este proceso M veces, independientemente de los enlaces realizados anteriormente [17].

La estructura o topología de la red aleatoria varía en función de los parámetros p y M , respectivamente para los modelos $G(n, p)$ y $G(n, M)$. Al incrementar p (la probabilidad de formación de enlaces entre pares de nodos), el número de enlaces de

la red aumenta, como sucedería directamente al incrementar M . Siendo los extremos: una red con todos sus nodos aislados (cero enlaces), para los valores $p = 0$ y $M = 0$ respectivamente; y una red global ($n(n - 1)/2$ enlaces), para los valores de $p = 1$ y $M = n$ respectivamente (ver Figura 1.9) [10].

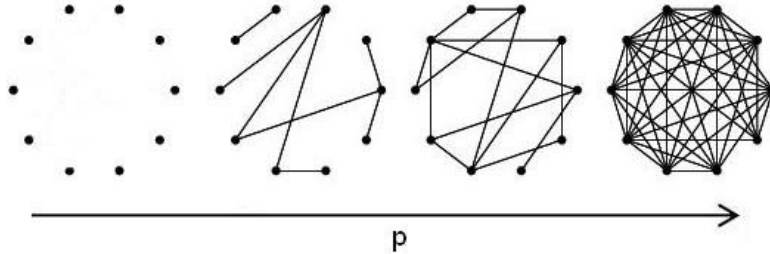


Figura 1.9: Ejemplo de redes aleatorias. En la evolución de izquierda a derecha N permanece fijo mientras p (o M) aumenta. Fuente: [18]

Para un número n grande de elementos (nodos) las redes aleatorias toman una distribución de grado de tipo Poisson [9].

Existe una propiedad estadística en común para todas las redes aleatorias, y es que en ellas ocurre una (llamada) transición de fase, donde para valores bajos de p y M , la red se encuentra fragmentada en pequeñas agrupaciones de nodos (componentes); y para valores altos de p y M , la mayoría de los nodos se encuentran unidos en un mismo “componente gigante” (del orden de n), con el resto aún en pequeños componentes. Esta transición ocurre aproximadamente para $p = 0,5$ y $M = n/2$ respectivamente ambos modelos, donde a partir de esos valores los componentes crecen y coalicionan a través de enlaces hasta formar espontáneamente el componente gigante [8, 17].

En la Figura 1.10 se ilustra una red donde se pueden apreciar componentes de diversos tamaños.

1.4. Redes complejas

Muchas definiciones sobre sistemas complejos han sido propuestas a través de los años, y aunque aún ninguna es universalmente aceptada, se piensa que una propiedad fundamental de estos sistemas es que están compuestos por un gran número de elementos interactuando de algún modo tal que el comportamiento colectivo es más que

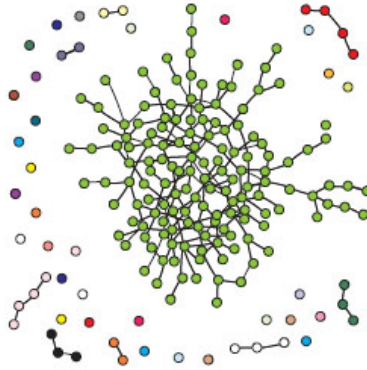


Figura 1.10: Red aleatoria y sus componentes. Puede observarse la coexistencia del componente gigante, componentes muy pequeños y elementos aislados. Fuente: [17]

una simple combinación de sus comportamientos individuales. Durante los últimos años un gran número de investigaciones se ha dirigido hacia el entendimiento de sistemas complejos mediante el estudio del comportamiento de sus componentes y de la naturaleza de las interacciones y conexiones entre ellos. Un aspecto importante en estos sistemas es el patrón de interacción, es decir, cuales elementos interactúan con cuales otros. Estos patrones forman redes de conexiones entre ellos, que pueden estudiarse con la teoría de redes y grafos [13].

Se ha encontrado que el comportamiento de muchos sistemas naturales y sociales está determinado fundamentalmente por tal estructura de interconexiones a través de la cual los constituyentes del sistemas interactúan unos con otros. Recientemente se han realizado estudios sobre la topología de numerosas redes reales, y se ha encontrado que sistemas complejos con muchos grados de libertad que poseen una aparente aleatoriedad, realmente esconden mecanismos genéricos y cierto grado de orden cuyo conocimiento es crucial para el entendimiento del enmarañado mundo que nos rodea [19].

Estos sistemas han obtenido un gran enfoque en la actualidad y existe una gran cantidad de trabajos en la literatura de Física sobre varios sistemas de redes, especialmente: sociales, como redes de amigos, conocidos o de negocios, red de colaboraciones científicas o de actores, contagio de enfermedades, redes de contacto sexual; biológicas, como redes metabólicas y de proteínas, redes neurales, ecosistemas; tecnológicas y de información, como redes de suministro eléctrico, Internet, World Wide Web, rutas aéreas; y muchas otras de carácter natural o artificial, como

redes fluviales, red de factores primos, red semántica de palabras, etc [8, 9, 10, 13].

Este amplio trabajo ha sido dividido entre estudios empíricos de redes reales particulares y estudios teóricos enfocados en la creación y construcción de modelos matemáticos y computacionales que puedan ayudarnos con el entendimiento de propiedades importantes de la estructura de las redes y su rol en los procesos que se llevan a cabo sobre estas [20].

Ejemplos ilustrados sobre una variedad de redes reales estudiadas se presentan en la Figura 1.11.

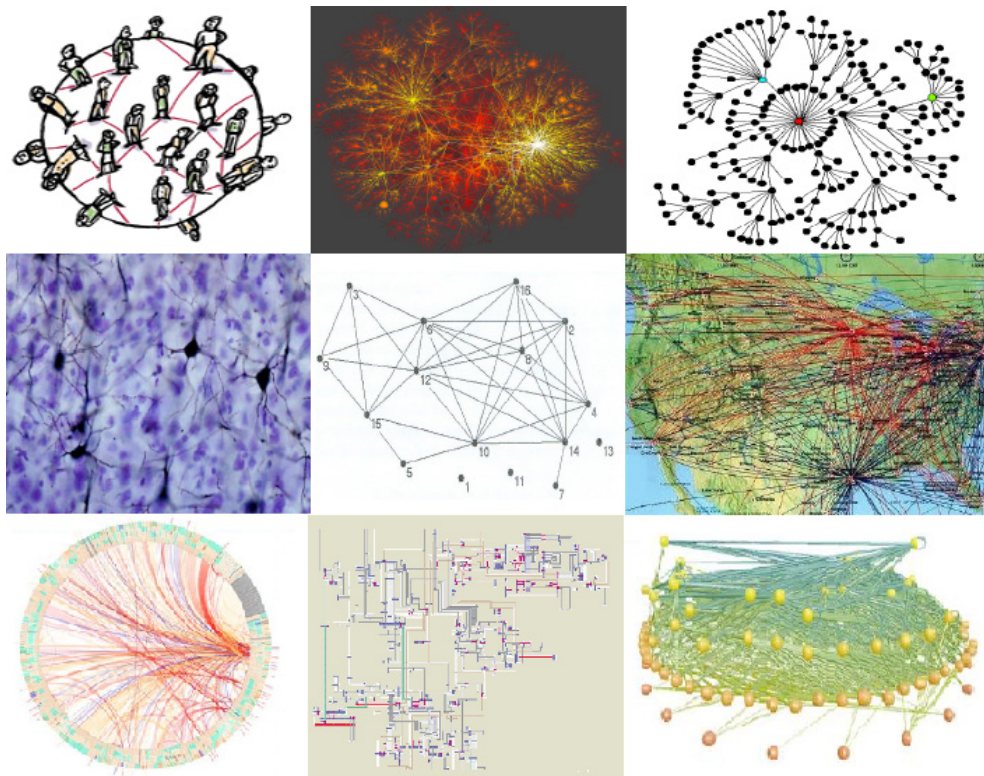


Figura 1.11: Ilustración de algunas redes complejas reales. Por filas de derecha a izquierda: red social, Internet, red de propagación de epidemias, red de neuronas, red de factores primos, red de tabla de vuelos, red de relación genómica, red eléctrica, red de predador-presa entre especies.

En la mayoría de los modelos estudiados en la comunidad de físicos se busca crear una red que presente algunas de las características observadas en los estudios empíricos. Luego se verifica que las redes producidas por los modelos tengan similitud con los sistemas reales los cuales se quieren reproducir, y posteriormente usarlos

como sustratos para futuros modelados (estudio de propagación de epidemias, flujos de tráfico, etc.) [20].

Las redes con una topología compleja y principios de organización desconocidos muchas veces aparentan ser aleatorias, por lo que los modelos de redes aleatorias han sido ampliamente utilizados en el estudio de sistemas complejos. Sin embargo, el reciente estudio de estos sistemas ha llevado a la conclusión de que las redes de sistemas reales presentar algunos principios de organización concretos codificados de alguna manera en su topología. De modo que si estas redes no son realmente aleatorias, se necesitan nuevos modelos y herramientas que logren capturar en términos cuantitativos esos principios de organización presentes en dichos sistemas [21].

Actualmente existen en la Ciencia de redes diversos modelos que describen diferentes topologías, que han logrado representar matemáticamente una gran cantidad de datos empíricos. Algunos de los modelos más importantes y utilizados para representar redes complejas se revisarán más adelante en este capítulo.

1.4.1. Propiedades estadísticas de las redes complejas

En los términos más básicos, un sistema se dice que es complejo cuando éste presenta patrones que no puedan ser considerados simples. Por ejemplo, un cristal perfecto (que es totalmente ordenado o regular) y un gas de partículas (que es completamente aleatorio) pueden ser considerados como modelos simples y por lo tanto sistemas con complejidad cero o mínima. Entre estos dos extremos, un denso de complejidad queda abierto para el resto de los sistemas [22].

Análogamente, pensaremos en las redes complejas como aquellas redes que se encuentran entre las redes regulares y las redes aleatorias. En términos más precisos, serán consideradas como redes complejas aquellas redes que poseen propiedades topológicas no triviales, que no ocurren ni en redes regulares ni en redes aleatorias. La mayoría de las redes sociales, biológicas y tecnológicas son consideradas complejas debido a su topología estructural no trivial. De hecho, el estudio de las redes complejas surge a raíz de las numerosas investigaciones empíricas sobre redes reales. Estas características no triviales incluyen: un alto coeficiente de agrupamiento, una corta longitud característica, una cola pesada en la distribución de grado, una estructura comunitaria a muchas escalas, y evidencias de una estructura jerarquizada [2].

Efecto de pequeño mundo: Se refiere a la existencia de distancias cortas entre los pares de vértices dentro de una red. Esto se traduce a que la longitud característica de la red es muy pequeña comparada con el tamaño de la red ($\ell \ll n$). De hecho, se considera que la red posee el efecto de pequeño mundo si la longitud característica es del orden de $\log n$. De este modo, la longitud característica dependerá del tamaño del sistema, pero no cambiará drásticamente con él [13].

Agrupamiento: Una propiedad importante observada en la mayoría de las redes reales es que poseen un alto agrupamiento. Esto se refleja en la formación de grupos o cliques donde los elementos que los conforman están altamente conectados unos con otros. Esta tendencia inherente a agruparse se puede cuantificar con el coeficiente de agrupamiento (*clustering*), en cuyo caso se obtendrá un alto valor promedio [13].

Distribución de grado asimétrica: Una de las propiedades más interesantes de las redes complejas de gran tamaño es que su distribución de grado no es de forma binomial (o de tipo Poisson), como ocurre en las redes aleatorias. En vez de esto, el histograma de grados de los vértices presenta una fuerte asimetría positiva, lo cual significa que la distribución tiene una larga cola de valores a la derecha que están muy lejanos del promedio [8].

En el Cuadro 1.1 se puede apreciar una lista de redes reales para las cuales se ha calculado a través de datos empíricos los valores de las propiedades estadísticas más importantes, mencionadas anteriormente.

En las redes, una corta longitud característica facilita la rápida transferencia de información y reduce costos. Es por ello que la mayoría de las redes reales presentan esta propiedad, llevando al concepto de pequeño mundo, donde todos los elementos se conectan con todos los demás a través de caminos cortos. Por esta razón, casi todos los modelos de redes reales son creados tomando en cuenta esta condición y por lo tanto todos ellos presentan longitudes características muy cortas [20].

Tanto las redes regulares y aleatorias, a pesar de ser idealizaciones útiles, ambas presentan ausencia de estas propiedades características de las redes complejas. En el caso de las redes regulares, poseen un alto coeficiente de agrupamiento pero una longitud característica muy alta (comparable con el tamaño del sistema). Por otro lado, las redes aleatorias si poseen una longitud característica muy baja (del orden de $\log n$), pero su coeficiente de agrupamiento es muy bajo. Por otro lado, ninguna presenta una distribución de grado asimétrica [8, 10, 13].

Entonces, si ninguna de estas redes estándares son una buena representación para muchas situaciones del mundo real, ¿qué pudiera serlo? Hoy en día, existe un gran número de modelos introducidos por varios autores, que se enfocan en capturar varias de las características antes mencionadas. Todos estos modelos presentan el efecto de pequeño mundo y al menos alguna otra propiedad, que es lo común en la mayoría de los sistemas reales [13].

1.5. Redes evolutivas

Las redes que describen sistemas reales evolucionan constantemente en el tiempo, con la adición y el retiro de nodos y/o enlaces. Debido a la diversidad y gran número de nodos e interacciones, la topología de estas redes evolutivas no habían sido muy exploradas y estudiadas, pero con los avances en esta área ahora se busca entender los sistemas complejos a través de la evolución de las redes que existen detrás de ellos [19].

1.5.1. Redes de pequeño mundo (*Small-world*)

Una gran cantidad de sistemas se han modelado utilizando redes. Sin embargo, las topologías de sus conexiones muchas veces se asumen como completamente regulares o completamente aleatorias. Este no es el caso de los sistemas reales, los cuales muchas veces se encuentran entre estos dos extremos. Tal es el caso de las *redes de pequeño mundo*, que pueden tener un alto agrupamiento, como las redes regulares, y aún así tener una pequeña longitud característica, como en las redes aleatorias [11].

Estas redes fueron introducidas por Watts y Strogatz [11] a través del primer modelo analítico propuesto que logra capturar dichas propiedades en 1998. En este modelo se alcanza dicho estado intermedio partiendo de redes regulares donde se modifican algunos enlaces con el fin de introducir cantidades crecientes de desorden. Estas redes son llamadas de pequeño mundo en analogía con el fenómeno de pequeño mundo presente en la mayoría de los sistemas reales, los cuales mantienen a su vez un alto nivel de agrupamiento, como es característico en las redes sociales y muchas otras de naturaleza biológica y tecnológica [11].

Modelo Watts-Strogatz (WS): Para interpolar entre redes regulares y aleatorias se emplea un procedimiento donde se cambian al azar algunos enlaces entre los

nodos existentes en una red regular. A esta acción de cambiar alguno de los vértices incidentes de un enlace, se le refiere como recableado. El procedimiento parte con una red k -regular de tipo circular con n nodos. Luego, cada uno de los $n k/2$ enlaces originales es recableado con una probabilidad p . De este modo, se puede ajustar la red a través del parámetro p , entre regularidad ($p = 0$) y aleatoriedad ($p = 1$), y por lo tanto estudiar la región intermedia ($0 < p < 1$). En el modelo original los recableados se realizan de tal manera que no se altere el número de enlaces en la red ni el número de elementos [11].

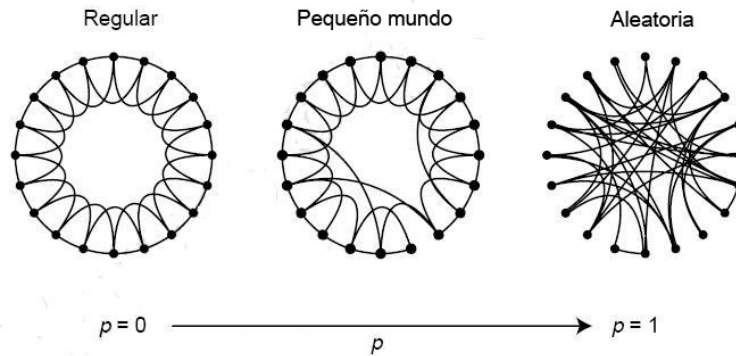


Figura 1.12: Ejemplo del modelo Watts-Strogatz. Fuente: [11]

En la Figura 1.12 se presenta un ejemplo de una red regular con $n = 20$ y $k = 4$, sometida al proceso de recableado para diferentes valores de p . Partiendo desde $p = 0$, donde el anillo original se mantiene sin cambios, se incrementa p y la red se hace más desordenada, hasta llegar a $p = 1$, donde todos los enlaces han sido recableados aleatoriamente. Para valores intermedios de p se tienen redes de pequeño mundo altamente agrupadas como las redes regulares y, aún así, con una longitud característica pequeña como las redes aleatorias (ver Figura 1.13) [11].

El efecto de pequeño mundo en estas redes se debe a la brusca caída de $\ell(p)$ lograda con la introducción de pocos enlaces de largo alcance, “atajos”, que conectan nodos que de otra manera estarían conectados por caminos mucho más largos. Dichos atajos no sólo acortan las distancias entre los pares de nodos que conectan, sino también entre una vecindad y otra [11].

Se ha observado que los sistemas dinámicos acoplados de esta manera, presentan una velocidad de propagación de señales, sincronizabilidad y poder computacional muy elevados; y que esto se debe a que las cortas distancias proporcionan canales

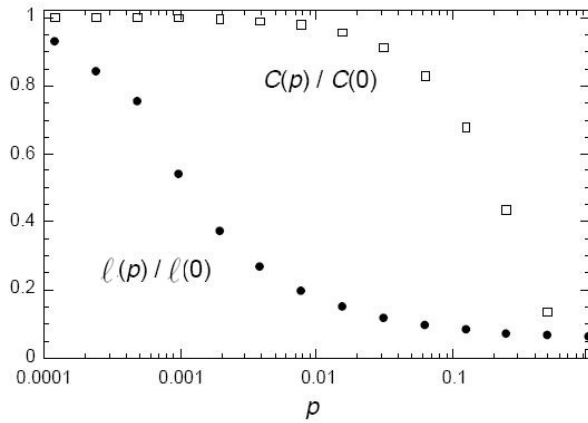


Figura 1.13: ℓ y C para el modelo Watts-Strogatz en función de la probabilidad de recableado p . $\ell(0)$ y $C(0)$ representan los valores respectivos para la red regular inicial. Las propiedades de pequeño mundo se presenta en valores intermedios de p . Fuente: [11]

de rápida comunicación, facilitando cualquier proceso dinámico que requiera de coordinación global y flujo de información [17].

Modelo Newman-Watts: Existe una variante del modelo WS, propuesto por Newman y Watts en 1999 [23]. En esta versión nuevamente se comienza con una red k -regular, pero en lugar de recablear los enlaces con una probabilidad p , se añaden nuevos enlaces (atajos) entre pares de nodos escogidos uniformemente al azar, igualmente con una probabilidad p , pero sin remover ningún enlace de la red original. Este modelo es equivalente al modelo WS para pequeños valores de p , mientras que cuando p se acerca a 1 la red se aproxima a una topología global, donde todos los nodos estarán conectados. En la Figura 1.14 se muestra un ejemplo de este modelo [23].



Figura 1.14: Ejemplo del modelo Newman-Watts. Fuente: [9]

En el caso de las redes de pequeño mundo, la evolución se debe a los cambios en sus enlaces que modifican su estructura y topología, mientras que el tamaño de la red permanece constante, ya que se comienza con un número n fijo que no se modifica en el tiempo.

1.5.2. Redes exponenciales

La mayoría de las redes reales describen sistemas abiertos que crecen continuamente. Comenzando de un pequeño núcleo de elementos, el tamaño del sistema se incrementa en el tiempo a través de la subsecuente incorporación de nuevos elementos [10].

Existen algunos modelos que buscan representar o simular redes en crecimiento. En tales modelos, el crecimiento se debe a la gradual adición de nodos y enlaces, logrando de alguna manera reflejar ciertos procesos que puedan ocurrir en los sistemas reales [8].

Muchos estudios se han realizado con modelos de este tipo y se ha entendido que algunas propiedades en la estructura compleja de las redes son una consecuencia natural de sus principios de crecimiento. De esta manera, con algunas ideas simples, la naturaleza de varios fenómenos se ha logrado relacionar tanto con la auto-organización presente en el crecimiento de las redes, como con los procesos que ocurren a través de ellas [9].

Las redes aleatorias clásicas poseen un número fijo de nodos. Un modelo similar, pero donde el número de nodos crece en el tiempo, dan lugar a las *redes exponenciales*. Se comienza con un único nodo, y en cada paso de tiempo se añade a la red un nuevo nodo, el cual se enlaza con alguno de los ya existentes, escogido al azar (sin preferencia alguna). El resultado de este procedimiento es un árbol aleatorio recursivo que posee una distribución de grado exponencial [9, 24].

Al tiempo $t = 1$ de la evolución se tiene una configuración consistente en dos nodos enlazados. Así, al tiempo t la red consistirá de $t+1$ vértices y t aristas. Se puede conseguir que la distribución de grado para estas redes tiene forma exponencial, $P(k) = 2^{-k}$, por lo que son llamadas redes exponenciales [9].

Aunque esta forma difiere de la distribución de grado tipo Poisson de las redes aleatorias clásicas, ambas distribuciones son funciones que decrecen rápidamente al aumentar k . Por otro lado, se puede mostrar que la longitud característica es

proporcional a $\ln t$, siendo comparable a las redes aleatorias clásicas [9].

1.5.3. Redes libres de escala

Se ha observado que en numerosas redes reales, su distribución de grado sigue una ley de potencia del tipo $P(k) \propto k^{-\gamma}$, para grandes valores de k . Estas redes son llamadas libres de escala debido a que las leyes de potencia son ausentes de una escala característica. Las redes libre de escala difieren de los modelos de redes aleatorias y de pequeño mundo al alejarse significativamente de una distribución tipo Poisson [10]. Una propiedad común de los modelos ER y WS es que la probabilidad de encontrar un nodo muy conectado en la red (es decir, con alto grado k) decrece exponencialmente con k , por lo que estos vértices están prácticamente ausentes. En una red con distribución de grado caracterizada por una ley de potencia, los vértices altamente conectados (*hubs*) tienen una leve posibilidad de ocurrir, pero dominan la conectividad de la red, ya que la mayoría de los nodos presentan un grado mínimo [25].

Varios estudios empíricos sobre la topología de diversos sistemas con numerosos elementos, han demostrado que independientemente de la naturaleza del sistema y de la identidad de sus constituyentes, la probabilidad p_k de que un nodo en la red esté conectado con k nodos decae con una ley de potencia, usualmente con un exponente entre 2 y 4. Esto quiere decir que las redes grandes se auto-organizan en un estado con una distribución libre de escala, siendo esta una propiedad global que tampoco predicen los modelos anteriores [25].

Ahora bien, ¿Cómo estos sistemas se auto-organizan en estructuras libre de escala? ¿Cuál es el mecanismo responsable para tal auto-organización? Para explicar este fenómeno, la idea del enlace preferencial ha sido propuesto por Barabási y Albert [25] en 1999, con un modelo de red en crecimiento [9].

Modelo Barabási-Albert (BA): Existen dos aspectos genéricos de las redes reales que son incorporadas en este modelo: crecimiento y conexión preferencial. Las redes se expanden continuamente con la adición de nuevos vértices que son conectados a los vértices ya existentes en el sistema. Por otro lado, en contraste con los modelos que asumen que la probabilidad de que dos vértices estén enlazados es aleatoria y uniforme, en este modelo las redes exhiben conectividad preferencial, es decir, la probabilidad con que un nuevo vértice se enlaza a los vértices existentes no es

uniforme; existe una mayor probabilidad de que éste se enlace a un vértice que ya tenga un gran número de conexiones. Para incorporar el carácter de crecimiento de la red, se comienza con un pequeño número de vértices y en cada paso de tiempo t se añade un nuevo vértice con m aristas que lo enlazarán con m diferentes vértices de los ya presentes en el sistema. Para incorporar el enlace preferencial, se tiene que la probabilidad w_i de que el nuevo vértice se enlace al vértice i depende del grado k_i de ese vértice, de modo que $w_i(k_i) = k_i / \sum_j k_j$. Después de t pasos de tiempo, el modelo conduce a una red aleatoria con t nodos y mt enlaces. Esta red evoluciona en un estado invariante a escala, donde la probabilidad de que un vértice tenga k aristas sigue una ley de potencia con un exponente $\gamma = 2,9 \pm 0,1$ (ver Figura 1.15). Además, se obtiene que $P(k)$ es independiente del tiempo (y por lo tanto del tamaño del sistema), indicando que el sistema a pesar de su continuo crecimiento se auto-organiza en un estado libre de escala estacionario [25].

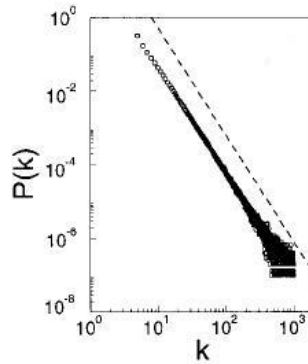


Figura 1.15: Ley de potencia en la distribución de grado en el modelo Barabási-Albert. El exponente es 2.9 (pendiente de la línea punteada). Fuente: [25]

Debido al enlace preferencial, un nodo que adquiriera más conexiones que otro aumentará su grado a una tasa mayor. Así, una diferencia inicial en el grado entre dos vértices se irá haciendo más grande a medida que la red crezca. Este mecanismo también explica la existencia de los llamados *hubs*, nodos con un enorme número de enlaces, que dominan al sistema. Los nuevos nodos que se incorporan a la red, tienden a conectarse con aquellos que poseen mayor grado, los cuales van adquiriendo más enlaces a través del tiempo que sus vecinos menos conectados. Así, los nodos más antiguos incrementan su grado a expensas de los más jóvenes, convirtiéndose eventualmente en *hubs*, ocurriendo el fenómeno de “el rico se hace más rico” que se

observa en muchos sistemas reales [25, 26].

Hasta ahora hemos estudiado una cantidad de modelos que han sido propuestos con el fin de explicar una o más de las propiedades mencionadas de los sistemas complejos. Sin embargo, ninguno de estos modelos explican, de manera simple y convincentemente, cómo todas esas propiedades pueden estar presentes en una red simultáneamente [13].

Buscando esto, muchos investigadores se han dedicado al diseño de nuevos modelos evolutivos que logren capturar de manera espontánea las características más importantes de las redes complejas [27, 28]. Así mismo, también se han introducido muchos modelos de redes deterministas que presentan estas propiedades.

1.6. Redes deterministas

Las redes deterministas son aquellas que son construidas a través de un algoritmo explícito. Partiendo de una configuración inicial, su estructura es creada aplicando una regla fija iteradamente sobre las generaciones anteriores de nodos y enlaces. Aunque las redes deterministas pueden verse en algunos casos como modelos específicos de redes evolutivas, la diferencia básica es que las reglas no están sujetas a probabilidades, por lo tanto todas las realizaciones con los mismos parámetros tendrán igual estructura (en contraste con los modelos evolutivos aleatorios, el ensamble de dichas redes consistirá de un único elemento), es decir, para un número determinado de nodos, las redes tendrán siempre la misma topología.

En las redes deterministas muchas veces podemos caracterizar analíticamente su topología completa, en función de los parámetros involucrados en su construcción, pudiendo determinar de esta manera sus propiedades. Dado el método para generar una red determinista, resulta más sencillo tener un entendimiento visual acerca de su forma, y de cómo los nodos se relacionan unos con otros. Estas ventajas han hecho que se reciva mucha atención en este tipo de modelos de redes [29].

El diseño de redes deterministas puede ser una buena estrategia para el estudio de sistemas donde la conectividad juega un rol esencial, ya que son controlables y pueden por lo tanto ajustarse a características particulares del problema [4].

Por otro lado, las redes deterministas muchas veces proveen la única posibilidad de un tratamiento analítico de problemas difíciles. Además de esto, haciendo uso de

estas redes, se logra imitar redes reales complejas sorprendentemente bien [24].

Ya que prácticamente todos los modelos de redes complejas capturan el fenómeno de pequeño mundo (pequeña longitud característica), se ha prestado considerable atención en la búsqueda de las otras propiedades. La distribución libre de escala y el alto agrupamiento no son propiedades exclusivas. Para un alto número de redes reales, como las citadas en el Cuadro 1.1, la distribución libre de escala y el alto agrupamiento coexisten en la topología. Aún así, la mayoría de los modelos propuestos para describir la topología de las redes complejas tienen dificultad para capturar simultáneamente estas dos propiedades [19].

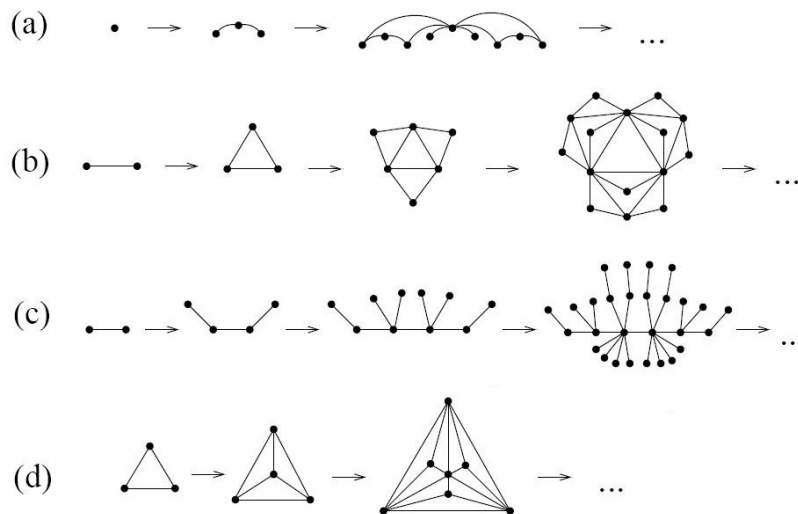


Figura 1.16: Ejemplos de redes deterministas libres de escala. a) Barabási *et al.* (2001) [30]. b) Dorogovtsev *et al.* (2002) [31]. c) Jung *et al.* (2002) [32]. d) Andrade *et al.*, Doye y Massen (2005) [4, 5]. Fuente: [24]

En la Figura 1.16 se muestra algunas redes deterministas que presentan las propiedades de pequeño mundo y su distribución de grado sigue una ley de potencia. En la actualidad existen muchos modelos deterministas propuestos con el fin de capturar las propiedades de las redes complejas [33, 29].

1.7. Redes fractales

Hasta ahora se han considerado tres propiedades que apuntan hacia la complejidad en las redes: efecto de pequeño mundo, alto coeficiente de agrupamiento, y

distribución de grado libre de escala. Sin embargo, también existen otras propiedades que pueden estar presentes en las redes complejas, tales como la fractalidad o autosimilaridad de las mismas.

Un fractal es un objeto geométrico que se mantiene invariante bajo cambios de escala (presenta autosimilaridad). Una propiedad importante de los fractales es su dimensión fractal d_f , que relaciona la escala o factor de magnificación l_O (aumento) con el número de elementos idénticos apreciables N_O , de forma que $d_f = \log N_O / \log l_O$. De manera general, se puede obtener la dimensión fractal de cualquier objeto utilizando el método de conteo de cajas (*box counting*), que relaciona el número de cajas N_B de tamaño o longitud l_B que son necesarias para cubrir o “encerrar” o cubrir el objeto completo. Tal relación viene dada por $N_B = l_B^{d_{fB}}$, donde d_{fB} es la dimensión fractal del objeto. Curiosamente, se ha conseguido que en la naturaleza se presenta comúnmente este tipo de geometría. Por esta razón han surgido diversas propuestas para incorporar propiedades fractales en la topología de las redes para el estudio de sistemas complejos. Dichas redes fractales poseen una estructura no uniforme, intermedia entre las homogéneas (regulares) y las desordenadas (aleatorias).

Algunos ejemplos de estas redes que han sido estudiadas como modelos de dinámica espaciotemporal son presentados en la Figura 1.17. Los vértices son representados por los mínimos elementos geométricos, y están enlazados aquellos que son adyacentes (están en contacto espacial).

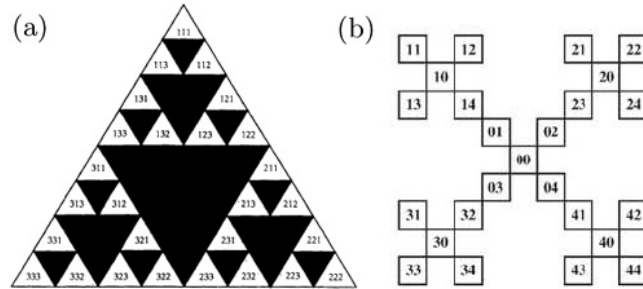


Figura 1.17: (a) Triángulo de Sierpinski [34]. (b) Copo de Nieve (dentrítas) [35].

Las redes fractales se caracterizan porque el espectro de los autovalores de su matriz de adyacencia presenta propiedades multifractales. Esto significa que la distribución de autovalores posee una estructura autosimilar a medida que se incrementa el nivel de construcción del fractal [34]. En la Figura 1.18-a se muestra el espectro

de autovalores de la matriz de adyacencia correspondiente a una red de crecimiento fractal (Figura 1.17-b). Haciendo aumentos en la escala podremos notar que existe autosimilaridad en el rango de autovalores de dicha red (Figura 1.18-b).

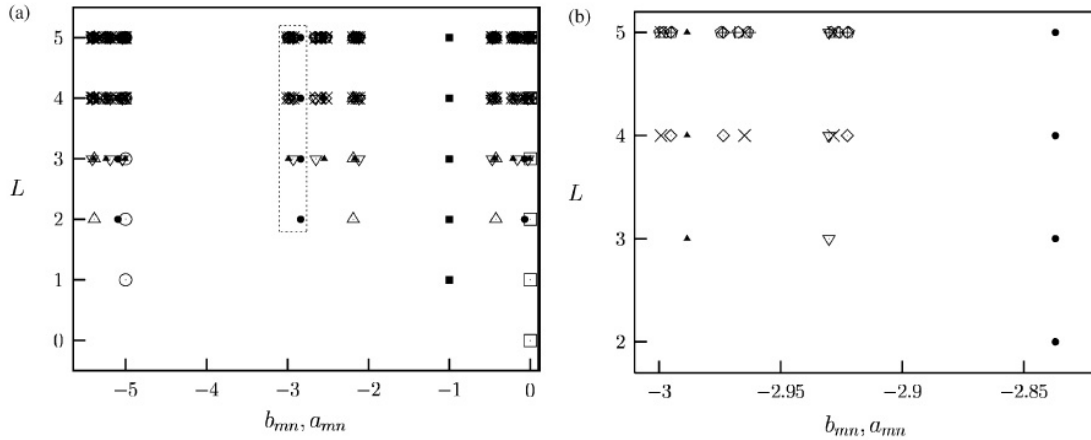


Figura 1.18: (a) Espectro de autovalores correspondiente a la matriz de adyacencia de una red fractal, a medida que aumenta el nivel de construcción. $b_{(mn)}$ y $a_{(mn)}$ representan familias de autovalores. (b) Magnificación de la región encerrada por la línea punteada en (a). Fuente: [35]

Las redes fractales basadas en modelos como los presentados en la Figura 1.17 no poseen ciertas propiedades importantes de las redes complejas. En especial, tienen una longitud característica alta y una distribución de grado típica. Aún más, la relación de la propiedad de efecto de pequeño mundo en las redes complejas, implica que el número de nodos incrementa exponencialmente con el diámetro (longitud máxima) de la red y no con la ley de potencia esperada para las estructuras autosimilares. Por esta razón se creía que las redes complejas no podían poseer fractalidad. En el año 2005, Song *et al.* [36] analizaron una gran variedad de redes complejas reales y encontraron que éstas consisten en patrones que se repiten en todas las escalas de longitud, es decir, que son invariantes ante transformaciones de escala de longitud. Para conseguir las propiedades de autosimilaridad en dichas redes, los autores utilizan una redefinición del método de conteo de cajas (adaptado a grafos) que permite hallar la dimensión fractal de las redes. En el mismo trabajo se desarrolla un procedimiento de renormalización que lleva a una invariancia de escala en distribución de grado. Por otro lado, algunas redes no comparten

estas propiedades topológicas fractales. Por último, estudiaron la fractalidad y autosimilaridad en redes libres de escala y encontraron que existe una relación con el exponente de la distribución de grado de dichas redes [36].

Gracias a este descubrimiento se ha dirigido mucha atención hacia el estudio de redes fractales y su posible origen. Así mismo, la fractalidad es considerada hoy en día como una propiedad fundamental en la caracterización de las redes complejas [37].

La emergencia de la autosimilaridad en las redes complejas, trae consigo la interrogante de qué mecanismos o procesos evolutivos llevan a la formación de tales estructuras. En esta dirección se han propuesto diversos modelos evolutivos con el fin de explicar el origen de la fractalidad en las redes, simultáneamente con las propiedades de pequeño mundo y libre de escala. Song *et al.* muestra que la estructura autosimilar de las redes complejas puede explicarse con un mecanismo evolutivo que implica repulsión entre *hubs* [38]. Goh *et al.* muestran también cómo influyen los enlaces locales y globales en las propiedades fractales y de pequeño mundo, partiendo de un esqueleto de árbol libre de escala [39]. Por otro lado, también se han propuesto nuevos modelos deterministas para generar redes fractales complejas.

	network	type	n	m	z	ℓ	α	C
social	film actors	undirected	449 913	25 516 482	113.43	3.48	2.3	0.78
	company directors	undirected	7 673	55 392	14.44	4.60	–	0.88
	math coauthorship	undirected	253 339	496 489	3.92	7.57	–	0.34
	physics coauthorship	undirected	52 909	245 300	9.27	6.19	–	0.56
	biology coauthorship	undirected	1 520 251	11 803 064	15.53	4.92	–	0.60
	telephone call graph	undirected	47 000 000	80 000 000	3.16		2.1	
	email messages	directed	59 912	86 300	1.44	4.95	1.5/2.0	0.16
	email address books	directed	16 881	57 029	3.38	5.22	–	0.13
	student relationships	undirected	573	477	1.66	16.01	–	0.001
	sexual contacts	undirected	2 810				3.2	
information	WWW nd. edu	directed	269 504	1 497 135	5.55	11.27	2.1/2.4	0.29
	WWW Altavista	directed	203 549 046	2 130 000 000	10.46	16.18	2.1/2.7	
	citation network	directed	783 339	6 716 198	8.57		3.0/–	
	Roget's Thesaurus	directed	1 022	5 103	4.99	4.87	–	0.15
	word co-occurrence	undirected	460 902	17 000 000	70.13		2.7	0.44
technological	Internet	undirected	10 697	31 992	5.98	3.31	2.5	0.39
	power grid	undirected	4 941	6 594	2.67	18.99	–	0.080
	train routes	undirected	587	19 603	66.79	2.16	–	0.69
	software packages	directed	1 439	1 723	1.20	2.42	1.6/1.4	0.082
	software classes	directed	1 377	2 213	1.61	1.51	–	0.012
	electronic circuits	undirected	24 097	53 248	4.34	11.05	3.0	0.030
	peer-to-peer network	undirected	880	1 296	1.47	4.28	2.1	0.011
biological	metabolic network	undirected	765	3 686	9.64	2.56	2.2	0.67
	protein interactions	undirected	2 115	2 240	2.12	6.80	2.4	0.071
	marine food web	directed	135	598	4.43	2.05	–	0.23
	freshwater food web	directed	92	997	10.84	1.90	–	0.087
	neural network	directed	307	2 359	7.68	3.97	–	0.28

Cuadro 1.1: Propiedades estadísticas de algunas redes empíricas (*networks*); *type*: tipo de enlaces, siendo directo (*directed*) para redes simétricas, e indirecto (*undirected*) para redes asimétricas; n : número de nodos; m : número de enlaces; z : grado k promedio; ℓ : longitud característica; α : exponente de la distribución de grado, en caso de seguir una ley de potencia ($P(k) \propto k^{-\alpha}$); C : Coeficiente de agrupamiento. Fuente: [8]

“Everything should be made as simple as possible, but not one bit simpler.”

Albert Einstein

Capítulo 2

Redes apolonias

Andrade *et al.* introducen en el 2005 una clase de redes llamadas redes apolonias [4], las cuales también son descritas y estudiadas en el mismo año por Doye y Massen [5]. Estas singulares redes, que pueden ser bien sea deterministas o aleatorias, presentan una serie de propiedades importantes: son simultáneamente jerárquicas, fractales, de pequeño mundo y libres de escala.

La topología de estas redes en su más simple versión determinista se basa en la figura de llenado de espacio con círculos conocida como fractal de Apolonio (Figura 2.1), que es un caso particular de empaquetamiento apolónico, llamado así en honor al antiguo matemático griego Apolonio de Perga¹ y su famoso problema de Apolonio².

En la Figura 2.1-b tres círculos idénticos se tocan unos a otros, y el espacio que queda entre ellos es llenado por otro círculo que toca a estos tres, dejando de nuevo otros espacios similares pero mucho más pequeños, los cuales son llenados

¹(262 AC - 190 AC). Matemático de la antigua grecia conocido como “El gran geómetra”. Perteneció a la escuela de Euclides y se dedicó principalmente a la geometría y la astronomía. Famoso por su trabajo sobre secciones cónicas (de su colección de libros “Conicas”), del cual se deben los nombres actuales de la parábola, la elipse y la hipérbola.

²En su libro “Tangencias”, Apolonio propone y da solución geométrica al problema de tres circunferencias mutuamente tangentes. De ahí que a cualquier figura que conste de círculos (discos o esferas) tangentes entre sí se le llame empaquetamiento apolónico.

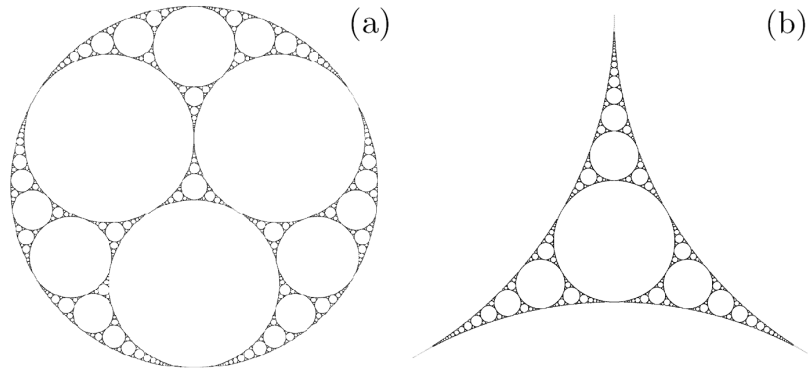


Figura 2.1: Fractal de Apolonio o *apollonian gasket*. El multifractal en (a) tiene dimensión de Hausdorff de 1,3057. En (b) se muestra una ampliación del empaquetamiento formado entre los tres círculos más grandes (centro).

nuevamente de la misma manera [4]. Este procedimiento se muestra en la Figura 2.2.

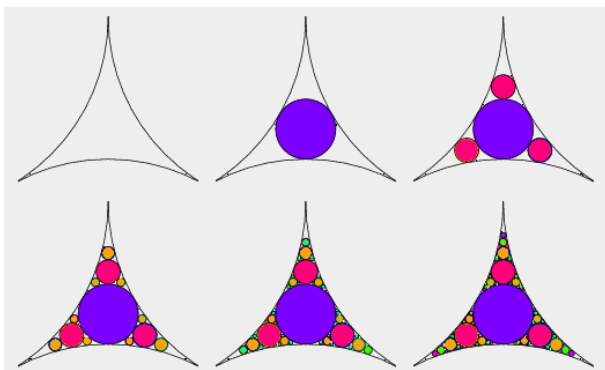


Figura 2.2: Evolución del gasket de Apolonio. Los círculos pertenecientes a cada generación son marcados con un mismo color. La distribución de tamaños de los círculos sigue una ley de potencia con exponente alrededor de 1,3.

Una red de importancia crucial para el entendimiento de empaquetamientos granulares es la llamada red de fuerzas o red de contactos, la cual conecta los centros de las masas de los granos que tienen contactos activos (aquellos que transmiten fuerza, temperatura, etc.). Así mismo, conectando los centros de los círculos que se tocan en la Figura 2.1-b, se obtiene una red que físicamente corresponde a la red de fuerzas de tal empaquetamiento. Las redes resultantes de este procedimiento son las llamadas redes apolonias [4].

Si se representan a los centros de los círculos (nodos) con puntos y los contactos entre los círculos (enlaces) con líneas, se obtiene la esquematización de la red mostrada en la Figura 2.3.

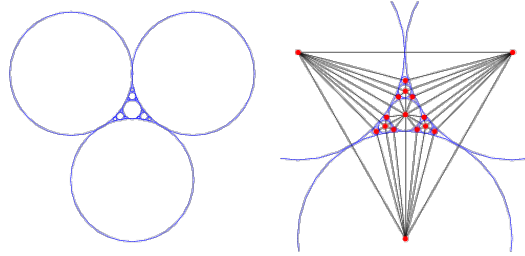


Figura 2.3: Esquematización de la red apolonía. Cada círculo representa un nodo en la red. Dos nodos estarán conectados si los círculos correspondientes están en contacto.

Cabe destacar que para el estudio de estas redes, se considerará un número finito de generaciones de círculos que son añadidos. Ya que las redes apolonias son deterministas, su topología no cambia en el tiempo, pero sí lo hace durante su construcción, a medida que se van añadiendo los nodos de las siguientes generaciones, hasta llegar al nivel de construcción límite L . En la Figura 2.4 se muestra la evolución de la red apolonía mientras se incluyen nuevas generaciones, acorde con la evolución del empaquetamiento de círculos (Figura 2.2).

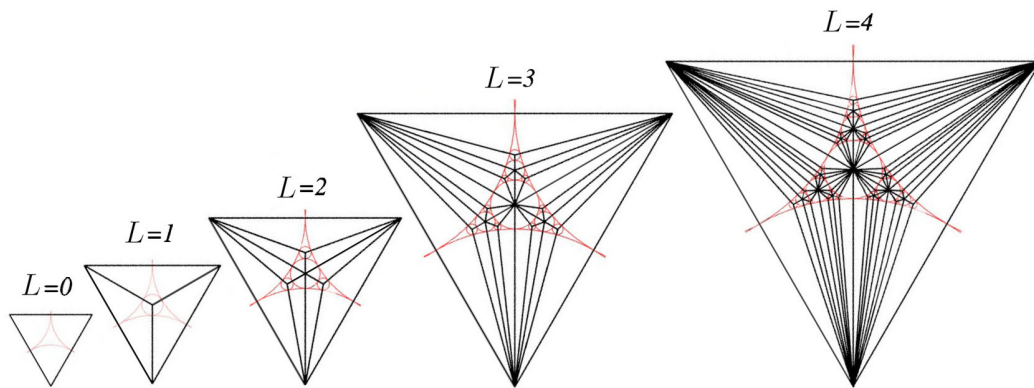


Figura 2.4: Evolución de la red apolonía para los primeros cinco niveles de construcción L (indicados por los números). Fuente: [5]

El nivel de construcción L indica el número de generaciones de nodos que se incluyen en la red, definiendo su topología (número de nodos y enlaces existentes).

Por definición, la generación que consiste en los tres círculos iniciales (externos) corresponde al nivel de construcción cero de la red apolonia. Luego, al añadir la próxima generación, resumida en el nodo central, la red estará en el nivel de construcción uno. El nivel de construcción dos incluye a estos cuatro elementos (central y externos) más los próximos tres nodos de la nueva generación, y así sucesivamente como se muestra en la Figura 2.4.

2.1. Propiedades

2.1.1. Orden y tamaño

Como puede observarse en las figuras 2.2 y 2.4, el número de nodos por generación aumenta por un factor de 3 [4] (partiendo del nodo central de la primera generación), tal y como se muestra en el Cuadro 2.1. En términos generales cada generación o nivel g posee n_g nodos, con:

$$n_g = 3^{g-1}, \quad (2.1)$$

hasta llegar a la última generación con 3^{L-1} nodos. La generación del nivel cero es una excepción, ya que posee tres nodos, correspondientes a los círculos externos. De esta manera, el número total de nodos existentes en una red apolonia a un nivel de construcción L será:

$$N_L = \sum_{g=0}^L n_g = 3 + \sum_{g=1}^L 3^{g-1}, \quad (2.2)$$

que también puede calcularse con la expresión [4]:

$$N_L = 3 + \frac{3^L - 1}{2} = \frac{3^L + 5}{2}. \quad (2.3)$$

En la configuración inicial sólo existen tres nodos y tres enlaces que los unen unos con otros (ver Figura 2.2). Con la adición de cada nuevo nodo se crean también tres nuevos enlaces [5], debido a que cada círculo es tangente a otros tres en el momento de su inserción. Por lo tanto, en cada generación g se crean e_g enlaces, siendo:

$$e_g = 3 n_g = 3^g. \quad (2.4)$$

Así, el número total de enlaces presentes en una red apolonia a un nivel de construcción L será:

$$E_L = \sum_{g=0}^L e_g = 3 + \sum_{g=1}^L 3^g, \quad (2.5)$$

que también cumple con la expresión:

$$E_L = 2 + \frac{3^{L+1} - 1}{2} = \frac{3^{L+1} + 3}{2}. \quad (2.6)$$

2.1.2. Distribución de grado

Ya que la red apolonia es determinista, todos los nodos de una misma generación presentan igual grado k_g , ya que estos son creados de manera idéntica en función de las generaciones anteriores. Independiente del nivel de construcción, los nodos de la última generación ($g = L$) siempre tendrán grado tres. Estos nodos corresponderán a los círculos más pequeños, los cuales están en contacto sólo con los tres círculos que forman el espacio donde estos son insertados. En el Cuadro 2.1 se puede observar que el grado de los nodos se incrementa por un factor de 2 a medida que avanzamos hasta la primera generación ($k_{g-1} = 2 k_g$) [4].

g	Ng (L)	Kg (L)
0	3	$1+2^{L+1}$
1	1	$3 \times 2^{L-1}$
2	3	$3 \times 2^{L-2}$
3	3^2	$3 \times 2^{L-3}$
...
L-2	3^{L-3}	3×2^2
L-1	3^{L-2}	3×2
L	3^{L-1}	3

Cuadro 2.1: Número de nodos por generación n_g y sus grados correspondientes k_g .

A medida que se añaden nuevas generaciones, aumenta el grado de los nodos de los niveles anteriores, ya que los círculos más pequeños entran en contacto con los círculos ya existentes de generaciones pasadas. Generalizando, el grado para los nodos de generación g en una red con nivel de construcción L será [4]:

$$k_g(L) = 3 \times 2^{L-g}, \quad \text{para } g = 1, 2, \dots, L. \quad (2.7)$$

Nuevamente, la generación correspondiente al nivel cero es una excepción, donde los tres nodos externos tienen grado $k_0(L) = 2^{L+1} + 1$ (para $L > 0$), con $k_0(0) = 2$ [4].

Como puede verse en el Cuadro 2.1, el espectro de grado de la red es discreto: existen sólo ciertos valores para los que existen n_g vértices con grado k . Todos los demás valores de k están ausentes en el espectro [5].

La distribución de grados para una red apolonia será:

$$P(k) \frac{n_g}{N_L} = \frac{3^{g-1}}{(3^L + 5)/2}. \quad (2.8)$$

De (2.7) se obtiene $g = L - \log(k/3)/\log(2)$, y sustituyendo en (2.8) nos queda:

$$P(k) = \frac{3^{L-1} 3^{-\log(k/3)/\log(2)}}{(3^L + 5)/2}. \quad (2.9)$$

Aplicando logaritmos a (2.9) y sus propiedades nos queda:

$$P(k) = \frac{3^{L-1} (k/3)^{-\log 3/\log 2}}{(3^L + 5)/2}, \quad (2.10)$$

que para redes grandes (L grande):

$$P(k) \propto k^{-\log 3/\log 2}, \quad (2.11)$$

$P(k)$ decrece como potencia de k , con un exponente $\gamma = \log 3/\log 2 \approx 1,585$; por lo que las redes apolonias con alto nivel de construcción pueden llamarse libre de escala.

Este resultado también lo podemos comprobar numéricamente, al graficar $P(k)$ de (2.8) en función de k de (2.7) como se muestra en la Figura 2.5. La función $P(k)$ en log-log puede ser ajustada por una recta cuya pendiente, equivale al exponente de una función del tipo $P(k) = a k^{-\gamma}$, obteniéndose que $\gamma \approx 1,585$.

2.1.3. Coeficiente de agrupamiento

El coeficiente de agrupamiento local definido en la Ecuación (1.4) fue estudiado en Ref. [5] para redes apolonias, encontrándose que es inversamente proporcional al

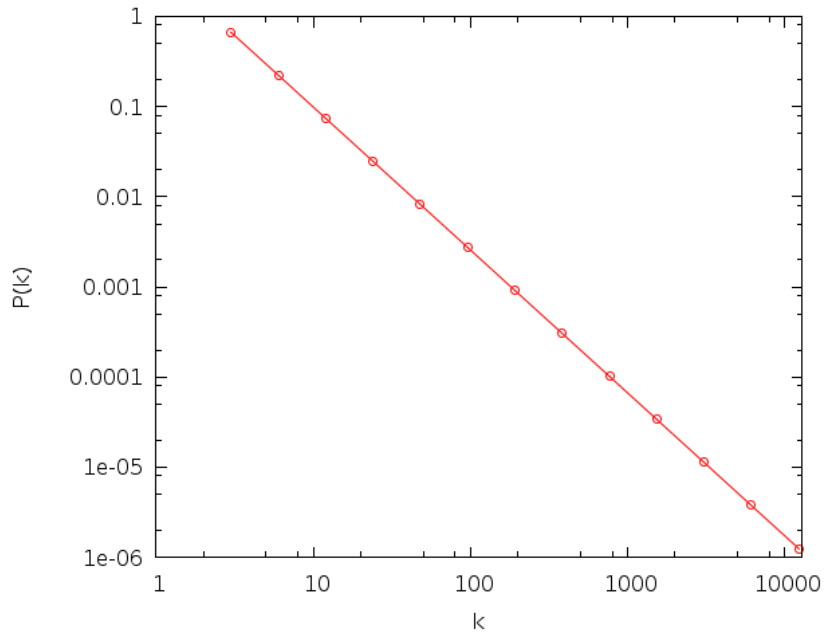


Figura 2.5: Distribución de grado de la red apolonia con $L = 12$. En escala logarítmica la gráfica coincide con una línea recta con pendiente $\gamma = 1,585$.

grado local, es decir, para cada nodo i se tiene que $C_i \propto 1/k_i$ (para redes grandes). Esto lleva a que los nodos con alto grado tengan valores bajos de C_i , mientras que aquellos con pocos enlaces presentan alto valor C_i .

Esta propiedad también puede ser interpretada en términos de la localización espacial de los círculos. Para un nodo con bajo grado, su vecindad sólo ocupará una pequeña región local en el empaquetamiento de círculos y podrán encontrarse en cercanía, por lo que se espera que tenga un fuerte agrupamiento. Por el contrario, los nodos con alto grado tendrán una ocupación más global y estarán conectados con partes del empaquetamiento que se encuentren muy separadas, y por lo tanto presentarán bajo agrupamiento [5].

En la definición de agrupamiento global de la Ecuación 1.5, todos los nodos contribuyen con igual peso en el promedio. De esta manera, C tendrá un valor alto, debido a la mayoritaria contribución en número de los nodos pequeños con alto agrupamiento local [5].

El coeficiente de agrupamiento promedio C puede obtenerse numéricamente. En Ref. [4] se encontró que para el límite de redes grandes, C tiende a un valor constante de 0,828; como puede observarse en la Figura 2.6. Este valor se considera

alto, comparable con el coeficiente de agrupamiento de muchas de las redes reales (ver Cuadro 1.1).

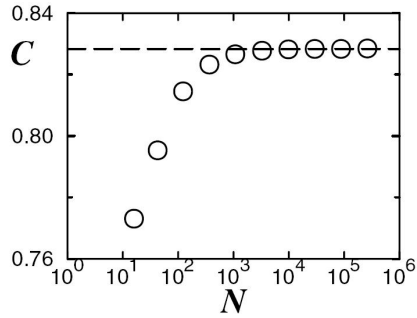


Figura 2.6: Coeficiente de agrupamiento para las redes apolonias calculado numéricamente. Para tamaños grandes de las redes tiende al valor constante 0,828. Fuente: [4]

2.1.4. Longitud característica

En Ref. [4] también se realizó un estudio del comportamiento de la longitud característica de las redes apolonias, y se encontró que esta escala sub-logarítmicamente con el tamaño del sistema, siendo $\ell \propto (\ln N)^{3/4}$, como puede apreciarse en la Figura 2.7. Para tener una idea mensurable, el valor de ℓ para una red con $L = 12$ (265.723 nodos) está alrededor de 5.

Las redes apolonias presentan entonces efecto de pequeño mundo, ya que ℓ crece mucho más lento del tamaño del sistema.

Ya que ℓ crece logarítmicamente y el valor de C está cercano a la unidad, las redes apolonias describen un escenario de pequeño mundo.

2.1.5. Espectro de autovalores

A continuación se presenta el espectro de autovalores de las redes apolonias, obtenida por Andrade *et al.* [40]. En la Figura 2.8-a se puede apreciar que al representar los autovalores de la matriz de adyacencia para diferentes niveles de construcción L , se obtiene un conjunto con propiedades autosimilares. Una ampliación del espectro muestra que se repite en él el mismo patrón a diferentes escalas (Figura 2.8-b). Esta característica es típica de las redes fractales.

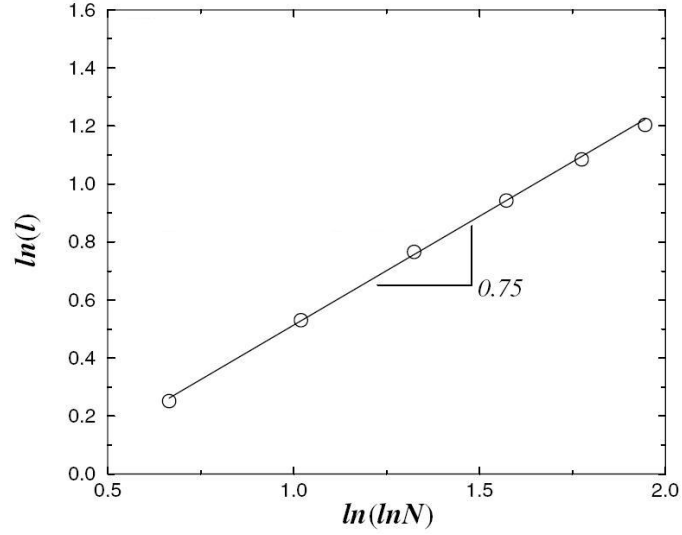


Figura 2.7: Longitud característica para redes apolonias obtenida numéricamente. La gráfica $\ln \ell$ vs. $\ln(\ln N)$ se asemeja a una recta con pendiente $3/4 = 0,75$. Fuente: [4]

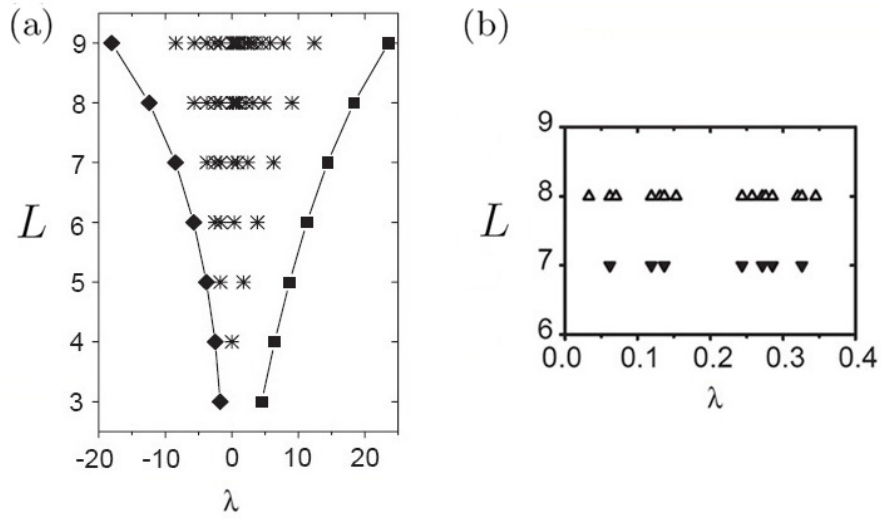


Figura 2.8: a) Espectro de autovalores obtenido para la matriz de adyacencia de la red apolonia. b) Ampliación del espectro en un rango de autovalores mucho más pequeño para los niveles $L = 7$ y $L = 8$. Fuente: [40]

“My work is a game, a very serious game.”

M. C. Escher

Capítulo 3

Un algoritmo para generar redes apolonias

En este capítulo se desarrolla un algoritmo para generar redes apolonias de dimensión 2, partiendo con una forma de identificar y etiquetar cada uno de los nodos constituyentes, de modo que permita la obtención de la lista de adyacencia correspondiente a estas redes, estableciendo así todos los enlaces entre los nodos.

3.1. Identificación y etiquetado de nodos en la red

En Ref. [41] se establece una forma de etiquetar los nodos en redes apolonias. Sin embargo, este método está orientado hacia la obtención de las distancias mínimas entre ellos, y no resulta sencillo la identificación de los vecinos de dichos nodos. En Ref. [34], [35] y [42], se tienen algunos ejemplos de enumeración y etiquetados de nodos en algunas redes con diferentes topologías, los cuales servirán de modelo para aplicarlo en las redes apolonias, con el fin de facilitar la obtención de la lista de adyacencia o tabla de vecinos.

Las redes apolonias, gracias a su topología jerárquica, poseen una estructura base similar a la de un árbol de ramificación tres, tal y cómo se muestra en la Figura 3.1. De este modo, se puede establecer un parentesco figurativo entre los nodos, donde cada elemento posee un padre (vecino del nivel superior inmediato) y tres hijos

(vecinos del nivel inferior inmediato). Igualmente se puede expandir la idea con los niveles anteriores: abuelo, bisabuelo, etc.; y los niveles siguientes: nietos, bisnietos, etc.

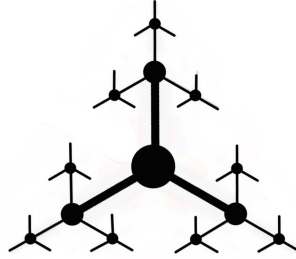


Figura 3.1: Semejanza de la red apolonia con un árbol de ramificación tres.

Adaptando esta forma de etiquetado y numeración a las redes apolonias, podemos definir tres líneas de descendencia, numeradas 1, 2 y 3, tal como se muestra en la Figura 3.2, donde el patrón se repite autosimilarmente en cada una de las generaciones siguientes. Estas líneas servirán de referencia para etiquetar a los nodos de la red.

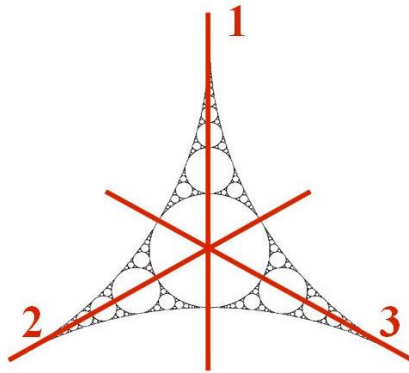


Figura 3.2: Líneas de descendencia principales. Las líneas coinciden con los ejes de simetría del empaquetamiento de círculos.

En primer lugar se tiene el caso de los tres nodos externos, a los que les asignaremos las etiquetas “-1”, “-2” y “-3”, según estén ubicados sobre las líneas de referencia. Al nodo central del primer nivel se le asignará la etiqueta “0”. Los tres próximos nodos del segundo nivel, tendrán las etiquetas “01”, “02” y “03”, nuevamente según donde estén ubicados sobre las líneas de referencia. A partir de éste nivel, se “arrastran” las etiquetas a los nodos de los niveles subsiguientes, añadiendo cada vez un

último dígito, según corresponda 1, 2 ó 3, de modo que los nodos heredan la etiqueta de sus padres. De esta manera, las etiquetas tendrán tantos dígitos como el número de nivel en que se encuentren los nodos. Aquellos nodos con igual número de dígitos en sus etiquetas pertenecen a un mismo nivel. Las etiquetas serán más cortas para los nodos de los primeros niveles, mientras que serán las más largas aquellas de los nodos pertenecientes al último nivel. En la Figura 3.3 se muestran las etiquetas de los nodos de los primeros niveles de la red.

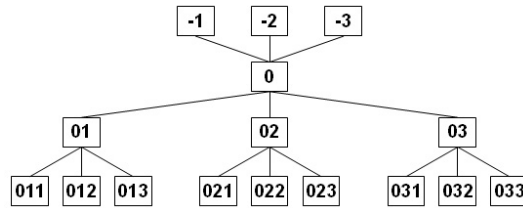


Figura 3.3: Esquema del etiquetado de los nodos para los primeros niveles una red apolonia.

Se puede entonces establecer una filogenia entre las etiquetas de los nodos. Los ancestros de un nodo cualquiera pueden obtenerse recorriendo su etiqueta dígitos atrás, es decir, eliminando un dígito por cada generación ascendente (padre, abuelo, bisabuelo, tatarabuelo...). Así mismo, las etiquetas de los descendientes de un nodo, tendrán como primeros dígitos la etiqueta completa de dicho nodo, añadiendo un dígito por cada generación (hijos, nietos, bisnietos, tataranietos...). Un ejemplo de relación de parentesco para un nodo en particular se ilustra en el cuadro 3.1 señalando sus respectivas etiquetas.

Tales etiquetas pueden verse como un arreglo V de l caracteres o dígitos, tal que $l_i \equiv |V_i| = g_i$, donde g_i corresponde a la generación o nivel al que pertenece el nodo i . El dígito p de una etiqueta se denotará como $V[p]$. Se llamará dígito clave de un nodo al dígito final de su etiqueta, es decir, aquel que se encuentra en $p = l_i$. Así mismo, el dígito clave del padre se encontrará en la posición $p = l_i - 1$ de su misma etiqueta, y así sucesivamente con sus ancestros anteriores. Más adelante se utilizará la nomenclatura $V_i[1..p]$ para referirse a los primeros p dígitos de la etiqueta del nodo i , de manera que con $V_i[1..l_i]$ se obtiene la etiqueta completa del nodo; la etiqueta de su padre podrá obtenerse con $V_i[1..l_i - 1]$, y de la misma manera para sus otros ancestros.

Etiqueta	Parentesco
.....	Generaciones anteriores
O112	Abuelo
O1123	Padre
O11231	Nodo actual
O11231 <u>1</u>	Hijos
O11231 <u>2</u>	
O11231 <u>3</u>	
O11231 <u>11</u>	Nietos
O11231 <u>12</u>	
O11231 <u>13</u>	
...	
.....	Generaciones siguientes

Cuadro 3.1: Ejemplo de parentesco con etiquetas para el nodo “011231”.

Además de las etiquetas, también resulta muy útil que todos los nodos de la red se encuentren numerados, es decir, que a cada nodo le corresponda un número natural y único, de modo que la red completa pueda recorrerse con un índice $i = 1, 2, 3, \dots, N_L - 1, N_L$. Se busca entonces que exista una relación entre las etiquetas y los índices que permita obtenerlos unívocamente. Se utilizará la notación $i = \text{num}(V_i)$ para hacer uso de la función que obtiene los índices a partir de las etiquetas de un nodo en particular. Los primeros en numerarse serán los nodos externos, que tendrán los índices 0, 1 y 2, respectivamente para “-1”, “-2” y “-3”. A partir del primer nivel la función $\text{num}(V_i)$ consistirá en tomar las etiquetas como una representación numérica en un sistema de base tres, donde los dígitos finales son los menos significativos, y se obtiene el equivalente decimal; el número resultante será el índice del nodo de dicha etiqueta, con la adición de tres unidades (correspondientes a los tres primeros nodos).

3.2. Obtención de la tabla de vecinos

Una vez ubicados los nodos en la red, se procede a establecer los enlaces entre ellos, siguiendo la estructura de la red de contacto del empaquetamiento de círculos mostrado en la Figura 2.3. Para lograr esto es muy útil hacer uso de las etiquetas de los nodos, las cuales fueron formuladas con el fin de facilitar este paso.

Es necesario recalcar que ningún par de nodos pertenecientes a un mismo nivel estarán enlazados (exceptuando los tres nodos externos). Cada nodo tiene sólo tres vecinos pertenecientes a niveles superiores (vecinos superiores), los cuales corresponden a los tres círculos con los que cada elemento es tangente al momento de su inserción. El resto de los vecinos de un nodo serán de niveles inferiores (vecinos inferiores) [5].

Los vecinos inferiores de un nodo estarán conformados exclusivamente por descendientes de éste (hijos, nietos, bisnietos, etc.), incluyendo nodos de todas las generaciones siguientes hasta el último nivel. Es sencillo establecer una regla de conexión con los vecinos inferiores a través de sus etiquetas. En primer caso estarán sus tres hijos, cuyas etiquetas serán idénticas a la suya, con la adición de los dígitos 1, 2 y 3, respectivamente. Para las generaciones siguientes serán vecinos aquellos descendientes de cada uno de los hijos del nodo, que no sean de la misma línea de descendencia que ellos, es decir, cuyos dígitos finales no coinciden con el dígito clave del hijo correspondiente. Como ejemplo, si el nodo en cuestión tiene la etiqueta "X", sus hijos "X1", "X2" y "X3" serán sus vecinos, luego, sólo los nietos "X12", "X13", "X21", "X23", "X31" y "X32" serán sus vecinos, y así sucesivamente. Así, de la descendencia del primer hijo serán vecinos del nodo "X" aquellos que no posean el dígito 1, e igualmente para los otros con sus respectivos dígitos. Esto se debe a que los círculos que coinciden con la línea de descendencia de cada hijo del nodo, estarán ubicados espacialmente opuestos a dicho nodo, y por lo tanto no estarán en contacto con él.

De manera similar, los vecinos superiores de un nodo están conformados por ancestros de éste, sin embargo no es tan sencillo determinar a que generaciones pertenecen dichos elementos, ya que pudieran estar en cualquiera de los niveles superiores a él, incluso del nivel cero. Para el caso particular del nodo central, sus vecinos superiores serán los tres nodos externos. Por otro lado, los nodos externos no

poseen vecinos superiores, en cambio tienen dos vecinos hermanos, correspondientes a los otros dos. El resto de los nodos, sin excepción, tendrán como su primer vecino superior a su padre, y los otros dos podrán ser bien sea de la cadena ancestral o de los nodos externos. Si bien un elemento es descendiente de sus vecinos superiores, las etiquetas de ellos pueden hallarse en la traza de su propia etiqueta, como puede observarse en la tabla 3.1, simplemente extrayendo un dígito por cada generación arriba.

El método para encontrar los vecinos superiores de un nodo, consiste en tomar al padre como el primero de ellos, y luego, ir probando cuáles otros de sus ancestros están en contacto con él. Para ello, se toman uno a uno, partiendo desde el abuelo hasta conseguir los dos vecinos restantes. Si se llega al final de la cadena y no se hallaron todos los vecinos, quiere decir que el resto son de los nodos externos. Para que el nodo sea vecino de uno de sus ancestros, debe estar ubicado cerca de él, por lo que no puede haber en toda la cadena de descendencia ningún elemento parecido al hijo involucrado del ancestro en cuestión, en cuanto a la línea de descendencia. En otras palabras, el dígito clave de tal hijo no debe encontrarse en ningún nivel siguiente de la cadena, incluyendo al nodo actual.

En la Figura 3.4 se muestra el algoritmo para conseguir los vecinos superiores de un nodo i cualquiera, haciendo uso exclusivamente de su etiqueta. En primer lugar se toma el padre del nodo, cuya etiqueta será $V_i[1..l_i - 1]$. Luego se van tomando los dígitos p en representación de los ancestros cuyas etiquetas serán $V_i[1..p]$, comenzando por el abuelo con $p = l_i - 2$. En general, el ancestro $a = V_i[1..s]$ será vecino de i si $V_i[s + 1] \neq V_i[k]$, para $k = s + 2, s + 3, \dots, l_i - 1, l_i$. Por último, si al terminar el recorrido por la cadena no se han completado los tres vecinos, se buscan los nodos externos correspondientes. Si los tres vecinos superiores se encuentran dentro de la cadena del nodo, entonces ningún vecino externo es buscado. En caso que falte sólo uno de ellos, éste será el nodo externo posicionado en la línea de referencia cuyo número es diferente a los dos primeros dígitos de la cadena del nodo actual, dados por $V_i[1]$ y $V_i[2]$. En caso que se tenga sólo al padre como vecino al recorrer toda la etiqueta, quiere decir que el nodo tiene como vecinos superiores a dos de los nodos externos, siendo estos aquellos cuyas etiquetas no coincide con el primer dígito de la etiqueta del nodo. Este último caso comprende a todos aquellos nodos que están ubicados justo sobre las líneas de referencia principales marcadas en la Figura 3.2.

```

VecinosSuperiores
   $j \leftarrow 1$ 
   $p \leftarrow l_i - 1$ 
   $s_1 \leftarrow V_i[1..p]$   #(padre)
  While ( $j < 3$ ) & ( $p \geq 1$ )
     $p \leftarrow p - 1$ 
     $k \leftarrow p + 1$ 
    While ( $k \leq l_i$ ) & ( $V_i[p] \neq V_i[k]$ )
       $k \leftarrow k + 1$ 
    If ( $k > l_i$ )
       $j \leftarrow j + 1$ 
       $s_j \leftarrow V_i[1..p]$ 

  # en caso de tener vecinos externos:
  If ( $j = 2$ )
     $s_3 \leftarrow V_i[1] + V_i[2] - 6$ 
  If ( $j = 1$ )
     $a \leftarrow V_i[1] - 1$ , If ( $a < 1$ ):  $a \leftarrow 3$ 
     $s_2 \leftarrow -a$ 
     $a \leftarrow V_i[1] + 1$ , If ( $a > 3$ ):  $a \leftarrow 1$ 
     $s_3 \leftarrow -a$ 

```

Figura 3.4: Obtención de los vecinos superiores del nodo i a partir de su etiqueta V_i .

Finalmente, para la obtención de la tabla de vecinos de la red completa, se toman uno a uno los elementos y se establece relación con sus respectivos vecinos superiores (creando enlaces con cada uno de ellos). Al recorrer toda la red se garantiza que se habrán realizado todas las conexiones necesarias, ya que los enlaces con los vecinos inferiores se establecen en el momento en que los elementos se tomen como vecinos superiores de dichos nodos inferiores. Este procedimiento se presenta en forma estructurada en el algoritmo de la Figura 3.5. En este caso se comienza por los nodos de las primeras generaciones, y a medida que se tomen los nodos de las próximas, se van estableciendo todos los enlaces, hasta completar la red en su totalidad con los nodos de la última generación (establecida por el nivel de construcción).

TablaVecinos

For $i \leftarrow 4$ to N_L

VecinosSuperiores(i, s_1, s_2, s_3)

Enlace($i, num(s_1)$)

Enlace($i, num(s_2)$)

Enlace($i, num(s_3)$)

Figura 3.5: Obtención de la tabla de vecinos de un red apolonia.

*“Problems worthy of attack prove their worth
by fighting back.”*

Paul Erdős

Capítulo 4

Modelo de influencia cultural de Axelrod en redes apolonias

Es de particular interés el hecho que en las redes apolonias coexisten numerosas propiedades presentes en la mayoría de las redes reales, incluyendo las redes sociales, tales como ley de potencia en su distribución de grado, alto coeficiente de agrupamiento, corta longitud característica, estructura jerárquica y fractalidad. Como una aplicación de nuestro algoritmo para generar redes apolonias, en este Capítulo investigamos un modelo de dinámica social definido sobre esta topología. Específicamente, nos enfocamos en famoso modelo de interacción cultural propuesto por Robert Axelrod [6]. Nuestro propósito es determinar, cualitativa y cuantitativamente, cómo las características de las redes apolonias afectan los comportamientos colectivos de dicho modelo, en comparación con otras topologías de redes estudiadas por otros autores.

4.1. Modelo cultural de Axelrod

Comenzaremos con una breve revisión del modelo de interacción cultural de Axelrod.

Uno de los problemas fundamentales en la sociología es el origen y la persistencia

de la diversidad cultural en una sociedad, lo que ha llevado al desarrollo de diversos modelos cualitativos y cuantitativos sobre este t3pico. Con esta orientaci3n, el soci3logo Robert Axelrod introdujo en 1997 [6] un modelo dinámico conceptualmente simple para representar c3mo ocurre la disseminaci3n cultural en una sociedad. Ya que resulta difícil establecer el rango de cosas sobre las cuales las personas pueden influenciarse unas a otras, el t3rmino m3s general y apropiado para esto es la cultura. De este modo, Axelrod define cultura como un conjunto de atributos individuales que est3n sujetos a una influencia social, es decir, que pueden cambiar como efecto de las interacciones mutuas. Este modelo es un aut3mata celular, basado en agentes que interaccionan entre s3, y permite estudiar el mecanismo de competencia entre la monoculturalidad y la multiculturalidad de un sistema social [6, 12, 43].

El modelo de Axelrod ha sido ampliamente estudiado por los f3sicos, presentado alto inter3s en el 3rea de Sociof3sica, y es conocido en esta literatura como el *Modelo de Influencia Cultural de Axelrod*. Dicho trabajo se enfoca en la auto-organizaci3n que resulta de una din3mica local simple que representa la influencia social [43].

4.1.1. Din3mica del modelo

Axelrod asume que la cultura de un individuo puede ser descrita en t3rminos de un conjunto de atributos, tales como el lenguaje, la religi3n, forma de vestir y peinar, tecnolog3a que usa, preferencia pol3tica, gusto musical, etc. El modelo permite la abstracci3n acerca del contenido espec3fico de la cultura de los individuos. Se puede entonces describir la cultura como una lista de atributos (dimensi3n cultural) para los cuales existe un conjunto de posibles opciones o rasgos. Dos individuos tendr3n la misma cultura si comparten los mismos rasgos para cada uno de los atributos [6].

La din3mica de interacci3n del modelo de Axelrod se basa en dos premisas simples:

- La probabilidad de interacci3n entre individuos es proporcional al n3mero de atributos culturales que ellos comparten.
- La interacci3n entre individuos incrementa su similitud cultural.

De esta manera los individuos estar3n m3s propensos a interaccionar con aquellos con los que poseen m3s atributos culturales en com3n; adem3s cada interacci3n

incrementará el número de atributos que dichos individuos comparten, y por lo tanto también la probabilidad de una próxima interacción [6, 43, 12].

4.1.2. Formulación matemática

El modelo original de Axelrod se define sobre una red euclidiana bidimensional de tamaño N con enlaces a primeros vecinos ($k = 4$). En este caso, cada nodo o agente representará un individuo con un conjunto de atributos sometidos a una influencia cultural de sus cuatro vecinos (norte, sur, este, oeste). Cada agente i tendrá F variables enteras que definen los F atributos o características (*features*) generales de los individuos. Esto puede representarse mediante un vector cultural de dimensión F , expresado como:

$$U_i = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \dots, \sigma_{if}, \dots, \sigma_{iF}) \quad (4.1)$$

donde σ_{if} es el f -ésimo atributo cultural del agente i . Cada atributo σ_{if} podrá tomar sólo valores enteros entre 1 y q , donde q es el número de rasgos (*traits*) por atributo. Así, existen q^F estados culturales posibles para cada agente [12].

Originalmente el sistema se asume en un estado inicial donde cada uno de los F atributos de los agentes toman valores aleatorios entre 1 y q . El parámetro q puede verse como una medida de la variabilidad cultural (desorden) inicial del sistema [43].

En cada instante de tiempo, un nodo i y uno de sus vecinos j son seleccionados al azar. Los agentes i y j interactúan con una probabilidad $p_{ij} = O(i, j)/F$, donde $O(i, j)$ es el número de atributos que comparten dichos agentes, y representa el grado de similitud cultural (*overlap*) entre ellos. En caso de interacción, se escoge un atributo f' al azar, tal que $\sigma_{if'} \neq \sigma_{jf'}$, y el elemento i copia ese rasgo: $\sigma_{if'} \leftarrow \sigma_{jf'}$ [43, 12].

4.1.3. Evolución y comportamientos emergentes

Como condición inicial ($t = 0$), la distribución de estado en el sistema es completamente aleatoria. El sistema se encuentra inicialmente desordenado, ya que la distribución aleatoria en las variables de estado de los individuos hace que no exista correlación alguna entre ellos. A medida que la dinámica avanza, la interacción entre agentes lleva a los vecinos a hacerse más similares y se introduce correlación en el

sistema. Si se mide en el tiempo la diversidad total (número de diferentes valores para algún atributo que están presentes en el sistema) se encontrará que siempre decrece [45].

En la evolución de la dinámica del modelo se observa que el sistema se congela asintóticamente ($t \rightarrow \infty$), llegando a un estado en donde todos los vecinos tienen vectores culturales idénticos ($O(i, j) = F$) o totalmente diferentes ($O(i, j) = 0$) y no hay interacción posible subsiguiente entre ellos. Una vez que el sistema se encuentra en una configuración de este tipo, se dice que llega a un *estado absorbente*, ya que la dinámica se detiene. Existen muchos estados absorbentes y (sobre cualquier red finita) la dinámica siempre convergerá a uno de ellos [43].

Axelrod define *región cultural* o dominio como el conjunto de agentes adyacentes que poseen un mismo vector cultural. Para $t = 0$ existirán tantas regiones como elementos del sistema, y a medida que avance la dinámica se irán formando regiones más grandes y el número de regiones se hará cada vez más pequeño. Por último, al llegar a un estado absorbente el sistema estará conformado por *regiones estables* que no cambian en el tiempo (convergencia cultural). Esto sucede cuando ninguna región estable tiene algo en común con las otras regiones a las que son adyacentes. El estado final del sistema puede ser caracterizado por la distribución de tamaños de dichas regiones culturales [6, 44, 45].

Los estados absorbentes pueden ser de dos tipos bien diferenciados: uno homogéneo, en el cual todos los agentes convergen a un mismo vector cultural (*estado monocultural*), en el cual existe aproximadamente una sola región que abarca todo el sistema; y otro en el cual coexisten múltiples regiones adyacentes que poseen vectores culturales totalmente diferentes (*estado multicultural*) [12, 45].

Una cantidad útil para estudiar el estado final del sistema es el tamaño de la región estable más grande, S_{max} , promediada sobre diferentes realizaciones. La fracción del sistema ocupada por esta región, $\langle S_{max} \rangle / N$, se considera un parámetro de orden. Cuando esta cantidad se aproxima a cero, el sistema se encuentra en un estado desordenado (multicultural) donde existe un gran número de pequeñas regiones estables. Por otro lado, cuando $\langle S_{max} \rangle / N$ se acerca a la unidad, el sistema se encuentra en un estado ordenado (monocultural) donde el tamaño de la región más grande es comparable con el tamaño del sistema [43].

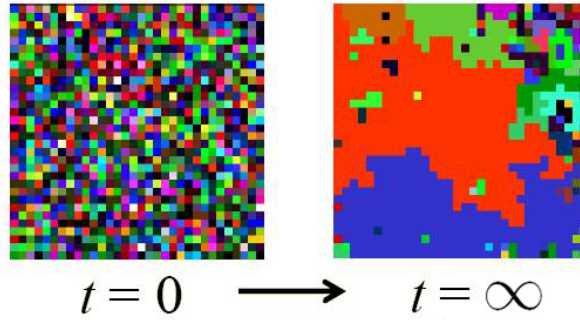


Figura 4.1: Convergencia cultural. Cada color representa una cultura específica. En el estado monocultural todo el sistema tiene la misma cultura o color. En el estado multicultural existen muchas regiones con diferente cultura o color.

4.1.4. Transición de fase en el modelo de Axelrod

En su artículo original, Axelrod reporta que la convergencia de un sistema al estado absorbente ordenado o desordenado, depende tanto del número de atributos culturales como del número de rasgos posibles por atributo [6].

Castellano *et al.* [43] hicieron un análisis numérico detallado con el fin de determinar cómo influyen los valores de los parámetros F y q en la convergencia cultural del modelo de Axelrod, obteniendo resultados interesantes. La naturaleza del estado final del sistema depende de la evolución total de la dinámica, la cual se rige por la competencia entre el desorden de la configuración inicial (q) y el ordenamiento causado por las interacciones sociales locales, llevando el sistema a un estado uniforme o fragmentado según domine la interacción o el desorden respectivamente. Así, dependiendo del grado inicial de desorden (q) el sistema presenta una transición de fase estadística, separando una fase ordenada, caracterizada por el crecimiento de una región cultural dominante que abarca una enorme fracción de todo el sistema, de una desordenada, donde el sistema se encuentra altamente fragmentado en regiones con diferentes culturas. Existe un valor de q crítico (q_c) tal que para valores inferiores ($q < q_c$) la dinámica converge a un estado final homogéneo, $\langle S_{max} \rangle / N \approx 1$ (fase ordenada); mientras que para valores superiores ($q > q_c$) la dinámica converge a un estado final heterogéneo, $\langle S_{max} \rangle / N \approx 0$ (fase desordenada). En particular, se ha mostrado que para redes regulares bidimensionales se observa una transición de fase fuera de equilibrio que se define a medida que el sistema se hace más grande,

obteniéndose en el límite termodinámico un valor preciso de q_c que separa ambas fases. En la Figura 4.2 se puede apreciar dicha transición de fase, la cual es de primer orden, y se define a medida que crece el tamaño del sistema [43, 45].

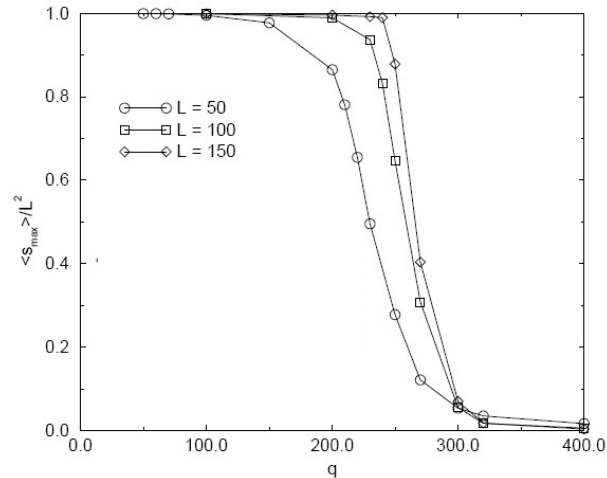


Figura 4.2: Parámetro de control $\langle S_{max} \rangle / N$ en función del parámetro q con $F = 5$ para diferentes valores de $N = L^2$, donde L es el tamaño lateral de la red. Se puede apreciar que la transición de fase se define a medida que N crece.

4.2. Influencia de la topología en el modelo social de Axelrod

En esta sección revisamos algunos trabajos que se han realizado con el fin de determinar cómo influye la forma y estructura de las conexiones de los agentes que conforman el sistema social, sobre la dinámica que es llevada por ellos. Para ello se ha estudiado la relación entre el comportamiento de la dinámica social y la topología de la red utilizada como sustrato de las interacciones.

Axelrod, en el mismo artículo donde propone el modelo cultural, también dedica un estudio a la influencia que tiene el grado de la red (k) sobre la dinámica. Se encuentra que, al expandir la vecindad de los elementos, se favorece la globalización. Esto quiere decir que la transición de fase ocurrirá para valores mayores de q , por lo tanto se requiere mayor grado de desorden inicial para que el sistema alcance un estado desordenado [6].

Por otro lado, Castellano *et al.* [45] estudiaron el modelo de Axelrod en redes regulares unidimensionales, obteniéndose que también en estas redes ocurre una transición de fase. Más adelante, Klemm *et al.* [46] introducen un nuevo parámetro de orden para determinar cómo influye la dimensión de las redes regulares en el comportamiento de dichas transiciones.

Más aún, Klemm *et al.* estudian el papel que juega la topología de algunas redes complejas sobre la transición de fase en el modelo de Axelrod. Buscando cubrir las propiedades topológicas de las redes sociales, en dicho trabajo se consideran varios de los modelos establecidos para redes complejas, con el fin de analizar el efecto que tienen los diferentes aspectos de las topologías en la estudiada dinámica social.

Klemm *et al.* presentaron el modelo de Axelrod sobre redes de pequeño mundo basadas en el modelo WS, y estudiaron el comportamiento de dicho modelo con la variación del parámetro p (recableado). Encontraron que para cualquier valor fijo de $p > 0$ ocurre una transición de fase fuera de equilibrio, donde existe un valor crítico q_c que separa el estado ordenado del desordenado, tal y como en las redes regulares ($p = 0$). En la Figura 4.3-a se muestra la dependencia del parámetro de orden $\langle S_{max} \rangle / N$ con el valor de q , para tres valores diferentes de p . En este estudio también se observa que el valor de q_c se hace más alto a medida que aumenta la cantidad de desorden espacial (p), lo que indica que el número de enlaces de larga distancia ordenan el sistema. Esto puede verse claramente en el diagrama de fase (p, q) de la Figura 4.3-b. Adicionalmente, se encuentra que $Q_c(p) = q_c(p) - q_c(p = 0)$ sigue una ley de potencia $Q_c \propto p^{0,39}$ (línea punteada en el interior de la Figura 4.3-b). Como resultado cualitativo, se tiene que la conectividad de pequeño mundo favorece los estados ordenados (globalización) en la dinámica de Axelrod [47].

Klemm *et al.* también estudiaron a dinámica de Axelrod en redes libres de escala basadas en el modelo BA. Sobre estas redes, el modelo presenta una transición de fase orden-desorden. En la Figura 4.4-a se muestra la dependencia del parámetro de orden S_{max}/N con el valor de q , donde para un rango de valores alrededor de q_c la dinámica converge, bien sea a un estado monocultural o multicultural, obteniéndose un valor intermedio para el promedio sobre varias realizaciones ($\langle S_{max}/N \rangle$). En la Figura 4.4-b se observa cómo cambia el comportamiento de la transición para varios tamaños del sistema. Se puede apreciar que el cambio de fase ocurre para mayores valores de q a medida que el sistema se hace más grande. Para cada valor

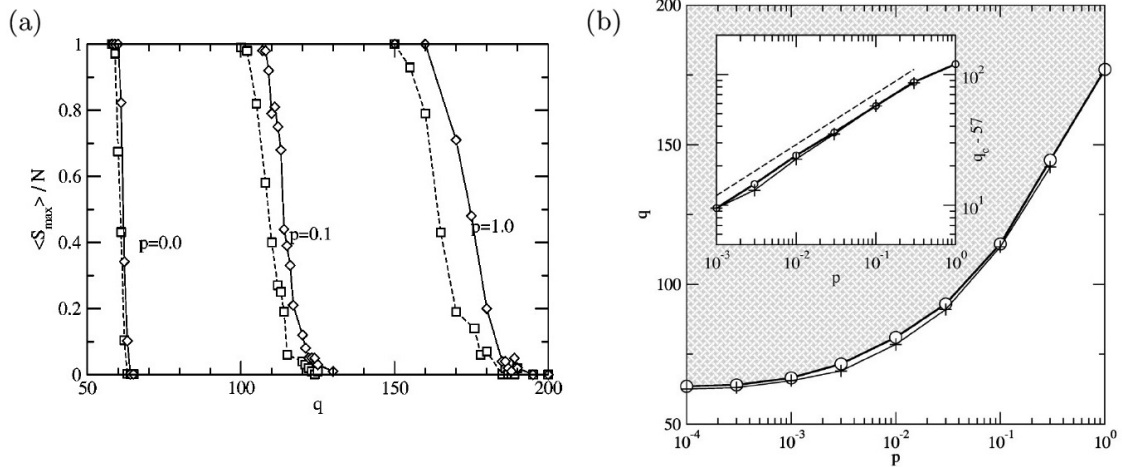


Figura 4.3: (a) $\langle S_{max} \rangle / N$ en función de q ($F = 10$) en redes de pequeño mundo con $p = 0, 0, 1, 1, 0$ para dos tamaños diferentes del sistema: $N = 500$ (cuadrados), $N = 1000$ (diamantes). (b) Punto crítico q_c en función del parámetro p . El área sobre la curva (sombreada) representa la fase desordenada, y por debajo de la curva (blanca) la fase ordenada. Fuente: [47]

fijo N se obtiene el valor crítico $q_c(N)$ (el valor de q donde la desviación estándar de la distribución de S_{max}/N alcanza su máximo), y se encuentra nuevamente una ley de potencia $q_c \propto N^\beta$, con $\beta = 0,39$. Usando este resultado, se puede observar en la Figura 4.4-c, cómo rescalando con $q N^{0,39}$, los datos colapsan sobre una misma gráfica. Esto indica que, en el límite termodinámico, la transición fuera de equilibrio de las redes libres de escala desaparece y el estado monocultural se establece en el sistema. Este fenómeno puede ser asociado a los hubs, que al poseer un gran número de enlaces, esparcen sus atributos culturales en gran parte del sistema, ayudando así a establecer el orden en él. Al aumentar N , incrementa el número de hubs y también sus respectivos grados [47].

Por último, *Klemm et al.* estudiaron la dinámica de Axelrod sobre redes libres de escala estructuradas, basadas en el modelo propuesto por *Klemm et al.* en Ref. [27], las cuales comparten características de las redes de pequeño mundo y redes libres de escala. En la Figura 4.5-a se puede apreciar que el modelo presenta un comportamiento diferente del observado para las redes libres de escala tradicionales. En particular, se obtiene que sobre estas redes la transición de fase fuera de equilibrio persiste para N muy grandes. Puede observarse que independientemente del tamaño

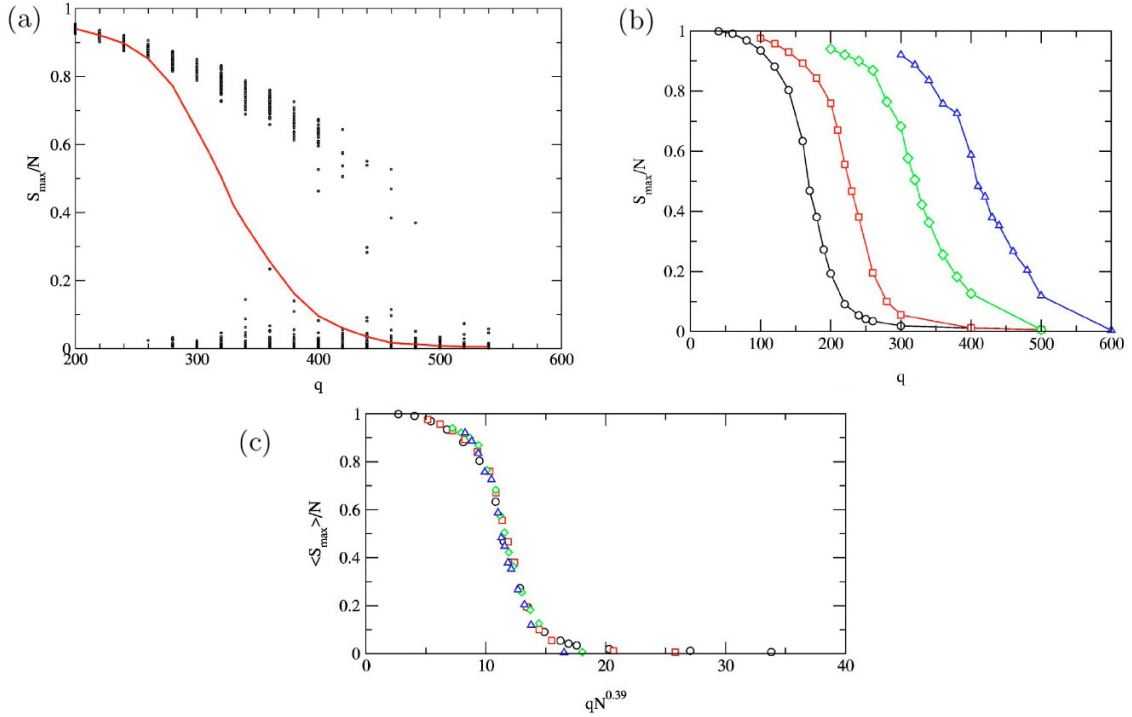


Figura 4.4: (a) S_{max}/N en función de q ($F = 10$) en redes de libres de escala con $N = 5000$. La línea continua muestra el valor medio $\langle S_{max}/N \rangle$. (b) $\langle S_{max}/N \rangle$ para diferentes tamaños del sistema: $N = 1000$ (círculos), $N = 2000$ (cuadrados), $N = 5000$ (diamantes), $N = 10000$ (triángulos). (c) Gráfica rescalada para los diferentes tamaños. Fuente: [47]

del sistema, éste llega a un estado ordenado para valores de $q < 10$. Para valores superiores de q , el parámetro de orden presenta una caída cuya pendiente aumenta con el tamaño del sistema. Esta forma sugiere una transición de fase en $q_c = 10$, existiendo igualmente en el límite termodinámico. Tal comportamiento con el aumento del tamaño del sistema, similar al obtenido sobre redes regulares, se debe a que a grandes escalas, las redes libres de escala estructuradas presentan una topología similar a una red unidimensional [27]. Sin embargo, a diferencia de las redes regulares, en ésta topología el parámetro de orden no tiende directamente a cero, sino que alcanza previamente un plató en un valor finito, indicando un ordenamiento parcial del sistema. Sólo para valores muchos mayores al q crítico, $\langle S_{max}/N \rangle$ rompe con el plató y cae a cero. Para entender este comportamiento es útil relacionar el tamaño de la región cultural más grande en el estado asintótico (S_{max}) con el mayor grado

local presente en la red (k_{max}). Con este análisis se encontró que para los valores de q donde se observa el plató en el parámetro de orden ($50 < q < 200$ aproximadamente), se encuentra que $S_{max} \approx k_{max}$ para la mayoría de las realizaciones. Esto nos dice que el hub mayor (nodo con mayor grado) iguala sus atributos con sus vecinos, de modo que conforman la región cultural más grande del sistema (presente durante el plató). En la Figura 4.5-b se muestran estos resultados para tres valores de q (antes, durante y después del plató). Por último, se espera que el valor del plató decrezca con el tamaño del sistema como $N^{-1+(\gamma-1)^{-1}}$ [47].

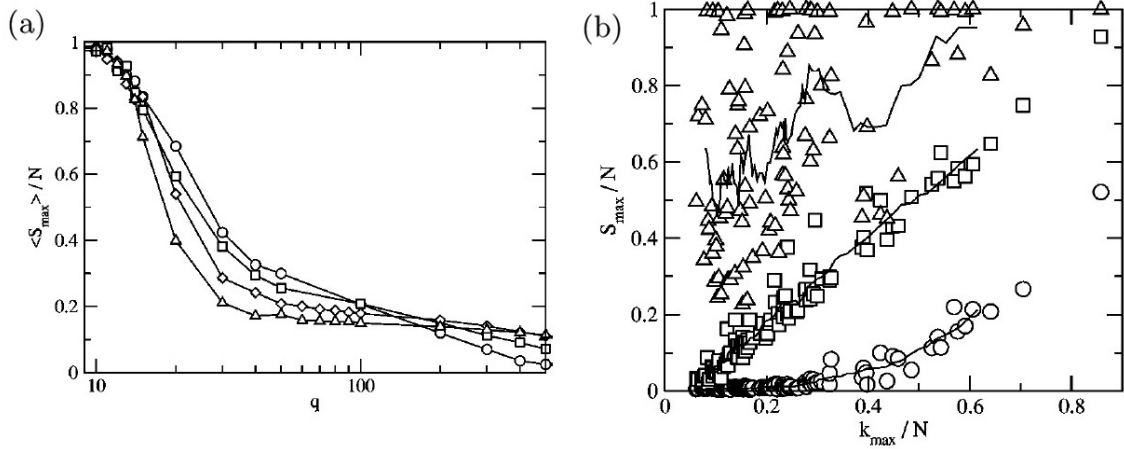


Figura 4.5: (a) S_{max}/N en función de q ($F = 10$) en redes de libres estructuradas para diferentes tamaños del sistema: $N = 1000$ (círculos), $N = 2000$ (cuadrados), $N = 5000$ (diamantes). (b) Relación entre S_{max}/N y k_{max}/N para $q = 20$ (triángulos), $q = 100$ (cuadrados), $q = 500$ (círculos); con $N = 1000$ en los tres casos. Las líneas continuas representan los promedios respectivos. Fuente: [47]

4.3. Modelo de influencia social de Axelrod en redes apolonias

A continuación, como una contribución de esta Tesis, estudiaremos el modelo de Axelrod sobre redes apolonias. Con esto buscamos profundizar el estudio de la influencia que tienen las propiedades topológicas de las redes complejas en el comportamiento de la dinámica de dicho modelo.

En la Figura 4.6-a se muestra que el modelo de Axelrod sobre una red apolonía también presenta una transición de fase fuera de equilibrio (intermedia entre primer y segundo orden) en función del parámetro q .

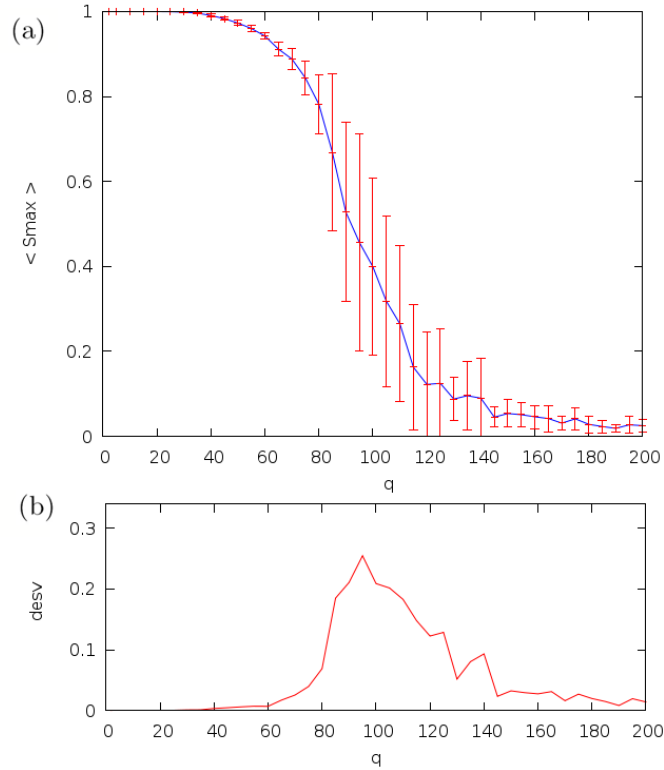


Figura 4.6: (a) $\langle S_{max} \rangle / N$ en función de q ($F = 10$) en redes apolonias con sus respectivos errores. (b) Valor de la desviación estándar para el mismo sistema; el máximo representa en punto crítico q_c . Se grafican 20 realizaciones para cada valor de q , con $N = 9844$ ($L = 7$)

El punto crítico q_c , el cual separa la fase homogénea de la desordenada, se define como el valor de q para el cual el sistema presenta la mayor desviación estándar con respecto al parámetro de orden $\langle S_{max} / N \rangle$. En la Figura 4.6-b se muestra el parámetro de orden de la dinámica acompañado de su error respectivo para algunos valores de q . En 4.6-b se puede apreciar como la desviación estándar alcanza su máximo en q para el valor crítico de la transición.

Para determinar cómo afecta el número de elementos del sistema el comportamiento de la transición, graficamos el parámetro de orden para varios tamaños del sistema N en aumento, tal y como se muestra en la Figura 4.7-a. En dicha gráfica

podemos observar cómo la transición se fase se corre hacia la derecha a medida que incrementa el tamaño del sistema. En otras palabras, el punto crítico de la transición aumenta con el tamaño de la red. Esto puede apreciarse claramente en la Figura 4.7-b. Más aún, q_c escala con N como ley de potencia N^β , con $\beta = 0,2$. De modo, que no existe transición en el límite termodinámico para $N \rightarrow \infty$. Este comportamiento es similar al obtenido por Klemm *et al.* para redes libres de escala con el modelo BA (Figura 4.4). Para valores similares de tamaños N , la transición en la red apolonia ocurre para valores de q_c mucho más bajos que los obtenidos en las redes libres de escala. El valor del exponente β es aproximadamente la mitad que en dichas redes.

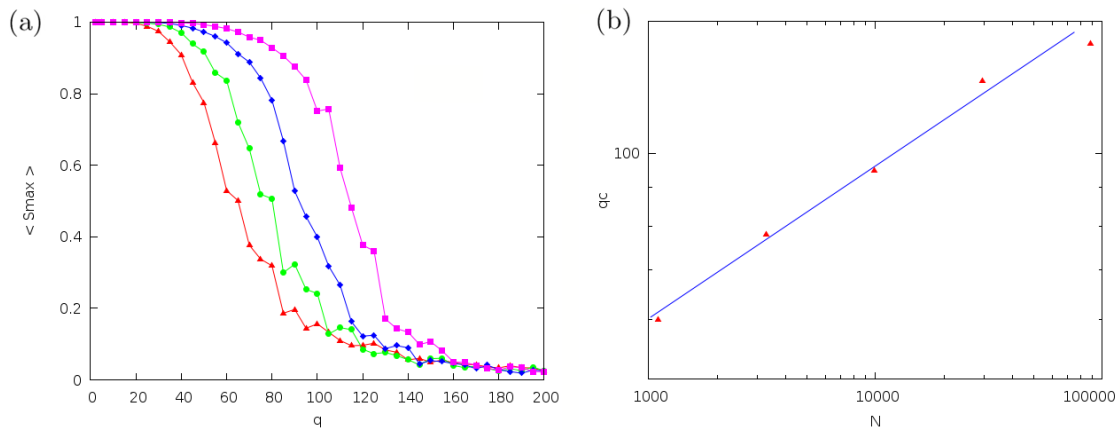


Figura 4.7: (a) $\langle S_{max}/N \rangle$ en función de q ($F = 10$) en redes apolonias para diferentes tamaños del sistema: $N = 1096$ (triángulos), $N = 3283$ (círculos), $N = 9844$ (diamantes), $N = 29527$ (cuadrados). (b) q_c en función de N . En la gráfica log-log la función se ajusta con una recta con exponente $\beta = 0,2$.

Por otro lado, este resultado difiere del obtenido por Klemm *et al.* en redes libres de escala estructuradas (Figura 4.5), las cuales poseen un alto coeficiente de agrupamiento, $C = 5/6 \approx 0,833$, independiente de N . Es a esta última propiedad a la que Klemm *et al.* atribuyen la transición de primer orden que se define mejor al aumentar el tamaño del sistema. Esta característica no se presenta en las redes BA, como tampoco en las redes apolonias, como muestra la Figura 4.7. Las redes BA presentan coeficiente de agrupamiento pequeño. Sin embargo, en el caso de las redes apolonias, éstas poseen un coeficiente de agrupamiento $C = 0,828$, el cual es muy cercano al valor correspondiente a las redes libres de escala estructuradas. Esto nos lleva a la conclusión de que el comportamiento reportado por Klemm *et al.* no puede

ser atribuído solamente al alto coeficiente de agrupamiento de la red subyacente.

Por último, nuestros resultados sugieren que otras propiedades topológicas, como la correlación de grado o fractalidad de la red subyacente, pudieran tener un papel relevante en las propiedades colectivas del modelo de Axelrod.

“The most exciting phrase to hear in science, the one that heralds new discoveries, is not ‘Eureka!’ but ‘That’s funny’...”

Isaac Asimov

Conclusiones

Una contribución práctica del presente trabajo ha sido nuestra revisión actualizada del tema de redes, resaltando las redes complejas. Consideramos que esto puede resultar útil, puesto que no existen en el presente libros de textos destinados al estudio de redes complejas. Nuestro Capítulo de revisión de redes podría servir como una introducción a este importante tema.

En la presente tesis hemos desarrollado un algoritmo propio para la construcción de redes apolonias. Como hemos visto, estas redes han sido objeto de mucha atención recientemente debido a que en ellas coexisten muchas propiedades que se encuentran en otros modelos relevantes de redes complejas y en diversos sistemas reales.

Nuestro algoritmo es conceptualmente simple puesto que se basa naturalmente en las propiedades geométricas y de autosimilaridad de las redes apolonias. Adicionalmente, este algoritmo ha demostrado ser eficiente computacionalmente para generar redes apolonias con altos niveles de construcción. Este algoritmo ha sido implementado con la intención de ser incorporado a la plataforma de computación ISyS, que se ha convertido en la principal herramienta de competitividad de nuestro grupo de investigación en escenarios científicos internacionales.

Como una aplicación de nuestro algoritmo, estudiamos el modelo de influencia social de Axelrod definido sobre redes apolonias. Este modelo ha sido investigado previamente en varias redes complejas, pero no en redes apolonias. Específicamente, hemos estudiado cómo las diversas propiedades topológicas coexistentes en esta red afectan el comportamiento colectivo del modelo de Axelrod.

En particular, hemos encontrado que el punto crítico de la transición de fase en el modelo de Axelrod aumenta con el tamaño de la red apolonia. Este comportamiento es similar al obtenido por Klemm *et al.* para redes libres de escala con el modelo BA, con la diferencia que la transición en la red apolonia ocurre para valores mucho más bajos del punto crítico. Hemos encontrado que el punto crítico escala con el tamaño de la red como una ley de potencia.

Por otro lado, nuestro resultado difiere del obtenido por Klemm *et al.* en redes libres de escala estructuradas, las cuales poseen un alto coeficiente de agrupamiento. Klemm *et al.* atribuyen a esta propiedad el hecho de que la transición de fase de primer orden se define mejor al aumentar el tamaño del sistema. Esta característica no se presenta en las redes BA, como tampoco en las redes apolonias, aún cuando éstas también poseen un coeficiente de agrupamiento alto, cercano al valor correspondiente a las redes libres de escala estructuradas. Esto nos lleva a la conclusión que la existencia de la transición de fase en el límite termodinámico en redes libres de escala no puede ser atribuido solamente al alto coeficiente de agrupamiento de la red subyacente. Nuestro resultado sugiere que otras propiedades topológicas, como la correlación de grado o fractalidad de la red, pudieran tener un papel relevante en las propiedades colectivas del modelo de Axelrod.

Esperamos que el presente trabajo pueda contribuir al avance de futuros estudios de procesos dinámicos sobre redes apolonias.

Bibliografía

- [1] Newman M. E. J., Barabási A.-L., Watts D.J., 2006, “The Structure and Dynamics of Networks”. The Princeton Press.
- [2] Wikipedia, the free encyclopedia - Category: Network Theory. Consultado en Enero 2010 en:
http://en.wikipedia.org/wiki/Network_theory;
http://en.wikipedia.org/wiki/Network_science;
http://en.wikipedia.org/wiki/Average_path_length;
http://en.wikipedia.org/wiki/Clustering_coefficient;
http://en.wikipedia.org/wiki/Complex_network.
- [3] K. Tucci, 2002, “Procesos dinámicos espaciotemporales en redes inhomogéneas”, Tesis de Doctorado en Física Fundamental, Universidad de Los Andes.
- [4] Andrade Jr., J. S., H. J. Herrmann, R. F. S. Andrade, L. R. da Silva, 2005, “Apollonian networks”, Phys. Rev. Lett. 94, 018702.
- [5] Doye, J. P. K. y C. P. Massen, 2005, “Self-similar disk packings as model spatial scale-free networks”, Phys. Rev. E 71, 016128.
- [6] Axelrod Robert, 1997, “The dissemination of culture”, J. Conflict Resolution 41, 203.
- [7] Wikipedia, the free encyclopedia - Category: Graph Theory. Consultado en Enero 2010 en:
[http://en.wikipedia.org/wiki/Graph_\(mathematics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Graph_(mathematics));
http://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_Konigsberg;
http://en.wikipedia.org/wiki/Adjacency_matrix;

- http://en.wikipedia.org/wiki/Adjacency_list;
[http://en.wikipedia.org/wiki/Connectivity_\(graph_theory\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Connectivity_(graph_theory)).
- [8] Newman M. E. J., 2003, "The structure and function of complex networks", SIAM Review 45, 167.
- [9] Dorogovtsev, S. N. y J. F. F. Mendes, 2002, "Evolution of networks", Adv. Phys. 51, 1079.
- [10] Albert, R. y Barabási A.-L., 2002, "Statistical mechanics of complex networks", Rev. Mod. Phys. 74, 47.
- [11] Watts, D. J. y S. H. Strogatz, 1998, "Collective dynamics of "small-world" networks", Nature 393, 440.
- [12] J. L. Herrera D., 2005, "Modelo dinámico de la influencia del entorno en redes sociales de pequeño mundo", Trabajo de grado de Licenciatura, Universidad de Los Andes.
- [13] Newman M. E. J., 2002, "The structure and function of networks", Computer Physics Communications 147, 40.
- [14] Wikipedia, the free encyclopedia - Category: Graph Families. Consultado en Enero 2010 en:
http://en.wikipedia.org/wiki/Regular_graph;
http://en.wikipedia.org/wiki/Complete_graph;
http://en.wikipedia.org/wiki/Cycle_graph;
http://en.wikipedia.org/wiki/Lattice_graph.
- [15] Wikipedia, the free encyclopedia - Category: Trees_(structure). Consultado en Enero 2010 en:
http://en.wikipedia.org/wiki/Tree_structure;
[http://en.wikipedia.org/wiki/Tree_\(data_structure\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Tree_(data_structure));
[http://en.wikipedia.org/wiki/Tree_\(graph_theory\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Tree_(graph_theory)).
- [16] Erdős, P. y A. Rényi, 1959, "On random graphs", Publicationes Mathematicae Debrecen 6, 290.

- [17] S. H. Strogatz, 2001. "Exploring complex networks", *Nature* 410, 268.
- [18] Weisstein, Eric W. "Random Graph" From MathWorld - A Wolfram Web Resource. Consultado en Enero 2010 en: <http://mathworld.wolfram.com/RandomGraph.html>.
- [19] Barabási A.-L., Zoltán Dezsö, Erzsébet Ravasz, Soon-Hyung Yook and Zoltán Oltvai, 2003, "Scale-free and hierarchical structures in complex networks", *AIP Conf. Proc.* 661, 1.
- [20] Park, J. y Newman M. E. J. , 2004, "The statistical mechanics of networks", *Phys. Rev. E* 70, 066117.
- [21] Erzsébet Ravasz y Barabási A.-L., 2003, "Hierarchical organization in complex networks", *Physical Review E* 67, 026112.
- [22] R. Lopez-Ruiz, HL Mancini, X. Calbert, 1995, "A statistical measure of complexity", *Phys. Lett. A* 209, 321.
- [23] Newman M. E. J. y Watts D. J., 1999, "Scaling and percolation in the small-world network model", *Phys. Rev. E* 60, 7332.
- [24] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, J. F. F. Mendes, 2008, "Critical phenomena in complex networks", *Rev. Mod. Phys.* 80, 1275.
- [25] Barabási A.-L. y R. Albert, 1999, "Emergence of scaling in complex networks", *Science* 286, 509.
- [26] Barabási A.-L. y Bonabeau Eric, 2003, "Scale-free networks", *Scientific American* 288, 50.
- [27] K. Klemm y V. M. Eguíluz, 2002, "Highly clustered scale-free networks", *Phys. Rev. E* 65, 036123.
- [28] K. Klemm y V. M. Eguíluz, 2002, "Growing scale-free networks with small-world behavior", *Phys. Rev. E* 65, 057102.
- [29] Zhang Zhongzhi, Rong Lili; Zhou Shuigeng, 2007, "A general geometric growth model for pseudofractal scale-free web", *Physica A* 377, 329

- [30] Barabási A.-L., E. Ravasz, T. Vicsek, 2001, “Deterministic scale-free networks”, *Physica A* 299, 559.
- [31] Dorogovtsev, S. N., A. V. Goltsev, J. F. F. Mendes, 2002, “Pseudofractal scale-free web”, *Phys. Rev. E* 65, 066122.
- [32] Jung, S., S. Kim, y B. Kahng, 2002, “Geometric fractal growth model for scale-free networks”, *Phys. Rev. E* 65, 056101.
- [33] F. Comellas, 2007, “Complex Networks: Deterministic Models”, *Physics and Theoretical Computer Science* , J.-P. Gazeau et al.(Eds.) IOS Press, 275
- [34] M.G. Cosenza, R. Kapral, 1992, “Coupled maps on fractal lattices”, *Phys. Rev. A* 46, 4.
- [35] K. Tucci, M.G. Cosenza, 2004, “Spectral properties and pattern selection in fractal growth networks”, *Physica D* 199, 91.
- [36] C. Song, S. Havlin, H. A. Makse, 2005, “Self-similarity of complex networks”, *Nature* 433, 392.
- [37] Luciano da F. Costa, Francisco A. Rodrigues, Gonzalo Travieso, P. R. Villas Boas, 2007, “Characterization of complex networks: A survey of measurements”, *Adv. Phys.* 56, 167.
- [38] C. Song, S. Havlin, H. A. Makse, 2006, “Origins of fractality in the growth of complex networks”, *Nature Physics* 2, 275.
- [39] K.-I. Goh, G. Salvi, B. Kahng, D. Kim, 2006, “Skeleton and Fractal Scaling in Complex Networks”, *Phys. Rev. Lett.* 96, 018701.
- [40] R.F.S. Andrade, J.G.V. Miranda, 2005, “Spectral properties of the Apollonian network”, *Physica A* 356, 1.
- [41] Zhongzhi Zhang, Francesc Comellas, Guillaume Fertin, André Raspaud, Lili Rong and Shuigeng Zhou, 2008, “Vertex labeling and routing in expanded apollonian networks”, *J. Phys. A: Math. Theor.* 41 035004.

- [42] M. G. Cosenza, K. Tucci, 2001, “Pattern formation on trees”, *Phys. Rev. E* 64, 026208.
- [43] C. Castellano, M. Marsili, A. Vespignani, 2000, “Nonequilibrium phase transition in a model for social influence”, *Phys. Rev. Lett.* 85, 3536.
- [44] J. C. Gonzalez-Avella, 2003, “Efecto de la propaganda en un modelo dinámico espaciotemporal de influencia cultural”, Trabajo especial de grado de la Licenciatura, Universidad de Los Andes.
- [45] D. Vilone, A. Vespignani, C. Castellano, 2002, “Ordering phase transition in the one-dimensional Axelrod model”, *Eur. Phys. J. B* 30, 399.
- [46] K. Klemm, V.M. Eguíluz, R. Toral, M. SanMiguel, 2003, “Role of dimensionality in Axelrod’s model for the dissemination of culture”, *Physica A* 327, 1.
- [47] K. Klemm, V.M. Eguíluz, R. Toral, M. San Miguel, 2003, “Nonequilibrium transitions in complex networks: A model of social interaction”, *Phys. Rev. E* 67, 026120.