MODELO DE INTERCAMBIO ECONÓMICO EN UNA SOCIEDAD ESTRATIFICADA CON INTERACCIONES LOCALES

(A model of economic exchange in a stratified society with local interactions)

J. L. Herrera,[1] M. G. Cosenza,[2] K. Tucci[3]

[1] *Escuela Básica, Facultad de Ingeniería, Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela*

[2] *Centro de Física Fundamental, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela*

[3] *SUMA-CeSiMo, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela*

Correo Electrónico: jherrera@ula.ve

RESUMEN

Se investiga un modelo de agentes económicos interactivos en una sociedad estratificada en la que se introduce la noción de conectividad local. Los agentes se ubican en una red donde las interacciones ocurren entre agentes conectados, solamente si éstos pertenecen a un mismo estrato económico. Un estrato se define a través de un parámetro que mide la diferencia máxima de riqueza entre agentes requerida para interaccionar. Las propiedades colectivas del sistema se caracterizan mediante el coeficiente de Gini, que describe el grado de desigualdad en la distribución de riqueza en el sistema, y mediante un novedoso parámetro de orden, que denominamos la actividad, y el cual mide el promedio de la riqueza total intercambiada en el tiempo.

Palabras Clave: Econofísica, Redes complejas, Coeficiente de Gini.

ABSTRACT

A model of interacting economic agents in a stratified society is investigated when the notion of local connectivity is introduced. The agents are placed on a network where interactions between connected agents occur if they belong to the same economic stratum. A stratum is defined through a parameter that measures the maximum difference in wealth that agents may have in order to interact. The collective properties of the system are characterized by the Gini coefficient, that measures the degree of inequality in the wealth distribution in the system, as well as by a novel parameter, called the activity, that measures the average wealth exchanged in time.

Key Words: Econophysics, Complex networks, Gini coefficient.

Recibido: 03/07/2008
Abrobado: 18/02/2009
Versión Final: 15/03/2009

INTRODUCCIÓN.

Desde su aparición en tiempos recientes, la Econofísica [Mantegna y Stanley 2000] ha utilizado diversos métodos de Física Estadística para resolver problemas de Economía y Finanzas. En la mayoría de los modelos de intercambio económico propuestos, se ha considerado la aleatoriedad de las interacciones entre agentes como un ingrediente esencial [Yakovenko 2008, Chakrabarti et al. 2006, Chatterjee y Chakrabarti 2007]. En este marco conceptual, los agentes económicos se comportan como un gas clásico, sin noción de localidad espacial.

Por otro lado, una característica común en muchos procesos donde se intercambian recursos es la presencia de rangos o bandas para la ocurrencia de interacción entre agentes de un sistema. En sistemas económicos o sociales, estos rangos para la ocurrencia de interacción se identifican con el concepto de clases o estratos. En este contexto, un modelo interesante de intercambio de riquezas en una sociedad estratificada fué propuesto recientemente por Laguna et. al [Laguna et al. 2005]. Este modelo muestra que, para ciertos valores de parámetros, desaparece la clase media, es decir, la población de agentes que poseen riquezas intermedias. Las interacciones solamente tienen lugar entre agentes que pertenecen a una misma clase económica, pero al igual que otros modelos econofísicos, éste también supone que la interacción ocurre aleatoriamente entre cualquier par de agentes en el sistema. Desde el punto de vista topológico, este tipo de interacción de largo alcance corresponde a una red de conectividad global, donde cada elemento está conectado con todos los elementos del sistema.

A partir de la década de los 90's, el descubrimiento de la ubicuidad de las redes de pequeño mundo por Watts y Strogatz [Watts y Strogatz 1998], desató mucho interés en el estudio de la red de conectividad subyacente en una variedad de sistemas complejos en distintos contextos, incluyendo sistemas sociales y económicos. En el presente trabajo, investigamos la influencia de la topología de conectividad en las propiedades colectivas y estadísticas de un modelo de intercambio económico estratificado en el cual introducimos la noción de conectividad topológica local. Mediante la variación de un parámetro que mide el tamaño del entorno local, se obtiene como caso límite el modelo de Laguna et. al. [Laguna et al. 2005].

MODELO.

Consideramos una población de N agentes económicos interactivos, ubicados en los nodos de una red unidimensional con condiciones de borde periódicas, donde cada agente está conectado con k vecinos, como se muestra en Figura 1.

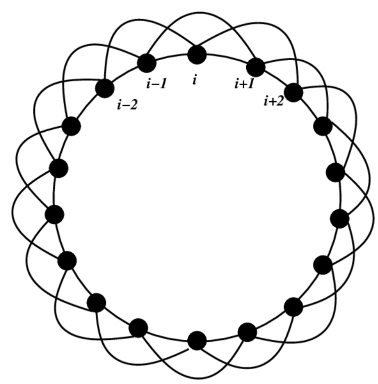

Figura 1. Red unidimensional con condiciones de borde periódicas y $k = 4$ vecinos por agente.

Cada agente i ($i = 1, \ldots, N$) está caracterizado por una riqueza $w_i(t)$ en el tiempo t y un factor de aversión al riesgo β_i. La riqueza $w_i(t)$ puede cambiar como consecuencia de las interacciones. Supondremos, por simplicidad, que β_i se mantiene fijo para cada agente i durante todo el proceso. Se escojen como condiciones iniciales para ambas variables distribuciones uniformes $w_i \in [0, 1]$, $\beta_i \in [0, 1]$. La cantidad $[1 - \beta_i]$ mide el porcentaje de riqueza que el agente i está dispuesto a arriesgar en sus interacciones con los demás agentes. La dinámica de interacción en un instante t se describe con el siguiente algoritmo iterativo:

1) Escoja aleatoriamente un agente i.

2) Escoja aleatoriamente un agente j que pertenezca a la vecindad del agente i.

3) Verifique si se cumple la relación

$$|w_i(t) - w_j(t)| < u \tag{1}$$

Repita **1** y **2** hasta que se cumpla la condición **3**.

4) Calcule la cantidad de riqueza a intercambiar dw, definida como

$$dw = \min[(1 - \beta_i)w_i(t); (1 - \beta_j)w_j(t)] \tag{2}$$

5) Asigne con probabilidad p la cantidad dw al agente con menor riqueza entre i y j, y con probabilidad $(1-p)$ asigne esa cantidad al agente con mayor riqueza de ambos; donde p es

$$p = \frac{1}{2} + f \times \frac{|w_i(t) - w_j(t)|}{w_i(t) + w_j(t)}. \tag{3}$$

El parámetro u mide el ancho del estrato o clase económica. Para que dos agentes puedan interaccionar, su diferencia de riqueza no debe ser mayor que u, es decir, deben pertenecer al mismo estrato. Aqui asumimos que los diferentes estratos tienen el mismo ancho u. El parámetro f representa la intervención de un ente externo (por ejemplo, el estado) que regula todas las interacciones con el fin de redistribuir la riqueza en el sistema, y se expresa como la probabilidad de favorecer a los agentes de menores recursos en las transacciones, definida en el rango $f \in [0, 1/2]$. El valor $f = 0$ corresponde a igual probabilidad para ambos agentes y $f = 1/2$ representa la máxima probabilidad de favorecer al agente con menor riqueza.

Para caracterizar el comportamiento colectivo del sistema para varios valores de sus parámetros, utilizaremos diversas cantidades. En primer lugar, empleamos el coeficiente de Gini, definido como,

$$G = \frac{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |w_i - w_j|}{2N^2\mu}, \tag{4}$$

donde μ es la riqueza promedio del sistema. El coeficiente de Gini expresa el grado de desigualdad en la distribución de riqueza en el sistema. Una distribución equitativa de riqueza, donde todos tienen la misma riqueza, corresponde a un valor de $G = 0$. El otro extremo, donde un solo agente posee toda la riqueza del sistema, tiene un valor de $G = 1$.

Para caracterizar la evolución colectiva del sistema, calculamos la cantidad promedio de riqueza intercambiada en el sistema en cada iteración, la cual denominamos "actividad" del sistema, y definimos como

$$A = \frac{1}{T - \tau} \sum_{t=\tau}^{T} dw_t, \tag{5}$$

donde T es el tiempo de simulación (suficientemente largo) y τ es el número de iteraciones transientes que se desprecian para asegurarse que el sistema se encuentra en un estado asintótico.

También calculamos la distribución de probablidad de riqueza en el sistema para varios valores de parámetros; esto es, la probabilidad $P(w)$ de encontrar un valor de riqueza w entre los agentes del sistema.

RESULTADOS

Todos los resultados que se presentan corresponden a un promedio de 10 realizaciones con condiciones iniciales diferentes y a estados asintóticos con $T = 10^8$.

La Figura 2 muestra los valores del coeficiente de Gini G en el estado asintótico del sistema en el espacio de parámetros (u, f), con $k = 4$.

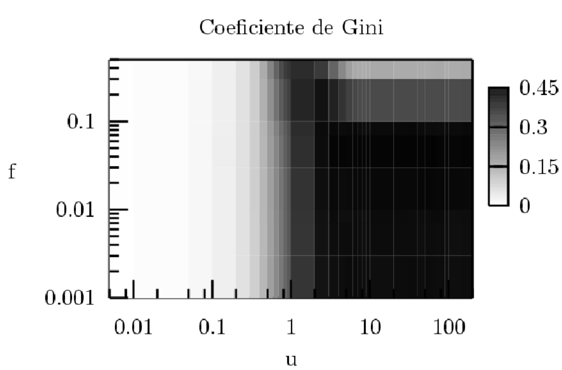

Figura 2. Coeficiente de Gini G en el espacio de parámetros (u, f), con $k = 4$, en el estado asintótico. La escala de grises a la derecha indica el valor de G.

Para valores pequeños del ancho del estrato u, se observa en la Figura 2 que $G \approx 0$, independientemente del valor de f. Este valor de G se debe a la relativamente escasa interacción que se presenta en el sistema, ya que cuando $u \to 0$, son muy pocos los agentes que pueden interaccionar y, al hacerlo, su diferencia de riqueza sobrepasa el umbral u rápidamente, alcanzando el estado asintóticos con una distribución de riqueza similar a la inicial.

En la región donde $u \in [0.1, 3]$, el coeficiente de Gini G comienza a cambiar. Para $0.1 < u < 1$, independientemente de f, G aumenta, debido al aumento del umbral. Cuando u alcanza el valor crítico de $u \approx 1$, G alcanza un valor máximo de $G \approx 0.45$. Cabe destacar que estos valores máximos de G son comparables a aquellos encontrados en datos reales de varios países. En esta región, ya que todos los agentes pueden interaccionar en las primeras iteraciones, sólo unos pocos de ellos son capaces de obtener una riqueza lo suficientemente grande, con lo que quedan económicamente aislados de sus vecinos más cercanos. Como consecuencia de esto, G aumenta dando lugar a una distribución de riqueza bastante desigual en el estado asintótico del sistema. En estas dos regiones se observa que f no juega un papel importante en la dinámica del sistema.

Para $u > 3$ se observan dos regiones claramente diferenciadas. Para $f < 0.1$, G conserva su valor máximo. Cuando la probabilidad f de favorecer al agente con menor riqueza es pequeña, los agentes más ricos del sistema pueden mantener su riqueza y, de esa manera, el sistema mantiene un valor de G grande. Este comportamiento de G cambia al aumentar f. Una mayor probabilidad de favorecer al agente más pobre permite que los recursos del sistema sean mejor redistribuidos, lo que se manifiesta en un disminución del valor de G.

Para visualizar la evolución de la riqueza en el sistema, calculamos la actividad A en función de los parámetros u y f en el estado asintótico, lo cual se muestra en la Figura 3.

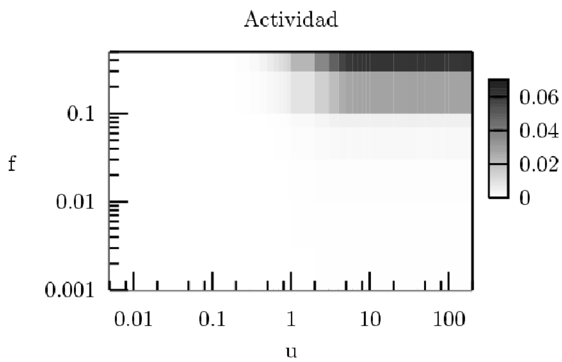

Figura 3. Actividad del sistema A en el espacio de parámetros (u, f), con $k = 4$. La escala de grises a la derecha indica el valor de A.

La Figura 3 muestra que A aumenta en forma considerable cuando tanto f como u poseen valores altos, lo que corresponde con valores de G pequeños. Es decir, una distribución equitativa de riqueza está asociada a una alta actividad de intercambio de riqueza en el sistema.

En la región $u < 1$, independientemente de f, tenemos $A = 0$. Esto nos dice que en el estado asintótico del sistema no se realiza ningún intercambio de riqueza entre los elementos. Aunque en este caso la distribución de riqueza es equitativa (Figura 2), los elementos sólo pueden realizar estos intercambios en las primeras iteraciones de la dinámica.

Para $u > 1$ y valores de f pequeños, la actividad del sistema en el estado asintótico cesa, ya que valores de u altos permiten a algunos elementos del sistema adquirir y mantener riquezas bastante altas y, sin una influencia considerable de f, no existe una redistribución equitativa de recursos en el sistema. Para $f > 0.1$, el comportamiento en el sistema cambia, permitiendo que, aún en el estado asintótico ocurran interacciones. Al aumentar u y f, los recursos del sistema son repartidos de manera equitativa, como se observa en el comportamiento de G (Figura 2).

Otra manera de estudiar las propiedades del estado colectivo asintótico del sistema corresponde al cálculo de la distribución probabilidad de riqueza para diversos valores de parámetros, como se muestra en la Figura 4.

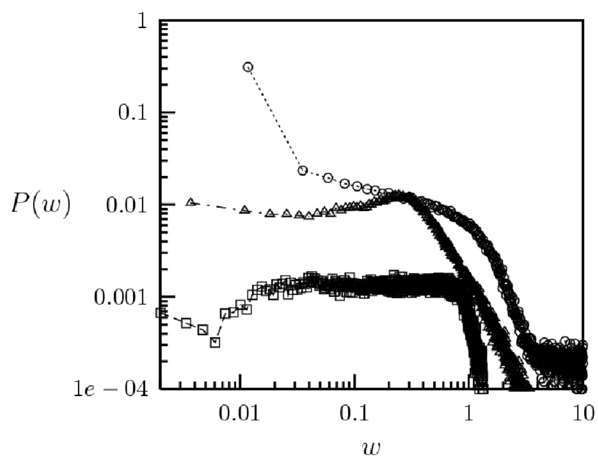

Figura 4. Distribución de riqueza en el estado asintótico para diferentes valores de parámetros, con $k = 4$ fijo. $u = 0.005$, $f = 0.1$ (cuadrados); $u = 10$, $f = 0.1$ (círculos); $u = 100$, $f = 0.5$ (triángulos).

Al comparar los resultados obtenidos en la Figura 4 con los de la Figura 2, se observa una concordancia en estos resultados. Para valores de u y f pequeños (cuadrados), la distribución de riqueza $P(w)$ en el sistema se mantiene casi uniforme como consecuencia de la poca actividad en el sistema. Al aumentar estos parámetros, $P(w)$ se muestra menos uniforme (círculos). Se observa que unos pocos agentes adquieren la mayor cantidad de riqueza en el sistema, mientras que hay un número considerable de agentes que quedan con riqueza casi nula. Para valores grandes de los parámetros (triángulos), $P(w)$ adquiere una forma más uniforme, lo que también se muestra en la Figura 2.

Para otros valores de parámetros, se puede observar que $P(w)$ cambia abruptamente de forma, como se muestra en la Figura 5.

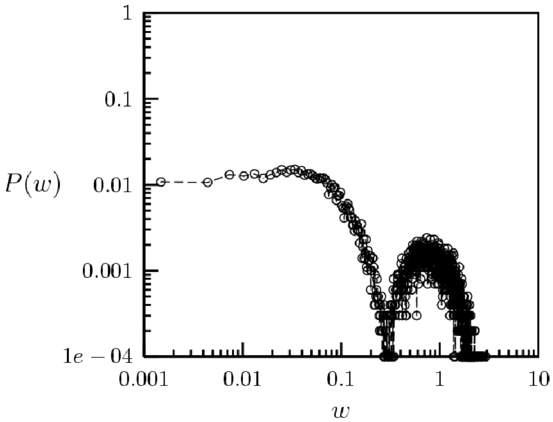

Figura 5. Distribución de riqueza del sistema, con $k = 4$ fijo, para $u = 0.3$, $f = 0.5$.

La Figura 5 indica que los elementos con menos riqueza del sistema (valores de w pequeños) tienen una distribución casi uniforme. Sin embargo, los agentes con mayor riqueza tiene aproximadamente la misma riqueza lo que se muestra con una distribución tipo gaussiana, con una dispersión pequeña. Esto sucede porque los agentes que se hacen más ricos absorben la riqueza de su entorno. Debido a que las interacciones son locales, no hay intercambio entre estos agentes, por lo que ellos mantienen practicamente la misma riqueza en el tiempo. Esta distribución de probabilidad para los agentes con mayor riqueza cambia al aumentar el número de vecinos conectados o alcance de la interacción k, como se ve en la Figura 6. Para los valores de parámetros de la Figura 6 se obtiene un valor del coeficiente de Gini de $G \approx 0.7$.

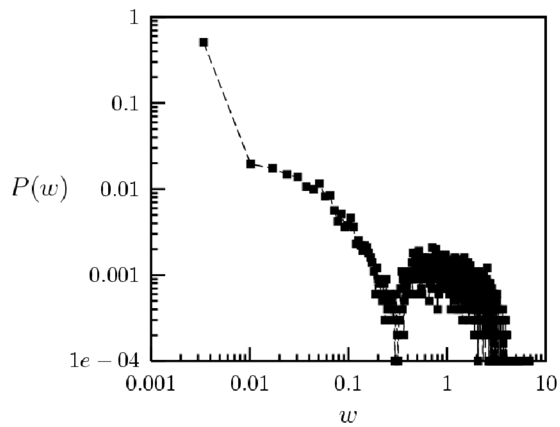

Figura 6. Distribución de riqueza del sistema. $k = 16$, $u = 0.3$, $f = 0.1$.

Al aumentar k, pueden existir conexiones entre los agentes más ricos del sistema, por lo que éstos pueden intercambiar riqueza. Esto conduce a que la distribución de riqueza en este rango de w se realice de manera no equitativa, lo que se evidencia en la formación de una ley de potencia para valores grandes de w. En el límite de valores grandes del número de vecinos k, tenemos una red con acoplamiento global, donde cada agente puede tener interacción con todos los demás agentes en el sistema, lo que corresponde al modelo de Laguna et al. [Laguna et al. 2005]. En ese límite, nuestros resultados concuerdan con aquellos del modelo de Laguna et al.

CONCLUSIONES.

La introducción de la topología de conectividad en modelos de intercambio económico tiene efectos importantes, ya que permite la obtención de coeficientes de Gini comparables a los de sociedades reales que son del orden de $G \approx 0.6$ [Chatterjee et al. 2005]. Hemos introducido el concepto de actividad como un nuevo parámetro de orden para caracterizar la evolución colectiva de un sistema de agentes económicos.

Hemos encontrado que, tanto la actividad del sistema como distribuciones equitativas de riqueza, correspondientes a valores bajos de G, pueden lograrse mediante un aumento de la probabilidad f de favorecer a los agentes con menor riqueza en el sistema y mediante una ampliación del estrato o clase ecońomica para las interacciones posibles. En sociedades reales, se puede lograr a través de mejores políticas de redistribución de los impuestos.

Nuestros resultados revelan que la aparición de una ley de potencia en las distribuciones de probabilidad correspondientes a regiones de riquezas altas está relacionada con la capacidad que tienen los elementos más ricos del sistema de interaccionar entre ellos.

AGRADECIMIENTOS

J.L. Herrera agradece el apoyo del Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico y Tecnológico de la Universidad de Los Andes, Mérida, mediante el proyecto No. I-1108-08-05-B, y de la Misión Ciencia del FONACIT.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[Chakrabarti et al. 2006] CHAKRABARTI, B. K., CHAKRABORTI, A., CHATTERJEE, A., Econophysics and Sociophysics, Wiley-VCH, Berlin, 2006.

[Chatterjee y Chakrabarti 2007] CHATTERJEE, A y CHAKRABARTI, B. K., Kinetic exchange models for income and wealth distributions, Eur. Phys. J. B 60, 135-149, 2007.

[Chatterjee et al. 2005] CHATTERJEE, A., YARLAGADDA, S., y CHAKRABARTI, B. K. (Eds.), Econophysics of Wealth Distributions, Springer Verlag, Milan, 2005.

[Laguna et al. 2005] LAGUNA, M. F., RISAU-GUSMAN, S., y IGLESIAS, J. R., Economic exchanges in a stratified society: End of the middle class?, Physica A 356, 107-113, 2005.

[Mantegna y Stanley 2000] MANTEGNA, R. N. y STANLEY, H. E., An Introduction to Econophysics, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[Watts y Strogatz 1998] WATTS, D. J. y STROGATZ, S. H., Collective dynamics of small-world networks, Nature (London) 393, 440, 1998.

[Yakovenko 2008] YAKOVENKO, V. M., preprint arXiv:0709.3662, en Encyclopedia of Complexity and System Science, Springer, 2009.